Smertelig Enkelt:

Studie med fokus på elevenes utfordringer som manifesterer seg gjennom rasjonelle feil ved konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner av lineære funksjoner

NATALIE JAKOBSEN

VEILEDER
Claire Vaugelade Berg

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne studien er et avsluttende kapittel på to år med masterstudier ved Universitetet i Agder, Kristiansand, et universitet med både faglig og menneskelig engasjement i studenter som enkeltindivider, et universitet med sjel og dyp omtanke for prinsipper som skal ligge til grunn for en utdanningsinstitusjon.
Disse to år, som i enkelte perioder ble opplevd som uendelig lange og i andre utilstrekkelig korte, oftest som begge deler samtidig og alt ettersom hva disse perioder hadde å by på, åpnet opp for mange perspektiver.
Innledningsvis var studiene en oppstart av ukentlig pendling mellom Øst- og Sørlandet, og som følge av det to bosteder, jobb og studier, tiden borte fra familien, har denne toårig periode påvirket ikke bare mitt, men også flere sin hverdag og liv. Uansett hvor lange eller korte disse to år var for meg, hadde de ringvirkning på hele min familie, fordi de har bestått i mange timer med arbeid, verken fysisk eller mental, i perioder, tilstedeværelse og endring av rutiner. Likevel har dette kapittelet i mitt liv resultert i mange refleksjoner, betraktninger og overveielser, men ikke minst en enorm mengde med kunnskap. Derfor vil jeg gjerne takke alle som har gjort dette mulig.

Jeg vil først takke min arbeidsgiver og arbeidsplass som gjorde det hele mulig og alle mennesker visse hender min søknad om videreutdanning vært gjennom.

Mange hjertelige takk går også til elever og deres lærere som stilte åpenhjertelig opp i denne studien og gjorde den mulig. Elever, som lot meg få lov til å gå inn i dybden av deres aller helligste og private, deres tanker og analysere dem, tusen takk!

Mange takk til min veileder Claire Vaugelade Berg for mange timer med hyggelige og faglige samtaler, gode og konstruktive tilbakemeldinger og faglige innspill. Med det sagt, vil jeg takke også for at du fikk meg til å lese Duval.

Tusen takk til min mor, for all støtte og mange gode ord og som sammen med hele min familie hadde alltid tro på mine akademiske anlegg, og for den uendelige troen at jeg klarer det.

Uendelig mange hjertelige takk går til min sønn for all forståelse for omstendigheter som disse to år måtte medførte og enorme mengder med tålmodighet som ble utvist, som et barn i utgangspunktet burde aldri blitt bedt om og som for et barn burde ikke vært mulig.
Like fullt og holdent er jeg takknemlig til min mann, for den enorme tålmodigheten, forståelsen og støtten jeg fikk gjennom disse år. Tusen takk for den urokkelige troen på at jeg klarer det, som til tider har vært mitt eneste håp og takk for bidrag i form av hjelp og bistand når jeg trengte det mest!

Avslutningsvis og som en oppsummering av dette både krevende, men på mange flere måter utrolig givende kapittelet i livet, refereres en kort og lattermild samtale mellom min mann og meg som historisk sett funnet sted i løpet av disse to korte lange år:

Min mann: Det blir opptøyer i Paris i natt.
Meg: Trist at jeg aner ikke hva som skjer i verden for tiden, har ikke lest avisene i det siste.
Min mann: Ja, ja, du får oppdatere deg når du får tid.
Jeg kan gi deg hightlights, kjære, tredje verdenskrig er snart over.

Abstract

"... a person often meets the challenge of solving a new mathematical problem state by creating rule-based but erroneous algorithms that lead to rational errors. These erroneous algorithms are the problem solver's attempt to create a reasonable solution in a relatively short period of time with minimal computational cost. In essence, the person's efforts are directed toward interpreting and adapting to the mathematical environment in much the same way that he or she would adapt to a social or physical environment." (Ben-Zeev, 1998, s.378-379)

Coordination between different representations in mathematics, as in this study referred to as conversion, is considered an important and essential skill through which pupils will develop reasoning and understanding of mathematical ideas. The only way to represent mathematical ideas or objects is by using the mathematical language, seen from the perspective of the complexity of the mathematical language, this is by no means a trivial process.

With this as a basis, this study examines the conversion between different semiotic representations of linear functions as a mathematical object. Semiotic representations in mathematics are important communists and are the only entrance to the mastery and conceptualization of mathematical ideas, and are thus a foundation of understanding, whether it is conceptual or preserved or both. These are again essential for the construction of mathematical competences and thus the depth of learning in mathematics.

This leads to three questions that underlie and to be illuminated in this study. The main question concerns challenges that pupils face in conversion between different semiotic representations.

The complexity of processes that lie in conversion between semiotic representations of the same mathematical object bottoms in the syntax and semantics of the mathematical language.

Representations of linear functions as a mathematical object have different origins depending on the type of representation that is manipulated and rules that determine how this representation can be manipulated. Therefore, in order to answer this question, it becomes necessary to look at the errors produced by different conversions. Considering the fact that only by looking at errors and providing these labels is not enough to say anything about the challenges of students and with regard to it, this study seeks for possible explanations of or precursors to the failures that occur, and therefore takes the aim to E for possible sources of error.

For as it stands in the opening quotation errors produced in mathematics often appear to be rule-based but erroneous algorithms, and the rationality of it is that humans adapt to the mathematical environment in the same way they would do so socially.

By analyzing students ' written work and interviews based on their answers to the conversion between different representations of linear functions and focusing on challenges that are being proved by mistake, this study should provide possible explanations of where these Problems come from and the challenges students have.

Triangulation as a method used in the study gives it a design that can be considered a hybrid between comparative and partly experimental study, with a theoretical basis that has its weight in cognitive theory and focusing on individual learning and how it can be understood.

The study's findings should be seen as didactic implications of this understanding from challenges that students face and distinctive mistakes, they manifest themselves through.

Abstrakt

> *"... a person often meets the challenge of solving a new mathematical problem state by creating rule-based but erroneous algorithms that lead to rational errors. These erroneous algorithms are the problem solver's attempt to create a reasonable solution in a relatively short period of time with minimal computational cost. In essence, the person's efforts are directed toward interpreting and adapting to the mathematical environment in much the same way that he or she would adapt to a social or physical environment."* (Ben-Zeev, 1998, s.378-379)

Koordinering mellom ulike representasjoner i matematikk, som i denne studien omtales som konvertering, er ansett som en viktig og essensiell ferdighet gjennom hvilket elever skal utvikle resonnement og forståelse for matematiske idéer. Eneste måten å representere matematiske idéer eller objekter på er ved bruk av det matematiske språket, sett fra perspektivet til kompleksiteten i det matematiske språket er dette på ingen måte en triviell prosess.
Med dette som grunnlag undersøker denne studien konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner av lineære funksjoner som et matematisk objekt. Semiotiske representasjoner i matematikk er viktige kommuniserende midler og er eneste entré til mestring og konseptualisering av matematiske idéer, og er dermed et fundament til forståelse, om det er konseptuell eller prosedural eller begge. Disse er igjen avgjørende for konstruksjon av matematiske kompetanser og således dybdelæring i matematikk.
Dette fører videre til tre spørsmål som ligger til grunn for og som skal belyses i denne studien. Hovedspørsmålet angår utfordringer som elever møter i konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner. Kompleksiteten til prosesser som ligger i konvertering mellom semiotiske representasjoner av samme matematiske objekt bunner i syntaksen og semantikken til det matematiske språket. Representasjoner av lineære funksjoner som et matematiske objekt, har ulik opprinnelse avhengig av type representasjon som manipuleres og regler som bestemmer hvordan denne representasjonen kan bli manipulert. Derfor, for å kunne besvare dette spørsmålet, blir det nødvendig å se på hvilke feil som produseres ved ulike konverteringer. Tatt i betraktning faktumet at kun ved å se på feil og gi disse merkelapper, er ikke nok til å kunne si noe om elevers utfordringer og med høyde for det, søker denne studien etter mulige forklaringer på eller forløpere til de feil som forekommer, og derfor tar siktet til å se etter mulige kilder for feil. For slik det står i åpningssitatet feil som produseres i matematikk viser seg ofte til å være regel-baserte men feilaktige algoritmer, og rasjonaliteten i det er at mennesker tilpasser seg det matematiske miljøet på akkurat samme måte som de ville gjort det sosialt.
Ved å analysere elevers skriftlige arbeid og intervju basert på deres besvarelser i konvertering mellom ulike representasjoner av lineære funksjoner, og med fokus på utfordringer som viser seg gjennom feil, skal denne studien gi mulige forklaringer på hvor disse feil kommer fra og hvilke utfordringer elever har.
Triangulering som metode brukt i studien gir den en design som kan fortone seg som et hybrid mellom komparativ og til dels eksperimentell studie, med et teoretisk grunnlag som har sin tyngde i kognitiv teori og med fokus på individers læring og hvordan den kan forstås.
Studiens funn bør bli sett på som didaktiske implikasjoner av denne forståelsen utfra utfordringer som elever møter og karakteristiske feil de manifesterer seg gjennom.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

Fag og all undervisning i skolen skal overholde de kompetansemål og retningslinjer som foreligger i læreplaner. Innholdet i skolen er i ferd med å bli endret. Skolen står i farvann av fagfornyelse og nye læreplaner. I pressemelding Nr. 132-18 sier kunnskaps- og integreringsminister Jan Tore Sanner: «*Vi fornyer fagene og gir elevene rom for å lære mer og lære bedre. Vi gir også skolen et verdiløft. Det vil forberede elevene bedre for livet etter skolen og for fremtidens arbeidsliv. … De nye læreplanene vil gi mer tid for elever og lærere til å gå i dybden.*» (Regjeringen.no, 2018)
Matematikk er blant de fag som skal få nye læreplaner som i noen av matematikkfagene trer i kraft allerede fra høsten 2020. Med de nye fagfornyelsene kommer det inn nytt begrep som kalles ***kjerneelementer*** og ble fastsatt av Kunnskapsdepartementet 26. Juni 2018. Kjerneelementene gis en viktig betydning og omtales som det viktigste og mest sentrale som skal læres av elevene i hvert fag, og omfatter kompetanser som skal være med på å utvikle elevers ferdigheter i å «*finne løsninger, vurdere og argumentere for egne ideer og kommunisere med matematiske symboler og matematisk språk*». (Udir, 2019)
For å få elevene til å utvikle matematiske kompetanser er kjerneelementene fastsatt til å være: utforskning og problemløsning, modellering og anvendelser, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering og matematiske kunnskapsområder. (Udir, 2019) Disse elementene skal etter de beste intensjoner legge til rette for dybdelæring i matematikk og framtidens skole generelt. Dybdelæring som begrep og viktig prinsipp for de nye læreplaner i matematikk figurerer ofte i både høringsutkastene og regjeringsuttalelser, der kjerneelementene skal være grunnpilarer som skal både understøtte, underbygge og gi rom for dybdelæring. Det blir derfor relevant å undersøke essensielle bestanddeler i matematisk aktivitet og resonnement.
Delkapittel 1.2 skal gi innsikt i formål til og forskningsspørsmål til denne studien.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Forskning i matematikkundervisning har to viktige formål, det ene er forskning i ren grunnleggende vitenskap for å forstå matematisk tenking, undervisning og læring, det andre har anvendende formål som omhandler bruk av forståelsen av tenking, undervisning og læring for å forbedre undervisningen. Disse to formål et tett sammenvevd, der den første er like viktig som den andre av en enkel grunn: «*uten dyp forståelse for tenking, undervisning og læring, ingen vedvarende fremgang på den anvendte siden er mulig.*» (Schoenfeld, 2000, s.641, fritt oversatt, lagt i kursiv)
Matematikk er et komplekst fag og ofte oppleves av elever som utfordrende, og akkurat hva som gjør den til utfordrende fag for den enkelte, er ikke alltid lett å peke ut. Men det faktumet er at bruk av det naturlige språket, symbolikken, grafiske fremstillinger i matematikk kan oppleves som unaturlig og utilgjengelig fordi de beskriver matematiske idéer som er abstrakte, kan være en grunn. Likevel skal disse abstrakte matematiske idéer læres og forstås dypt og inngående.
Det som viser seg til å være karakteristisk i matematisk aktivitet og de underliggende kognitive prosesser er den semiotiske komponenten. (Iori, 2017, s.276) Semiotiske representasjoner i matematikk generelt, og for denne studien spesifikt i forståelse av lineære funksjoner spiller en viktig rolle. (Janvier, 1987; Duval, 2006) Ikke minst er det essensielt for lærere å være bevist denne viktige rollen til semiotiske representasjoner. (Berg, 2013)
Følgelig er formålet med denne studien er å undersøke elevers bruk og utfordringer med ulike semiotiske representasjoner av lineære funksjoner. Dermed blir det aktuelt å undersøke:

1) Hvilke utfordringer møter elevene ved konvertering mellom ulike representasjoner av lineære funksjoner?

Utfordringer manifesterer seg gjennom feil i en matematisk aktivitet, derfor ved å analysere:

2) Hvilke typer feil disse utfordringer viser seg gjennom og
3) Hva kan være mulige kilder til disse typer feil?

Denne studien skal forsøke å gi svar på hvilke utfordringer har elever ved konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner som viser seg gjennom feil og mulig forklare hvor disse feil kommer fra. Neste delkapittel har som formål å presentere strukturen i denne rapporten, dette for å gi en kort oversikt over oppbygningen og underliggende motiver for den.

1.3 Struktur

Neste kapittel som er kapittel 2 som tar for seg teori og er bygget opp på følgende måte ved å starte med å beskrive hva en matematisk kompetanse er, bevege seg videre til det som bygger opp matematisk kompetanse, nemlig dybdelæring, som igjen består av prosedural og konseptuell kunnskap for å gi en beskrivelse av dem. Videre gjennom å belyse fundamentale komponenter i matematisk kunnskap, belyser kapittelet kompleksiteten i det matematiske språket, og typer feil som kan oppstå som følge av det. Lineære funksjoner blir det sagt om til slutt.
Kapittel 3 ved å gi en beskrivelse av forskningsdesign, og beskriver deltager utvalget videre, forskningsmetode som er brukt til innsamling av datamaterialet og metoder brukt til analyse til analyse av det belyses etter det. Videre blir oppgaveheftet presentert, før det vises til koding av besvarelser. Relabilitet og validitet diskuteres videre, før etiske betraktninger legges fram.
Kapittel 4 tar for seg analyse av datamaterialet i to hoved deler, analyse av skriftlige besvarelser og analyse av intervju.
I kapittel 5 diskuteres resultater, før didaktiske refleksjoner og implikasjoner presenteres i kapittel 6 som er det siste kapittelet i denne studien.
Neste kapittel som det ble nettopp beskrevet belyser teoretisk perspektiv i denne studien.

2. Teori

2.1 Matematisk kompetanse sett fra et overordnet perspektiv

Kjerneelementene, slik de er navngitt, er til å finne hos flere teoretikere og forskere som delkompetanser av det som utgjør den generelle matematiske kompetanse. “Matematisk kompetanse har de siste tiårene blitt et sentralt begrep når det gjelder å systematisere og analysere hva det vil si å være god eller flink i matematikk.” (Botten, 2016, s. 59)
Disse kompetansene blir omtalt som matematiske ferdigheter av Kilpatrick m. fl. (2002) og som matematiske kompetanser hos Niss m. fl. (KOM-prosjektet, 2000-2002)
Hos Kilpatrick (2002) blir ferdighetene visualisert ved hjelp av fem tett sammenflettede tråder som illustrerer de fem ferdighetene som begrepsforståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement.
Det danske KOM-prosjektet (Kompetanser og matematikklæring), et analytisk utviklingsprosjekt som ble gjennomført mellom 2000 og 2002 og behandler åtte kompetanser som er delt i to hovedkategorier eller overordnede kompetanseområder, å kunne spørre og svare i og med matematikk som utgjør de fire første kompetansene: matematisk tenking, problemhåndterings-, modellerings- og resoneringskompetanse, og kunne håndtere matematisk språk og redskaper som omfatter de fire resterende kompetanser, nemlig: hjelpemiddelkompetanse, kommunikasjons-, symbol- og formalisme- og representasjonskompetanse.(Niss et al., 2002) Disse blir vidt beskrevet og eksemplifisert.
Kjerneelementer som omfattes av lineære funksjoners spenn, representasjon og kommunikasjon, modellering og anvendelser, generalisering og matematiske kunnskapsområder, resonering og argumentasjon, utforskning og problemløsning, alt ut fra innfallsvinkel, kan arbeid med lineære funksjoner plasseres inn under begge overordnede kompetanseområder fra KOM-prosjektet. Kunne håndtere matematisk språk er likevel en hovedkategori som dekker de mest grunnleggende, for konvertering mellom semiotiske representasjoner av lineære funksjoner, og dermed av størst relevans for denne studien matematiske kompetanser og disse er: symbol-, formalisme- og representasjonskompetanse.
Hva disse kompetanser implisitt omfatter sett fra det matematiske språkets kompleksitet vil bli belyst om i kapittel 2.3. Her gis det kun kort beskrivelse av de tre overnevnte kompetanser.

Symbol- og formalismekompetanse sies av Niss m.fl. (2002) til å bestå i å kunne avkode symbol- og formelspråk, oversette fram og tilbake mellom symbolspråk og naturlig språk, å kunne behandle og benytte seg av symbolholdige uttrykk, deriblant formler.
Representasjonskompetanse handler om å kunne forstå, med det mener Niss m.fl. (2002) å kunne avkode, fortolke skjelne mellom og benytte seg av ulike typer representasjoner av matematiske objekter og fenomener, derunder symbolske, algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, tabeller, diagrammer og verbale. (Niss et al., 2002, s.56-58)
For å fremme dybdelæring i matematikk og større forståelse i faget, skal det legges vekt på mer arbeid med metoder og tenkemåter. Begreper, tenkemåter, metoder, kunnskapsområder, uttrykksformer og det viktigste innholdet i faget skal omfattes av kjerneelementene for å utvikle en helhetlig og robust forståelse. (Udir, 2019) Norske styringsdokumenter understrekker sterk forbindelse mellom kompetanse og dybdelæring. (Fauskanger & Bjuland, 2018)

2.1.1 Konseptuell og prosedural forståelse

Forskning på dybdelæring som konsept spores tilbake helt til 1970-tallet til Universitetet i Gøteborg i Sverige.(Rillero, 2016, s.15) To ulike læringsstiler for Dybdelæring beskrives av Rillero (2016) som en læringsstil der konseptene blir brukt i virkelige situasjoner eller det stilles spørsmål til konklusjoner, hvor det diskuteres og reflekteres over konsepter, mens overflatelæring kjennetegnes av bruk av hukommelse, mekanisk repetisjon av det som skal læres der informasjon aksepteres uten øvrige spørsmål.
Diskusjoner om prosedural og konseptuell forståelse har lang historie innen matematikkundervisning, hvor læring med forståelse brukes som parallell til dybdelæring. Det forbindes med at elever må ha solid fundament i faktakunnskap, siden kjennskap til fakta er viktig komponent for å kunne memorere i anordning for å tenke og løse problemer, men ny kunnskap må konstrueres fra eksisterende kunnskap og elever må være aktive og ta kontroll over deres egen læring. Prosedural forståelse brukes av noen parallelt med instrumental forståelse, mens konseptuell forståelse knyttes med begrepet relasjonell forståelse. Likevel kombinasjon av innøvde faktakunnskap og forståelse er ansett til sammen å gi det som kalles høykvalitetsresultater. Forbindelsen mellom memorerte fakta og forståelse relateres til meningsfull repetisjon. Dermed relateres konsepter dybdelæring og overflatelæring like mye til prosedural som konseptuell forståelse. (Fauskanger & Bjuland, 2018, s.150-151)
Rittle-Johnson og Schneider (2015) definerer konseptuell og prosedural forståelse, som de kaller konseptuell og prosedural kunnskap etter Star (2005). Hvor konseptuell kunnskap er karakterisert som kunnskap som er dyp og med rike interaksjoner eller forbindelser og ikke bare karakterisert som hvilke konsepter en vet, men hvordan konsepter vites om, mens prosedural forståelse er ikke bare forbundet med det som en vet (kjennskap til prosedyrer) men også til måter prosedyrer eller algoritmer kan vites om, overfladisk og uten forbindelser. (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, s.1119-1121)
Dermed blir det gjort forskjell ikke bare mellom disse to begrepene, men også innen dem.
Neste delkapittel vil belyse fundamentale komponenter i kompetanse og forståelse som ble oppsummert i de to foregående delkapitler 2.1 og 2.2.

2.2 Fundamentale komponenter i matematisk kompetanse og forståelse

Hvis matematikkopplæring ikke skal ha som mål å gi elever ferdige verktøy, men å utvikle deres generelle evne til resonnement, visualisering og analyse er spørsmålet om kunnskapsoppbygging og kilder til elevers vanskeligheter og utfordringer meget sentralt. (Duval, 2006) Duval retter oppmerksomhet på at fokus på at direkte observasjon av feil som systematisk dukker opp fra år til år er alene ikke nok for å forstå elevers problemer i forståelse av matematikken. Han mener at det må graves til dypere vanskeligheter for å kunne analysere elevers problemer. Når en gjør det, «*står en overfor svært dype og fantastiske fenomener til kognitiv kompleksitet som ligger i å konvertere, i ethvert emnet av matematikk.*» (Duval, 2006, s. 121, fritt oversatt)

I dette delkapittelet blir det belyst prosesser som kreves i arbeid med matematikk og mer direkte med lineære funksjoner, sett fra både matematikkens spesifikke art og lineære funksjoners mangfoldige representasjonsformer. Fordi omfanget som konvertering mellom representasjoner utgjør alene og dens signifikante betydning for utvikling av matematisk kompetanse er hovedfokus for mange forskere (Janvier, 1987; Leinhardt et al., 1990; Hitt, 1998; Duval, 2006; Gagatsis, 2010; Bossé et al., 2011; Adu-Gyamfi et al., 2012)

2.2.1 Representasjoner i matematikk

"*Even from a pedagological point of view, most tekstbooks today make use of a wide (if not wild) variety of diagrams and pictures ment to promote understanding. Everyone certainly agrees that the the use of symbolism in mathematical thinking is fundamental.*
However, particular uses of symbolism appear generally to be overlooked, namely, the translation processes." (Janvier, 1987, s.27, lagt I kursiv)
I 1987 Claude Janvier på grunnlag av tidligere forskningens søk etter fundamentale komponenter i matematisk kompetanse, som i litteraturen beskrives som viktig inventar med avgjørende rolle for områder innen matematikk, men likevel på dette tidspunktet får en indirekte omtale og derfor vanskelig til å peke ut, skriver om oversettelsesprosesser. Janvier retter oppmerksomhet mot spesielle bruksområder av symbolikken i matematikk, som av ham beskrives som forsømt på daværende tidspunkt, nemlig oversettelse. Med oversettelse menes da en psykologisk prosess i å gå fra en modus til representasjon til en annen, for eksempel fra likning til graf. (Janvier, 1987) I denne oppgaven vil det som betegnes i forskningslitteraturen som oversettelse, translasjon, omforming bli brukt begrep konvertering, dette for å ikke forvirre med mangfoldet av ord og begreper som betegner det samme psykologiske prosessen.
Janviers interesse i denne prosessen ble stimulert av et forskningsprosjekt som håndterte tolkning av kartesiske grafer som representerte situasjoner allerede i 1978. Ved å begrense representasjonsmoduser til fire, verbal beskrivelse, verditabell, graf og formel, kunne han beskrive konverteringsprosesser mellom de ulike slik de framkommer i Tabell 2.1 under (på neste side).

Tabell 2.1 Janvier (1987) Tilført graden av kompleksitet til konverteringer av Bossé et al. (2011)

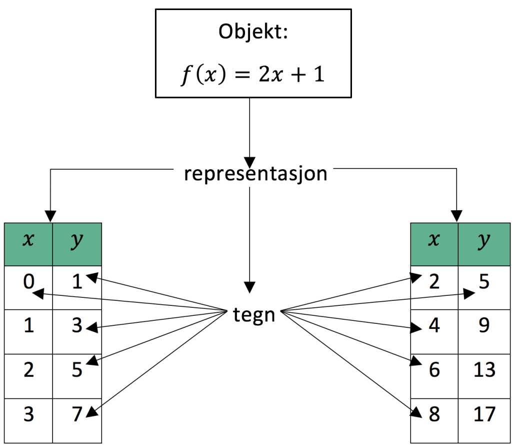
Til Fra	**Situasjon, verbalbeskrivelse**	**Verditabell**	**Graf**	**Algebraisk uttrykk (symbolsk)**
Situasjon, verbalbeskrivelse		Måling/ nøyaktig betraktning *Global aktivitet*	Skissering *Global aktivitet*	Modellering *Global aktivitet*
Verditabell	Lesing *Global aktivitet*		Plotting *Lokal aktivitet*	Tilpassing *Global aktivitet*
Graf	Tolkning *Global aktivitet*	Avlesning *Lokal aktivitet*		Kurvetilpassing *Global aktivitet*
Algebraisk uttrykk (symbolsk)	Parameter- gjenkjennelse *Global aktivitet*	Beregning *Lokal aktivitet*	Skissering *Lokal aktivitet*	

Feltene i diagonalen er ikke fylt ut men prosesser blir omtalt som transposisjoner. Videre skriver Janvier at noen av konverteringsprosesser mellom ulike representasjonsformer vil være enten direkte eller indirekte som for eksempel konvertering mellom tabell til algebraisk uttrykk vil ofte bli gjennomført via graf, mens fra algebraisk uttrykk til graf vil konverteringen gå via tabell. For å kunne gå direkte og uten overgangsrepresentasjoner, må en kunne se kilde-representasjon fra mål-representasjonens perspektiv. En graf for eksempel må undersøkes ut fra kunnskap om likning og med hensyn til egenskaper til en likning. Dermed blir inverse prosesser av konverteringer, som i

tabellen er plassert symmetrisk med hensyn til diagonalen, meget viktige i forhold til hverandre og konverteringsprosesser utvikles best i symmetriske par. (Janvier, 1987, s. 28)
Janviers (1987) fokus på psykologiske prosesser som involveres i overgang fra en representasjon til en annen har påkalt interesse for mye av forskning konsentrert rundt representasjoner i matematikk og tilgangen til matematiske objekter representert ved hjelp av dem og det matematiske språket i senere tid. (Leinhardt et al., 1990) Blant de mange forskere og deres på hver sin måte verdifulle bidrag ut fra deres syn på læring, enten det er sosiokulturelt, konstruktivistisk eller kognitive perspektiver, finner vi Duval som i perioden mellom 1990-tallet og ut i 2000-tallet utviklet en teori om registre av semiotiske representasjoner, forkortet TRSR, som bygger på kognitiv analyse av individuell utvikling av matematisk kompetanse, og presenteres videre i denne oppgaven.

2.2.2 Semiotiske representasjoner

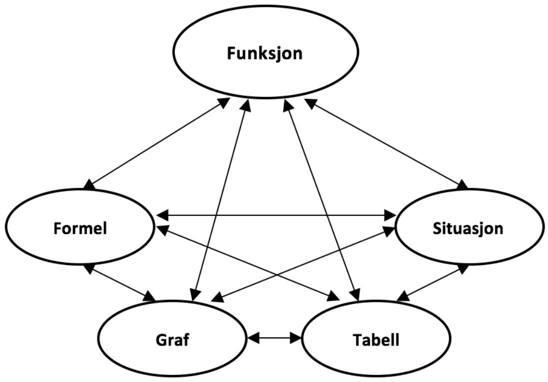
Matematiske objekter slik som tall, funksjoner, vektorer og så videre beskrives av Duval (2006) som kunnskapsobjekter. Ulikt andre vitenskapsområder som kjemi, biologi, fysikk, astronomi der kunnskapsobjekter er fenomener og er tilgjengelig for læring gjennom observasjon, sansing eller ved hjelp av instrumenter som mikroskoper, måleinstrumenter, teleskoper, er ikke matematiske objekter tilgjengelig ved en dobbel aksess. Matematiske kunnskapsobjekter har bare en måte å få tilgang til matematiske objekter, nemlig ved bruk av tegn og semiotiske representasjoner. (Duval, 2006) «*.., det er ingen andre måter å få tilgang til matematiske objekter enn å produsere noen semiotiske representasjoner. I andre felt av vitenskap, semiotiske representasjoner er bilder eller beskrivelser av noen fenomener i den virkelige eksterne verden, som vi kan få en perseptuell og instrumentell tilgang til uten disse representasjonene. I matematikk er dette ikke tilfelle.*» (Duval, 1999, s. 4, fritt oversatt)
Duval (2006) på denne måten klassifiserer matematikk som et fag der kognitiv bruk av tegn forandrer seg radikalt fra andre vitenskapsområder, som igjen gjør matematikk til særegen art. Dette forklarer Duval (2017) med at tilgangen til objekter kan være direkte – multisensorisk, gjennom perseptuelle felt, det som kan oppfattes med sanser. Tilgangen til objekter kan også være indirekte – monosensorisk der oppfatningen av fenomener skjer gjennom instrumenter, som for eksempel teleskop. Duval (2017) henviser til at den semiotiske revolusjonen var et samtidsfenomen av den vitenskapelige revolusjonen som startet med Galileo og, på den ene siden det første teleskopet, på den andre siden Galileos substitusjon av de målte verdiene for de kvalitativt sensoriske observasjoner i eksperimenter på fallende legemer. (Duval, 2017, s. 10)
For å gi en bedre innsikt i hva Duval (2006) mener med tegn og semiotiske representasjoner gis det et eksempel under i forbindelse med tegn og representasjon av lineær funksjon og illustreres ved hjelp av to tabeller som begge representerer det samme matematiske objektet.



Figur 2.0-1 Tegn, representasjon, matematisk objekt

På figur 2.1 illustreres det at avhengig av valg av tegn, vil representasjonen av det samme objektet endre utseende.
Siden matematiske konsepter (objekter) er abstrakte av naturen, representasjoner er en inngangsport til deres mening. Tegn, ord, symboler er midler som matematiske objekter kommuniseres gjennom. Likevel kan ikke en type representasjon beskrive et matematisk objekt i sin helhet, derfor bruk av ulike semiotiske representasjoner er det som gir praktisk mulighet til å innhente de fordeler som hver representasjonsform stiller til disposisjon. Med andre ord ulike semiotiske representasjoner (SR) gir fortrinn i forståelse av objekter framfor bruk av kun enkelte representasjoner og fremmer konseptuell forståelse i matematikk. (Chang et al., 2015, s.1476)

Til relevans for denne studien, har Berg (2013)[1] et godt eksempel på en visuell framstilling av begrepet funksjon som matematisk objekt og de fire semiotiske representasjoner for dette objektet, dette vises på Figur 2.2.



Figur 2.0-2 Berg (2013) (oversatt fra engelsk)

Denne figuren viser et klart skille mellom det matematiske objektet og dets representasjoner som er formell, graf, verditabell og situasjon. Den viser også tydelig de semiotiske representasjoners avhengighet av et organisert system av tegn som symbolsk notasjon, kartesiske grafer, numerisk notasjon og det naturlige språket. Og på denne måten forklarer hvorfor matematisk kompetanse er forskjellig fra alle andre typer kompetanser.
Duval (2006) sier at semiotiske representasjonenes rolle begrenses ikke til å betegne objekter, være noe som refererer til noe annet, eller selv bli betraktet som et objekt. Hvordan en kan bruke semiotiske representasjoner og hvilke matematiske transformasjoner som kan utføres på dem, bestemmes av selve representasjonen. Alle semiotiske representasjoner kan skifte form til en annen semiotisk representasjon uten en forsyning av ekstra informasjon. (Duval, 2006, s.109)
Semiotiske representasjoner i matematikk er formet ved bruk av tegn som hører til systemer med egne betydninger og regler og struktureres ved hjelp av: 1) det naturlige språket, 2) ikoniske representasjoner som tegninger og ikke-ikoniske som geometriske former, 3) numeriske og algebraiske symboler og 4) diagrammer og grafer. Og defineres av Duval (2006) som et sett av elementer (tegn) som sammen med systematiseringsregler gjør det mulig å utføre forsettlige operasjoner og kombinere eller gruppere elementene i viktige enheter (verditabell). Dessuten skal det være mulig å erstatte tegn i en representasjon med andre tegn, eksempel på dette er vist på side ... (tabeller og tegn) Tegn og representasjoner må ikke forveksles med selve objektet som er representert, fordi tegn kan variere, men likevel referere til det samme matematiske objekt. Lite eller ingen variasjon av tegn i SR resulterer i at ikke alle semiotiske systemer verdsettes til å være like viktig, noe som fører til at betydningen av dem reduseres som igjen begrenser utvikling av kunnskap. (Duval, 2017)
Disse systemer organiseres videre i det Duval (2006, 2017) kaller multi-funksjonelle og mono-funksjonelle semiotiske registre som enten er diskursive eller ikke-diskursive.
Duvals (2006) klassifikasjon av registre som mobiliseres i matematiske prosesser er vist i Tabell 2.2, men til formål for denne studien noe forenklet.

Tabell 2.2: (Duval, 2006) Kognitiv modell av matematiske tankeprosesser (oversatt og forenklet)

	Representasjoner med tre DISKURSIVE OPERASJONER: 1. *Denotasjon av objekter* 2. *Påstand av relasjoner eller egenskaper* 3. *Slutning / antagelse (deduksjon, beregning)*	IKKE-DISKURSIVE representasjoner (formkonfigurasjoner)
MULTI-FUNKSJONELLE REGISTRE: Prosesser KAN IKKE bli til algoritmer	NATURLIG SPRÅK: to ikke ekvivalente modaliteter for uttrykk • MUNTLIGE forklaringer • SKREVNE (visuelle): *teoremer, bevis*	IKONISKE: Tegning, mønster IKKE-IKONISKE: Geometriske figurer
	Overgang med HJELPE-representasjoner *Ingen kombinasjonsregler (fri støtte)*	
MONO-FUNKSJONELLE REGISTRE: De fleste prosesser er algoritmer	SYMBOLSKE SYSTEMER ***Bare skriftlig: umulig å fortelle muntlig på en annen måte enn å stave*** *Beregninger, symbolmanipulasjon*	D2 KOMBINASJONER *Grafer*

[1] Fraksjonering av det matematiske objektet "funksjon" fra dets semiotiske representasjoner

Halliday i 1978 definerte begrepet matematisk register som: «et *sett av betydninger som er tilpasset en bestemt språkfunksjon, sammen med ord og strukturer som uttrykker disse betydninger. Vi kan referere til ´matematikkregister´ i forstand av betydninger som tilhører det matematiske språket (den matematiske bruken av det naturlige språket, det vi si: ikke matematikk i seg selv), og det et språk må uttrykke hvis det er brukt til matematisk formål.*» (Halliday sitert i Edmonds-Wathen et al., 2016, s. 26, fritt oversatt)

Bruken av det naturlige språket i matematikk legges stor vekt på av Duval (2017), hvor viktigheten til å ikke redusere det til kun kommunikasjonsmiddel men også som første register for tankevirksomhet. (Duval, 2017) Forståelse av problemstillinger, for eksempel vil være å avkode informasjon som ble kodet inn i ord. Derfor avkodings- og kodingskompetanser vil være knyttet til tankevirksomhet, kognitiv tankefunksjon. (Duval, 2017, s.50)

Duval fremhever «*there are no noesis without semiosis*», sagt med andre ord ingen matematisk tenkning uten transformasjoner av semiotiske representasjoner, uansett hva de er (Duval, 2017)

Beskrivelse av tegn, semiotiske representasjoner, semiotiske systemer og semiotiske registre innføres av Duval (2006, 2017) for å introdusere to typer transformasjoner av semiotiske representasjoner, dette for å skille mellom to ulike typer matematiske aktiviteter, nemlig behandling og konvertering. Behandling er en prosess innenfor samme semiotiske system og konvertering av semantiske representasjoner er en prosess som skjer mellom ulike semiotiske systemer eller registre. Konvertering er en transformasjon som innebærer «overgang» fra et register til et annet uten å endre den semantiske meningen til objektet.

Altså, behandling og konvertering respektivt refererer til de syntaktiske aspekter og de semantiske aspekter ved algebra. De syntaktiske aspekter relateres til bruk av algoritmer eller bestemte manipulasjonsregler og forankres i symbolmanipulering, mens de semantiske aspekter er tett knyttet til meningen som gis symboler og uttrykk og dermed utvikling av bevissthet på den betydningen som ligger til grunn for symboler, uttrykk, figurer eller andre typer grafiske fremstillinger. (Berg, 2013, s.4)

Det Janvier (1987) kaller transposisjon handlinger i diagonalen i tabellen, blir derfor en del av det Duval (2006, 2017) kaller behandling, da transposisjoner er prosesser som foregår innen samme semiotiske system.

Behandling og konvertering er to forskjellige kognitive prosesser, som av Duval (2006) beskrives som to ulike kilder til tilbakevendende vanskeligheter med ufullstendig oppfatning av matematikk hos elever.

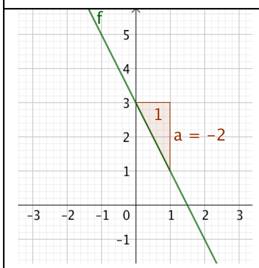
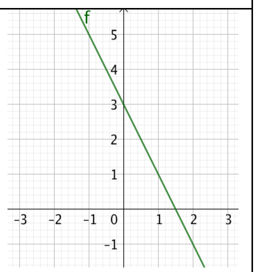
Disse to aktiviteter er av ulik kompleksitet, og konverteringen sies til å ha mye høyere kompleksitetsgrad fordi konvertering forutsetter flere prosesser under transformasjonen. Den krever først og fremst gjenkjennelse av det samme matematiske objektet, ikke bare i det semiotiske systemet objektet er representert i, men også i det semiotiske systemet som det matematiske objektet skal transformeres til. Dermed kan utfordringer ved konvertering oppstå av to grunner, en i forhold til at representasjonen i kilderegisteret ikke har samme kontekst som målregister og en annen utfordring ligger i behandling som kan bli kompleks ved bruk av registeret til det naturlige språket og de registre som tillater visualisering. (Duval, 2006)

Dette skjer fordi, i følge Duval (2006), konvertering involverer flere kognitive aktiviteter og det nevnes tre av dem. Disse tre kognitive aktiviteter som blir relatert til konvertering mellom ulike representasjoner er å gjenkjenne objektet som blir representert og dessuten gjenkjenne objektets meningsfulle enheter, utføre transformasjoner som er nødvendig og samtidig bevare det semantiske innholdet og den siste involverer å kunne se hva og hvordan målrepresentasjonen synliggjør av meningsenheter. (Duval, 2006) Nærmere forklaring og eksempler, slik det er forstått, gis under.

Den første av aktivitetene innebærer at en skjelner en ansamling av meningsenheter som kan identifiseres i representasjonen av et objekt, med andre ord det skapes først og fremst en mental representasjon av det som er representert, derfor betydningen av det naturlige språket framheves også. Et eksempel på mental representasjon her og det som menes av Duval (2006) kan være at noen har en forestilling om at skjæringspunktet med x-aksen gir stigningstallet, $a = (x, 0)$, vil det være vanskelig å utføre neste aktivitet.

Den andre aktiviteten forutsetter at alle transformasjoner skal skje med hensyn til regler som er typiske for dette spesifikke systemet, slik at den semantiske meningen i objektet som er representert bevares. Eksempelvis en konvertering fra grafisk representasjon til algebraisk, $G \rightarrow A$, betyr at $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ og $b = (0, y)$).
Den tredje av disse kognitive aktiviteter er konvertering av representasjoner fra et system til et annet som muliggjør dannelse av andre innlysende betydninger av det som blir representert (e.g. $Tabell \rightarrow Algebraisk$). Systemer av semiotiske representasjoner som tillater alle tre aktiviteter er det Duval (2006) kaller registre av semiotiske representasjoner. Eksempler gitt her er ikke

Ulike vanskeligheter oppstår avhengig av type transformasjon eleven må utføre. Dette fordi mono-funksjonell og multi-funksjonell registre oppfattes ulikt av elevene, og fortoner seg slik at elevene har direkte tilgang til det multi-funksjonelle registeret, det naturlige språket, noe som er villedende og er en stor misforståelse mellom lærere og elever «*i hovedsak med hensyn til grunnleggende og fullstendige tankeprosesser, resonnering og visualisering.*» (Duval, 2006, s.115-116)
Transformasjon fra en representasjon til en annen sies til å være spontan når representasjonene er kongruente med hverandre, som vil si at det er umiddelbar og direkte semantisk korrespondanse mellom meningsenheter i de to representasjonene. Ellers er graden av kongruens, som Duval (2006) kaller *kognitiv avstand*, mellom representasjonene varierer, også avhengig av retningen på transformasjonen. Dette er vist på figur 2.3.

Kongruent konvertering	**Ikke - kongruent konvertering**
$y = -2x + 3$	$2x + y = 3$
	
meningsenhetene a og b er synlig	meningsenhetene a og b er ikke synlig

Figur 2.0-3 Kognitiv avstand mellom meningsenheter i representasjoner

To representasjoner kan være kongruente når transformasjonen skjer i en retning, men ikke i motsatt retning. (Iori, 2017, s.285) Systematisk variasjon i prestasjoner hos elever kan observeres ved en systematisk variasjon av representasjoner innen kilderegistre og til dens konverterte målregister. Kognitiv avstand mellom innholdene i kilderepresentasjon og målrepresentasjon kan være en medvirkende årsak om lykkes med konverteringer eller systematiske feil. (Duval, 2006)
Slik det tolkes her er variasjon av representasjoner innen samme register, for eksempel variasjon i plassering av grafer i koordinatsystemet, eller ulik type innhold av tegn i verditabeller er viktig for å gi elever et vidt spekter av mulige måter de ulike representasjoner kan se ut på, hvis en ikke varierer utseende vil dette kunne føre til systematiske feil.
Dette har ekvivalens med Janvier (1987) som mener at konvertering for eksempel $Tabell \rightarrow Algebraisk$ $(T \rightarrow A)$ er en global aktivitet (stor kognitiv avstand), mens $A \rightarrow T$ er en lokalaktivitet. Derfor reflekterer utfordringer i konvertering og behandling den kognitive avstanden mellom semiotiske representasjoner av samme matematiske objektet, henholdsvis, i forskjellige registre eller i samme register. (Iori, 2017, s .285) SR er ikke transparente for elever uansett register og elever kan ikke kontrollere noe hvis konvertering ikke er kongruent eller behandling ikke er en algoritme. (Duval, 2017)

Dessuten kan det lede til kognitiv konflikt hos elever fordi «*Konvertering av representasjoner krever kognitiv DISSOSIASJON av det representerte objektet og innholdet i den bestemte semiotiske representasjonen gjennom hvilken det først ble introdusert og brukt i undervisningen.*» (Duval, 2006, s. 124, i blokkbokstaver hos forfatteren) Med andre ord, det er viktig å ikke se på representasjon som objekt som den representerer, dette er vanskelig for elver fordi de må nødvendigvis jobbe med representasjoner for å forstå det matematiske objektet, uten å se to representasjoner av samme objekt som to ulike objekter, med den konsekvensen at de klarer ikke å skifte mellom registre. (Duval, 2006, s. 124)

Kognitiv analyse av matematisk aktivitet fokuserer på problemer og prosesser av matematisk forståelse. Det blir derfor viktig å skille mellom kriterier i oppfattelsesevne fra et matematisk perspektiv og kognitivt perspektiv. Fra matematisk perspektiv forståelse starter med «validering», «bekreftelse av gyldighet», «validering» og «demonstrasjon». Fra et kognitivt perspektiv to essensielle egenskaper utpekes av Duval (2017) som nødvendige, nemlig, «*rask gjenkjennelse*» av objekter gjennom deres mulige representasjoner, og den andre er «*selvtillit*» til å utforske sine egne måter i hvilken som helst oppgave og verifisere deres relevans. Så lenge disse to kognitive egenskaper ikke møtes, uansett hva er gjort eller forklart i matematikk forblir som en bit av «mørk materie» for elever. (Duval, 2017)
Konseptualisering i følge Duval (2017) er basert på kognitiv koordinering mellom ulike semiotiske systemer for å kunne produsere nye representasjoner. Der koordinering mellom systemer avslører meningsenheter, som et matematisk objekt har. For å kunne forstå og gjøre matematikk på egenhånd kreves det to betingelser. Den første er koordinering mellom to registre som gjør det mulig å konvertere det samme matematiske objektet fra et register til et annet. Den andre betingelsen er å kunne forene de essensielle operasjoner i hvert av disse registre. For å kunne forstå hva en semiotisk representasjon i kilderegisteret representerer og hvordan kilderegisteret representerer den, en må vurdere målrepresentasjonen som refererer til samme matematiske objekt fra målregisteret, og utføre systematiske endringer i innholdet i anordning til å kunne se hvorvidt noe endres i innholdet i kilderepresentasjonen. Med dette mener Duval (2017), slik det tolkes her, er å betrakte kun kilderepresentasjon, isolert og uavhengig av alle de andre som den kan konverteres til, er ikke nok til å kunne skille ut det som er matematisk relevant, som igjen tolkes her som meningsfulle enheter. Den første betingelsen leder til prosedyre som for det første omfatter gjenskapelse av alle justeringer i innholdet i målrepresentasjonen som er avslørende endringer, for det andre sammenligne dem med parallelle endringer i målrepresentasjonen. På denne måten kan en observere endringer i kilderepresentasjonen med de ekvivalente endringer i målrepresentasjonen, og slik avslører målregisteret de matematisk relevante meningsenheter. Bruk av målregisteret er viktig fordi det tillater gjenkjennelse av hvorvidt to representasjoner fra forskjellige registre representerer samme matematiske objekt eller ikke. Eller også hvorvidt to representasjoner der innholdet ser nesten likt ut innen samme register representerer det samme objektet.
Den andre betingelsen omfatter prosedyre i et register der det er nødvendig å ha oversikt over alle mulige operasjoner som endrer enten delvis eller hele globale innholdet i en representasjon, og på denne måten daner enten helt annet innhold, eller kombinerer innholdet til den første representasjonen og tilfører den nytt innhold. (Duval, 2017, s.74)

I dette delkapittelet ble det presentert kompleksiteten av det matematiske språket og ut fra det forklart hvilke prosesser som kan føre til utfordringer hos elever. Disse utfordringer manifesterer seg i feil, i følge Duval (2006) er det ikke nok å bare observere disse feil men å finne ut hva de skyldes, og mulig forklare hvor disse kommer fra, vil gi mer innsikt i elevers ufullstendige oppfattelsesevne. Neste delkapittel skal gi innblikk i hvordan ufullstendige tankeprosesser kan resultere i det som blir heretter omtalt som rasjonelle feil.

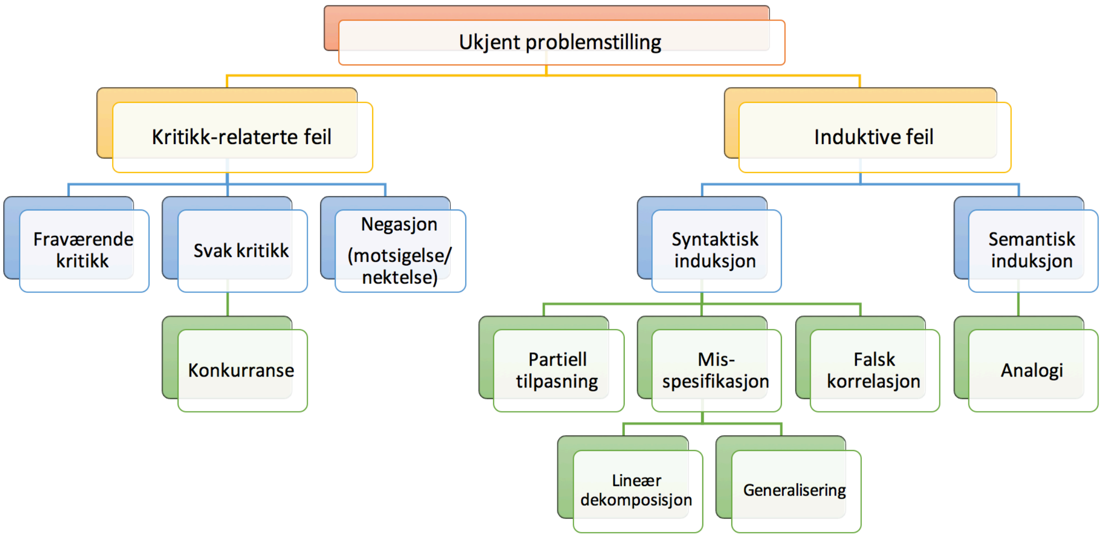
2.3 Oksymoron av rasjonelle feil

I boken «The nature of mathematical thinking» Sternberg og Ben-Zeev (1996) stiller et innledende spørsmål om hvorfor ser det ut til at noen lærer matematikk enkelt, mens andre «*slaver i vei med den og lærer den bare gjennom en enorm innsats og tilsynelatende smerte*» (Sternberg & Ben-Zeev, 1996, s. viii)
Drivkraften til å løse et problem som elever i utgangspunktet kanskje ikke vet hvordan kan løses, aktiverer oppfinnsomheten og de produserer sine egne algoritmer i forsøk på å komme videre i

løsning av oppgaven. Disse algoritmene ofte resulterer i feilaktige løsninger. Feil som forekommer i disse tilfeller er såkalt større eller mindre «bugs», feil som er gjort med den forståelsen av at det som er utført er utført korrekt (e.g. 63-29=46) Dette skjer når elever mangler konseptuell eller prosedural forståelse.
Det fasinerende aspektet ved dem er at disse feil og liknende feilaktige algoritmer er at ofte systematiske og er oftere regel-basert enn mer eller mindre tilfeldige, dermed kan være et resultat av bruk av algoritmer eller prosedyrer som ikke er fullstendig forstått av elevene. (Ben-Zeev, 1995a) Følgende resulterer disse feil i løsninger som betegnes som *rasjonelle feil* (Ben-Zeev, 1996, 1998) Betegnelsen *rasjonelle feil* ifølge Ben-Zeev (1996) har en meget spesifikk mening og referer til en prosess hvor eleven først induserer en ikke-korrekt regel for så å følge den «korrekt» på en logisk konsistent måte. (Sternberg & Ben-Zeev, 1996, s. 55).
Ben-Zeev (1996) gir et eksempel på at representasjoner av brøk i både lærebøker og i undervisningen gis ofte i "paiform" det kan dermed forklare hvorfor elever ved addisjon av brøk legger sammen tellerne og nevnere hver for seg. Denne feilen forklares med at elever mulig "ekstrapolerer" denne misvisende algoritmen fra den tradisjonelle representasjonen av brøk (paiform). Når ½ er tenkt som en del av todelt pai, kan eleven mulig tenke på følgende måte: "Jeg har en ½ , som er en del av en todelt pai, jeg legger til ⅓ som er en del av en tredelt pai, så jeg får 2 deler ut av til sammen 5 deler, som er ⅖ " Det videre argumenteres med at denne feilen ved addisjon av brøk gir mening gitt det faktum at den semiotiske representasjonen av brøk er ofte tenkt på som en mekanisk repetisjon av det som læres og eleven streber etter å finne en systematisk regel som vil få ham eller henne fra å «sitte fast». (Sternberg & Ben-Zeev, 1996, s. 56) Fischbein (1987) definerer denne intuisjonen som formidler kognisjon ved overtredelse av fakta som «teori som innebærer ekstrapolering over direkte tilgjengelig informasjon» (Van Dooren et al., 2004)
Utfra dette foreslår Ben-Zeev (1998) taksonomi til rasjonelle feil, som presenteres videre.

2.3.1 Taksonomi av rasjonelle feil

Innledningsvis klassifiserer Ben-Zeev (1998) rasjonelle feil ut fra hvorvidt de primært danner enten kritikk-relaterte eller induktive svik. Figur 2.4 viser klassifikasjon av opprinnelsen til rasjonelle feil, figuren er primært hentet fra Ben-Zeev (1998) og oversatt til norsk.



Figur 2.0-4 Taksonomi av rasjonelle feil. Ben-Zeev (1998) (oversatt fra engelsk)

Kritikk-relaterte svik forekommer når den som løser problemet lykkes ikke med å utvikle interne mekanismer for oppdagelse av defekter, brudd eller begrensninger i oppgaveløsningsprosessen. Induktive svik arter seg når regler fra kjente eksempler overgeneraliseres eller overspesialiseres. (Ben-Zeev, 1998, s. 371)

2.3.1.1 Kritikk-relaterte svik

Første nivå til feilproduksjon er nivå som involverer funksjonsfeil i indre kritikk, eller mekanismer som signaliserer at det har oppstått defekt i en matematisk representasjon eller en regel. Ordet kritikk er lånt fra sjargongen fra utviklere av Kunstig Intelligens (KI). I KI er kritikk en prosedyre som overvåker prosesser eller kvantiteter og signaliserer når det skjer overtredelse av begrensning. Altså, kritikk er et instrument som observerer og sjekker progress eller kvalitet av det som skjer og holder det under oversikt, og tolkes her som en elevens egen fortløpende analyse av prosesser som skjer under matematisk aktivitet, i løsningsprosessen. Aktivering av kritikk kan stoppe opp problemløsningsprosessen når en ukjent problemstilling inntreffer. Ben-Zeev (1998) formelt definerer kritikk som en produksjonsregel med en spesifikasjon som mangler en manøver, altså i situasjoner der en ikke lenger vet hva en skal gjøre. («*i.e., If C then?*») (Ben-Zeev, 1998, s. 371)
Kritikk-relaterte feil kan oppstå fra tre situasjoner, (1) fravær av kritikken, (2) kritikken er svak og kan derfor bli overkjørt av en sterkere etablert regel fra tidligere, (3) personen ser bort fra den spesifikasjonen som aktiverte kritikk.

Fravær av kritikk

Fravær av kritikk kan forårsake rasjonelle feil. Et eksempel med lineære funksjoner kan være at eleven ikke tar forbehold til skjæringspunktet med y-aksen når eleven skal finne stigningstallet i et koordinatsystem med skalerte akser, altså leser av Δy fra origo. Feil av denne typen forekommer vanligvis noen få ganger, er «delvis riktig» og er lett å korrigere, og kan ansees som mer et glipp enn rasjonell feil. Likevel kan den utvikle seg til å bli en feilaktig regel hvis eleven ikke blir korrigert, hvis eleven ikke mottar nok negative tilbakemeldinger kan det føre til at eleven ikke utvikler kritikk.
Når slike partielle regler blir systematiske, er disse vanskelig å bli kvitt og hindrer framtidig utvikling av kritikk. Dermed fravær av en regel kan resultere i ufullstendig kunnskap som anvendes på en riktig måte, men resulterer i rasjonelle feil fordi det eksisterer ikke noen overvåkningsmekanismer som signaliserer det motsatte.

Kritikk er svak

Selv om overvåkningsprosessen - kritikk, eksisterer kan den vise seg til å svak og overskrevet av tidligere oppbygd kunnskap, for eksempel regel fra et annet område i matematikken. Og styrken til denne regelen avhenger av hvor godt regelen fungerte til å løse oppgaver tidligere. Eksempel på dette kan være regning i ulike tallsystemer, hvor regler for titallsystemet er sterkere etablert enn noe annet tallsystem. Innen lineære funksjoner, slik det tolkes her eller funksjoner generelt, kan tabelloppsett være en slik type rasjonell feil, for eksempel når elever setter opp verditabeller etter prinsippet som de brukte i Excel i forbindelse med prosent- og vekstfaktoropplæring. Konkurransen mellom den gjeldende kritikken og tidligere brukt regel resulterer ikke i en situasjon hvor noe videre prosesser blir umulige fordi kritikken når ikke til aktiveringsnivå.

Negasjon. Kritikk benektes

Elever som kommer bort i ukjente problemstillinger og sanser at de har gjort noe feil og kritikksignal utløses kan forsøke å likvidere feilen ved rett og slett ved å fjerne det og dermed få oppgaven til å virke gyldig. På denne måten nekter elever en kritikkbetingelse ved å fjerne betingelsen som utløser signalet som videre skaper en slags preventiv virkning for at det skal signaliseres igjen. Altså når premissen «If *C* then?» nås, blir dette håndtert ved å fjerne premissen og manipulere oppgaven til å få gyldig form som ikke utløser kritikk. Dette kan eksemplifiseres ved algebra, hvor elever i forsøk på å løse likning ved å følge prosedyren med å samle alle tall på høyre siden av likhetstegnet og alle variabler på venstre i $m \cdot x + n \cdot x = p$ på en slik måte som får likningen til å ta følgende form $\cdot x \cdot x = p - m - n$. Hvor et ekstra multiplikasjonstegn som skaper forvirring blir fjernet av elevene i forsøk på å *normalisere* oppgaven. Dette er et foretak som utføres for å få oppgaven til å ta en form som de tror er en normal form. Et annet eksempel kan være $y = -2x + 5$ der eleven fjerner x og får $y = -2 + 5$. Rasjonaliteten i det ligger i at mennesker innfører regler i et forsøk på å korrigere betingelser som forårsaker brudd og utløser kritikk.

Likevel de fleste rasjonelle feil kommer fra induktive prosesser som bygger på løsningsforslag til eksempeloppgaver, prosess av syntaktisk induksjon.

2.3.1.2 Syntaktisk induksjon

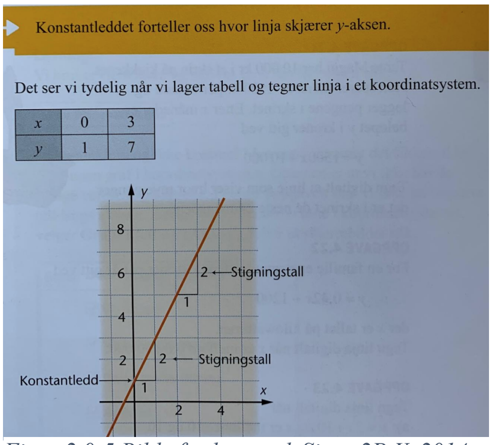
Under syntaktisk induksjon ofte overgeneraliseres eller overspesialiseres algoritmer fra kjente eksempler med overflatestrukturell karakteristisk utseende innen et emne i matematikken. Elever demonstrerer da en innovativ og systematisk tilnærming som bryter med matematiske prinsipper samtidig. Disse typer feil kan kategoriseres som liknende på hverandre og forekommer ofte blant elever som var presentert for samme type eksempeloppgaver og defineres til å være algoritmiske variasjoner av hverandre. Syntaktisk induksjon sies til å spille stor rolle i produksjonen av feil, og kan være forårsaket av en stor variasjon av resoneringsmekanismer som partiell tilpasning, mis-spesifikasjon og falsk korrelasjon.

Partiell tilpasning
Partiell tilpasning er en prosess som skjer når elever søker etter kjente eksempler som utformer egenskaper til gjeldende problemstilling, når lignende eksempel er funnet, impliseres dens prosedyre i problemløsningen. Dette formelt beskrives med: når C inntreffer og kritikk signaliserer brudd når C er i seg selv en sammensetting av betingelser slike som $C = C_1$ og C_2 og C_3 og C_n søker problemløseren etter lignende eksempler eller regel som inneholder en eller flere betingelser. Når en slik regel er funnet forkastes dens korresponderende handling *A.*
Dette skjer når en når et nivå der en ikke lenger kan løse oppgaven og aktivt tilpasser et kjent problem til gjeldende. Alternativt hvis gjennom en regeltilpasningsfase personen feiler med kodingen av spesifikke betingelser, da vil personen ikke nå situasjonen hvor ingen progresjon er mulig og utfører regel som den er. Denne koding-basert feilen er foreslått til å være resultat fra en prosess av mis-spesifikasjon.

Mis-spesifikasjon
Mis-spesifikkasjon resulterer i rasjonelle feil når en feil-spesifiserer begrensninger under prosess der en elev tilegner eller lærer seg en prosedyre. Sagt på en annen måte er mis-spesifikasjon en prosess der en abstraherer regler fra eksempler men klarer ikke å begrense den på en egnet måte og oppstår i en kodings- eller prosedyre-tilegningsfase. To hoved eksempler på ekstrapolering er lineær dekomposisjon og generalisering. Eksempel på den første er gitt på side … der eleven danner et skjema på formen □ $(x \lozenge y)$ = □x $\lozenge$ □y for den distributive loven og forårsaker feilaktige løsninger når den brukes kun overflatestrukturelt. Dette eksempelet av innlæring og dannelse av den skjematiske modellen av den distributive loven er hentet av Ben-Zeev fra Matz (1982), der $a(b + c) = ab + ac$ hvor elevene danner et skjema på formen □ $(x \lozenge y)$ = □ x $\lozenge$ □ y. Dette skjema sies til å være uspesifisert fordi hvilken som helst operator kan feilaktig fylles inn på plasser til den "savnede" variabelen. Sånne uspesifiserte skjematiske modeller resulterer ofte i vanlige feil som $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Generalisering
Generalisering er å revidere en ny regel i forsøk på å tilpasse den til en ukjent situasjon, dette kan skje ved å forme en analogi mellom nytt og kjent problem. Her foreslås at problemløseren først koder eksempler til deklarative strukturer, for så å bruke disse strukturene for å ekstapolere eller kartlegge løsningen. Hvis analogien viser seg til å være vellykket, den deklarative strukturen blir prosedyremessig en samling av produksjonsregler, hvor korrekt analogi krever at en avbilder et medlem av kategori på en annen. Under denne prosessen kan være kilde to typer rasjonelle feil, at den deklarative strukturen er mis-spesifisert, den andre er kan ligge i mappingsprosessen i seg selv.

Falsk korrelasjon
oppstår når enten verbale eller skrevne løsningseksempler inneholder en avsporende korrelasjon mellom en bestemt egenskap og spesifikk algoritme, som en problemløser kan abstrahere til en feilaktig regel. Som for eksempel tidligere nevnt toppunkt-skjæringspunkt y-aksen til en symmetrisk om y-aksen parabel.
Det påstås at lærebøker i matematikk ofte har korrelasjoner mellom spesifikke egenskaper knyttet til oppgaver og operatorer som brukes til å løse disse oppgavene. Løsningseksempler i bøkene forkynner elever med algoritmer som kan brukes på lignende oppgaver, uten noen forkynning om hvorfor algoritmene fungerer, eller begrunnelse for applisering av det respektive oppsettet. På denne måten bekjenner disse eksempler på løsninger forkynner elever med en syntaktisk oppskrift for løsning av like oppgaver (Ben-Zeev & Star, 2001, s. 254) Elever vil ofte utvikle løsningsmetoder i tiltro til overfladiske strukturen til løsningseksempelet. Derfor utvikler de en tendens til å generere syntaktiske oppskrifter, for eksempel i forbindelse med tekstoppgaver i algebra, der tekstoppgavenes verbale innhold, slik som innpakning av konteksten, ved å utlede sammenheng mellom det verbale innholdet og strategi for å løse oppgaven.
Et annet eksempel Ben-Zeev og Star (2001) legger fram er at elever iblant benytter seg av irrelevante overflateegenskaper til løsningseksempler som de knytter til å være det Duval (2006) kaller viktige meningsenheter. Dette eksemplifiseres med elever som ble presentert for parabler som alle var symmetriske om y-aksen som resulterte i forvirring om at begge de meningsenheter, både skjæringspunktet og toppunktet til parabelen, lå i samme punkt. "*Når jeg blir bedt om å finne verdien til skjæringspunktet, ser jeg på det laveste eller høyeste punktet på parabelen*." (Ben-Zeev & Star, 2001, s. 256)
Slik det tolkes her, behøver det ikke å være bare oppgaver som utløsere det kan være teoretiske beskrivelsen av ett poeng i tekstbok. På Figur 2.5, til venstre, gis det et eksempel på forklaringen og eksemplifisering av konstantleddet i Sinus 2P-Y (2014).
Her kan det både ordvalg og valg av de første verdier i tabellen til å være potensielt misvisende for elever. "*Det ser vi* ***tydelig*** ..." Ordet *tydelig* kan knyttes til det første paret av x- og y-verdiene i tabellen, og selve valget av verdiene som må nødvendigvis velges som første paret for å kunne se tydelig. Dette videre kan forårsake at elever korrelerer eksempelet med at alle verditabeller bør starte med $x_1 = 0$ for å se konstantleddet, og dessuten generelt knyttet til verditabellenes oppsett, med få verdier. Dette vil bli diskutert ytterligere i analysen av elevbesvarelser.



Figur 2.0-5 Bilde fra læreverk Sinus 2P-Y, 2014 (s.108)

Likevel for å argumentere for påstanden over teoretisk, tas med et eksempel brukt av Ben-Zeev og Star (2001) om at falsk korrelasjon kan forekomme mot ens egen formodning.

2.3.1.3 Semantisk induksjon
Ben-Zeev (1998) sier at mennesker virker til å prosessere mening til "intuitiv matematikk". (s. 377) Dette skjer på samme måte som man kan intuitivt sanse fysikk, men fysikk er et felt som er mer tilpasset verden. Matematikk derimot er mer abstrakt, noe som er i tråd med det Duval (2006, 2017). Likevel matematisk intuisjon ifølge Ben-Zeev (1998) kan basere seg på eksempler utenfor det matematiske klasserommet og denne kunnskapen kan føre til at elever sporer av på grunn av analogiske feil, dette er når de skaper en upassende analogi med virkeligheten. For eksempel når elever lærer om eksponenter, er det vanlig at de hevder at $n^0 = 0$ i stedet for $n^0 = 1$. (s.377). I verden utenfor er ingenting lik ingenting, dermed må et tall opphøyd i null være null.

Rasjonelle feil kan også forekomme som et resultat av lingvistisk påvirkning. For eksempel viktig feil som $n + mx \Leftrightarrow (n + m)x$ og kan være et resultat av lingvistisk analogi som tre epler pluss fire er syv epler. Mye av slike typer feil kan ha sin underliggende årsak i språk, der ord brukt i matematikk kan elevene ha knyttet til en betydning hentet fra virkeligheten, hvordan ord forstår utenfor klasserommet kan ha en innvirkning av forståelse av ord i matematikken.
Dette skjer når korrekt skjematisk modell brukes i feil kontekst og dermed leder til rasjonelle feil. Som er av en slik art at elevers korrekt skapte "enheter eller merkelapper" for eksempel for å håndtere likheter "100 centimeter = 1 meter" blir brukt på en upassende måte som resulterer i den vanlige "reversible feilen" som er kjent fra Student-Professor-problemet: *Det er seks ganger så mange studenter som professorer*. Som ofte resulterer i svaret $6S = P$ i stedet for $6P = S$. (Clement, 1981; Ben-Zeev, 1996; Berg, 2009)

Ben-Zeev (1998) viser at når elev møter en utfordring slik som en ukjent matematisk oppgave, ofte produseres det regel-baserte men falske algoritmer som resulterer i rasjonelle feil. Disse feil er vedkommende sitt forsøk på å skape en rimelig løsning i løpet av relativt kort tid med minimal bruk av utregninger. Dette, i forstanden av personens anstrengelse, er rettet mot tolkning av og med hensyn til å etterkomme matematiske omgivelser, på samme måte som en person ville prøve å tilpasse seg et sosialt eller fysisk miljø. En persons kognisjon kan karakteriseres med «bundet rasjonalitet» og søker etter å oppnå det som ser ut til å være «overlevelsesstrategi» heller enn optimal løsning.

Gjennom teorikapittelet hittil er det blitt beskrevet både hva som menes med konseptuell og prosedural kunnskap, matematiske kompetanser som trenges for oppbygning av disse, de fundamentale komponenter i matematisk kompetanse. Kompleksiteten av disse komponenter ble beskrevet gjennom kompleksiteten av det matematiske språket og psykologiske prosesser som er involvert i læring ble introdusert ved hjelp av beskrivelse av rasjonelle feil. Neste delkapittel vil beskrive lineære funksjoner som et matematisk objekt.

2.4 Lineære funksjoner

Funksjoner har historisk blitt ansett som et viktig element i utvikling av abstrakt matematisk kunnskap. Likevel har ikke funksjoner og grafer vært et objekt for intellektuell analyse før nærmere 90-tallet. (Leinhardt et al., 1990) Nå foreligger det et bredt spekter av forskningslitteratur som omhandler dette matematiske objektet.
Algebraisk uttrykk på formen $f(x) = ax + b$ har to meningsenheter nemlig stigningstallet a og konstantledd / skjæringspunktet med y-aksen b. Elevene forventes til å forstå disse nøkkelkomponentene eller meningsenhetene til en graf og algebraisk representasjon. (Hattikudur et al., 2012) Ifølge Leinhardt med flere (1990) må elever i oppgaver generelt forholde seg til flere betingelser samtidig. Handling som refererer til hvor vidt en oppgave er tolkningsoppgave, eller konstruksjonsoppgave. Skala på aksene, som referer til verdier til intervaller, her er det to muligheter, en for x og en for y, dette er et begrep knyttet til noe som telles eller måles. Situasjon som kan være kontekstualisert eller abstrakt og påvirker tolkningen, resultater og type variabler som brukes. Variabler er objekter til en funksjon eller graf, de er data og kan være enten konkrete eller abstrakte. Fokus er knyttet til både situasjon og handling, og referer til oppmerksomhet som kan være intern, på graf og dens meningsenheter eller med fokus på koordinatsystemet og merker på aksene, altså deres merkelapper og skalering. (Leinhardt et al., 1990)
Algebraiske og grafiske representasjoner av lineære funksjoner hører til to meget forskjellige symbolsystemer som «*artikulerer på en slik måte at de i felleskap konstruerer og definerer matematisk konsept av en funksjon*» (Leinhardt et al., 1990, s.3, fritt oversatt)
Semiotiske systemer er utviklet for å videreføre informasjon, med andre ord kommunisere. Dette framhever forskjellen mellom semiotiske og mentale representasjoner, semiotisk representasjon brukes for å kode inn mentale representasjoner, mens prosesser i tenking og forståelse baseres kun på mentale representasjoner. (Duval, 2017)

Dette har to konsekvenser den ene er reduksjon av konvertering til enkel koding. Som for eksempel å redusere plotting eller tolkning av grafer til en regel som assosierer et par med korresponderende koordinater $(0, y)$ med et skjæringspunkt i planet orientert av to graderte akser, leder til at elevers prestasjoner forverres mellom plotting og tolkning av grafer, det vil si mellom konvertering og invers konvertering. Her tolkes det som i det algebraiske uttrykket i regelen blir $b = y$, kan gi en forvrengt mental representasjon, som vil igjen resultere i at semiotiske representasjoner blir ikke gjenkjent som uavhengige fra de mentale. (Duval, 2017)
Visuelle trekk er betinget av meningsenheter og beskrives som kvalitative motparter, der ikke bare numeriske variasjoner av stigningstallet bør bli tatt i betraktning, men kvalitative egenskaper som $a > 1$, $a < 1$, $a = 1$ eller $a = -1$. Her i følge Duval (2006) bør oppmerksomhet rettes mot mengder av representasjoner vi kan ha innen samme register. (Duval, 2006, s. 125)
Å se grafer og deres algebraiske uttrykk, eller vite hvordan en kan plotte dem i koordinatsystem, er ikke nok til å kunne gjenkjenne samme funksjon gjennom bare disse to representasjonene fordi det trenges en dypere kognitiv egenskap, nemlig «*å kunne skille mellom hvordan to grafer som virker visuelt like, er matematisk forskjellige*». (Duval, 2006, s. 125) Den visuelle kontrasten mellom en eller flere visuelle egenskaper, virker som om det er bare en. Når grafene ser like ut er den visuelle diskriminering ikke åpenbar for elever, og evnen til å diskriminere det som er matematisk relevant. For å diskriminere eller skille mellom matematisk relevante meningsenheter, må det nødvendigvis skje en konvertering. Men bare konvertering er ikke nok ifølge Duval (2017). Konteksten til kilderepresentasjonen må varieres på en systematisk måte og hver variasjon av innholdet må sammenliknes med en ekvivalent representasjon i et annet register.
Lineære grafer har fem visuelle kvalitative egenskaper som er motsetninger av hverandre: 1) en linje går opp eller ned avhengig av orientering av aksene, 2) linjen er enten nærmere til x- eller y-aksen, 3) linjen går gjennom origo eller ikke, 4) hvis linjen ikke går gjennom origo, skjærer den enten over eller under x-aksen, 5) linjen er enten parallell eller ikke til en av aksene. (Duval, 2017)
For hver av disse fem visuelle motsetninger er det to visuelle verdier som omhandler meningsenheter. Hver linje som er skissert i et koordinatsystem har to eller tre kvalitative verdier som må gjenkjennes for å kunne se hva en lineær graf viser. For elever betyr det at de må utvikle ferdigheter i å diskriminere visuelle verdier i forhold til numeriske verdier til koordinatene, koeffisienter og konstanter. Konvertering av disse variasjonene til en lineær graf til deres algebraiske representasjoner på denne måten tillater å isolere det som endres i uttrykket når en visuell verdi er endret mens den andre holdes konstant. (Duval, 2017) Med dette menes at elever må trenes i gjenkjenning av meningsenheter visuelt på en slik måte at en meningsenhet varieres av gangen, for å kunne utvikle ferdigheten i å kunne diskriminere meningsenheter i algebraiske uttrykk og deres grafiske visuelle verdier.

3. Metode

Dette kapittelet tar for seg beskrivelse av metoder brukt i denne studien for å besvare forskningsspørsmålet om hvilke utfordringer elever har i konvertering mellom ulike representasjoner i matematikk. Her blir det også gjort rede for valg av metoder som er brukt under datainnsamlingen og gitt en begrunnelse for valg av det spesifikke emnet innen matematikk, nærmere bestemt, lineære funksjoner.
I anordning til å kunne rapportere om designet og metoder brukt i denne studien, må det nødvendigvis avklares noen hovedmomenter. Studien slik den foreligger nå, baserer seg på skriftlige besvarelser fra to utvalg og fire intervjuer. Det ene utvalget heretter gruppe I, var primært tenkt til å være de eneste informanter for studien og var med på en undervisningsperiode i emnet gjennomført av meg i forkant av testen. Gruppe II i utgangspunktet ble forespurt om deltagelse kun ved behov og hvis det oppstod behov for mer datamaterialet, undervisningen ble gjennomført av faglærer. Med dette i bakgrunn, vil neste delkapittel beskrive forskningsdesign.

3.1 Forskningsdesign

Forprosessen til datainnsamling i gruppe I startet med et undervisningsopplegg i bakgrunn. Undervisningsopplegget lot seg ikke gjennomføre i sin helhet med hensyn til pedagogiske grunner som bunner i eksamensorienterte overveielser og tidsaspektet. Da den begrensede tidsrammen for arbeid med emnet lineære funksjoner, sett fra årsplanens rammeverkperspektiv ved gjeldende skole, var alltid et sentralt og viktig moment. Refleksjon over valg av metoder, sett fra praktisk ståsted er en viktig del av ethvert forskningsprosjekt og må bli tatt høyde for. (Wellington, 2017)
Behovet for mer datamaterialet meldte seg under gjennomgang av besvarelser fra primærkilden av informanter, dermed ble det samlet inn besvarelser fra gruppe II.
Studier der to utvalg som kan være kontraster av hverandre ved bruk av mer eller mindre samme metoder gir en komparativ design. (Bryman, 2016) Dermed er dette en komparativ studie fordi de to utvalg som ble tatt ut til studien, utvalg har noe ulik bakgrunn vedrørende skolegangens historikk, dette blir nærmere omtalt i kapittel 3.2.1.
Bruk av andre kilder til spesifikke oppgavetyper i oppstarten av undervisningsperioden i gruppe I og som et grunnlag i innføring i emnet lineære funksjoner, samtidig bruk av læreverk til undervisningen og som kilde til de respektive oppgavetyper brukt av gruppe II, gir denne studien noe eksperimentelt preg, men dette er kun delvis og blir gitt nærmere avklaring på i delkapittel 3.4.
Med dette som grunnlag er denne studien en kvalitativ studie med komparativ design og med visse trekk av eksperimentelle preg. Dette fordi at en uavhengig variabel, arbeid med en mengde av verditabeller som ikke står i samsvar med den mengden av dem tilgjengelig for elevene i læreverket, ble manipulert under innføring i emnet lineære funksjoner i begynnelsen av opplæringsprosessen i den ene elevgruppen, mens den andre gruppen med elever. Følgelig ble en variabel manipulert i gruppe I og holdt konstant i gruppe II. (Bryman, 2016) Variabelen som ble manipulert som følge av metoden i oppstarten omfatter ikke hele studien gjennomgående, men kun deler av den og blir presentert nærmere i delkapittel 3.4.

3.2 Deltakerutvalg

Deltakerutvalg er to klasser med elever ved en videregående skole i Sør-Norge. Kontakten med faglærere i disse to klasser var opprettet tidlig på høsten og i forkant av søknad til NSD.

3.2.1 Deltakere

Deltagere i denne studien er to klasser med elever som tar kurset 2P-Y ved en videregående skole i Sør-Norge. Bakgrunnen til klassene er noe ulik. Den ene gruppen med elever, her gitt kode I, er en ordinær klasse på VG3-Påbygg som tar påbygging til generell studiekompetanse etter å ha gått to år på ulike yrkesfaglige programfag. Dette ofte skjer fordi elevene i løpet av to år på yrkesfag bestemmer seg for å ta generell studiekompetanse av ulike grunner som er kun relevante for denne studien i form av måloppnåelsen. Derimot bakgrunn, faglig bakgrunn og retning på yrkesfag som begge grupper har som grunnlag, gir et større spenn i både måloppnåelse og motivasjon. I den omtalte gruppen I er det elever med både 1-TY og 1-PY som matematisk grunnlag fra VG1 med variert måloppnåelse som er vanlig. Ellers blir det viktig å nevne at elever som tar ordinær VG3-Påbygg har ikke matematikk blant fag på yrkesfag på VG2. Dette tilsier ett år uten matematikk.

Gruppen som gis kode II, er en klasse som går på VG4-Påbygg. Denne gruppen er satt sammen av elever som har gått på yrkesfaglige programfag, har fått sitt fagbrev og bestemte seg for å gå påbygging til generellstudiekompetanse etter det. Her er det like stort mangfold med avstamning i både faglig og generell bakgrunn og måloppnåelse. Forskjellen mellom gruppene er at i gruppe II kan alder være noe høyere enn i gruppe I. Deltakere fra gruppe II har ikke hatt matematikk på minimum to år, noe nærmere undersøkelse er ikke blitt gjort. Begge grupper er flerkulturelle klasser, blant elever med opprinnelse fra andre land botiden i Norge kan variere.

I dette delkapittelet ble deltaker grupper presentert og etter beste evne beskrevet, videre i neste kapittel belyses rekrutteringsprosessen.

3.2.2 Rekruttering av deltagere

Deltagergruppene som ble beskrevet i forrige kapittel ble rekruttert tidlig i planleggingsfasen, høsten 2019. Kontakten med begge faglærere ble opprettet muntlig og studiens beskrivelse ble lagt fram. Sett fra tidslinjeperspektiv ble det først opprettet kontakt med faglæreren til gruppe I, som stilte seg positivt til studien, videre ble det avtalt med faglæreren at undervisningen skulle gjennomføres av forskeren. Dette ble gjort av praktiske grunner samtidig som deltagende rolle ville komme til gode for elever med flere lærere i klasserommet som kunne hjelpe dem. Elevene ble informert og spurt på forhånd om de ville delta i studien ved å besvare ett sett med oppgaver mot slutten av opplæringsperioden, og ga positiv respons. Med oppstart første skoledag i 2.termin. Til slutt 21 deltakere var med i studien fra dette utvalget.

Kontakten med lærer i gruppe II ble opprettet like etter, med et formål om forespørsel til eventuelt deltagelse hvis det ble behov for mer datamaterialet. Avtalen skulle i flere tilfeller være en sikkerhet for å innhente datamaterialet til analyse ved eventualiteter som manglende eller mangelfulle besvarelser, statisk representative besvarelser, fravik i besvarelser som ville vært av interesse å se på om flere elever gjorde, eller tilbakekall av samtykker. Behovet meldte seg etter at innsamlet datamaterialet fra gruppe I ble gjennomgått og det ble funnet at ved nesten alle brukte en spesifikk løsningsmetode ved enkelte konverteringer, som kunne sterkt forbindes med undervisningen, dette utdypes i kapittel 3.4. I gruppe I var det 26 elever som besvarte oppgavesettet, 5 av dem ga ikke samtykke til analyse av deres besvarelser, følgelig 21 besvarelse foreligger også i denne gruppen.

I undervisningsperioden i gruppe I ble elevene også spurt om de ville være med på intervju hvis det ble behov for det, dette ble det gitt positive svar på. Elvene i gruppe II ble spurt om det samme etter gjennomføring av testen, med resultat av samme positiv respons.

3.2.3 Begrunnelse for valg av deltakergrupper og emnet

Matematikk 2P-Y er et av matematikkfag i Norge som skal ha praktisk innfallsvinkel til faget og er et tilbud for elever som har som utgangpunkt valgt et av mange yrkesløp etter å ha fullført grunnskoleopplæring, men bestemmer seg for å ta påbygging til generell studiekompetanse av ulike grunner. Dermed har de fleste elever matematikk 1-PY som grunnlag fra første året i videregående opplæring. Dette ofte viser seg til å være en meget vanskelig, iblant uoverkommelig, overgang for mange. Med den praktiske tilnærmingen øker også bruk av det naturlige språket i 2-PY betydelig, noe som eksplisitt ikke gjør det enklere, kompleksiteten i det er skrevet om i kapittel 2.3.2.
I gjeldende læreplan LK-06 for 2-PY, er det følgende kompetansemål (kun de med relevans for denne studien er med):

Funksjonar i praksis
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- *gjere greie for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske døme, også digitalt*
- *omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar* (Udir, 2019)

Sett bort fra strukturen i faget 2-PY, praktisk eller ikke, skal det læres matematikk som krever mye teoretisk grunnlag, forståelse og ferdigheter. Elevene skal altså lære mye av den samme teoretiske matematikken som er til å finne i deler av teoretiske kurs i matematikk, men gjennom en praktisk innfallsvinkel. Følgelig å se på utfordringer som viser seg og hvilke feil de viser seg gjennom, blant denne elevmassen er viktig.

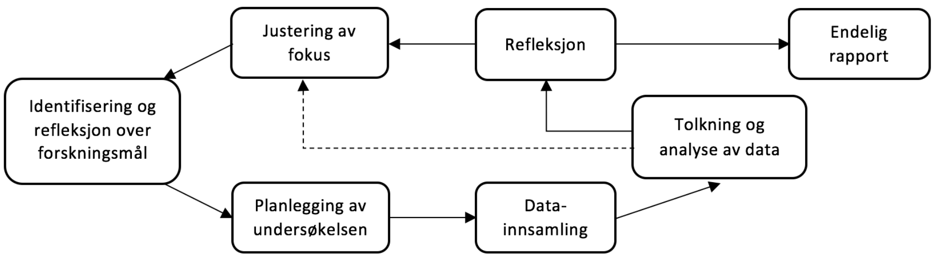
Utenom faktumet at representasjoner av funksjoner er mest utbredt i sin anvendelse som semiotiske representasjoner av et matematisk objekt i matematikkundervisningen, var emnet lineære funksjoner til denne studien valgt utfra flere andre kriterier. Dette prosjektet skulle ikke være til bry eller på noen måte avbrytende, forstyrrende eller belastende for noen. Basert på erfaring, det er generelt svært lite begeistring blant lærere for å miste undervisningstimer i sitt fag, og spesielt når faget er et eksamensfag, som 2-PY er, og i alle fall ikke i 2. Termin (semester). Det faktumet at etter årsplan i matematikk ved gjeldene skole var lineære funksjoner lagt til helt i begynnelsen av 2. Termin passet derfor fint med hensyn til tidsperioden avsatt til denne studien.

3.2.4 Læreverk

Læreverk i matematikk som benyttes ved den aktuelle skolen er Sinus, nærmere bestemt Matematikk Sinus 2P-Y Påbygging til generell studiekompetanse, 2014. Læreverket er av interesse av den grunn at under planlegging av undervisningen til gruppe I, ble det gått gjennom oppgavene i læreverket og sett etter oppgaver som kunne vært aktuelle å benytte seg av i undervisningen. Med hensyn til studiens forskningsspørsmål skulle elever ta en test i slutten av innføringsperiode, det var derfor nødvendig å ta hensyn til at elever fikk jobbe og kjente til alle representasjoner til lineære funksjoner på mest mulig dekkende måte. Under gjennomgangen av oppgaver gitt i læreverket, ble det bestemt å finne andre kilder til oppgaver som omhandlet konvertering fra eller til verditabeller. Dette er på grunnlag av vurderingen gjort i forhold læreverkets noe manglende dekning av oppgaver med verditabeller.
Oppgaver elever i gruppe I fikk jobbe med ligger som vedlegg med link til opplegget det ble hentet fra.

3.4 Forskningsmetode

Den ideelle modellen av forskning er en lineær prosess som beskriver en lineær og logisk sekvens som starter med formulering av mål og gjennom en rettlinjet prosess avsluttes med ferdig rapport. I realiteten er prosesser i utdanningsforskning er mer komplisert. Sett fra et realistisk perspektiv er det slik at mennesker går tilbake og planlegger på nytt, finner ut at de trenger mer data eller data fra andre kilder. (Wellington, 2015, s. 104-105) Ved å låne og tilpasse figuren til Wellington (2015) kan metode for denne studien beskrives som sirkulær og illustreres med følgende Figur 3.1.



Figur 3.1 Sirkulær/realistisk tilnærming. Lånt og tilpasset fra Wellington (2015, s.106)

Denne prosessen foregikk i tre runder, hvor i første runde ble det samlet inn skriftlig datamaterialet fra utvalg 1, ved gjennomgang meldte behovet for mer data. Under andre runde ble det samlede inn skriftlige datamaterialet fra utvalg 2, og videre analyse fremhevet for intervju. Nærmere rapport på brukt metode beskrives under
I kapittel 3.2 ble det i korte trekk nevnt at studien var tenkt til å ha et undervisningsopplegg som grunnlag, dette av pedagogiske grunner og praktiske årsaker, nevnt tidligere, ble vanskelig å gjennomføre og ble avsluttet på et tidligere tidspunkt om å gi tradisjonell undervisning i gjeldende

emnet. Undervisningsopplegget var tilsiktet kun den ene gruppen av deltagere og besvarelser skulle analyseres i lys av elevers konseptualisering av det matematiske objektet funksjoner og dermed mulige positive og negative sider ved arbeidsmåten. Grunn for valg av andre kilder til verditabeller skyldes pre dominans av noen semiotiske representasjoner av lineære funksjoner i læreverket og nokså lav forekomstfrekvens av andre, hvor verditabeller er underrepresentert. Tatt stilling til at denne studiens underbyggende mål var å undersøke utfordringer som oppstår ved konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner, dekket ikke læreverket behovet for oppgaver med verditabeller.
Ved gjennomgang av elevbesvarelser som ble samlet inn etter avsluttet undervisningsperiode, uke 3, i gruppe II, ble det funnet noe statisk representative besvarelser og noe og noen manglende besvarelser. Statistisk representative besvarelser, med dette menes her løsningsmetoden brukt av elevene på oppgaver som omhandlet konvertering fra verditabell til algebraisk uttrykk gjorde det nødvendig å ta kontakt med faglærer til gruppe II.
Innsamlingen av datamaterialet ble gjennomført i gruppe II en uke senere, altså uke 4, og som for denne gruppen skulle være en forprøve i forkant av ordinær prøve i lineære funksjoner.
Med dette som bakgrunn kan oppstarten av undervisningsperioden i emnet lineære funksjoner i disse to grupper konstateres til å ha noe ulikt utgangspunkt. Mens den ene gruppen av deltagere har fått tradisjonell undervisning med læreverk som støtte helt fra starten av, fikk den andre gruppen jobbe med korresponderende tallmønstre med lineær sammenheng organisert som verditabeller, før det rent matematiske teoretiske innholdet i emnet ble presentert for disse elever. Det blir viktig å nevne at variasjonen av tabeller til dette formålet ble hentet fra en annen kilde enn læreboka og står i forbindelse med deres nokså sjeldne forekomst av oppgaver tilknyttet verditabeller i den sistnevnte.
Ved et senere tidspunkt, under analysen, ble det bestemt å gjennomføre intervju av fire informanter, to fra hver gruppe. Informantene ble valgt og intervjuene gjennomført på bakgrunn av besvarelser, derfor intervju av type semistrukturert intervju, da svar på spørsmål kan variere og dermed nødvendigheten for å kunne tilpasse videre spørsmål kan være stor. (Bryman, 2016)
Tatt i betraktning at datamaterialet ble samlet inn ved flere runder og under ulike omstendigheter, og ved bruk av ulike innsamlingsmetoder er metoden som er brukt i denne studien dermed triangulering. (Bryman, 2016)
Triangulering som metode brukes ved innsamling av multiple kilder til bevis. Her ifølge Schoenfeld (2000) ligger den største mellom matematikk og sosiale vitenskap, der i matematikk et overbevisende argument eller bevis er nok for å oppnå validitet, i undervisning eller sosiale vitenskap ser en etter *overbevisende bevis* (Schoenfeld, 2000, s.648, i kursiv hos forfatteren) Det er uansett viktig å være kritisk, dette kan være misledende og det en tror er generelt kan være et sammentreff av tilfeldigheter. (Schoenfeld, 2000)
Prosesser og metoder som ble brukt til innsamling av datamaterialet ble beskrevet i dette delkapittelet. Neste delkapittel beskriver metoder som ble benyttet til analyse av besvarelser.

3.5 Kvalitativ metode

Kvalitative metoder har en utbredt anvendelse i forskning innen læring og undervisning. (Maguire, 2017)
Med stilling til at hovedfokuset i denne studien ikke er å samle inn og presentere tall, men dypere gjennomgang og tolkning av faktiske besvarelser er denne studien en kvalitativ studie. 42 skriftlige besvarelser ble kodet og kategorisert for å se på frekvenser, for senere analysert ved hjelp av analyseverktøyet presentert i kapittel 2. Hver enkel kategori ble gått gjennom senere og alle besvarelser innen de ulike kategoriene ble vurdert etter variasjoner og sortert ytterligere etter typer feil og vises til i kapittel 4.
Det ble også gjennomført intervju på bakgrunn av skriftlige besvarer som analyseres i kapittel 4.
I neste delkapittel blir det beskrevet metoder brukt i analysen.

3.5.1 Dokumentanalyse

Tematisk analyse er prosess som brukes for analyse av kvalitativ datamaterialet, dette er ikke en annen kvalitativ metode, men prosess med det «meste av, hvis ikke alle» kvalitative metoder som hjelper å overføre kvalitative data til kvantitativ framstilling. (Boyatzis, 1998, s. 4) Følgelig er dette en prosess av identifisering av mønstre eller temaer i kvalitativ data. "*This means that, unlike man qualitative methodologies, it is not tied to a particular epistemological or theoretical perspective. This makes it a very flexible method, a considerable advantage given the diversity of work in learning and teaching*" (Maguire, 2017, s. 3352) Det finnes mange innfallsvinkler til en tematisk innholdsanalyse. Hovedelementet i en tematisk analyse er å identifisere temaer, det kan være mønstre i datamaterialet som er interessante å se på eller gi noen kvantitative beskrivelser av et fenomen. Deretter brukes temaer til å adressere forskningen eller kunne si noe om det som ble forsket på. (Maguire, 2017)
Kvalitative analysemetoder av innholdet i skriftlig datamaterialet ble derfor gjort i to steg, dataene basert på besvarelser ble sortert, kategorisert og kodet og videre analysert etter mulig kilde til feil. For denne studien gjelder det, altså at besvarelsene først ble samlet inn i kategorier etter forekomsten av like mønstre i besvarelser. For eksempel ved konvertering fra algebraisk representasjon til grafisk, ble det dannet en kategori der elever bruker stigningstallet som skjæringspunktet med x-aksen, da ble det en egen kategori. Et annet eksempel på det kan være at i det ene oppgaver kan stigningstallet komme fra ulike kilder, samtidig som det er samme tall. Dette utdypes i delkapittel 3.5.3 under koding. Kategorisering av besvarelser på denne måten har vært nyttig også for å få oversikt og kunne si noe statistisk deskriptivt, antallet elever som ikke besvarer per enkelt oppgave, eller generelt se på forskjellen mellom gruppene.
Videre var prosessen å se på variasjoner innen kategoriene og for å kunne identifisere en mulig kilde til feilen som den enkelte gjorde. Dette ble gjort slik det demonstreres i kapittel 4, og med den begrunnelse at selv om elevene i samme kategori som virket til å svare etter samme mønster ved nærmere analyse viste seg å bruke ulike metoder for å framstille svar og derfor ulike kilder til feil.
I dette delkapittelet ble det presentert metode som ble benyttet til analyse av skriftlige besvarelser, neste delkapittel beskriver analyse av intervjuene.

3.5.2 Analyse av intervju

Elever som ble spurt om intervju, til sammen fire elever, ble valgt ut til intervju på grunnlag av deres besvarelser, dette derfor danner tema for hvert enkelt intervju. Utdrag fra intervjuene ut fra oppgaver det ble snakket om presenteres og analyseres i delkapittel 4.2 i lys av teori brukt i denne studien og beskrevet i kapittel 2.
Intervjuene ble gjennomført med det formålet å kunne bekrefte eller avkrefte antagelser som ble gjort under analysen av skriftlige besvarelser på utvalgte oppgaver. Likevel ble det gått gjennom alle oppgaver der det ble gjort feil med alle elever som stilte til intervju, dette ble gjort av pedagogiske grunner, for å gi elevene en tilbakemelding og mulig veiledning innen emnet og på denne måten uttrykke takknemlighet for deres tidsbruk. Derfor ikke alle intervjuene ble transkribert i sin helhet. Transkripsjonene som ble gjort, er de som er av relevansen for denne studien og følger med som vedlegg 5.
Noen utdrag fra intervjuene brukes også i kapittel 4.1, der skriftlige besvarelser analyseres, dette gjøres for å kunne gi en mulig bekreftelse for tankeprosesser som kan ligge til grunn for de besvarelser som gis av elever på den skriftlige testen.
Dette delkapittelet beskrev metoder brukt til analyse av de skriftlige besvarelser og intervjuene på grunnlag av besvarelser neste presenter det som ga grobunn til både skriftlige besvarelser og intervjuene, nemlig oppgaver.

3.5.3 Oppgaveheftet

I dette kapittelet blir det presentert oppgaver som ble utarbeidet til den skriftlige testen. Med hensyn til plass, vil ikke alle oppgaver presenteres slik de faktisk så ut i heftet for elevene, men beskrives her og formålet med oppgavene begrunnes. Selve heftet foreligger som vedlegg.
Oppgavene ble utarbeidet i forbindelse med studien og ikke er hentet fra andre kilder, utenom oppgaver 10 og 11, dette omtales ved presentasjon av de respektive oppgaver.
Oppgavene som ble utarbeidet, ble utarbeidet på grunnlag av teoriene og forskningen som er blitt gjort innen området som er relevant for denne studien, nemlig konvertering mellom ulike representasjoner av lineære funksjoner og derfor begrunnes hver oppgave med teoretiske perspektiver som ligger til grunnlag for disse oppgaver.
Bosse et al. (2011) og Adu-Gyamfi et al. (2012) identifiserer tre faktorer som påvirker vanskelighetsgraden av ulike konverteringer, dette avhenger av hva en skal sjekke, hvilken informasjon representasjonen gir og hva som kreves for å løse oppgaven. Faktorer som identifiseres er: *Fakta-hull*: alle matematiske representasjoner har manglende informasjon, *Forvirrende fakta*: hver matematisk representasjon gjennom avdekking av fakta, attributter, meningsenheter hos Duval (2006) og karakteristiske trekk beskriver konsepter, *Attributtdensitet (densitet=egenverdi)*: dette begrepet blir av Adu-Gyamfi et al. (2012) definert som karakteristisk trekk til matematiske representasjoner. Hvor mye informasjon en representasjon gir samtidig med hvor mye innsats som kreves for å anskaffe tilleggsinformasjon bestemmes av attributtdensitet. Oppgavene ble utarbeidet på bakgrunn av disse prinsipper.
Hovedtrekk ved alle oppgaver er felt for innføring (herunder tomt koordinatsystem, tom verditabell osv., alt ettersom konverteringsretning), felt til løsningsmetode eller beskrivelse og felt til redegjørelse for hvorfor eleven mener at svaret er korrekt.
Det blir allerede nå nødvendig å presentere noen koder: Verbal: V, Verditabell: T, Funksjonsuttrykk/ algebraisk: A, Graf: G
Det vil si at når det står eksempelvis at oppgaven er ment for å se på konvertering mellom $T \to G$, betyr det at dette er en konvertering fra tabell til graf, hvor pillen viser konverteringsretning. (Bosse et al., 2011c)

Oppgave 1

Else skal flytte hjemmefra når hun er ferdig på VGS. Hun samler på designglass til sitt kjøkken. Hun har allerede 5 glass og skal kjøpe inn 1 glass hver måned fram til hun flytter ut. Kan du finne regelen/ funksjonsuttrykket? Fyll ut feltene, det er du som bestemmer hvilket felt du skal starte med først

Denne oppgaven er en verbal beskrivelse av en situasjon og er ment til å se på konverteringer: $V \to G, V \to T$ og $V \to A$
Feil som ifølge Bossé med flere (2011) skiller seg betraktelig ut fra feil som viser seg ved konverteringer mellom tabeller, symboluttrykk og grafiske representasjoner er feil som forekommer ved konvertering fra eller til verbal form. Derfor ble denne oppgaven

Oppgave 2

Funksjonsuttrykk: $f(x) = -4x + 6$ Tegn grafen til $f(x)$

Oppgaven er ment som konvertering $A \to G$, altså fra algebraisk uttrykk til tabell, og er en oppgave som fleste elever kan klare selv om den konseptuelle forståelsen for det matematiske objektet ikke er utviklet, dette kan utføres enten ved å se direkte på a og b (fra: $f(x) = ax + b$) eller via overgangsrepresentasjoner. Ifølge Bossé med flere (2011) vil elever ofte sette opp en verditabell for å kunne utføre denne konverteringen. Derfor blir det under analysen vurdert fremgangsmåten elevene bruker.

Oppgave 3

Funksjonsuttrykk: $f(x) = 3x - 2$
Sett opp verditabell til $f(x)$

Oppgaven er ment som konvertering mellom $A \to T$. Formålet her er å se på hva elevene gjør, om de bruker velger x-verdiene og regner ut, eller om de ser etter de meningsfulle enheter, slik de er uttrykt algebraisk og bruker dem videre for å fylle ut tabellen. Når et funksjonsuttrykk er kilde- og tabellen er målrepresentasjon, er antallet faktahull betraktelig mindre. (Bossé et al., 2011)

Oppgave 4

Verditabell:

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Finn funksjonsuttrykk som passer til tabellen.

Oppgaven skal sjekke elevenes konvertering $T \to A$, her er attributt-densitet høy, fordi skjæringspunktet fremkommer fra tabellen og $\Delta x = 1$. Følgelig forvirringsfakta og fakta-hull er lave. Elevene skal kunne se informasjonen i tabellen relativt enkelt.
Leinhardt med flere (1990) karakteriserer tolkningsaktiviteten som en handling der elevene forsøker å gi mening eller hente mening fra en representasjon. For eksempel ved konstruksjon av graf fra en verditabell, må den som utfører handlinger vite at til hvert par av koordinatene en har et punkt i koordinatsystemet, denne handlingen beskrives som lokal tolkning. I motsetning til det å konstruere et algebraisk uttrykk fra verditabell kreves det ikke bare å kunne se hvordan koordinatene til hvert par endres i forhold til hverandre, men også gjenkjennelse av helhetlig variasjon blant koordinatpar i hele settet. Denne type tolkningsaktiviteter sies å være global tolkning. (Duval, 2006) Forskning viser at flere feil forekommer nettopp der konverteringsprosessen krever global tolkning.
Når verditabell er kilde som skal konverteres til funksjonsuttrykk kan kilden ha mange fakta-hull avhengig av hva er synlig av meningsenhetene i tabellen hva som skal undersøkes i følge Bossé med flere. (2011). Dette demonstreres i neste oppgave.

Oppgave 5

Verditabell:

x	y
2	5
4	9
6	13
8	17
10	21
12	25
14	29

Finn funksjonsuttrykk som passer til tabellen.

Er en oppgave der konverteringen $T \to A$ noe mer komplisert enn forrige oppgave da Δx er ikke lenger 1, og formålet med den er å se på måter elever vil konvertere på. Korrespondanse eller variasjon.
Verditabeller som representerer en funksjon har informasjon/ punkter som viser til skjæringspunktene mellom grafen og y- og x-akse. Utfra verditabellens formål som kan være å undersøke hvorvidt den representerer en funksjon har utelatelse av disse punktene ikke stor effekt, imidlertid hvis formålet med verditabellen er nettopp å undersøke egenskapene ved skjæringspunktene med akser er utelatelse av disse verdiene bety fakta-hull. (Bossé et al., 2011)
Når verditabell er kilde som skal konverteres til funksjonsuttrykk kan kilden ha mange faktahull, omvendt av hvis funksjonsuttrykk er kilde- og tabellen er målrepresentasjon, er antallet faktahull betraktelig mindre. Vanskelighetsgraden til konverteringer må nødvendigvis være betinget i antallet av både faktahull og forvirrende fakta, der elevene kan oppleve konverteringer med mange faktahull som mer utfordrende og forekomsten av forvirrende fakta kan gi elever flere problemer med tolking av representasjoner og utførelse av konverteringsprosessen. (Bossé et al., 2011)

Oppgave 6

Verditabell:

x	y
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

Tegn grafen utfra tabellen og skriv funksjonsuttrykk:

Attributtdensitet sies å være mer stabil og mindre påvirket uansett om det er kilde- eller målrepresentasjon enn fakta-hull og forvirrende fakta. For eksempel om attributtdensiteten til verditabell kan endres litt er avhengig om den representerer kilde- eller målrepresentasjon, men fordi en tabell fortsatt inneholder begrenset informasjon, er dens densitet fortsatt lav. Dermed ser attributtdensiteten fortsatt til å ha noe innvirkning på vanskelighetsgraden til noen konverteringer. (Bosse et al., 2011, s. 123-124) Oppgaven sjekker to konverteringer $T \to G$ og $T \to A$. Her ser y-verdier ut slik elevene er vant å se x-verdier vanligvis (læreverk), dette endrer stabiliteten til attributt-densitet. Elevers evne til å lykkes i konvertering fra verditabell og til funksjonsuttrykk til en rett linje og likevel ikke forstå den semantiske kongruensen mellom kilderepresentasjon og målrepresentasjon er overrepresentert (Adu-Gyamfi et al., 2012)
Konstruksjon indikerer en handling under hvilken genereres nye komponenter som ikke er gitt, e.g. bygge en graf ut fra funksjonsregelen eller tabell. Hver en slik aktivitet når den betraktes i konverteringskonteksten er assosiert enten med handling, teknikk eller heuristikk, som kurvetilpasning eller skissering som spesifiserer hvordan konstruksjoner eller beskrivelser uttrykt i kilderepresentasjonen kan direkte formuleres gjennom strukturer som er tilgjengelig i målrepresentasjonen. Hver av disse konstruksjonsaktiviteter krever ulike ferdigheter noe som fører med seg varierende nivå av kompleksiteten i noen an konverteringsprosesser. (Bossé *et al.*, 2011)

Oppgave 7

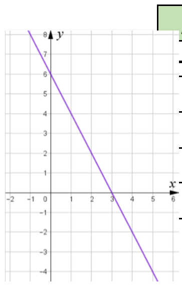
Finn likning til en rett linje som går gjennom punktene:
(1, 4) og (3, 4)

Du kan bruke koordinatsystemet til høyre:

I denne oppgaven er det også to konverteringer $T \to G$ og $T \to A$. I følge Bossé et al. (2011) er det slik at hvis verdiene i en tabell ikke er presentert i en sekvensiell orden med hensyn til x-verdiene, eller når forskjellige x-verdier har alle tilsvarende samme y-verdi kan dette være til forvirring for elevene og dermed hindring for plotting av slike punkter og tegning av graf. Her blir verdiene presentert i form av punkter og ikke i en tabell, men her vurderes det som tilsvarende en tabell.

Oppgave 8

Finn funksjonsuttrykket til grafen under og fullfør tabellen

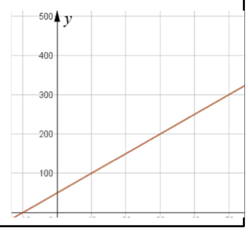


x	y
-1	
0	
2	2
	0
4	

Oppgaven spør om konverteringer $G \to T$ og $G \to A$.
I denne oppgaven er verditabell et av målrepresentasjon dessuten blir elever bedt om å finne funksjonsuttrykket. Når tabeller er kilderepresentasjon sier Bossé med flere (2011) at innholdet av både fakta-hull og forvirrende fakta kan være høyt og omvendt av hvis funksjonsuttrykk eller graf er kilden og tabellen er målet er antallet fakta-hull betraktelig mindre. Med dette som grunnlag vil oppgaven kunne sjekke hvorvidt elever utfører konverteringen korrekt og hva de tar som utgangspunkt for Men i denne tabellen er begge skjæringspunktene med aksene er det som skal fylles ut uteblir, og dette kan gi noe forvirrende fakta. Et av formål her er å se om de bytter om på x og y rekkefølge med tanke på punktnotasjon.

Oppgave 9

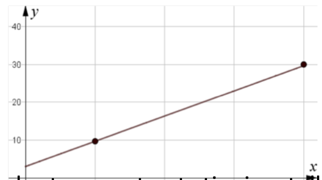
Finn funksjonsuttrykket til grafen under



Aksene er skalert derfor er stigningstallet noe mer ”skjult” og ikke gjennomsiktig, derfor kan være utfordrende for elevene. Formålet her er å se på variasjoner av svar som vil akkumulere seg.
Elevene blir også bedt om å lage en tekstoppgave som beskriver grafen, der formålet er å se om elevene klarer dette samtidig som de beholder den semantiske meningen i uttrykket.
Utover det faktumet at elever strever med konverteringer fra ikke-verbale til verbale representasjoner, viser forskningslitteraturen at disse konverteringer har flere faktorer som gjør dem mer utfordrende enn andre konverteringsprosesser. Bossé et al. påstår også at når elevene konverterer fra tabeller, grafer og symbolske uttrykk til verbale representasjonsformer, evner de sjeldent til å gjøre dette utover konteksten av lineære funksjoner. (Bossé et al., 2011)

Oppgave 10

En student ble bedt om å finne stigningstallet til linjen gjennom to punkter på grafen til venstre:



Studenten svarte at stigningstallet er $\frac{2}{3}$.
Dette er ikke korrekt svar!
a) Hvorfor $\frac{2}{3}$ *er feil svar? Forklar hva som er galt med studentens tankegang*
b) Hva er korrekt svar på spørsmålet? Hva er stigningstallet?

I denne oppgaven er det ikke direkte konvertering, men elevene blir bedt om å finne stigningstallet. Nilsen (2013) finner en trend som i norske læreverk som blir kalt «*en bort a opp/ned*» som baserer seg på den grafiske framstillingen av stigningstallet som meningsenhet. Denne framstillingen gir noe tvetydig tilnærming til regelen $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ da med tanke på rutenettet, der elever viser en tendens til å bruke dette visuelle perspektivet og lese av stigningstallet per rute og ellers variere en del i besvarelser der aksene er skalert.
Oppgaven henter inspirasjon hos Gordon & Gordon (2010) og er henvist til i litteraturliste. Oppgaven foreligger slik den er funnet hos forfattere, den er kun oversatt til norsk fra engelsk og det ble gjort noen små modifikasjoner.

Oppgave 11

Hvilket funksjonsuttrykk hører til hvilken av grafene?
(Merk stigningstall og at skjæringspunktet med y-aksen på hver av grafene er ulik)

Oppgaven ber om å matche seks funksjonsuttrykk med seks ulike grafer, aksene er ikke merket, derfor kan elevene ved bruk av regel og dermed prosedyrebasert ikke lese av funksjonsuttrykkene og må kjenne igjen de visuelle karakteristiske trekk ved meningsenhetene. Dette i følge Duval (2017) er meget viktig at elevene skiller mellom de visuelle egenskapene som en graf til en lineær funksjon kan ha, og slike oppgaver er ofte vanskelig for elevene. Derfor mener Duval (2017) at elever burde få flere oppgaver der de blir bedt om nettopp å gjenkjenne grafer og deres algebraiske representasjoner
Også denne oppgaven henter sin inspirasjon hos Gordon & Gordon (2010) men alle algebraiske uttrykk er endret og følgende deres respektive grafer.

Oppgavene i heftet er satt opp i den rekkefølger med den begrunnelse at vanskelighetsgraden øker etterhvert utover i heftet og det ble bestemt at oppgaver som er relativt enkle å løse ble plassert som de første oppgaver. Dette ble gjort for å ta høyde for opplevelse av mestring, på denne måten for å gi elever mot for å prøve seg på ukjente problemstillinger. Oppgave en ble plassert først, ble det fordi denne oppgaven viser til alle fire semiotiske representasjoner for lineære funksjoner, og skulle være et hint om hvilke representasjoner kan brukes under konverteringer.

Dette delkapittelet viste til oppgaver som ble utarbeidet i forbindelse med denne studien. Utarbeidelse av oppgaver ble også begrunnet med teori og tidligere forskning.
I neste delkapittel vil det bli presentert metode brukt til å kode det skriftlige datamaterialet som kom som besvarelser på oppgaver presentert over som gjorde det mulig å kategorisere ulike besvarelser per gjennomført konvertering.

3.5.3 Koding

Avhengig av naturen og hovedmomenter i en studie må det bestemmes en metode som er tilstrekkelig, ellers er det nødvendig med to eller flere for å fange komplekse prosesser eller fenomener i ens datamaterialet (Saldaña, 2009)
Kodingen ble delt i to hoved sykluser. Hvor all datamaterialet ble gjennomgått og sortert etter besvarelser dermed kategorisert etter mønster på besvarelser, det vil si satt sammen i kategorier etter like svar per oppgave. De ulike kategoriene ble gitt koder fra 0 til 6, oppgaver som ble ikke besvart fikk null og ellers ble de gitt verdier seks og nedover ettersom besvarelser ble vurdert etter styrke på feil som gjort avhengig av konvertering som ble utført. Med dette menes at korrekt besvarelse gis verdi 6, besvarelse med noe avvik gis videre verdi 5, besvarelse som vurdert til å ha større avvik gis verdi 3 og så videre ned til 1. Den laveste verdien 1 ble gitt i noen av oppgavene til kategori annet, altså besvarelser som i noen tilfeller kunne vanskelig tolkes og det forelå ingen forklaring eller løsningsmetode som ga noe forklaring. Likevel kodingen fanger alle besvarelser som ble gitt. Dette er vist i tabell 3.1 på side 32.
Kodesystemet er ikke et avansert system, da hver eneste besvarelse skulle analyseres i dybden ved neste syklus som var mer fokusert koding og vises gjennom analysekapittelet.
Første syklus i kodingen er en prosess som skjer gjennom en initialkoding og under denne syklusen kan det brukes ulike metoder. De fleste første syklus metoder er enkle og direkte av data. Mens annen syklus metoder er mer utfordrende fordi disse metoder etterspør mer analytiske ferdigheter som for eksempel klassifisering, prioritering, integrering, syntese, abstrahering og konseptualisering. (Saldaña, 2009) Generiske koding-metoder som ble brukt i denne studien er første syklus metode er deskriptiv metode altså hoved kategorisering som verdiene 0 til 6 ble brukt på og i annen syklus ble det sett på ytterligere mønstre innen samme kategori av besvarelser.
Kodingen av elevbesvarelser på oppgave 4 var den lengste prosessen og varte gjennom hele analysen, fordi behovet for å se på hva elever foretrekker av verdiene i sine tabeller meldte seg ved analyse av besvarelser på etterfølgende oppgaver der tabeller er representert i en eller annen form. Da dette antas til å ha en mulig korrelasjon med konvertering fra tabell til både algebraisk representasjon og graf, og fra graf til både tabell og algebraisk, som er et av de største funnene i denne studien og demonstreres i delkapittel 4.1.
SPSS ble benyttet til å samle inn materialet under disse kategoriene, der hver besvarelse fikk kode med romerske tall, for eksempel I.IV, der første tallet koder for gruppe og andre tallet for besvarelse. Dette ble en egen variabel, denne variabelen ble en nominalvariabel. Videre ble det opprettet skalerte variabler for oppgaver, første oppgave ble fordelt på tre variabler som skulle beskrive de tre ulke konverteringer elevene ble bedt om å utføre, ellers variabler per oppgave. Da variablene ble opprettet ble hver besvarelse gitt kode 0 til 6, slik det beskrives over, og ført inn i dataoversikten. På denne måten kunne frekvenstabeller hentes ut slik de er presentert i delkapittel 4.1.
Koding av intervju replikkene ble gjennomført på følgende måte. Intervju med første eleven starter med spørsmålet fra intervjuer, meg, og gis kode 100, svaret fra informanten får kode 101, neste replikk eller spørsmål 102 og så videre, på denne måten for eksempel får replikk eller spørsmål 17, kode 117. intervju med andre, tredje og fjerde elev starter med spørsmål fra intervjuer som får henholdsvis koder 200, 300 og 400, videre telles replikkene opp og tilsvarende får koder som det er forklart med første informant.
Kodingen av besvarelser og intervju ble presentert i dette delkapittelet det videre medfører en vurdering av relabilitet og validitet i denne studien. Neste to delkapitler vurderer dette.

Tabell 3.1 Kategoriene av besvarelser per oppgave

	6	5	4	3	2	1
1 $V \rightarrow G$	*Korrekt*	*start i* (0,4)/(1,5)	$5x$	(0,0)/ Origo=(0,5)	$x \leftrightarrow y$	$2x + 3$
1 $V \rightarrow T$	$x + 5$	$x + 4$	$x + 1/\ x + y$	$5x$	*bare x-verdier*	*annet*
1 $V \rightarrow A$	$x + 5$	$1 \cdot 1 + 5$	$x + 1/\ x + y$	$5x$ / $4x + 1$	$2x + 3$	*annet*
2 $A \rightarrow G$	*G direkte*	*Metode* ↔ *Speilvendt*	*Ggj.* (0,6) og $(-4,0)$	punkt$(-4,6)$	punkt$(6,-4)$	$(0,-4)/$ $(6,0)$
3 $A \rightarrow T$	*T korrekt*	*T korrekt start i* $x = 0$	*få verdier start i* $x = 0$	*start* $x = 3$ $y = -2$	*bare x − verdier*	*annet*
4 $T \rightarrow A$	$\Delta y/\Delta x$ kovarians	*Graf / korrespondanse*	$(\Delta y)x + b$	*Ved G:* $(\Delta y/\Delta x)x + y_1$	*Fra T:* $(\Delta y)x + y_1$	*Fra T:* $(\Delta x)x + \Delta y/$ $(x_1)x + y_1/$ $(y_1)x + \Delta y$
5 $T \rightarrow A$	$\Delta y/\Delta x$ kovarians	*Graf / korrespondanse*	$(\Delta y)x + b$	*Ved G:* $(\Delta y/\Delta x)x + y_1$	*Fra T:* $(\Delta y)x + y_1$	*Fra T:* $(\Delta x)x + \Delta y/$ $(x_1)x + y_1/$ $(y_1)x + \Delta y$
6 $T \rightarrow G$	*G+A Korrekt*	*G: korrekt, A:* $x - 2 \leftrightarrow$ *fra T*	*G: korrekt, A:* $(x_1)x + y_n$	*G:* $x \leftrightarrow y$ *A:* $x - 2/\ x + 1$	*Forskjøvet x-akse (regel) Graf pr. punkt*	*annet*
7 $P \rightarrow G$	*Linje +A*	*Punkter +A*	*Linje*	*Bare punkter*	*2G: (1,0)+(0,4) (3,0)+(0,4)*	*annet*
8 $G \rightarrow A$ $G \rightarrow T$	*A + T korrekt*	*A korrekt T feil/mangler*	*T korrekt A feil/mangler*	*A + T feil*	$3x + 6$	*annet*
9 $G \rightarrow A$	*a:* $\Delta y/\Delta x$ *b rett*	*a:* $y/\Delta x$ *b rett / a:* Δy *b rett*	*a:* $\Delta y/\Delta x$ *per rute b rett*	*a* ↔ *b / annet*		
10 $G \rightarrow A$	*a:* $\Delta y/\Delta x$	*a:* $\Delta y/\Delta x$ *7/3, 5/3*	*a:* $y/\Delta x$	*a:* $\Delta y/\Delta x$ *pr rute*	*a:* $\Delta x/\Delta y$	*a:* Δy */ annet*
11 $G \leftrightarrow A$	*6/6 korrekt*	*5/6 korrekt*	*4/6 korrekt*	*3/6 korrekt*	*2/6 korrekt*	*1/6 korrekt*

3.4 Relabilitet

Påliteligheten til en datamaterialet i undervisningsforskning er betinget i mange faktorer. Deriblant deltageres form, bekymring, innstilling og utholdenhet er bare få av aspektene som kan påvirke prestasjonen og dermed resultatet og kvaliteten til besvarelser. Bryman (2016) sier at ikke alle elever kan være like klare på et bestemte tidsrom og derfor vil ikke det innsamlede datamaterialet reflektere disse elever. Matematikk er krevende intellektuelt sett fra det generelle perspektivet og 90 minutter med intensiv kognitiv belastning kan påvirke kvaliteten av besvarelser mot slutten, mulige vanskeligheter ved oppstarten kan gi ettervirkninger i form av sveket annerkjennelse av egne ferdigheter og selvtillit.

Testen ble tatt relativt tidlig i opplæringsprosessen i begge grupper, for grupper I og II, henholdsvis i uke 3 og uke 4. Andre resultater kunne blitt observert på samme test tatt på slutten av året i forbindelse med for eksempel forberedelse til tentamen. Dessuten har gruppene litt ulikt utgangspunkt med hensyn til eksponering for verditabeller, men dette samtidig viser til funn som kanskje ikke er tilfeldige. Schoenfeld (2010) sier at det er et bredt spørsmål om hvorvidt analyser og presentasjon av dem tar i betraktning de rette faktorer. Når noen analyserer besvarelser, intervju eller undervisningssekvens analyseres det i lys av den valgte teorien og hvorvidt den som leser presentasjonen ville vurdert det som ble analysert fra et annet perspektiv om vedkommende hadde tilgang til de samme kildene og situasjoner, kan antagelig diskuteres.

Oppgavenes utforming kan være en ensidig faktor som kan påvirke resultater i denne studien. Det likevel ble gjort grundige overveielser under utarbeidelse av disse på en slik måte som etter intensjon kunne eksponere elevers eventuelle konseptualisering, preferanser for spesifikke metoder eller feilaktig tenkning.

Gyldigheten av resultatene og hvorvidt de dekker formålet med studien vil diskuteres i neste delkapittel.

3.5 Validitet

Validitet er et mål for gyldigheten av hvorvidt funn som er gjort står i forbindelse med det som det ønskes et svar på. Denne studiens mål er å avdekke utfordringer elever har ved konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner til lineære funksjoner, ved å se på hvilke feil disse utfordringer viser seg gjennom og gi en mulig forklaring av disse feils forekomst. Kvantitative undersøkelser, slik som opptelling av kategoriske feil og presentasjon av deskriptiv statistikk i denne studien kan være ikke dekkende nok til å si noe om fordelingen eller forekomsten av de samme trender i store populasjoner. I denne studien er det brukt kvalitative analysemetoder, som dokumentanalyse og intervju av to deltagere fra hvert utvalg med 21 deltagere i hvert. Dette ansees til å være små utvalg for kvantitativt representative funn, hvor validiteten ville vært sterkere ved større utvalg. Validiteten kan også svekkes av inkonsekvens i besvarelser, som kunne bli tolket her som en type feil av bestemt forekomst, mens i realiteten kunne opprinnelsen være en annen.

Bryman (2016) relaterer validitet i tilknytning til spørsmål om hvorvidt en indikator eller flere indikatorer som er utformet for å måle et konsept, virkelig måler dette konseptet med andre ord at «*x fører til y*» og om det er sikkerhet i at *x* forårsaker variasjoner i *y*. (Bryman, 2016, s.41) Indikatoren i deler av denne studien kan være forskjell på eksponering av elever for verditabeller i de to gruppene, dermed intern validitet kan ansees til å være sterk. Denne sammenhengen med mangel på verditabeller i læreverket og deres homogene utseende kan stå i relasjon med elevers oppfatninger av dem i en læringsprosess. Om de samme resultatene ville blitt oppnådd ved en under andre forutsetninger
Utfordringer som manifesterer seg gjennom feil og opprinnelse til disse feil som er funnet i denne studien kan mulig finnes blant bredere elevmasser og ikke er kun representative for disse to deltakergruppene, eller bare for elever innen det spesifikke kurset i matematikk som er 2-PY. Noe som kan øke den eksterne validiteten. Likevel i undervisningen trenges det et større bilde av hvordan ting henger sammen og generelt, forskning med høy kvalitet kommer ut av der en har en dypere forståelse av det undersøkte område. Forskere må være selvbevisste og klare over deres teoretiske perspektiver. Metoder som brukes må velges på bakgrunn forskningsspørsmål og det må være en dypere forståelse for hva det betyr å påstå noe et undervisningsfenomen. (Schoenfeld, 2010)

I neste delkapittel, delkapittel 3.5, vil det diskuteres etiske betraktninger gjort i forbindelse med denne studien.

3.6 Etiske betraktninger

Undervisningsforskning er et følsomt område med henblikk på menneskelige interaksjoner, opplevelser, følelser, relasjoner og trygghet og mange etiske hensyn som det må tas høyde for. Wellington (2015) er veldig klar på at denne type forskning involverer studier av mennesker og etiske betraktninger må være det første som vurderes. (s.4) Dette er spesielt viktig når en trer inn i et miljø hvor det er mennesker under utvikling fordi sårbarheten som ligger i å bli studert, analysert i dybden kan være en hårfin balanse.

Med alt det tatt under vurdering, ble deltakere presentert for prosjektet muntlig først, da den skriftlige informasjonen kan være vanskelig å ta innover med alle fagbegreper som foreligger og for å

være sikker på at alle ble informert godt, dette for å fjerne usikkerheten om den skriftlige informasjonen ble faktisk lest. (se vedlegg ...) Samtykker ellers ble innhentet skriftlig.
Deltakere i gruppe I ble informert i desember 2018 om oppstart av kommende termin og om gangen i prosjektet før datainnsamling. Mens deltakere i gruppe Y ble informert senere, da det var en vis uklarhet i hvorvidt besvarelsene fra denne gruppen var nødvendige.

Informasjon i begge grupper om at besvarelser skulle anonymiseres så snart de kunne linkes til samtykker, slik at ved eventuelle tilbaketrekk var det mulig å finne til besvarelser, ble gitt samtidig med informasjon om prosjektet. Forsikring om at deltakelse i studien ikke vil påvirke karakterer i faget, eller deres relasjon til læreren ble også ansett til å være av relevans å informere om, for å fjerne latente bekymringer av den art. NSD ble søkt om å utføre studien i to omganger, første gang for å innhente skriftlige besvarelser og andre gang om gjennomføring av intervju. I utgangspunktet ble NSD søkt om intervju helt fra starten av, men da det ikke var sikkert om at det skulle gjennomføres intervju, disse ble søkt om i tilfelle det ble behov, noe NSD ble opplyst om og på anbefaling fra NSD ble dette feltet fjernet første gangen. Det følgelig måtte søkes om intervju ved et senere tidspunkt.

Forskerens deltakende rolle i gruppe II som lærer ble bestemt av flere grunner, for å unngå eventuelle ukomfortable situasjoner for faglæreren og ikke minst for atmosfæren i klasserommet. Det ble vurdert som også et bidrag til hjelp i timene, samt ga deltakere mer mulighet til å bli kjent med, kommunisere med en ny person i klasserommet og stille spørsmål ved behov.
Deltakere i gruppe Y gjennomførte testen som en forprøve i forkant av kapittelprøve i lineære funksjoner og utfra faglærerens tilbakemeldinger var deltakere meget fornøyd med å ta det som en forberedelse, da det kom fram hva den enkelte burde vektlegge under forberedelser. Selv har faglæreren sett gjennom besvarelsene for å få innblikk og gjøre seg mening i hva som måtte eventuelt justeres hos den enkelte før den planlagte prøven.

Informanter ble gitt psevdonymer og transkribert og analysert anonymt, ved behov for intervju ble det gått via samtykkeskjemaer som er linket til besvarelser. Informanter ble spurt på forhånd og informert om gangen i og formålet med intervju. Semi-strukturert intervju gjorde at atmosfæren var lett og lattermild og dermed kunne, selvsagt under forbehold, oppleves avslappende. Matematisk aktivitet kan aldri kategoriseres som avslappende, men fra intervjuers side ble det gjort tiltak for å unngå formell setting. Og slik det nevnes i delkapittel 3.5.2 intervjuene var ikke kun sentrert om de spesifikke oppgaver det var ønskelig å få et svar på men også andre oppgaver der det ble gjort feil av informanter, slik at utnyttelse av situasjonen var på begge sider.
Elevbesvarelser som gjengis i kapittel 4, er ikke faktiske besvarelser, men nøye dupliserte digitale illustrasjoner av dem. Dette ble gjort med høyde for ytterligere anonymisering, da det ble vurdert at håndskriftene er ikke det innholdet som behøver å foreligge som eksempler og mulig kan gjenkjennes. Derfor alle elevforklaringer som gjengis også i teksten er skrevet inn ordrett digitalt og ble gitt utseende av en håndskrift med *Lucida Handwriting.*

Innhenting av datamaterialet under alle overnevnte etiske vurderinger og ellers generelt som ble beskrevet i dette kapittelet førte til neste nivå i denne studien, nemlig analyse, dette presenteres i neste kapittel.

4. Analyse

Skriftlige besvarelser fra de to gruppene ble analysert og kodet etter forekomsten av ulike svar på oppgavene presentert i kapittel 3.5.3. Alle oppgavene er kodet og gitt verdier etter skala 0 til 6, der 0 er gitt for manglende besvarelse og 6, i noen tilfeller 5 og 4, for korrekt svar. Verdiene mellom er sortert etter avtakende korrekthet av svar som er gitt og er kodet etter ulike variasjoner av besvarelser, hvis disse ga mening til og innsikt i tankeprosesser i besvarelser.

Oppgave 1 som er en tekstoppgave, der elever bes om å tegne graf, sette opp tabell og finne funksjonsuttrykk ble delt i tre undergrupper: $Verbal \rightarrow Graf$, $Verbal \rightarrow Tabell$, $Verbal \rightarrow Algebraisk$, da dette ble ansett som mest oversiktlig for analysen. I dette kapittelet vil besvarelsene drøftes ut fra type konvertering, elevers utfordringer og typer feil som følge av elevenes konseptuelle forståelse av objektet lineær funksjon vil bli analysert og oppsummert.

4.1 Analyse av skriftlige besvarelser (dokumentanalyse)

I dette delkapittelet vil innholdet av feil som ble sortert i kategorier, slik de gjengis i delkapittel 3.5.2 analyseres i lys av teori presentert i kapittel 2. Tolkninger gitt til ulike besvarelser er basert på teoretisk perspektiv og ikke deltagernes faktiske tanker, men med hensyn til innholdet i de skriftlige besvarelser.

4.1.1 Oppgave 1: $Verbal \rightarrow Graf$

Denne oppgaven er en tolkningsoppgave og tar utgangspunkt i konvertering fra det multi-funksjonelle registeret der det naturlige språket hører til det mono-funksjonelle registeret hvor matematisk symbolisme har sitt domene. Dette er en type konvertering som involverer global forståelse (Duval, 2006) og globale aktiviteter (Janvier, 1987, Bosse et al., 2011). Denne typen konvertering i følge Duval (2006, 2017) krever en dobbel semiotisk produksjon og dissosiasjon mellom det konteksten representerer, naturlige språket, og det matematiske objektet, gjenkjenning av alle viktige komponenter, dissosiere det representerte objektet i kilderepresentasjon for så å assosiere objektet i målrepresentasjoner som er tabellform, algebraisk uttrykk og graf.
Alle disse tre konverteringsprosesser involverer korrekt mentalrepresentasjon av kilderepresentasjon slik at konverteringen skal være vellykket. Den kognitive distansen mellom innholdet i to representasjoner av samme objektet, men ikke av samme type, avhenger av naturen til disse to representasjonene. (Duval, 2017, s. 45)

Tatt i betraktning at oppgave 1 er tredelt, vil tolkingen av den være avhengig av hva eleven gjør i forhold til deloppgaver, her blir det vurdert hvorvidt for eksempel oppsett av tabellen kunne påvirket graf og algebraisk uttrykk, de denne oppgaven må sees i sammenheng med hva elevene kunne ha utført som første konvertering.
Resultatene for begge gruppene er presentert i frekvenstabell 4.1 under og må sees i sammenheng med undervisningen som ble gitt på forhånd. Gruppe I har jobbet med tabeller i undervisningen som første innføring i lineære funksjoner.

Gruppe I

1 Verbal→Graf

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	1	4,8
	2x+3	1	4,8
	x↔y	3	14,3
	(0,0)/ origo=(0,5)	1	4,8
	5x	2	9,5
	start i (0,4) / (1,5)	3	14,3
	korrekt	10	47,6
	Total	21	100,0

Gruppe II

1 Verbal→Graf

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	5	23,8
	start i (0,4) / (1,5)	1	4,8
	korrekt	15	71,4
	Total	21	100,0

Tabell 4.1 Frekvenstabell V→T

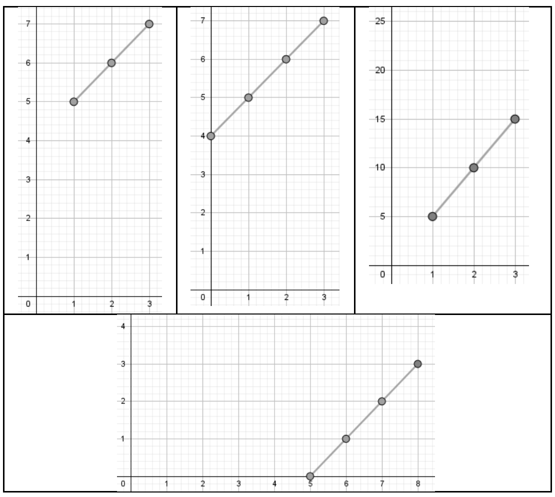
Ut fra frekvenstabellene i hver gruppe kan en se at flere i Gruppe II ikke besvarer oppgaven. Bruk av tabeller er mye mer markant i Gruppe I noe som ikke rart, da elever her fikk, som nevnt over, jobbe med tabeller i større grad, disse elever virker mer fortrolig med denne typen semiotisk representasjon. Selv om elevene ble bedt om å skrive ned rekkefølgen på konverteringer (se vedlagt oppgaveheftet), mange har ikke gjort dette, det blir derfor vanskelig å si med sikkerhet om årsakssammenheng i besvarelser, dette uansett tolkes her etter beste evne utfra hva som kunne vært mulig.

En felles feil i begge gruppene er at fire elever starter grafen i punkter enten $(0, 4)$ eller $(1, 5)$ denne typen feil tolkes her etter Ben-Zeev (1998) til å være *partiell tilpasning* og dermed syntaktisk feil, da elever har flere alternativer med hensyn til punkter, med dette menes om elever tenker måned 0 eller 1 i oppstarten. Uttrykkene som settes opp til disse grafer varierer noe, dette vil bli analysert under deloppgave $Verbal \ \rightarrow Algebraisk$. Det samme blir det med den eleven som setter opp tabell etter $x + 4$, denne eleven skriver likevel riktig funksjonsuttrykk. Ifølge Ben-Zeev (1998) *partiell tilpasning* er en prosess som skjer når personen søker etter et kjent eksempel eller en regel fordi kritikken signaliserer om en utfordring som er slik at den er i seg selv en sammensetning av betingelser. Det blir derfor aktuelt for personen å finne en regel som inneholder en eller flere betingelser, alternativt kan en gjennom regeltilpasningsfasen feile med å kode noen av disse spesifikke betingelser og regelen brukes som den er. Dette kan se ut som tilfelle her, da elevene feiler med å kode den betingelsen som sier noe om at det er allerede 5 glass.

Spredningen av ulike besvarelser er mye større i Gruppe I, tre elever forveksler mellom x- og y-aksene, dermed kan dette være med på å påvirke konverteringen fra tekst til tabell. Tre besvarelser til sammen i denne gruppen bytter om på akser, to av dem gir merkelapp glass til x-akse, mens en elev gjør det ikke. Dette likevel tolkes som samme type feil her, feil i kategori *fravær av kritikk* med den begrunnelsen at denne eleven setter opp tabell etter regel $2x$ mens grafen er skissert inn etter $\frac{1}{2}x$ En elev tegner grafen etter regel $2x$ som også fremgår fra tabellen, som kan ifølge Ben-Zeev (1998) være delvis «korrekt», elevene vet om aksene, men har ikke fått nok korrigerende tilbakemeldinger på plassering av merkelapper. (s.372)

Eleven som utfører konvertering som er kategorisert som $(0,0)$ / $origo = (0,5)$, setter 5 på y-aksen ned til å ligge i origo utover det kan grafen sies, under forbehold, til å være korrekt. Likevel kategoriseres denne feilen til å være kritikk-relatert i underkategorien *svak kritikk.* Dette med en begrunnelse i at eleven kan tenke proporsjonalitet, derfor starter i origo men setter 5 der. Det kan virke som at eleven vet at grafen skal på en eller annen måte skjære i $y = 5$, men mulig noe kunnskap fra tidligere konkurrerer med ny kunnskap, som er i utvikling. Dette ifølge Ben-Zeev (1998) slike partielle feil, som det tolkes her, kan bli en misoppfatning, hvis de ikke korrigeres, slik at eleven får utvikle kritikk-mekanisme og være oppmerksom på dette videre.

Under, på figur 4.1 er det vist noen eksempler på besvarelser:



Figur 4.1 Fire ulike besvarelser

En utfordring her kan være rekkefølgen elevene gjorde oppgavene i, noe som varierte en del, da det er 6 mulige kombinasjoner å utføre oppgaven på. Ut fra tabell 4.2 framkommer det at korrelasjonen mellom besvarelser på de tre ulike deloppgavene viser seg til å være sterk og signifikant, noe som gir mening, da avhengig av rekkefølgen den enkelte elev besvarte oppgaven, var dette med på å påvirke neste steget i oppgaveløsningen ettersom eleven utførte konvertering fra verbal beskrivelse direkte til graf eller gikk via en tabell eller algebraisk uttrykk. Som Duval (2006, 2017) påpeker er en konvertering enten kongruent eller ikke-kongruent, ettersom den semantiske meningen blir bevart eller ikke under konverteringsprosessen, vil i dette tilfellet påvirke videre besvarelse.

Tabell 4.2 Korrelasjon

Gruppe I

Correlations				
		1 Verbal→Graf	1 Verbal→Tabell	1 Verbal→Algebrfaisk
1 Verbal→Graf	Pearson Correlation	1	,629**	,761**
	Sig. (2-tailed)		0,002	0,000
	N	21	21	21
1 Verbal→Tabell	Pearson Correlation	,629**	1	,644**
	Sig. (2-tailed)	0,002		0,002
	N	21	21	21
1 Verbal→Algebrfaisk	Pearson Correlation	,761**	,644**	1
	Sig. (2-tailed)	0,000	0,002	
	N	21	21	21

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

I Gruppe I er korrelasjonen sterkest mellom $Verbal \rightarrow Graf$ og $Verbal \rightarrow Algebraisk$, grunnen til dette viser seg tydelig i antallet elever som utførte konvertering $Verbal \rightarrow Tabell$ i denne gruppen. Her er det mange elever som besvarer denne deloppgaven, og mulig som første konvertering som ble utført, dette kan være en faktor som gjør seg gjeldene ved videre arbeid. Likevel er signifikansen på 0,01-nivå til korrelasjonene mellom de ulike konverteringsprosesser gir et bilde av at om eleven har utført den ene konvertering feil, vil sannsynlig de gjenværende konverteringer også bli ikke korrekt utført heller. Dette igjen fremhever viktigheten av Duvals (2006) påstand om at det matematiske objektet er kun tilgjengelig via dens semiotiske representasjoner, samtidig er konvertering mellom de ulike er en prosess som er krevende for elever og der objektet skal først gjenkjennes i kilderepresentasjon for så å bli gjenkjent i målrepresentasjonen, i denne oppgaven tar elevene først utgangspunkt i tekst og videre står fritt til å velge hva som skal utføres først.

Konvertering fra tekst kan, som tidligere referert, føre med seg to ulike utfordringer ifølge Clement (1981) som kan igjen være grunnlaget for feil. Disse to utfordringer er det syntaktiske aspektet (ord-tilpasning) og det semantiske aspektet (statisk sammenligningsprosess) ved konvertering fra det naturlige språket. (Clement, 1981) Skjer det feil under denne prosessen, vil eleven få videre utfordring og eventuelt følgefeil om den første representasjonen som ble produsert brukes som overgangsrepresentasjon for videre løsning av oppgaven.

Viktig å understrekke at feil på de tre deloppgavene til oppgave 1, statuerer seg som følgefeil utfra hva som er utført mest sannsynlig først. For eksempel tabell kan det se ut som å forårsake grafer eller uttrykk av typen: $x + 4, x + 1, x + y, 2x + 3$. Eller for eksempel skjematisk analogi som: $5x$, $4x + 1$.

Disse feil blir likevel kategorisert utfra konvertering som analyseres, derfor kan blir analysert utfra den deloppgaven der de kan forklares. Elev som finner fram til uttrykket $2x + 3$, vil bli tolket i neste delkapittel da dette kan forklares med tabell.

Av flere mulige variasjoner av besvarelser, var det mulig å kategorisere de fleste. De mulige alternativene for alle tre deloppgaver ble $x + 5$, $x + 4$, $x + 1$, $5x$, $4x + 1$, $2x + 3$, $2x$ og $x + y$.

For deloppgaven $Verbal \rightarrow Tabell$ er det ikke nødvendigvis slik at alle elevene som satt opp verditabellen etter regel $5x$ (2 elever) funnet fram til selve uttrykket (1 elev), dette likevel fremkommer fra verditabellen.

4.1.2 Oppgave 1: $Verbal \rightarrow Tabell$

Mange elever i Gruppe I valgte antagelig sette opp verditabell først. Variantene av tabellene som elevene produserte var basert på de overnevnte kategoriene og er vist i frekvenstabell 4.3 under:

Tabell 4.3 Frekvenstabell

Gruppe I

1 Verbal→Tabell		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	1	4,8
	bare x-verdier / annet	2	9,5
	5x	2	9,5
	x+1 / x+y	4	19,0
	x+5	12	57,1
	Total	21	100,0

Gruppe II

1 Verbal→Tabell		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	8	38,1
	bare x-verdier / annet	2	9,5
	x↔y	1	4,8
	x+4	1	4,8
	x+5	9	42,9
	Total	21	100,0

Mange elever i Gruppe II ikke besvarer oppgaven, noe det kan være flere årsaker til, og kan generelt oppsummeres med at eleven enten ikke husker hvordan tabellen skal settes opp eller velger å ikke bruke tabellen fordi eleven ser det som unødvendig tidsbruk når grafen er tegnet og funksjonsuttrykket er allerede funnet. Elever i Gruppe I virker mer fortrolig med tabeller av naturlige årsaker.

Av fire elever som er telt opp under kategori bare $x - verdier/\ annet$ er det tre som kun fyller inn x-verdier, dette kan ikke klassifiseres som feil, men det heller ikke underlagt tolkning. Mens eleven som svarer annet, svarer: $2x + 3$. Eleven tilhører Gruppe I, som hadde jobbet med tabeller. Dette nevnes nå fordi denne besvarelsen ser ut til å være påvirket av undervisningen og derfor er feil gjort ved *syntaktisk induksjon* med underkategori *falsk korrelasjon*. Denne kategoriseringen begrunnes med følgende:
Eleven setter opp verditabellen, der første verdiene i tabellen er $x_1 = 1$ og $y_1 = 5$, dette tolkes som at eleven leser oppgaven og setter inn 1 glass som kjøpes som x-verdi og 5 glass som allerede er kjøpt som y-verdi i tabellen. Neste x- og y-verdiene er henholdsvis 2 og 7, deretter 3 og 9 og slik fortsetter det. Deretter finner eleven sammenhengen mellom korresponderende koordinatpar som er da $2x + 3$. Dette er en metode elever ble vist i undervisningen, da elevene skulle finne mønster i ulike tabeller i begynnelsen. Rekkefølgen som oppgaven er gjort i er selvsagt vanskelig å bestemme, eleven skriver selv at han/ hun startet med å finne funksjonsuttrykket på kalkulatoren, og på denne måten fant regelen. Likevel i følge Ben-Zeev (1998) er slike feil som kan stamme fra løsningseksempler, eller undervisningen er *falsk korrelasjon,* da «*i læringsprosessen enten verbale eller skrevne eksempler kan inneholde villedende eller feilaktig korrelasjon mellom en bestemt egenskap og spesifikk algoritme*» som av den som lærer abstraheres til en feilaktig regel. (s.375) Dette stemmer overens i med elevens løsning, der metoden brukt på bare tall overføres til en oppgave hvor det nevnes bare to tall, fem og ett. Disse tall bruker eleven metoden på videre.

De neste to besvarelser er fra Gruppe II. Elev, omtalt i forrige delkapittel, som setter tabell etter $x + 4$, ble tolket til å gjøre en syntaktisk feil, ved partiell tilpasning. Mens forveksling av aksene / verdiene i tabellen ($x \leftrightarrow y$), regnes også som semantisk feil, og da ved lingvistisk påvirkning. Denne typen feil blir det sagt mer om videre.

På figur 4.2 kan en se noen av eksempler på verditabeller som ble satt opp på denne deloppgaven. Variantene 2, 3 og 5 av tabeller tolkes som syntaktiske feil, for det kan virke som at elevene som produserte disse tabeller leser tekstoppgaven og tolker teksten videre inn i tabeller ord for ord, altså her er det kan se ut som at prosessen er «ordtilpasnings-prosess» (Clement, 1981; Bossé et al., 2011b) Variantene 2 og 5 kan være eksempeler på en slik feil, det er kun en elev fra begge grupper som produserte en slik tabell. Etter taksonomien av rasjonelle feil kan denne type besvarelse tolkes som syntaktisk induksjon. Hvor eleven skaper mening ved hjelp av det Ben-Zeev (1996, 1998, 2001) kaller "intuitiv matematikk" og denne typen rasjonell feil kan oppstå som et resultat av lingvistisk påvirkning.

Variant 1		Variant 2		Variant 3		Variant 4		Variant 5	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	4	5	6	5	0	1	5	5	1
1	5	6	7	6	1	2	10	6	1
2	6	7	8	7	2	3	15	7	1
3	7	8	9	8	3	4	20	8	1
4	8	9	10	9	4	5	25	9	1

Figur 4.2

Det kan ikke sies med sikkerhet om alle elever som setter opp tabell etter variant 2 har denne feilen, denne måten å sette opp en tabell på kan også komme av elevers opplæring i Excel og kan her kalles «Excel-syndrom», da det ofte nettopp slik tabellene, for eksempel for oppsparing med en startkapital, kan se ut i et regnearkprogram når formlene ikke vises. Hvis en slik Excel-tenking er tilfelle vil denne feilen være av type syntaktisk induksjon. Og kan være et resultat av en slags skjematisk tenkning, altså eleven har skapt et skjema, mental representasjon basert på oppgaver gjort i Excel tidligere om hvordan en tabell skal se ut, ut fra utviklingen tabellen viser. Dette kunne hatt en effekt på oppsettet av tabellen i gjeldende oppgave. Ben-Zeev (1996) refererer til funn gjort tidligere at oppgaver som figurerer oftest kunne assosieres med mer stabile og velformede skjematiske modeller hos elever. Disse modellene er fordelaktige da de er med på å skape struktur i kunnskapen, men de kan resultere i rasjonelle feil når korrekt skjematisk modell brukes i feil kontekst. Likevel etter å ha satt opp tabellen først som mange av elever fra Gruppe I valgte å gjøre, ingen satt opp et rett algebraisk uttrykk.

Dette er i tråd med det Duval (2017) sier om det er ikke representasjonen i seg selv som er matematisk signifikant, det er alle dens mulige transformasjoner i andre semiotiske registre. Fordi matematisk aktivitet mobiliserer alltid to transformasjoner, om det er implisitt eller eksplisitt, der den første transformasjonen produserer en representasjon av samme art som kilde-representasjonen, mens den andre produserer en representasjon av en annen art, altså behandling og konvertering. (Duval, 2017, s. 45) Sagt med andre ord, når den matematiske teksten leses i tilfelle med denne oppgaven, mobiliseres det en mentalrepresentasjon innen samme multi-funksjonelle registeret til det naturlige språket, et mentalt bilde av det en leser, før en går i gang med konverteringen. Avhengig av denne mentale representasjonen som skapes, vil det være med å påvirke resultatet av neste transformasjon, nemlig konverteringen.
Elever som setter opp tabellen etter $5x$, hvor en av dem finner også uttrykket vil analyseres i neste delkapittel, det samme blir elev som finner til uttrykket $4x + 1$, dette regnes her som to noe beslektede svar.

4.1.3 Oppgave 1: $Verbal \rightarrow Algebraisk$

Variasjonen av besvarelser i Gruppe II er mindre enn variasjoner som forekommer i Gruppe I, dette kan skyldes med at elevene i gruppe I har konvertert til verditabell som første transformasjon, eller i større grad tatt i bruk verditabell som overgangsrepresentasjon fra tekstoppgaven for å komme seg videre, her er det enten korrekt eller ubesvart.

Tabell 4.4 Frekvenstabell

Gruppe I — 1 Verbal→Algebrfaisk

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	3	14,3
	2x+3	1	4,8
	5x / 4x+1	2	9,5
	x+1 / x+y	4	19,0
	1*1+5	1	4,8
	x+5	10	47,6
	Total	21	100,0

Gruppe II — 1 Verbal→Algebrfaisk

		Frequency	Percent	Valid Percent
Valid	Ubesvart	5	23,8	23,8
	x+5	16	76,2	76,2
	Total	21	100,0	100,0

Gruppe II, er det er tre elever som ikke besvarer oppgaven. Dette kan en se fra frekvenstabell 4.4 til venstre.
Spredningen over ulike typer besvarelser er i Gruppe I er mye større, der fem av dem ble analysert i forrige delkapittel.
Igjen, elever i denne gruppen lener seg i mye større grad på verditabeller og dette antas til å ha sammenheng med undervisning i forkant av den teoretiske innføringen, da dette var slik de ble presentert for lineære funksjoner som det ble nevnt i delkapittel ... I dette delkapittelet vil tolkes de resterende besvarelser som er $1 \cdot 1 + 5$, $5x$, $4x + 1$.
Besvarelse der det svares $1 \cdot 1 + 5$, kan ansees som nesten riktig, da eleven er under utvikling. Eleven utfører behandling på tall i tabellen som er riktig og klarer å skissere grafen rett. Behandling i følge Duval (2006) er et av de to transformasjonene der det forekommer mindre feil, fordi elevene jobber innen samme semiotiske system, konvertering derimot krever at elevene gjenkjenner det matematiske objektet i det semiotiske systemet det skal konverteres til, her skal det konverteres til algebraisk uttrykk, dette klarer ikke eleven. Ben-Zeev (1998) mener at i innlæring av nytt kunnskap kan de indre kritikk-mekanismer være svake, og konkurranse med kunnskap fra tidligere kan oppstå, i dette tilfellet tallregning som behandling av tall i verditabeller, derfor lar eleven det ene ett-tallet stå i stedet for å erstatte det med en variabel, noe eleven er ikke helt fortrolig med. Dette blir derfor her klassifisert som svak kritikk, da dette er ikke direkte rasjonell feil.

Alle disse feil, bortsett fra grafen som er tegnet etter funksjonsuttrykket $f(x) = 5x$ (graf vist tidligere), kan kategoriseres som semantiske feil og på denne måten, siden dette er en konvertering mellom verbal situasjon til graf tolkes konverteringsprosessene til disse elever som statisk sammenlikningsprosess. Elevene vurderer meningen med grafen, men vet ikke helt hvordan de skal utføre det. Avhengig av de mentale representasjonene i følge Duval (2006) som blir skapt i forbindelse med avkoding av kilderepresentasjon, som i dette tilfellet hører til multi-funksjonelt register, før den faktiske konverteringen, kan det ha påvirket målrepresentasjon.

Dette kan være en tolkning av den beskrevne situasjonen som for eksempel: "*I oppstarten, den første måneden har hun 5 glass*." Det kan være utfordrende for noen å tenke på en måned som "*null*". Mens i tilfelle med grafen til $f(x) = 5x$ kan den mentale representasjonen ha vært: "*Hun kjøper ett glass per måned. Hun har allerede 5*." Glass per måned kan gi en multiplikativ virkning, da ordet per forbindes gjerne med multiplikasjonstegn. Følgelig kunne det bli til: $glass \cdot måned \Rightarrow 1x \Rightarrow 5x$, altså videre til $5x$, da de fem glass som allerede er kjøpt er glass som allerede der i den mentale representasjonen.

Eleven som ikke finner uttrykket svarer følgende: «*Jeg tenkte at hun skulle kjøpe inn 1 glass i måneden, og hun hadde allerede 5 glass fra før. Jeg doblet bare 2*». Dette svaret er noe inkonsekvent med det eleven gjør, og ved nærmere undersøkelse, ser det ut som at eleven skrev *x* først, men visket den bort og erstattet det med 2. Fra verditabellen i samme besvarelse kan en se at eleven multipliserer x-verdiene med 5.

Eleven som finner uttrykket skriver: «*y=1x ·5 Hun starter med 5 glass og hun får 1 glass per x måned. y=x ·5*». Denne besvarelsen er et godt og mer markant eksempel på den foreslåtte mentale representasjonen over, der ordet per kan gi multiplikativ analogi. Denne mentale representasjonen kunne også vært grunn til at en elev har funnet fram til funksjonsuttrykket $f(x) = 4x + 1$, hvor tankegangen kunne vært basert på $glass \cdot måned \Rightarrow 1x \Rightarrow første\ måned\ har\ hun\ 5 \Rightarrow måtte\ hatt\ 4\ før \Rightarrow 4 + 1 = 5 \Rightarrow 4\ glass + 1\ hver\ måned \Rightarrow 4x + 1$. Ben-Zeev (1998) sier at feil på formen $n + mx \Leftrightarrow (n + m)x$ og kan være et resultat av lingvistisk analogi som *tre epler pluss fire er syv epler*. (Ben-Zeev, 1998, s.377) Som i dette tilfellet vil bli *fire glass pluss en.* Eller også analogi til verden utenfor. Dermed blir disse feil her tolket til å være en feil ved semantisk induksjon.

Selv om en ikke kan si med sikkerhet at dette er den måten elevene tenkte på og antagelsen blir spekulativ, så er betydningen av uttrykket fullstendig endret noe som tyder på at semantikken til det matematiske språket og det matematiske språkets innhold er misforstått av elevene. Dermed klassifiseres disse feil som feil oppstått ved semantisk induksjon.

4.1.4 Oppgave 2: $Algebraisk \rightarrow Graf$

I denne oppgaven bes elevene om å utføre en konvertering som etter Duval (2006) er en kongruent konvertering. Med dette menes at hvis elevene har kjennskap til metoden eller regelen og er fortrolige med den, slik den er forklart i læreverket en *x-enhet til høyre og opp / ned*, skal elevene kunne utføre konverteringen direkte eller proseduralt, da meningsenhetene er synlige i det algebraiske uttrykket.
Oppgaven forutsetter konvertering mellom to monofunksjonelle registre, fra en diskursiv til en ikke-diskursivt register. Kilderepresentasjon, som er uttrykt algebraisk inneholder flere meningsenheter (Duval, 2006), der meningsenhetene er organisert på flere nivå som til sammen danner det komplekse innholdet, og transformasjon av denne representasjonen krever diskriminering av organisasjonsnivåer og meningsenhetene, det vil si at eleven skal skille mellom konstantleddet og stigningstallet i uttrykket og skille mellom fortegnene til begge meningsenhetene. Det betyr at hvis eleven utfører konverteringen direkte fra kilderepresentasjon til målrepresentasjon, må eleven være

i stand til å kjenne igjen de viktigste egenskaper til en rett linje i målrepresentasjon knyttet til meningsenhetene i kilderepresentasjon etter at kilderepresentasjon gjenkjennes. Dermed må det skje mobilisering av flere registre samtidig, der eleven skal være i stand til å tolke funksjonsuttrykket innen samme symbolske registeret, samtidig må det nødvendigvis mobiliseres et tredje som skal produsere den grafiske representasjonen. (Duval, 2017, s.82) Tabell 4.5 viser de ulike resultater av konverteringen mellom algebraisk uttrykk og graf.

Gruppe I

2 Algebraisk→Graf

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	2	9,5
	Start i (0, -4) / (6, 0)	5	23,8
	punkt (6, -4)	1	4,8
	punkt (-4, 6)	1	4,8
	G gj. (0,6) og (-4,0)	4	19,0
	G direkte	8	38,1
	Total	21	100,0

Gruppe II

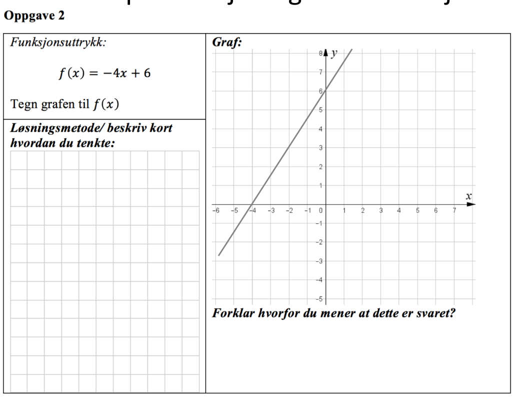
2 Algebraisk→Graf

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	2	9,5
	Start i (0, -4) / (6, 0)	1	4,8
	G gj. (0,6) og (-4,0)	2	9,5
	Metode↔speilvendt	1	4,8
	G direkte	15	71,4
	Total	21	100,0

Tabell 4.5 Frekvenstabell

Til sammen er det 23 elever som utførte konverteringen korrekt. Av disse 23 elever er det fem elever som beskriver sin tankegang i løsningsmetode mer eller mindre oppsummert: “*ser at konstantleddet er 6 og stigningstallet er* $-4x$” Selv om disse elever skisserer grafen riktig, kan det likevel være viktig å merke at elever kan ha eventuelt misforstått syntaksen i algebraisk uttrykk for lineære funksjoner, da det ikke bare koeffisienten til x som ansees som stigningstall, men hele leddet. Dette potensielt kan være en indikasjon på at denne gruppen har en skjematisk modell som kan gi dem utfordringer i konverteringer mellom andre representasjoner, selv om de kan metodisk utføre denne konverteringen.

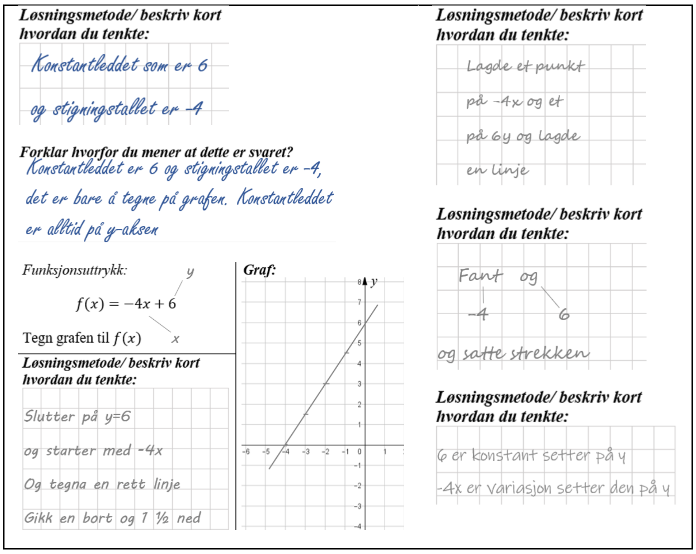
Av de 23 elever er det 15 som kommer fra Gruppe II, noe som indikerer at disse elever har mer av den prosedural kunnskap om hvordan en graf skal skisseres, mens det er bare 8 som gjør det fra Gruppe I. Likevel har disse gruppene en felles feil, nemlig å tegne grafen gjennom punktene $(0, 6)$ og $(-4, 0)$, her er det seks elever, denne feilen skal analyseres etter analyse av elev som bruker regelen *en til høyre og opp/ned* på sin egen måte: «en til siden og opp/ned». Denne eleven utfører konverteringen etter den samme metoden men i motsatt retning og det kan være overgeneralisering av regelen på grunn av det negative fortegnet til koeffisienten, som overgeneraliseres av eleven til å måtte være i 2. kvadranten fordi x-verdiene på x-aksen er negative der. Dette er derfor kategorisert som mis-spesifikasjon og dermed rasjonell feil oppstått ved syntaktisk induksjon.



Figur 4.3 Type feil

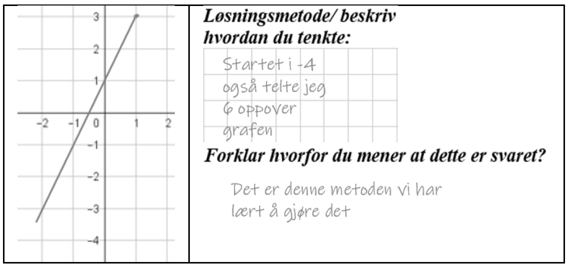
noe liknende feil utføres av til sammen seks elever, bare denne feil ser ut til å være en slags skjematisk forestilling av selve det semantiske uttrykket. Disse elever tegner linje gjennom punkter $(-4, 0)$ og $(0, 6)$. Denne type feil kan bunne i elevenes sterke forståelse for at konstantleddet har tilknytning til y-aksen, det kan derfor være fristende å abstrahere denne regelen til å gjelde også leddet med stigningstallet, men da knyttet til x-aksen. Dette kan se ut til å være en form for lineær dekomposisjon, som av Ben-Zeev (1998) beskrives som en skjematisk mental representasjon, her ikke i form av noe algebraisk regel, men knyttet til aksene i koordinatsystemet. Elevene kjenner til regelen om konstantleddet, derfor mulig overfører de dette til å gjelde også på første leddet. Denne feilaktig tenkning tolkes her til å være en lineær dekomposisjon, som er en mis-spesifikasjon og dermed en feil oppstått ved syntaktisk induksjon. Dette er også noe Duval (2017) også beskriver at når regelen reduseres til å omhandle et punkt, slik det er tolket her, kan dette gi konsekvens i form av ytterligere reduksjon av regelen.

Av seks elever som utførte konverteringen på denne måten, fem ga forklaring, disse er slik som de fremkommer fra figuren 4.4 til venstre. To av elevene nevner konstantleddet, hvor den ene sier at -4 er stigningstallet, mens den andre sier $-4x$ er variasjonen, det kan se ut som at begge har fått med seg begrepene men ikke betydningen. Tre andre elever finner punktene på respektive akser etter $(a, 0)$ og $(0, b)$, der *a* og *b* hentes fra selve uttrykket $f(x) = ax + b$, dette skriver de også. Den ene av dem viser også denne mentale representasjonen av den lineære sammenhengen ved å skrive *x* og *y* ved siden hvert ledd av det gitte uttrykket og sette forbindende strekker mellom dem. Denne eleven skriver også "*en bort og 1½ ned*" og illustrerer på grafen med små merker at for hver en x-enhet, feilaktig til venstre, gir det *1½* y-enheter nedover og dermed viser en kjennskap til regelen, men ikke helt etablert kunnskap om hva det betyr. Alle elever i denne kategorien knytter stigningstallet til et punkt på x-aksen $(a, 0)$ og konstantleddet til et punkt på y-aksen $(0, b)$. Dette kan mulig forklares med at elevene vet at b er konstantledd og skal skjære y-aksen og derfor feilaktig antar at stigningstallet gir skjæringspunktet med x-aksen.



Figur 4.4 Fem besvarelser

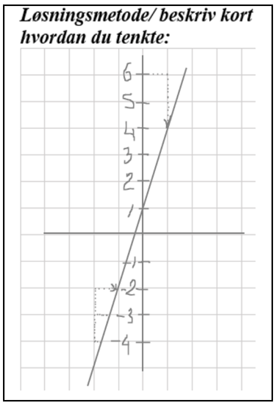
Tre elever fra Gruppe I sammen med en elev fra Gruppe II som ble satt under kodingskategori $(0, -4)$ / $(6, 0)$ svarer gir noen ulike varianter, hvor alle baserer seg på en regel. De kan se ut til å bruke hver sin variant av regelen "$en\ x - enhet\ ut\ til\ høyre\ og\ opp\ /\ ned$". Hvorav tre av elevene knytter stigningstallet til y-aksen og en knytter konstantleddet til x-aksen, henholdsvis fra grupper I og II. Dette er vist på figur 4.5 og figur 4.6. Ben-Zeev (1998) sier at de fleste feil elever gjør er ofte regelbaserte, disse eksempler er enda en bekreftelse på denne påstanden.



Figur 4.5

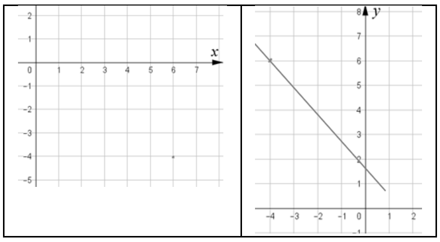
Disse tilfellene er noe vanskelig å tolke eller gi noe forklaring til uten å snakke med hver elev, fordi alle har noe fravikende grafer, hvor to mer like. Første besvarelse på figur ... kan det se ut som at eleven startet i -4 på y-aksen, gikk en enhet til høyre og telte 6 oppover, slik det står i skriftlig forklaringen, men dette ser ikke ut til å stemme, kunne eleven telt feil, eller om det er en annen forklaring, enn det som umiddelbart kommer fram, er det vanskelig å si noe om.

De to andre eksempler på figur ... er ganske like, her tas det med et av dem, der en av elevene ved å tegne punkter (dette vises på besvarelsen til høyre) fra 6 på y-aksen og nedover skriver «*1 ut 2 ned*» og fra -4 på grafen en til venstre og to opp og ved siden av grafen nede skriver «*1 ut og 2 opp*». Den andre eleven gir ingen forklaring. Det likevel kan se ut som at det fra -4 og 6 på x-aksen beveges henholdsvis til venstre og til høyre med en x-enhet og 2 opp og ned. Det kan tenkes at denne 2-en kan komme fra selve algebraiske uttrykket, der elevene uten å ta hensyn til x i uttrykket, regner $-4 + 6 = 2$ og bruker denne. Men ingen av eleven sier noe om det, derfor er denne antagelsen spekulativ. Likevel er det to elever som tolkes til sist i denne delkapittelet gjør noe liknende.



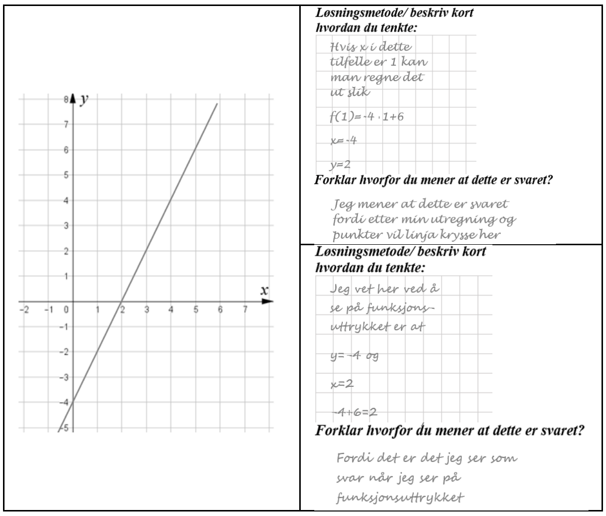
Figur 4.6

Elev fra Gruppe II som utfører konvertering utfra regelen men da knytter konstantleddet til x-aksen, tar høyde for riktig stigningstall og grafen ser ut som den skal, men den krysser ikke y-aksen men x-aksen i $(6, 0)$, bortsett fra at den må parallellforskyves langs x-aksen for at den skal krysse y-aksen. På denne måten er denne besvarelsen mer korrekt enn de tre beskrevet over. Likevel har alle fire besvarelser en eller annen form for tilknytning til den overnevnte regelen, med noe variasjon i hvilken meningsenhet er knyttet til hvilken akse. I og med denne regelen presenteres i både boka og undervisningen, kan dette ifølge Ben-Zeev (1998) skje når elevene er usikre på hvordan konverteringen kan løses derfor søker de etter en kjent regel.
Stigningstallet er i seg selv en sammensetning av betingelser, det er også konstantleddet, hvor blant annet syntaks må tas i betraktning og som Duval (2017) peker ut som viktige visuelle enheter (e.g. $a > 0$ / $a < 0$ / $a = 0$) som videre gir retning. I besvarelsene over har elever ikke forstått semantikken i det algebraiske uttrykket eller har de ikke utviklet de visuelle representasjoner og hva for hva de meningsenhetene, stigningstall og konstantledd er grafisk. Det er også noe i øyenfallende at når elever har lært denne regelen, bruker de ikke overgangsrepresentasjoner, i dette tilfellet tabell. Likevel, de bruker regelen *en ut og opp / ned*, og på grunnlag av det kategoriseres denne feilen som partiell tilpasningsfeil og dermed syntaktisk, etter taksonomien brukt til feilanalyse i denne oppgaven er denne type feil oppstår under syntaktisk induksjon.
Den endelige vurderingen av kategori argumenteres med Ben-Zeev´s (1998) beskrivelse og tolkningen av denne beskrivelsen her, av at når en person ikke klarer å løse en matematisk problem søker han eller hun etter en kjent eksempel eller regel som inneholder en eller flere betingelser som kunne passe til å til de sammensatte betingelser ligger i meningsenhetene og i å plotte en graf, i denne studien, når regelen er funnet men personen mislykkes med kodingen av spesifikke enheter og vil dette føre til at det ikke oppstår en situasjon hvor det ikke er lenger mulig å løse oppgaven, derfor brukes regelen som den er. (Ben-Zeev, 1998, s. 374)
De neste to besvarelser er tatt under samme kategori fordi de har en eller annen tilknytning til punkter (a, b) eller (b, a) der a er stigningstall og b er konstantleddet som elevene henter fra funksjonsuttrykket. Disse elever vurderes disse elever til å ha kritikk-relatert feil, hvor kritikk er svak, elevene har kjennskap til punkter, dette er kunnskap som er etablert tidligere som blir overført og brukt på kunnskap som er under utvikling. Punktene kommer direkte fra det algebraiske uttrykket der det kan se ut som at elevene tenker på stigningstallet og konstantleddet som punkt, dette viser de også ved å plotte inn godt synlige punkter. Den ene eleven tegner bare et punkt, her forveksles det også mellom koordinatrekkefølgen slik den burde ha vært om dette var et punkt. Den andre eleven er kommet litt lenger og ser ut til å kombinere punktet $(-4, 6)$ og en linje, her er det vanskelig å si hvor eleven får det andre punktet, for å få linjen til å gå i den retningen slik det er vist på figur 4.7 Men denne linjen går nært punktet $(0, 2)$, derfor kan et forslag her være samme metode som ble mulig brukt av elevgruppen omtalt før, nemlig at eleven tar dette fra uttrykket ved å ignorere faktor x og bare bruke tall ved $y = -4 + 6 = 2$ og får dermed skjæringspunktet med y-aksen. da de verken tar høyde for syntaksen elles semantikken i det algebraiske uttrykket.



Figur 4.7

De to siste besvarelser som analyseres i dette delkapittelet er besvarelser utført slik det er illustrert på figur 4.8 ved grafen, og skriftlige forklaringer til høyre for den.



Figur 4.8

Den ene av disse to elever har først skissert en graf gjennom punktene $(0, 6)$ og $(-4, 0)$, som kunne vurderes som delvis riktig, med hensyn til konstantleddet som en meningsenhet, men stryket den og tegnet den slik det illustreres på figur 4.8, eleven ble spurt om intervju som analyseres i kapittel 4.2
Begge elevene, ser ut til å ha kjennskap den prosedurale metoden *en x-enhet til høyre og opp / ned*, men trenger mer trening, da begge virker litt usikre på semantikken i uttrykket ennå. Begge bestemmer stigningstallet til å være konstantledd og på denne måten begås det en overtredelse av det som er matematisk riktig og på denne måten når et punkt i oppgaveløsningen der det ikke er lenger mulig å løse oppgaven, hvor antagelig begge sanser at det skjedde noe feil. Det virker til å utløse signal som varsler overtredelsen. (Ben-Zeev, 1998) begge fortsetter likevel videre ved å tilpasse løsningen og på denne måten normalisere prosessen for seg selv, for begge vet at de skal skissere en linje, men ikke lenger hvordan. Samtidig kan det se ut som om begge har noe skjematisk fremstilling av syntaksen i det algebraiske uttrykket, hvor begge knytter meningsenhetene i uttrykket til aksene, hver på sin måte.
Elev som gir besvarelse presentert øverst reparerer situasjonen for seg selv ved å sette $x = 1$ i uttrykket for så å trekke ut -4 og bestemme den til å være x i stedet, her forveksler eleven aksene også, antagelig fordi i det algebraiske uttrykket er -4 koeffisienten til x. Videre utfører eleven behandling ved å regne ut uttrykket der x ble bestemt til å være 1 og får $y = 2$, som under andre omstendigheter ville, sett bort fra manipuleringen av -4, er en korrekt behandling, som viser at elven forstår en del. Resultatet av behandlingen bruker eleven til å bestemme det andre punktet $(0, 2)$ som var nødvendig for å kunne skissere grafen og som eleven i prosessen kobler til x-aksen selv om det står $y = 2$
Den andre besvarelsen er følger også behovet for å normalisere feilen som skjedde ved forveksling av meningsenhetene. Denne besvarelser viser at eleven kvitter seg med x og regner ut $-4 + 6 = 2$ og bestemmer punkt $(0, 2)$. Disse to besvarelser bestemmes etter taksonomien av rasjonelle feil til Ben-Zeev (1998) til å være negasjon (benektelse) av det signalet som utløses av *kritikk* ved overtredelser. Dette som det er skrevet i teorikapittelet er en type feil som skjer når det på et tidspunkt i oppgaveløsningen oppstår en situasjon der det ikke er lenger mulig å komme seg videre fordi det har skjedd en feil, men ved å manipulere den situasjonen på en bestemt måte, nektes *kritikken* fra å bli aktivert igjen. Rasjonaliteten i det er elevens forsøk på å normalisere situasjonen fordi eleven nok forståelse til å vite at det skjedde feil. (Ben-Zeev, 1998) Disse to besvarelser er gode eksempler på elevenes rasjonelle måter å komme seg videre i oppgaven.
Oppsummert vil disse rasjonelle feil bli presentert i kapittel 5.

Neste delkapittel tar for seg analyse av konvertering fra algebraisk uttrykk til tabell.

4.1.5 Oppgave 3: $Algebraisk \;\rightarrow\; Tabell$

I denne oppgaven får elevene uttrykk $f(x) = 3x - 2$ som skal konverteres til tabellform.
I denne oppgaven tas det ikke til følge små utregningsfeil med den begrunnelsen at det er ikke aritmetiske feil som det fokuseres på her. Det ble imidlertid av mer interesse å se på og kategorisere etter hvorvidt elevene fullførte hele tabellen, der det er plass til ni verdier, om elevene valgte å starte tabellen med $x_1 = 0$, fylte inn bare få verdier, brukte andre metoder, fylte bare inn x-verdiene og ikke kom seg videre og ikke besvarte oppgaven. Denne kategoriseringen begrunnes med at det

kan være en indikator på til hvilken grad elevene ser verditabell som en semiotisk representasjon for det matematiske objektet, eller om tabeller er noe som oftest brukes i begynnelsen av innlæringsprosessen for så glemmes ved etablering av andre mer effektive framgangsmåter, som for eksempel skissering av grafer direkte.
Se på antallet elever som fyller inn $x_1 = 0$ som startverdi og mengden av verdiene fylt inn i tabellen har den hensikten til å antyde pre-dominansen av homogene framstillingsmåter av verditabeller i lærebøker så vel som i undervisningen og dessuten signifikansen av denne representasjonen. For dette kan igjen gi noe innsikt i elevers preferanser til både bruk av og som en utløser av mekanismer i tankeprosesser som kan gi rasjonelle feil. Dette blir også analysert og diskutert utover i analysen av besvarelser på oppgaver som har verditabell som representasjon. Kodingen av denne oppgaven slik det er nevnt i delkapittel 3.5.3 var den leste prosessen i kodingen.
I følge Janvier (1987) er konvertering fra algebraisk uttrykk til graf vil ofte involvere en overgang via verditabell, dette er en indirekte konvertering, når elevene lærer seg å konvertere direkte kan det virke som om de ikke føler at de trenger denne semiotiske representasjonen lenger fordi de er i mindre grad avhengige av den og derfor blir den ubevist sett på kun som et hjelpemiddel i en innlæringsperiode av elevene. Duval (2006) sier at elever kan ende opp med systematiske feil hvis variasjoner av representasjoner innen samme registeret ikke presenteres for elevene i tilstrekkelig grad. Verditabell som representasjon er viktig for kunne avsløre meningsenheter som stigningstall og konstantledd om den er utarbeidet til dette formålet,
Kognitive avstanden i følge Duval (2017) bestemmes av kongruensen mellom kilde- og målrepresentasjon, sett fra dette perspektivet skal elevene her utføre behandling før de konverterer til tabell, eller kan de konvertere direkte ved å merke seg de meningsenhetene som framkommer i algebraiske uttrykket, likevel behandling som transformasjon kan være kompleks. (Duval, 2006) Dermed kan kompleksiteten til denne konverteringen være meget individuelt, dette er ettersom hvor langt hver enkelt er kommet i konseptualiseringen av objektet lineær funksjon og hvorvidt elever forstår den semantiske meningen i algebraiske representasjonen.

Gruppe I

3 Algebraisk→Tabell

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	3	14,3
	bare x-verdier / annet	2	9,5
	start x=3, y=-2 ↔ y=x-5	1	4,8
	T korrekt, start i x=0	4	19,0
	T korrekt	11	52,4
	Total	21	100,0

Gruppe II

3 Algebraisk→Tabell

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	6	28,6
	bare x-verdier / annet	3	14,3
	start x=3, y=-2 ↔ a=-2	1	4,8
	få verdier, start i x=0	3	14,3
	T korrekt, start i x=0	7	33,3
	T korrekt	1	4,8
	Total	21	100,0

Figur 4.9

Slik det er vist på frekvenstabellene på figur 4.9 er det 26 elever til sammen utfører denne konverteringen korrekt, noen har noen få små utregningsfeil, dette som nevnt over ikke tas høyde for, da elevene generelt viser ferdigheter og innsikt i konverteringsprosessen.

Av disse er 23 fullfører tabellen i den forstand at alle verdiene det var plass til er skrevet inn. Dette ble gjort enten ved å regne ut y-verdiene ved hjelp av uttrykket eller ved å se på konstantleddet og fylle det inn som de første verdiene og addere 3 til foregående y-verdi for hver en x-verdi. 15 av disse elever er fra Gruppe I og 11 fra Gruppe II, hvor Gruppe I som hadde startet undervisning i lineære funksjoner ved en innføring via tabeller.

14 elever bruker $x_1 = 0$ som første verdi i tabellen. Av elever som ikke starter med $x_1 = 0$ er det mange som starter med $x_1 = 1$.

9 elever ikke besvarer oppgaven, som indikerer at de ikke vet hvordan den algebraiske representasjonen kan brukes, enten for direkte innsetting av verdier eller som representasjon som graf for videre avlesning av punkter, noe er antagelig ikke er etablert heller. Hvor de fleste av dem er fra Gruppe II, kun en elev i denne gruppen starter tabell med en annen x-verdi enn 0

6 elever bare setter inn x-verdiene eller svarer noe annet. Innsetting av kun x-verdier og ingen videre løsning her ansees som en framgang da elevene vet at de skal utføre noe behandling av disse verdiene, de vet bare ikke hvordan. Uansett, av disse 6 elever er 4 besvarelser er illustrert på figur 4.10, hvorav de tre første er besvarelser gitt av deltagere i Gruppe I og er som følger:

1

x	y
6	4
9	8
12	10
15	12

2

x	y
3	1
4	2
5	3
6	4

3

x	y
3	-2
4	-1
5	0
6	1

4

x	y
3	-2
4	-4
5	-6
6	-8

Figur 4.10

De to første fra ser ut til å ha felles mønster, der elevene erstatter hele leddet med stigningstallet med et tall som er ferdig utregnet og setter det inn i x-kolonnen. Siden ingen av elevene viser utregning på noe måte er det vanskelig å si noe om de faktisk satt inn x-verdiene i uttrykket regnet ut og skrev det inn i tabellen, for så å subtrahere 2, eller om de bare forkastet hele leddet og satt inn tall og subtraherte 2. Det kan virke som i det første eksempelet at eleven gjør det, men ukritisk fører inn produktet i tabellen og ikke den x-verdien som er brukt for utregning av produktet.
I det andre tilfellet ser det ut som om eleven bare erstatter hele leddet som følge av ikke fullstendig oppfattelse av syntaks. Det kan også være at eleven henter sin første x-verdi fra uttrykket og behandler den ren aritmetisk, ved å ignorere faktor x. For så deretter når ikke annet er mulig bruke påfølgende tall, ingen forklaringer er gitt i noen av tilfellene.
Dette er likevel en konvertering som ikke er vellykket fordi det semantiske innholdet blir ikke bevart under konverteringen, da kilde- og målrepresentasjon ikke representerer det samme objektet. (Duval, 2006) Etter Ben-Zeev' s taksonomi (1998) tolkes begge til kritikk-relatert feil, hvor det første eksempelet tolkes til fravær av kritikk. Mens det andre kategoriseres under negasjon.
I den tredje og fjerde besvarelser fra venstre på figur ... bruker begge elever a og b fra funksjonsuttrykket som første verdiene i tabellen. I besvarelse tilhørende den tredje tabellen skriver eleven: "*for at 3 skal bli -2, må x være -5*" og ut fra det utvikler tabellen videre etter $y = x - 5$. Her utpeker det seg flere ting, eleven ser den algebraiske representasjon som et punkt, dermed lineær dekomposisjon av uttrykket og følgelig syntaktisk induksjon, denne brukes videre til utvikling av tabellen. Dette er elev som er fra gruppen der det ble jobbet med tabeller i forkant av den teoretiske undervisningen og elevens tankemåte kan være påvirket av dette, da det ble på et tidspunkt snakket om korrespondanse mellom verdiene i en verditabell. Eleven bruker en metode som fungerte godt før, som kan ha sammenheng med undervisningen, falsk korrelasjon som feil. (Ben-Zeev, 1998) Begge elever har tidligere lært noe, mulig relatert den til å være en regel og denne kunnskapen brukes til å løse en oppgave som virker ukjent for dem.
Elev som besvarer oppgaven med verditabell vist som nummer 4 fra venstre, er fra gruppen som jobbet med tabeller på en annen måte skriver: "*x flyttes én til høyre og vil derfor bare stige med 1. y går ned -2 hele veien*". Her kan det se ut som at eleven bruker framgangsmåten som kovarians mellom verdiene, men har både startverdiene hentet fra uttrykket som tolkes også av denne eleven som punkt (a, b) og bruk av konstantleddet, dette er en form for skjematisk forestilling av et punkt knyttet til aksene og dermed overført på funksjonsuttrykk, som ifølge Ben-Zeev er lineær dekomposisjon, som begge sistnevnte elever viser tendens til, derfor syntaktisk induksjon. Sistnevnte elev bruker også regelen men da ikke stigningstallet men konstantleddet til å regne ut på de to neste oppgaver bruker y_1 for b rett fra tabellene, men variansen mellom y-verdiene brukes som a når algebraiske uttrykket skal bestemmes. Det derfor kan tenkes at bruk av konstantleddet i oppgave 3 hos denne eleven er et glipp.
Transformasjonene - behandling og konvertering etter Duvals (2006, 2017) kognitive teori om semiotiske representasjoner er i stor grad bestemt av kongruens eller ikke-kongruens av semiotiske representasjoner som er med i prosessene. (Iori, 2017)

I analyse av de to neste oppgaver (oppgaver 4 og 5) er konverteringen kongruent i oppgave 4, da x-verdiene følger et mønster som er hensiktsmessig rett fram når elevene skal utføre konverteringen fra verditabell til algebraisk uttrykk. Med dette menes at x-verdiene endrer seg med én enhet nedover i tabellen, på denne måten kan elevene se endring i y-enheter uten å måtte forholde seg til endring i x-enhetene som er 1. Dette er ikke et tilfelle med oppgave 5 der elevene blir møtt av en ikke-kongruent semiotisk representasjon, der tegn eller representasjonen er endret (Duval, 2017) i forhold til det elever er stort sett vant til å se av verditabeller, enten det er fra deres egen erfaring med å sette opp verditabeller eller predominans av verditabeller med visse preg i læreboka. Dermed, tatt i betraktning hensikten med oppgaven, som i utgangspunktet var ment for å kartlegge taktikken i løsningene til deltakere, korrespondanse eller kovarians, har metodene variert i mye større grad enn det ble først antatt, og resultatene av elevers produksjoner av den algebraiske representasjonen og antallet av alternative svar ble mange. På denne måten ble funn, som er gjort under analysen av disse oppgavene, hvor en av oppgavene kan kanskje ansees som unødvendig, ettersom de er tilsynelatende like, noen av de mest uventede og oppsiktsvekkende i denne studien og vil belyses ytterligere i kvalitative analysen av intervju og drøftes i diskusjonskapittelet med påfølgende refleksjoner og didaktiske implikasjoner. Disse funn ville ikke blitt oppdaget om begge oppgaver ikke var med, eller hvis denne studien var kun en kvalitativ studie basert på intervju med noen få deltakere.

4.1.6 Oppgave 4: $Tabell \rightarrow Algebraisk$

I denne oppgaven vurderes konverteringen til å være kongruent, da begge de meningsfulle enheter er godt synlige i kilderepresentasjonen, konstantleddet er gitt i verditabellen og stigningstallet kan bestemmes uten noen transformasjoner som annen behandling innen det monofunksjonelle numeriske registeret enn å se på Δy, da $\Delta x = 1$, det vil si at det ikke kreves noen mer kompliserte transformasjoner som behandling av type $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i denne oppgaven.(Duval, 2017) Likevel bør det tas høyde for elevenes individuelle utvikling av ferdigheter, herunder metoder elever bruker: korrespondanse eller kovarians, og nivå av konseptuelle forståelse av det matematiske objektet lineære funksjoner, da testen ble gjennomført tidlig i perioden.

Tabell 4.6

Gruppe I

4 Tabell→Algebraisk

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	2	9,5
	fra T:(Δx)x+Δy / (x_1)x+y_1 / (y_1)x+Δy	2	9,5
	graf / korrespondanse	16	76,2
	Δy/Δx→kovarians	1	4,8
	Total	21	100,0

Gruppe II

4 Tabell→Algebraisk

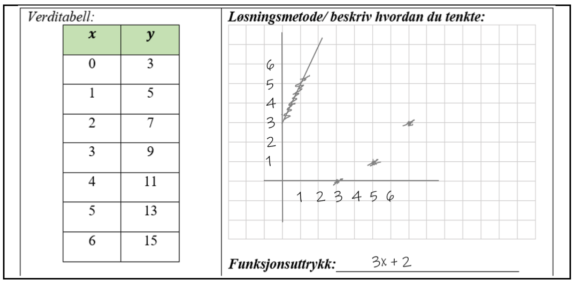
		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	3	14,3
	fra T:(Δx)x+Δy / (x_1)x+y_1 / (y_1	4	19,0
	graf / korrespondanse	9	42,9
	Δy/Δx→kovarians	5	23,8
	Total	21	100,0

Fra frekvenstabellen 4.6 under framkommer det at av 31 elever som besvarer oppgaven korrekt bare seks bruker kovarians mellom verdiene i tabellen under konvertering, fem av dem er fra Gruppe II. Mange elever bruker kovarians delvis, da kun endring i y-verdiene. Dette kommer tydeligere fram i neste oppgave der endring i x er ikke lenger 1, noe som førte til noen viktige funn. Seks elever tegner graf som overgangsrepresentasjon til konvertering, hvor de plotter punktene først, skisserer grafen og leser av det algebraiske uttrykket som er $2x + 3$, dette tolkes her som at disse elever er noe utrygge på bruk av tabeller som semiotisk representasjon, men likevel viser de forståelse for at en tabell, graf og algebraisk uttrykk er representasjoner for det samme matematiske objektet. Av elever som utfører konverteringen ikke korrekt er variasjonen i besvarelsene som følger: $3x + 2$ (2 elever), $0x + 3$ (1 elev), $x + 2$ (3 elever).

Elever i gruppe I, alle bruker korrespondanse mellom korresponderende koordinatpar, bare en elev bruker kovarians, dette kan ha sammenheng med undervisningen, men ingen elever i denne gruppen tegner graf. En elev oppgir svaret etter feilaktig regel $f(x) = x_1x + y_1$, altså $f(x) = 0x + 3$. På oppgaver 5 og 6 brukes den samme feilaktige regelen og med resultater som følger $f(x) = 2x + 5$,

$f(x) = -2x + 0$. På oppgave 3 bruker eleven a og b som første verdier i tabellen som fylles ut, dette kan være en misforståelse, likevel har eleven en skjematisk forestilling i form av lineær dekomposisjon forklart tidligere der elevene kan se ut som bruker algebraisk representasjon som punktnotasjon uavhengig av om de henter ut koeffisienten og konstantleddet ut av et uttrykk, eller setter inn punktkoordinatene inn i uttrykket. Dette er en syntaktisk feil på formen som tolkes her som lineær dekomposisjon. (Ben-Zeev, 1998) En annen elev i denne gruppen svarer $x + 2$, denne feilen gjør også en elev fra gruppe II, disse vil analyseres sammen videre.

Elever som svarer $x + 2$ bruker alle den feilaktige regelen $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$, som antas til å være overgeneralisert fra regelen for avlesning av stigningstallet grafisk og brukt av elevene på tabell. Derfor kategoriseres denne feilen som overgeneralisering.


Verditabell:

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Figur 4.11

Elever som svarer $3x + 2$, kan tenkes forveksler mellom stigningstallet og konstantleddet, da endring y er 2 og konstantleddet er 3. Den ene av disse elever tegner riktig graf og punkter, men stryker alt ut, dette er illustrert på figur 4.11. Det er ikke mulig å si i hvilken rekkefølge dette ble gjort graf eller punkter først, men det kan tyde på at noe forvirrer eleven i tabellen, som eleven ikke får til å stemme. Den andre eleven som gir samme svar på denne oppgaven, gir $f(x) = 5x + 4$ på neste der $y_1 = 5$ og $\Delta y = 4$. Det virker som at denne eleven setter opp uttrykket etter $f(x) = y_0 x + \Delta y$ på begge oppgaver, hvor $y_0 = 3$ og $\Delta y = 2$. Det er to forskjellige elever og det kan ikke argumenteres med sikkerhet, men det kan ikke sees bort ifra at den førstnevnte eleven kan ha samme prinsipp bak svaret. Forskjellen mellom disse to elevene at den sistnevnte bruker $f(x) = y_0 x + \Delta y$, der y_0 er verdien for y når $x = 0$, som en fullverdig feilaktig regel på begge oppgaver uten at det utløser kritikk fra å signalisere at bruddet, derfor fravær av kritikk her er den kategorien som besvarelse til denne eleven linkes til. Mens eleven som tegner grafen viser tegn på utløst kritikk, den er svak, men eleven henvender seg til noe han eller hun kan fra før i forsøk på fjerne det som skaper forvirring, prøver å tilpasse den feilaktige regelen gjennom grafen og punkter, for til slutt å fjerne begge deler og la det feilaktige svaret være som det er. Dermed kategori negasjon, eleven fjerner betingelser (graf, punkter) som utløser kritikken, som videre skaper en preventiv virkning for at det skal signaliseres igjen. (Ben-Zeev, 1998, s. 372) På neste oppgave den samme eleven skisserer graf igjen, denne har $b = 2$, denne gangen blir ikke grafen strøket ut, men til gjengjeld besvares ikke oppgaven. Dette er også et godt eksempel på den tolkningen som er gjort i denne studien av hva Ben-Zeev (1998) mener med kritikk-relaterte feil, som kan stoppe opp løsningsprosesser. Det som ser ut til å ikke forvirre en, kan virkelig forvirre en annen og dermed temmelig individuelt. Det som ikke er i det hele tatt forvirrende for en, kan være ubegripelig forvirrende for en annen. I matematikk mer enn i noen andre vitenskapelige områder. (Duval, 2006)

Elever som svarer $x + 2$ bruker alle den feilaktige regelen $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$, den ene gjennomgående på oppgave 4, 5 og 6. Den andre bare på 4 og 5, mens 6 resulterer i like mange linjer som korresponderende verdier i tabellen. Den tredje eleven bruker den feilaktige regelen delvis på oppgaver 4 og 5, for så bytte strategi helt til $f(x) = x_1 x + y_1$ på oppgave 6, som videre av eleven anvendes på oppgave 8, for å endre tilbake igjen på oppgave 9.

Eleven som gjør dette gjennomgående ble også intervjuet og skal analyseres til sist der intervjuet også skal presenteres. Alle de tre overnevnte elever gir en bekreftende skriftlig forklaring på at de bruker $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$, for validitet av denne analysen. Alle skriver respektivt følgende: 1) " *stiger med 1. y blir to større for hver x verdi*", 2) "*jeg tenkte at x øker med 1 og y øker med 2*", 3) "*starter på 0 og går en bortover fra x fra 0*". Eleven som ble sitert sist, oppgir svaret $f(x) = x + 2$ men stryker lett over 2-eren sin i svaret, dette tolkes her kan være også en overgang mellom to kritikk-relaterte feil, hvor kritikken er svak, samtidig som.

Neste oppgave som analyseres er fortsatt en $T \to A$ konvertering, med den forskjellen at små modifikasjoner ble gjort i verditabellen, der tegn i representasjonen ikke lenger representert slik som elever er vant til å se eller sette opp selv, konstant leddet er ikke lenger synlig og ellers erstattes tegn på den måten at heller ikke Δx er lenger lik 1. Begrunnelse for det foreligger i kapittel ... men dette utdypes mer i neste delkapittel.

4.1.7 Oppgave 5: $Tabell \to Algebraisk$

Konvertering $T \to A$ i denne oppgaven skal etter forventning gi et svar $f(x) = 2x + 1$. Det blir viktig å nevne at i oppgave 5 kan det korrekte $a = 2$ komme av hele feil prosesser som $a = \Delta x$ og $a = x_1$, for begge er 2, før en ukritisk kan vurdere i besvarelser $a = 2$ som korrekt svar. Som det ble tidligere nevnt var denne oppgaven utarbeidet med tanke på å se elevers metoder for å finne det algebraiske uttrykket. Med dette menes hvilke behandlinger deltagere ville anvende på x- og y-verdiene i tabellen for å utføre konvertering og skulle indikere graden av deres utvikling av funksjonsbegrepet med hensyn til metoder som korrespondanse eller kovarians. Dermed vurderes meningsenheter som stigningstall a og konstantleddet b til å ikke være lett tilgjengelig for elevene, fordi kilderepresentasjonen slik den er utarbeidet gir atskillig mindre informasjon om de meningsfulle enhetene og det kreves mer innsats med begge prosesser behandlinger med ulike kompleksitetsgrader, og konvertering for å kunne framstille den etterspurte målrepresentasjonen. Med det som grunnlag er denne konverteringen ikke-kongruent og den kognitive avstanden er større enn i forrige oppgave. (Duval, 2006, 2017)

Tabell 4.7

Gruppe I

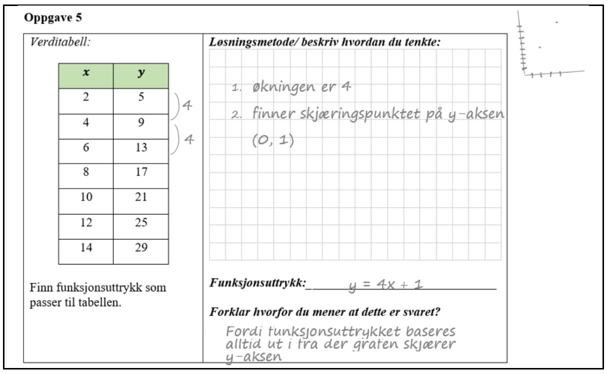
5 Tabell→Algebraisk		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	1	4,8
	fra T:(Δx)x+Δy / (x_1)x+y_1 / (y_1)x+Δy	2	9,5
	graf / korrespondanse	17	81,0
	Δy/Δx→kovarians	1	4,8
	Total	21	100,0

Gruppe II

5 Tabell→Algebraisk		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	3	14,3
	fra T:(Δx)x+Δy / (x_1)x+y_1 / (y_1)x+Δy	4	19,0
	fra T: (Δy)x+y_1 /	4	19,0
	ved G:(Δy/Δx)x+y_1←fra T	1	4,8
	(Δy)x+b	1	4,8
	graf / korrespondanse	6	28,6
	Δy/Δx→kovarians	2	9,5
	Total	21	100,0

Av korrekte besvarelser på denne oppgaven uavhengig av korrespondanse eller kovariansen er det til sammen 26. Av metoder som ble brukt av elevene var det både korrespondanse og kovarians som fremgangsmåten i konverteringsprosessen, som jo var hensikten med denne oppgaven. Kovarians var da betydelig underrepresentert som tenkemåten i forhold til korrespondanse, der bare tre elever bruker metoden $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Fire til sammen besvarer ikke oppgaven, ellers er variasjonene i besvarelser er flere. Noen av dem ble allerede nevnt ved analyse av forrige oppgave, hvor to av dem er $f(x) = x_1 x + y_1$ og $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$. Disse måter, på grunn av den kognitive avstanden ved ikke-kongruente konverteringer, manifesterer ser ytterligere i gjeldene oppgave.
Fra gruppe I, er det de samme 2 elever som gjør feil av typen $f(x) = x_1 x + y_1$, $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$ også omtalt i forrige oppgaveanalyse. Resten av elever er fra gruppe II, som hadde ikke i samme grad brukt verditabeller i denne perioden som elever fra gruppe I.
En del av deltakere tenkte kovarians men kun delvis. Et eksempel på en slik fremgangsmåte er: "*Jeg tenkte at når x endrer seg, ender y seg med 4*". Ut fra det dannet det seg en egen kategori av besvarelser som igjen kan splittes i flere underkategorier. Eksempler på disse underkategorier på konverteringer gjennomført av elevene er vist på figurene og er tolket per besvarelse.
Kategori $f(x) = \Delta y \cdot x + b$ etter Ben-Zeev (1998) tolkes som falsk korrelasjon av en regel $a = \Delta y$ som elevene bruker i situasjoner der verditabeller er bygget etter prinsippet med $\Delta x = 1$, denne blir til feilaktige regel når flere begrensninger legges til i oppgaven og x er ikke lenger 1. Falsk

korrelasjon av metode som ofte brukes for å finne konstantleddet i en verditabell ved $x_1 = 0$ når denne verdien plasseres som første x-verdi i tabellen gir videre feilaktige regelen av typen $f(x) = \Delta y \cdot x + y_1$, med den dobles antallet feil per konvertering, fordi i tillegg til falsk korrelasjon vist over ved stigningstallet, bruker elevene falsk korrelasjon også på konstantleddet. Begge feil er mis-spesifikasjoner av begrensninger og er en underkategori av feil produsert ved syntaktisk induksjon. Til sammen er det fire elever, hvis en ser isolert kun på stigningstallet alene som gjør denne feilen, hvor kun en av dem bestemmer konstantleddet riktig. Denne besvarelsen er illustrert på figur 4.12 under og tolket videre.

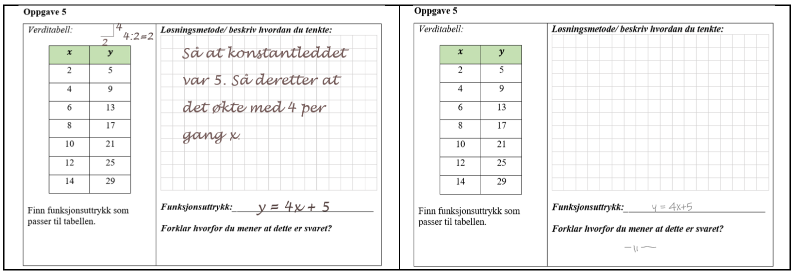


Figur 4.12

Eleven ser på verditabellen at endring mellom y-verdiene er 4, dette vises på besvarelsen til eleven, da eleven tegner piler og noterer 4 ved siden av. Mens konstantleddet finner eleven ved å tegne et lite koordinatsystem ved siden av løsningsmetoden og plotte inn to punkter: $(2, 5)$ og $(4, 9)$. Her er det åpenbart at eleven forholder seg kun til endring i y-verdiene, heretter Δy, og eleven ser heller ikke etter skjæringspunktet med y-aksen i tabellen, på å subtrahere 4 fra y_1 som er 5, men tar i bruk overgangsrepresentasjon, i dette tilfelle punkter i et koordinatsystem. Det verifiseres av eleven altså om at den ene meningsenheten til kilderepresentasjonen, konstantleddet, konverteres på en korrekt måte, da konstantleddet ikke er synlig i tabellen. Men eleven forviser seg ikke om at stigningstallet som representasjonens andre meningsenhet blir konvertert korrekt og bevart i målrepresentasjonen.

Fire elever produserer feil etter feilaktig regel på formen $f(x) = \Delta y \cdot x + y_1$ hvor to av elevene bruker $f(x) = \Delta y \cdot x + y_1$ der ene av de har annet tall som konstantleddet som kan se ut som $y_1 - x_1$, bare en av de to besvarelser presenteres her. x_1 og y_1 er de første i verdier i tabellen. Eksempeloppgaver eller løsningseksempler kan være villedende og elever kan overføre bruk av slike ved falsk korrelasjon mellom bestemte egenskaper og spesifikke algoritmer, på oppgaver som kan se tilsynelatende like ut. (Ben-Zeev, 1998, s. 375) Her tolkes denne bestemte egenskapen til å være den første y-verdien i tabellen, som elever ser ut til å knytte sterkt til konstantleddet i den algebraiske representasjonen. Det ble presentert tidligere på side … som et eksempel fra læreverket som brukes ved denne skolen. Både dette eksempelet og det generelle utvalget av semiotisk representasjon i form av verditabeller i oppgaver, kan være med på at elever i denne kategorien besvarer oppgaven på den måten de gjør, her tolkes dette som en mulig påvirkende faktor og derfor gir feil ved falsk korrelasjon i tillegg til feiltypen i tolkningen av forrige besvarelse, som er knyttet kun til $a = \Delta y$. Det vil si feil ved syntaktisk induksjon: der fire er mis-spesifikajonsfeil som kommer av falsk korrelasjon fra eksempler som elever kunne før, hvor den ene av dem har ikke $a = 4$, men $a = \frac{1}{2}$, da stigningen leses av grafen uten forbehold for skalering av aksene, denne besvarelsen presenteres og tolkes senere. Ellers falsk korrelasjonsfeil i forbindelse med y_1 som konstantledd.

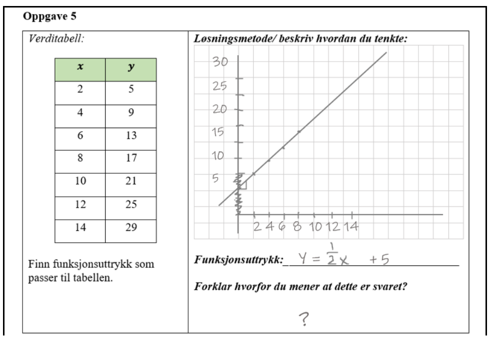
I besvarelsene på figur 4.13 ser tendensen over å forholde seg kun til Δy til å fortsette blant elevene, dessuten kan det ser som at elevene ser på y_1 i tabellen som konstantleddet, uten noe videre overveielser av rimeligheten i svaret.



Figur 4.13

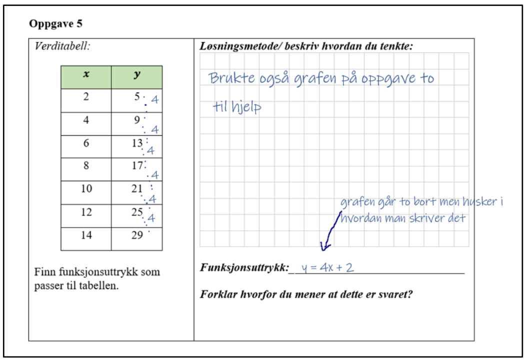
På besvarelsen til høyre er det satt et symbol "$-\|$ $-$" der det er plass til forklaring eller verifikasjon av svaret, slik denne forstås her er den ment for å symbolisere noe som er blitt skrevet før, og derfor en referanse til samme feltet i forrige oppgave (4), der eleven skriver: "*3 er konstant. 2 er variasjon*". Dette tolkes her som at eleven referer til "*5 er konstant. 4 er variasjon*". På besvarelsen til venstre, til tross for at eleven, øverst i hjørnet over tabellen, visualiserer for seg stigningstallet, tegner et lite "stigningstall-merket" og skriver 2 og 4. Dette tolkes her som at eleven tenker to x-enheter til høyre og fire y-enheter opp og at eleven faktisk verifiserer for seg selv ved å skrive ved siden av $4 : 2 = 2$ uten at det kommer til gode i den algebraiske representasjonen eleven konverterer tabellen til, kan det virke som at denne eleven blir forvirret av tabellen, og er noe usikker på framgangsmåten. Men ingen av disse to elevene ser ut til å stille spørsmål ved fraværet av verdien $x = 0$ og eventuelt $y = 1$ skaper noe forvirring. Noe som kan tyde på at elevene forventer av en verditabell til å starte med bestemte verdier, som her antas til å være verdiene $x_1 = 0$ og $y_1 = \{\,\}$. Denne konverteringen gir et resultat eller målrepresentasjon som inneholder både feil ved syntaktisk induksjon, altså det som etter Ben-Zeev (1998) kategoriseres her som falsk korrelasjon, denne er tolket her som sådan på det grunnlaget at hvis eleven ser på verditabell som noe som skal inneholde enkelte bestanddeler som for eksempel $x_1 = 0$ og $y_1 = 1$ og ha konstant $\Delta x = 1$, vil enhver konvertering mellom verditabell som en semiotisk kilderepresentasjon og algebraisk som semiotisk målrepresentasjon være en slags algoritmisk konvertering. og denne algoritmen er utført feil av eleven, dermed syntaktisk feil. Besvarelsen klassifiseres til å ha feil, da det semiotiske innholdet i kilderepresentasjonen ikke opprettholdes.

Neste eksempel som tas ut til analyse er en konvertering fra en annen besvarelse der det også eksponeres en forventning om bestemte x_1- og y_1-verdier i tabellen og manifesterer seg enda sterkere, dette vises på figur 4.14. I denne besvarelsen brukes det en annen metode med en overgangsrepresentasjon som er graf i dette tilfellet, der begge aksene er skalert, antagelig på grunn av arten av x- og y-verdiene i tabellen. For å omgå den globale aktiviteten (Janvier, 1987) som det er å konvertere mellom verditabellen og et algebraisk uttrykk, eller i mangel på godt nok etablerte ferdigheter eller kompetanse om tabellens egenverdi som en semiotisk representasjon i seg selv, velger eleven en lokal aktivitet som er å plotte inn punktene og skissere graf, som et hjelpemiddel for å bestemme funksjonsuttrykket. Dette tolkes som positivt da eleven er løsningsorientert og viser både besluttsomhet og kreativitet som også er et bekreftende tegn på etablerende kunnskap om at de ulike semiotiske representasjoner av det matematiske objektet - lineære funksjoner, har en viss forbindelse, i og med at eleven viser andre måter å tilnærme seg den etterspurte målrepresentasjonen på enn direkte. Likevel under denne overgangsoperasjonen skaper eleven noen utfordringer for seg selv, x-verdiene fra tabellen plasseres på x-aksen med ujevne avstander mellom hverandre. Eleven dessuten innskrenker y-aksen i tillegg på en ikke korrekt måte, videre plottes det inn punkter slik de fremkommer i tabellen med det resultatet at skjæringspunktet med y-aksen er blir liggende i det avkuttede området og dermed er ikke lenger en representativ enhet som eleven kan benytte seg av for å sette opp det algebraiske funksjonsuttrykket. Her ser det ut til at eleven heller ukritisk bruker y_1 verdi i tabellen som



Figur 4.14

konstantledd, mens stigningstallet avleses fra grafen slik det er vist i besvarelsen, hvor eleven bruker rutenettet til dette.
Besvarelsen der det brukes den feilaktige regelen $f(x) = \Delta y \cdot x + x_1$ presenteres på figur 4.15
Eleven som bruker $b = x_1$ ser ut til å forveksle koordinatrekkefølge.


Oppgave 5

Verditabell:

x	y
2	5 4
4	9 4
6	13 4
8	17 4
10	21 4
12	25 4
14	29

Finn funksjonsuttrykk som passer til tabellen.

Løsningsmetode/ beskriv hvordan du tenkte:

Brukte også grafen på oppgave to til hjelp

grafen går to bort men husker i hvordan man skriver det

Funksjonsuttrykk: y = 4x + 2

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Figur 4.15

Her konstantleddet kan også komme av Δx eller x_1, men siden eleven skriver at det ble brukt koordinatsystem i oppgave 2 til hjelp og der kan en se to punkter $(0, 2)$ og $(2, 5)$ kan det tyde på at eleven bruker x_1 til dette, eller mulig feil utregning. Likevel vanskelig å si med sikkerhet, for det kunne skje en aritmetisk feil eventuelt hvis eleven regnet bakover i tabellen. Det likevel ikke ser sånn ut i og med eleven er så nøye med å sjekke Δy mellom alle verdiene. Denne besvarelsen gir feilaktige regel ved falsk korrelasjon ved $a = \Delta x$ og feil med konstantleddet vurderes her til å lsen hvis eleven bruker en av de første verdiene i tabellen.
En annen elev oppgir svaret: "*F(x)=5x+4*" Her forveksler eleven først og fremst stigningstallet og konstantleddet, dette gir en feil som er fravær av kritikk. Etter Ben-Zeev (1998) sin ellers bruker eleven den feilaktige regelen $f(x) = y_1 \cdot x + \Delta y$ som peker mot at eleven bruker en av første verdiene i tabellen, sett bort ifra at eleven forveksler a og b, gir dette to feil ved falsk korrelasjon for begge meningsenhetene a og b. Denne konverteringen er ikke vellykket.
Neste to besvarelser er tolket til å være feil ved lineær dekomposisjon og begrunnes med at i følge Ben-Zeev (1998) er feil som følge av elevens skjematiske forestilling av en regneoperasjon eller en regel som abstraheres av elevene som overføres hvor elevene ikke klarer å begrense denne regelen. Feil av typen $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$, kan derfor tenkes til å komme av en sånn abstraksjon ev regelen som brukes til å lese av stigningstallet grafisk, der en forflytter seg langs aksene tilsvarende Δx og Δy. Dette brukes av elevene i denne kategorien på konvertering fra tabell langs x- og y-kolonner, hvor den ene av dem oppgir svar "*2x+4*" mens den andre "*2x+3*", begge svarer $x + 2$ på oppgave 4, dette ble omtalt på side .... Forskjellen her at er den sistnevnte, samme elev som stryket lett over sin 2 på foregående oppgave, denne eleven endrer sin strategi, som kan tyde på noe forvirring mulig rundt tabellen, da det kan se ut som at eleven bruker første verdiene i tabellen til å finne konstantleddet, altså $b = y_1 - x_1$. Som igjen kan tyde på at det er noe med første verdier i tabellen elever generelt i denne gruppen viser trenden til å være påvirket av. Med det sagt, skal analysen videre over til siste gjenstående besvarelse.
Ved å tegne et koordinatsystem og plotte inn de to første punktene og tegne stigning trappevis, svarer eleven følgende: "*y=2x+5 (?) / y=2x+1*". Eleven oppgir to svar, en som kan se ut for verditabell og en for graf. Eleven tviler, dette svaret likevel kan tyde på at det matematiske objektet ikke knyttes til begge representasjoner og kan virke som at eleven ser de to representasjonene som to matematiske objekter og ikke som representasjoner av det samme objektet. Dette kan være et eksempel på det Duval (2006) kaller kognitiv konflikt, denne oppstår ved at elevene ser representasjoner som et matematisk objekt, samtidig som hvordan skal de skille ut det matematiske objektet fra dens representasjoner, når den eneste måte å få tilgang til det matematiske objektet er gjennom semiotiske representasjoner. Dette er det figuren til Claire Berg (2013), presentert på side 12 er utviklet for å illustrere og som den så tydelig viser, nemlig "*Fraksjonering av det matematiske objektet funksjon fra dens semiotiske representasjoner*" og hvor viktig det er. (Berg, 2013, s.2, fritt oversatt, lagt i kursiv) Rasjonell feil av typen $b = y_1$ ble tidlige tolket som falsk korrelasjon etter Ben-Zeev (1998). Ettersom eleven viser tvil, men likevel oppgir to svar vil denne telles med.

Tabell 4.8

1	$f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x + y_1$	1
2	$f(x) = \Delta y \cdot x + b$	1
3	$f(x) = \Delta y \cdot x + y_1$	3
4	$f(x) = \Delta y \cdot x + x_1$	1
5	$f(x) = \Delta y \cdot x + \Delta x$	2
6	$f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$	1
7	$f(x) = y_1 \cdot x + \Delta y$	1
8	$f(x) = \Delta x \cdot x + (y_1 - x_1)$	1
9	$f(x) = x_1 \cdot x + y_1$	1

Feilaktig regel oppsummeres her generelt som $f(x) = \Delta y \cdot x + y_1$ er brukt av elevene med noen modifikasjoner på både a og b og antallet elever i begge grupper til sammen presenteres i tabell 4.8 med til sammen ni ulike variasjoner. Eleven som finner $a = \frac{1}{2}$ geometrisk er telt med under kategori 3.
Den kognitive avstanden baserer seg på om konvertering er kongruent eller ikke i følge Duval (2017) og denne oppgaven er basert på en ikke-kongruent konvertering, hvor en verditabell ble bare litt endret som følge av det er antallet rasjonelle feil økte betraktelig, alle disse, utenom kritikk-relaterte feil, er feil ved syntaktisk induksjon. Falsk korrelasjon som antas til å komme av ulike eksempler på verditabeller som elever har basert sine feilaktige regler på fra tidligere.
Typer feil som forekommer i denne oppgaven blir derfor kategorisert etter meningsenheter og etter taksonomi av rasjonelle feil til Ben-Zeev (1998), oppsummeres etter tolkinger gjort gjennom analysen i dette delkapittelet.

Neste delkapittel tar for seg analysen av konvertering $T \rightarrow G$, som er en ikke-kongruent konvertering tolket etter Duval (2017), og er vurdert som en slik med den begrunnelsen at y-verdiene i tabellen er valgt til å gå fra 0 til 4 med $y = 1$, mens x-verdiene går fra -2 til 2. På denne måten ser tabellen også uvanlig ut i forhold til læreverket og ellers eksempler på verditabeller brukt i begge gruppene.

4.1.8 Oppgave 6: $Tabell \rightarrow Grafisk$

I denne oppgaven som i utgangspunktet er en $T \rightarrow G$ konvertering, blir elever også bedt om å finne det algebraiske uttrykke som en deloppgave, denne deloppgaven derfor er også enten $T \rightarrow A$ eller $G \rightarrow A$, alt ettersom hva en den enkelte velger selv. Elev besvarelser likevel vil bli analysert i sin helhet, dette for å kunne gi et bedre, mer helhetlig og minst mulig fragmentert bilde av konverteringer som utføres.
Frekvenstabell 4.9 viser resultater av besvarelser på denne oppgaven.

Tabell 4.9

Gruppe I

6 Tabell→Graf

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	4	19,0
	"forskjøvet" x-akse fra x 1 bort y_n opp / G pr punkt →5 G / annet	4	19,0
	G: x↔y, A: **x-2** / x+1 ←fra T	1	4,8
	G: korrekt, A: x-2←fra T pga x↔y	1	4,8
	G+A: korrekt	11	52,4
	Total	21	100,0

Gruppe II

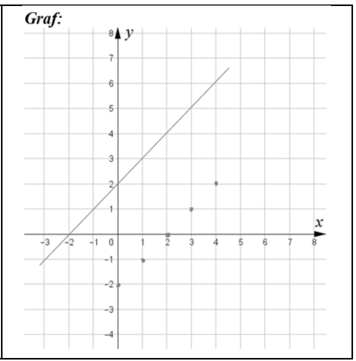
6 Tabell→Graf

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	2	9,5
	"forskjøvet" x-akse fra x 1 bort y_n opp / G pr punkt →5 G / annet	3	14,3
	G: x↔y, A: x-2 / **x+1 ←fra T**	1	4,8
	G rett, A: (x_1)x+y_n / ingen	2	9,5
	G: korrekt, A: x-2←fra T pga x↔y	2	9,5
	G+A: korrekt	11	52,4
	Total	21	100,0

Som det vises i tabellen er det like mange, litt over halvparten av elever, i hver gruppe som besvarer oppgaven korrekt med både korrekt graf og funksjonsuttrykk som er $f(x) = x + 2$. Fire elever i gruppe I og to i gruppe II ikke besvarer oppgaven. Variasjonen i besvarelser ellers er stor.

Analysen denne gangen vil starte med noen elever som svarte korrekt på oppgaven, eller slik det kommer til synet, er det to elever i hver gruppe, til sammen fire som gir besvarelse slik det er illustrert på figur 4.16.

x	y
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4



Figur 4.16

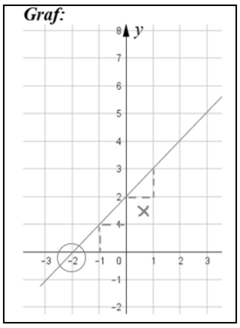
Alle fire elever har plottet punkter, men forkastet dem og tegnet korrekt graf til slutt, påfølgende skrev riktig uttrykk til linjen. En elev gir en forklaring på de plottede punktene, denne er so følger: ”*Tenkte x var y først, men fant ut at det var feil da jeg så (1, 3). Fant ut at det økte med 1 så da var resten av punktene enkle å finne*”. Slik det tolkes her forveksler eleven x- og y-kolonner i verditabellen, det antas at det er på grunn av y-verdiene, med den begrunnelsen at disse ser ut slik elevene er vant til å se verdier til x eller når elevene velger dem selv, noe som kan ha antydning til falsk korrelasjon, slike rasjonelle koblinger kan elever i følge Ben-Zeev (1998) til både eksempler i læreverk og eksempler gitt i undervisning, for dette kan være en preferanse hos de fleste.

En av disse elever i sin løsningsmetode skriver ut alle de korresponderende koordinatpar fra tabellen: ”*(-2, 0) (-1, 1)* ...”, om dette ble gjort før feilpunktene ble plottet inn, eller etter er ikke mulig å si, men hvis det ble gjort etter kan det hende at denne handlingen ble utført for å ikke bli forvirret av tabellutseendet.

Eleven sitert først oppdager feilen ved plotting av punktet $(1, 3)$ og stopper der, da eleven ser at punktet som ble plottet inn var $(3, 1)$. Noen fortsetter til det siste punktet, slik det er visst på figur .... En trekker linje gjennom men krysser den ut, uansett alle disse elever retter opp i den feilaktige første behandling av tabellen, i form av en slags speiling for å gi tabellen ønsket utseende. Det er det Duval (2017) poengterer at for å kunne forstå hva en semiotisk representasjon i kilderegisteret representerer og hvordan kilderegisteret representerer den, må en vurdere målrepresentasjonen som refererer til samme matematiske objekt fra målregisteret, og utføre systematiske endringer i innholdet i anordning til å kunne se hvorvidt noe endres i innholdet i kilderepresentasjonen. Elever som ble analysert over klarte det, men det er mange som ikke gjorde. Disse besvarelser vil analyseres videre.

Elever som skisserer riktig graf, men definerer feil eller ingen algebraisk representasjon er fire elever fra gruppe II. En av elevene enten klarer ikke eller glemte uttrykket.

To elever gir svar $y = x - 2$, dette i begge tilfellene, tatt i betraktning korrekt skissert graf, gir videre rom for tolkning. Besvarelse slik en av de to elevene oppgir grafisk er illustrert på figur 4.17 Eleven tegner en sirkel skjæringspunktet med x-aksen og noen hjelpelinjer som kan markere stigning. Både sirkelen og markeringen kan tyde på noe forvirring. I Og med eleven bruker -2 som konstantledd og ikke stigningstall, kan dette ikke være en skjematisk mental representasjon, og dermed lineær dekomposisjon. (Duval, 2006; Ben-Zeev, 1998) Hva kan denne forvirringen komme av er kan desidert ikke sies med sikkerhet, men hypotetisk kan det knyttes til tabellutforming og bør ikke ignoreres. Hvis eleven er vant i å sette opp tabellen med verdier som tillater eleven å bestemme konstantleddet som er et skjæringspunkt med y-aksen, nemlig $x_1 = 0$, kan komplikasjonen ved verditabellen slik den var gitt, være en påvirkende faktor. I tabellen er $y_1 = 0$ gir skjæringspunktet med x-aksen og eleven bruker det som konstantledd i sitt uttrykk. Dette kan tyde på at eleven korrelerer den ”typiske” for eleven utseende på en verditabell.

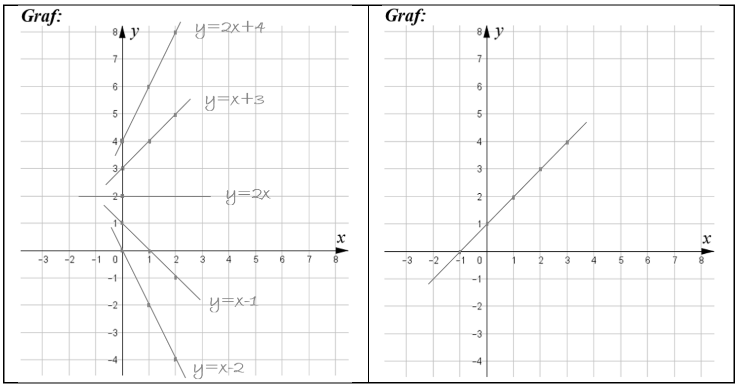


Figur 4.17

Den andre eleven som svarer det samme gir litt mindre rom for elevens grafiske tolkning av problemstillingen men skriver følgende: ”*Så hvor mye y økte per x. y=1x-2*”. I denne besvarelsen viser eleven verifisering av stigningstallet, noe som videre kan peke i retning at eleven har antagelig

også kunnskap om konstantleddet, som likevel ikke brukes i besvarelsen. Det igjen kan utpeke mulig bruk av de første verdiene i tabellen. Derfor kategoriseres disse to feilaktige regler som falsk korrelasjon under syntaktisk induksjon. (Ben-Zeev, 1998)
Siste eleven i denne kategorien som skisserer riktig graf men finner feil algebraisk representasjon skriver «*Går en bort og en opp. f(x)=-2x+4*». Dette tilfellet kan gi antydning av at eleven bruker x_1 som a og siste y-verdi som b. Denne eleven har også gjort liknende men med noen modifikasjoner fra oppgave til oppgave på de to foregående oppgaver. Feil av den typen er en feil som fra analysen tidligere ble tolket til å lineær dekomposisjon med grafisk avlesning fra tabell.

Neste to elever fra gruppe II gir hver sin besvarelse slik de er illustrert på figur 4.18



Figur 4.18

Besvarelsen til venstre vil analyseres først. Eleven som gir dette svaret skriver i feltet til løsningsmetode og funksjonsuttrykk henholdsvis: « *(x, y)* , *y= ax + b*» og forklaring «*tror det er feil fordi jeg er ikke sikker på om tankegangen er rett*» Eleven sier selv om at eleven tror det er feil. Men tankegangen her er kan være en dekomposisjon av tabellen til enkle punkter og deretter en punktvis lineær dekomposisjon av det algebraiske uttrykket hvor x- og y-verdiene settes inn for a og b, bortsett fra $y = 2x$ hvor eleven tilfører faktor x, altså en skjematisk mental representasjon av punkter som $(\square, \lozenge) \Leftrightarrow y = \square\ x + \ \lozenge$. (Tilpasset i denne studien til lineære funksjoner etter Ben-Zeev (1998)) Denne mentale representasjonen en gjenganger blant elever i begge gruppene, der elever erstatter symboler i slike skjematiske representasjoner med verdiene fra tabeller som kan variere ettersom elever i tillegg skjematiske framstillinger av akser eller falsk korrelasjon i forbindelse med første verdier i tabellene. Her tolkes det etter Duval (2006, 2017) at eleven ser de korresponderende verdiene i punktnotasjonen som et matematisk objekt i seg selv, og ifølge Duval (2017) en kognitiv konflikt består i det å skille mellom matematisk objekt og representasjoner den kan ha.
Elev som gir besvarelse illustrert på figur ... (venstre) finner uttrykket som passer til grafen, altså $y = x + 1$. Her derimot er framgangsmåten ved plotting av punktene som kan spores til regelen *en x-enhet til høyre og opp / ned.* Elever skriver: «« *Jeg fant tallene under x raden på x aksen også så jeg når jeg går et steg til høyre hvor mange ganger må jeg opp får å finne tallene under y i tabellen*». Med dette mener eleven at ved å starte i -2 på x-aksen (*under x raden*) og gå en x-enhet til høyre, så 0 opp (*under y i tabellen*) får eleven punkt $(-1, 0)$. Videre starter i -1 på x-aksen og en x-enhet til høyre, så 1 opp, gir punkt $(0, 1)$. Påfølgende starter i 1 på x-aksen og gå en x-enhet til høyre, så 2 opp og slik fortsetter eleven til alle punktene er plottet inn og linjen kan skisseres. Ifølge Ben-Zeev (1998) når elever generaliserer regler på en slik måte at de reviderer en ny regel i forsøk på å tilpasse den til en ukjent situasjon, dette kan skje ved å forme en analogi mellom nytt og kjent problem, derfor kategoriseres denne besvarelsen som generalisering av regelen *en x-enhet til høyre og opp / ned* som er underkategori til mis-spesifikasjon under syntaktisk induksjon.

To elever, en fra hver gruppe I og II, speiler verditabellen, men i motsetning til kategorien av elevene som retter opp, gjør ikke det og skisserer grafen speilvendt om $y = x$ (denne brukes her kun til visualisering). Denne feilen vurderes etter Ben-Zeev (1998) til kategori falsk korrelasjon. Elev fra gruppe I setter opp uttrykket $f(x) = x - 2$ so stemmer med grafen, derfor kan være en følgefeil, eller glipp og ikke ansees som noe annet feil her.

Elev fra gruppe II (intervjuet) bestemmer uttrykket til å være $f(x) = x + 1$. Denne eleven, slik det er nevnt tidligere, bruker denne metoden gjennomgående i oppgaver 4, 5 og 6, som tyder på at eleven har en skjematisk mental representasjon $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$ som bunner i grafisk avlesning fra tabell som knyttes til aksene.

To elever fra gruppe I utfører konvertering på to ulike måter, hvorav en bestemmer uttrykket utfra de første verdiene i tabellen etter en feilaktig regel knyttet til punktvis lineær dekomposisjon av algebraisk representasjon, nevnt også tidligere, det ble kodet som skjematisk forestilling på formen $f(x) = x_1 \cdot x + y_1$. Denne eleven besvarer oppgave med $f(x) = -2x + 0$, og skisserer grafen korrekt etter sitt uttrykk.
Den andre eleven plotter inn to punkter, disse er plottet inn speilvendt, derfor falsk korrelasjon som rasjonell feil, denne eleven skisserer ikke grafen.

Tre elever, to fra gruppe I og en fra II skisserer noen grafer, hvorav to elever, en fra hver gruppe henholdsvis, skisserer graf etter $f(x) = 2x + 3$ og etter $f(x) = -x + 4$. Ingen av dem gir noe forklaring, men i koordinatsystemet på besvarelsen til sistnevnte eleven er det også å finne punkter $(4, 4)$ og $(4, -4)$, dette er i tillegg til at selve grafen går gjennom punktene $(0, 4)$ og $(4, 0)$, tabellens siste y-verdi er 4, om det kan ha noe sammenheng er en mulighet, det er likevel umulig å si det.
Siste elev i denne kategorien tegner fem linjer blant annet $y = x$, som tilsynelatende ser ikke ut til å ha noe sammenheng med noen av verdiene i tabellen. Ingen av elevene finner noen algebraisk representasjon til sine grafer. Disse besvarelser tolkes her som svak kritikk og derfor kritikk-relaterte feil. Dette er ifølge Ben-Zeev (1998) er feil der eleven i forsøk på å løse et problem søker til noe eleven kan fra før og anvender det på eksisterende problem, det bare i dette tilfellet er umulig å si hva som brukes av elevene.

Samlet viser resultater i denne oppgaven at 12 og 15 elever, henholdsvis fra gruppe I og II, utførte vellykket konvertering $T \to G$, fordi i følge Duval (2006) er en konvertering vellykket bare hvis det semantiske innholdet i begge representasjoner bevares under denne transformasjonen. Likevel er det en og fire av disse elever klarer ikke konvertering $G \to A$.
Rasjonelle feil gjort av elevene oppsummeres for begge grupper etter type feil, i henhold til tolkning av disse etter taksonomi til Ben-Zeev (1998) i tabell .... i kapittel 5 der resultatene diskuteres.

Neste analyse behandler konvertering fra to gitte punkter til algebraisk representasjon, der a=0

4.1.9 Oppgave 7: $Punkt \rightarrow Algebraisk$

Frekvenstabell 4.10 viser resultater av denne konverteringen
I besvarelser på denne oppgaven er det stor spredning i begge gruppene, slik det vises i

Gruppe I

7 Tabell(punkt)→Graf

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	3	14,3
	annet	2	9,5
	2 G → (1,0)+(0,4) og (3,0)+(0,4)	1	4,8
	bare punkter	2	9,5
	linje	6	28,6
	punkter + A / 0x+4	1	4,8
	linje + A	6	28,6
	Total	21	100,0

Gruppe II

7 Tabell(punkt)→Graf

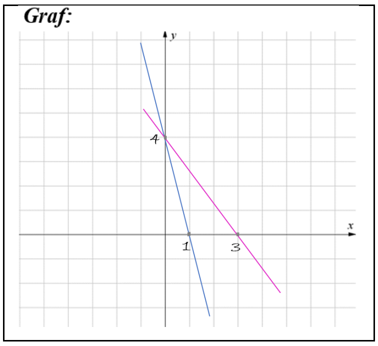
		Frequency	Percent
Valid	annet	1	4,8
	2 G → (1,0)+(0,4) og (3,0)+(0,4)	2	9,5
	bare punkter	5	23,8
	linje	1	4,8
	punkter + A / 0x+4	3	14,3
	linje + A	9	42,9
	Total	21	100,0

Tabell 4.10

frekvenstabellen er det seks og ni elever som besvarer oppgaven med en linje og algebraisk uttrykk, skrevet på formen $y = 4$. En og tre elever respektivt fra gruppe I og II plotter punkter, men tegner

ikke grafen, likevel finner disse elevene uttrykket. Duval (2017) viser til at de visuelle ved en lineær graf egenskapene dobles i forhold til de fem viktige egenskaper til en lineær funksjon. Dette kan mulig være årsaken til at elever ikke tegner linjen, fordi selve likningen settes til å være ett tall og elevene synes det er vanskelig å se for seg at den algebraiske representasjonen slik elever viser tendens til å skrive den i denne oppgaven kan være en graf med stigning 0 når de ikke skriver det på denne måten. Bare en elev fra hver gruppe, to til sammen, skriver $f(x) = 0x + 4$, to elever fra gruppe II plotter punkter og skriver $y = 4$. Denne skrivemåten kan bunne i bruk av GeoGebra, når elever jobber med oppgaver der de blir bedt om å finne for eksempel bestemt tidspunkt for en eller y-verdi, kommando som brukes da er $y = \{\}$. Noe teoretisk innføring til en slik tilfellet gis ikke i læreverket. Hypotesen her er da at når elevene vet hvordan et uttrykk for lineære funksjoner skal se ut, kan slike reduksjoner i uttrykket uten videre teoretisk forklaring og innføring skape en del forvirring, for hvordan kan $y = 4$ bli til en graf når de vet at det generelle algebraiske uttrykket til en lineær graf skal se ut på formen $f(x) = ax + b$.
Dette kan også gjelde elever som enten plotter bare punkter eller skisserer linjen, men i invers retning, forklart med Duvals (2017) visuelle kognitive egenskaper, hvis elever ikke hadde sett grafer parallelle med aksene, men elevene vet at lineære grafer har de egenskaper som enten å gå opp eller ned, kan dette, slik det tolkes her, mulig være årsaken til at elever unngår å trekke linje gjennom punktene, og derfor stopper opp. Bare plotte punkter og ikke skissere linjen blir derfor her tolket til å ha semantisk sammenheng, og på denne måten etter Ben-Zeev (1998) en analogi til elevens egne mentale representasjoner. Denne semantiske sammenhengen kan gjelde ved både grafisk representasjon og den algebraiske. Det er likevel ikke gjort feil i den forstanden, elever bare møter et punkt der de ikke lenger kan løse oppgaven.

Tre elever, en fra gruppe I og to fra gruppe II, har det skjematiske bildet, presentert og illustrert tidligere hvor punktnotasjon foreslås til å kodes av elevene på formen $(\square, \lozenge) \Leftrightarrow y = \square\ x + \ \lozenge$, men i dette tilfelle «festes» stigningstallet grafisk til x-aksen, dette er vist på Figur 4.19.



Figur 4.19

En av dem skriver i løsningsmetode følgende «*Trakk linje mellom 1, 4 først og deretter mellom 3, 4*» og en annen «*(x, y)*«. Skissere punkter som linjer er et fenomen som forekommer i begge grupper, det mulig peke på likheter i tankeprosesser blant elever. Slik det tolkes her, disse elever kjenner til at funksjonsuttrykket for lineære funksjoner skal inneholde to viktige meningsenheter og de vet at grafen er en rett linje, derfor demonstrerer de en innovativ og systematisk tilnærming som bryter med matematiske prinsipper. (Ben-Zeev, 1998) Og selv om det kan se ut som at elevene har et skjematisk bilde av et punkt og uttrykk, tolkes denne type feil her som generalisering, fordi elever på bakgrunn av deres forklaringer generaliserer regel for syntaktisk struktur av $f(x) = ax + b$ og rett linje som graf, til punkter.
To elever fra gruppe I plotter to punkter hver, der første punktet er korrekt, mens andre er plassert lavere enn det første, ingen av dem gir noe forklaring.
Neste elev i denne gruppen skisserer to linjer en av dem er riktig, mens andre er skissert etter $f(x) = 4x$, den går gjennom $(1, 4)$, som funksjonsuttrykk oppgis «*f(x)=x+4 g(x)=x+4*», dette kan tyde på at eleven har ufullstendig oppfatning av begge meningsenheter, og dermed det semantiske innholdet, derfor klassifiseres denne besvarelsen som fravær av kritikk, da eleven verifiserer ikke rimeligheten av to uttrykk som beskriver samme matematiske objekt og to ulike grafer,
En elev i gruppe II oppgir algebraisk representasjon av linjen som eleven har skissert korrekt, som «*y=4x*». Denne feilen klassifiseres inn under samme kategori som den nylig omtalte eleven, med samme begrunnelse.
Av interesse ellers kan det være å se på forklaringer elever gir, noen setter spørsmålstegn ved feltet til likningen, en elev skriver i løsningsmetode «*(1, 4) og (3, 4) er to uttrykk*» og setter

spørsmålstegn der funksjonsuttrykket skal skrives inn. En annen oppgir «*1+4, 4-3*» som svar. Her den første eleven utviser noe som virker som ufullstendig oppfatning av semantikken i det algebraiske uttrykket, mens den andre henter kunnskap fra tidligere i forsøk på å tilpasse den til ny situasjon, i det andre tilfellet da dette oppgis som svar og punktene som er plottet inn er (1, 4) og (2, 1) vurderes til svak kritikk, det kan virke som at eleven vet at det har skjedd noe overtredelse. Elever som ikke oppgir noe algebraisk uttrykk, vurderes til å ikke ha besvart oppgaven.

Samlet resultat for denne oppgaven klassifisert etter feil vises i tabell 4.11.

$\boldsymbol{7\ P \to A}$			
1	$(\square, \Diamond) \Leftrightarrow Linje$	Generalisering (punkt som linje)	3
2	$f(x) = x + 4$	Fravær av kritikk	2
3	$x \pm y$	Svak kritikk	1

Tabell 4.11

I neste oppgave som analyseres bes elevene om å utføre konvertering $G \to A$ og fylle ut verditabell.

4.1.10 Oppgave 8: $Grafisk \ \to \ Algebraisk$

Oppgaven presenterer graf etter $f(x) = -2x + 6$, i tillegg til å finne funksjonsuttrykket, bes elevene om å fullføre verditabell. Slik det er presentert i frekvenstabellen er det mange flere elever som finner funksjonsuttrykk og fullfører tabellen i gruppe II. Mange flere i denne gruppen finner korrekt algebraisk uttrykk, 14 elever, mens i gruppe I er det bare seks. Dette kan ha sammenheng måten elever i gruppe I jobbet med tabeller og brukte korrespondanse som metode for å finne regler som skulle passe til alle korresponderende verdier i en tabell, men ikke med negative tall, da intensjonen var at så mange som mulig skulle få det til og at elever skulle utvikle en intuisjon rundt funksjonsbegrepet. Hvis elevene ikke gjorde så mange oppgaver som de fikk fortløpende, ville de ikke kommet til oppgaven med innhold som omfatter bruk av negative tall. I funksjonsuttrykket i denne oppgaven er stigningstallet negativt og hvis elevene prøvde å finne uttrykket med kun bruk av positive tall, ville følgelig ikke få det til. En elev i denne gruppen som fant uttrykket, antagelig ved bruk av denne metoden skriver «*Først startet jeg med å finne hvert enkelt punkt ved å bruke grafen til venstre. Deretter begynte jeg å prøve å regne ut for å finne det riktige funksjonuttrykket. Det var ikke så lett*». På forklaringen hvorfor eleven mener at svaret er riktig svarer den samme eleven «*Jeg mener at dette svaret er f(x)=-2x+6 fordi dette er det eneste regnestykket jeg prøvde som gjorde at jeg fikk samme svar nedover hele veien. Jeg prøvde mange tall helt til jeg fant ut dette*» Hvis det er tilfellet at flere elever kunne ha prøvd seg på denne metoden, uten å prøve negative tall ville det stagnere framgangen. Resultater fra analysen av Oppgave 8 viser at konvertering $T \to G$ som er første aktivitet er vellykket gjennomført av 12 elever fra gruppe I og 15 elever i fra gruppe II og det kan tyde på at prosedurale ferdigheter i den sistnevnte gruppen er noe sterkere. (Rittle-Johnson et al., 2016) Det skjer likevel noen frafall når elever skal utføre konverteringer $G \to A$ eller $T \to A$ på Oppgave 8, det virker uansett at elevene flest skisserte grafen først. Samtidig er det bare elever fra gruppe II som forbinder første verdier i tabellen til å være bestanddel som konstantledd uavhengig av om denne verdien nå er gitt i tabellen som skjæringspunktet med x-aksen og ikke y-aksen og til tross for korrekt skissert graf. Dette kan skyldes med at disse elever har utviklet en feilaktig regel på grunnlag

Gruppe I

8 Graf→Tabell

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	4	19,0
	3x+6 T feil	1	4,8
	A+T feil	4	19,0
	T korrekt, A feil/mangler	6	28,6
	A+T korrekt	6	28,6
	Total	21	100,0

Gruppe II

8 Graf→Tabell

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	1	4,8
	3x+6 T feil	1	4,8
	A+T feil	4	19,0
	T korrekt, A feil/mangler	1	4,8
	A korrekt, T noe feil/mangler	3	14,3
	A+T korrekt	11	52,4
	Total	21	100,0

Tabell 4.12

av eksempler på verditabeller som er sett av elever at der er en regel at verditabeller skal både starte med og inneholde Konstantleddet som bestanddel.
Mange elever, fire, fra gruppe I ikke besvarer oppgaven, mens det er bare en elev fra den andre gruppen.

Av feil som ble produsert under løsning av denne oppgaven er det stor variasjon.
To elever, en i hver gruppe gir hver sin variant av funksjonsuttrykket $f(x) = 3x + 6$. Den ene av dem gir det faktiske utrykket slik det er oppgitt, mens den andre gir uttrykket punktnotasjon som " *(6, 3)*" og dermed forveksler også koordinatrekkefølgen, slik det tolkes her. Dette kan tyde på at begge elever ser på skjæringspunktene med aksene i sammenheng med begge meningsenhetene. Den føsrte skriver det på formen$f(x) = x_0 \cdot x + y_0$, indeksen er for å indikere skjæringspunktene, mens den andre på formen (y_0, x_0). Dette etter Ben-Zeev (1998) tolkes her, henholdsvis, som grafisk lineær dekomposisjon i første tilfellet og grafisk lineær dekomposisjon og generalisering av punktnotasjon i andre tilfellet.

To elever som begge fylte ut verditabellen riktig, en fra hver gruppe, henholdsvis gruppe I og II, gir svar på formen « -2×6» og skriver «*jeg vet at vi skal gå en ut og to ned, men skjønner ikke hvordan finne uttrykket. Har skrevet sånn jeg husker men har sikkert feil*», og « -2+6» og forklarer «*Linjen skjærer y-aksen i +6, dette blir konstantleddet. Linjen går ned med 2 hver gang*». Her er det syntaksen som brukes feil, men begge kan metoden proseduralt, den semantiske meningen i lineære uttrykk er ikke blitt fullstendig oppfattet av disse elever, dermed konseptuelle forståelsen for objektet er ikke blitt dannet ennå. Den ene eleven vurderer en mulig feil, mens den andre gjør ikke det og det kan hende at eleven bare glemte å skrive x i det andre tilfellet. Likevel er dette tolket her som kritikk-relaterte feil, den første er til svak kritikk mens den andre til fravær av kritikk.

Av feil som ble gjort i forbindelse med uttfylling av verditabeller er variasjoner i gruppe I slik de er vist på Figur 4.20, ingen av disse elever har kommet fram til funksjonsuttrykket.

1: x	1: y	2: x	2: y	3: x	3: y	4: x	4: y
-1	1	-1	3	-1	2	-1	4
0	6	0	6	0	3	0	2
2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	3	0	6	0	2	0
4	-2	4	-2	4	1	4	3

Figur 4.20

De to første er fylt ut riktig borsett fra de førte y-verdiene. Det er vanskelig å forklare tabell på illustrasjon 4 og $(-1, 1)$ på illustrasjon 1, men på illustrasjon 2, kan en mulig forklaring være skjæringspunktet med x-aksen, selv om første x-koordinaten er -1, er dette det nærmeste som kan foreslås i denne analysen. Disse to feil vurders her til å klassifiseres som fravær av kritikk, da elevene ellers klarer å lese av koordinatene.
Elev som fyller ut tabell 3, bortsett fra første koordinat som er vanskelig å forklare, kan se ut som at bytter på koordinatrekkefølge, i den forstand at alle gitte verdiene betraktes av eleven som x-verdier, med noen modifikasjoner. Dette kan skyldes med at eleven har ikke vært borti tabeller der y-verdiene er gitt men ikke x. Denne prosessen krever da en tilpasning, dermed tilpasser eleven en regel eller metode noe som eleven kan fra før til ukjent situasjon. I følge Ben-Zeev (1998) kan dette skje når elever søker etter kjente eksempler som utformer egenskaper til gjeldende problemstilling, når lignende eksempel er funnet, impliserer eleven denne prosedyren i problemløsningen, ofte oppstår det når en løsning er en sammensetting av betingelser. De sammensatte betingelsene her er at elevene må forholde seg til både $x = 0$ og $y = 0$, noe som krever bestemte avlesning i bestemte retninger. Feil som oppstår under slik kontekst er feil ved partiell tilpasning, under syntaktisk induksjon.

Elever i gruppe II som svarte feil både i forbindelse med tabeller og algebraisk representasjon på grunn av verditabellen vil analyseres videre. Det kan tyde på at seks elever i denne gruppe gjør feil

enten med algebraiske representasjonen som følge av tabellens første verdier eller med tabellens første verdier som følge av den algebraiske representasjonen, med noen variasjoner.
Alle disse besvarelser er presentert på Figur 4.21, disse er nummerert fra en til seks, og hver elevbesvarelse med både algebraisk uttrykk og den utfylte tabellen per elev er plassert i samme kolonne.

1

$y = -2x+6$

x	y
-1	3
0	3
2	2
3	0
4	1

2

$y = -2x+6$

x	y
-1	6
0	4
2	2
4	0
4	-4

3

$y = -1x+8$

x	y
-1	8
0	6
2	2
3	0
4	-2

4

$y = -2+8$?

x	y
-1	8
0	6
2	2
3	0
4	-2

?

5

$3x+6$

x	y
-1	6
0	4
2	2
3	0
4	-2

6

$y = 1+3$

x	y
-1	6
0	4
2	2
3	0
4	-2

Figur 4.21

Besvarelser 1 og 2 har rett funksjonsuttrykk, mens tabeller er derimot noe forskjellige. Den første kan se ut til å være knyttet til x-aksen når både x- og y-verdi er 0 og x_1. En slik partiell tilpasning, tolket etter Ben-Zeev (1998), som også ble utdypet på forrige side i analyse av en besvarelse fra gruppe I, oppstår når et kjent eksempel utformer egenskaper en ukjent problemstilling.
Tabell i besvarelse 2 og 5 kan se ut til å våre tilpasset etter uttrykket, eksempler på verditabeller i læreverket og løsningseksempler kan ifølge Ben-Zeev og Star (2001) være korrelasjoner mellom spesifikke egenskaper knyttet til oppgaver og operatorer som brukes til å løse disse oppgavene. Løsningseksempler i bøkene forkynner elever med algoritmer som kan brukes på lignende oppgaver, uten noen forkynning om hvorfor algoritmene fungerer. I begge besvarelser føres konstantledd inn i tabellen som første y-verdi, videre kan det virke som at elevene tilpasser tabellen utfra hva y-verdiene minker med, da dette er mulig å se i y-kolonnen mellom gitte 2 og 0, denne tolkningen gjelder også tabeller fra besvarelse 6. Dermed tolkes denne feilen som falsk korrelasjon.
Besvarelsene 3 og 4 vurderes til å være falsk korrelasjon like så, da her ser det ut som at elever tilpasser uttrykket utfra tabellen, som er korrekt utfylt, men begge fører inn 8 som konstantledd, antagelig fordi de forventer første verdiene i tabellen til å være 0 og y_0, som skal indikere konstantledd.
Besvarelse 4, nærmere bestemt uttrykkene, tolkes til feil ved falsk korrelasjon. I besvarelse 4 setter eleven spørsmålstegn både ved uttrykket sitt og ved de første to y-verdiene i tabellen, slik det er illustrert på Figur 4.22 Dette kan tyde på at eleven er forvirret, fordi den første y-verdien ikke gjenspeiler grafens skjæringspunkt med y-aksen. På Figur ... demonstreres løsningsmetoden som eleven brukte, som her tolkes som for å gi mening til seg selv. Det vises også at faktor x er på plass denne gangen. Likevel det virker som at eleven prøver fortvilt å få plassert konstantleddet inn som første verdi i verditabellen, eleven skriver 6, om dette kommer av feil ved utregning, eller ved negasjon, der eleven fjerner det ene negative fortegnet (Ben-Zeev & Star, 2001), rett og slett av et inderlig ønske om å få denne y-verdi til å være 6 er umulig å si, men det kan være tegn på sterk falsk korrelasjon, hvor elever produserer feilaktige regler på grunnlag av eksempler i undervisningen, løsningseksempler, homogene framstillinger av tabeller i oppgaver, eller som det ble vist på side ... på bildet tatt av læreverket, innføringer og forklaringer.

Løsningsmetode/ beskriv kort hvordan du tenkte:

x	$-2x+8$	y	(x, y)
-1	$-2 \cdot -1+8$	6	$(-1, \ )$
0	$-2 \cdot 0+8$		

Figur 4.22

$3x+6$ ble analysert tidligere. Likning i besvarelse 3, vurderes her til å komme av de første verdiene i tabellen som dannes etter feilaktig regel $(x_1,\ y_0)$ og ser ut til å bruke punktet $(-1, 8)$ til å sette inn for a og b, derfor tolkes det til å være lineær dekomposisjon.

Mens uttrykket bestemt i besvarelse 6, er ikke lett å si noe om, annet enn at faktor x mangler, og 3 kan komme fra skjæringspunktet med x-aksen. Eleven skriver følgende «*Så på hvilke tall grafen var på i x grafen og så på y grafen for å finne tallet som passer*». Det brukes ordet *graf* på det som her tolkes som at eleven mener akse. Det likevel er vanskelig å si noe om opprinnelse av tallet 1. Denne feilen vurderes til kritikk-relatert, nærmere bestemt fravær av kritikk, da tabellen eleven fyller ut står ikke i sammenheng på noen måte.

Samlet er antallet og typer feil i begge gruppene presentes i kapittel 5

Neste oppgave som analyseres er oppgave med konvertering fra $G \rightarrow A$, hvor aksene er skalert, oppgaven også ber om å lage en tekst til situasjonen vist på grafen.

4.1.11 Oppgave 9: $Grafisk \rightarrow Algebraisk$ (skalerte akser)

Tolket fra Duval (2017) i denne konverteringen er det stor kognitiv avstand med hensyn til at den er ikke-kongruent for alle meningsenhetene, konstantleddet er synlig, mens stigningstallet er skjult av skaleringen på aksene, derfor kan det forventes mange variasjoner av svar. Frekvenstabell 4.13 under viser resultatene fra hver gruppe.

Gruppe I

9 Graf→Algebraisk

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	7	33,3
	a↔b / annet	6	28,6
	a=y/Δx, b rett / (Δy)x, b rett	3	14,3
	a=Δy/Δx, b rett	5	23,8
	Total	21	100,0

Gruppe II

9 Graf→Algebraisk

		Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	5	23,8
	a↔b / annet	2	9,5
	a=Δy/Δx pr.rute, b rett	3	19,0
	a=y/Δx, b rett / (Δy)x, b rett	4	23,8
	a=Δy/Δx, b rett	7	33,3
	Total	21	100,0

Tabell 4.13

Syv elever i gruppe I og fem i gruppe II ikke besvarer oppgaven, av de som utfører konverteringen korrekt er fem elever fra gruppe I og syv elever fra gruppe II.
Av elever som produserer feil, produser dem basert på oppfatning av regelen *en x-enhet til høyre og opp / ned*, eller ufullstendig oppfatning av den semantiske betydningen i algebraisk representasjon og den grafiske framstillingen av det matematiske objektet.
Tre og fire elever henholdsvis fra grupper I og II gir besvarelse der i beregning av stigningstallet ikke tas enten forbehold for Δy eller Δx. Av elever som ikke tar hensyn til Δy eller skjæringspunktet med y-akse ved beregning er det to elever i hver klasse, disse gir svar på formen $f(x) = 10x + 50$. Elever som ikke forholder seg til Δx, gir svar på formen $f(x) = 50x + 50$, det er en elev fra gruppe I og to elever fra gruppe II.
Slik det tolkes her, svar $f(x) = 10x + 50$ kan være et glipp, elevene trenger å bli korrigert og gjøres oppmerksom på at skjæringspunktet har betydning når en graf ikke går gjennom origo, elevene i dette tilfellet tar forbehold til Δx. Derfor tolkes denne type feil til kritikk-relatert, nærmere bestemt etter Ben-Zeev (1998) fravær av kritikk eller kritikk mangler. En av disse elevene ble spurt om intervju i forbindelse med en annen oppgave, denne presenteres i neste kapittel, men siden eleven gjorde denne feilen, ble stilt spørsmål i forbindelse med det i etterkant av oppgavene som var av hovedinteresse, et utdrag fra intervju og elevens svar på spørsmålet presenteres under. (I står for intervjuer, og eleven heter Allysa, replikkene 304-311)

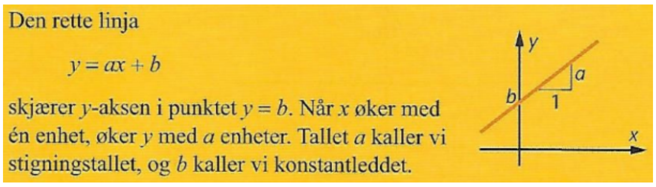
> *I*: Så har du gjort det veldig bra videre, men så på denne oppgaven (oppgave 9). Hvis du tenker på disse tabellene som vi snakket om nettopp og denne sammenhengen du fant ut der. Samtidig ser på oppgaven og din løsning på den. Hva tenker du?
> *Allysa*: Jeg ser jo med en gang at [.] jeg har [...] eller er det det som jeg har gjort feil at jeg startet i origo der, eller at jeg hadde dummet meg ut på, at jeg tenkte ut ifra at den skulle krysse i null. (Ser litt spørrende ut)

Allysa tenker på at fra origo er det 10 x-enheter til høyre og 100 y-enheter opp til grafen, utregningen blir da $\frac{100}{10}$, dermed gir det stigningstallet 10, men grafen skjærer y-aksen i 50.

I: Ja, det er det du har tenkt.
Allysa: Jeg har skrevet at 10 verdier til høyre går grafen 100 opp, men det gjør jo den ikke, den går 50 opp. For jeg tenkte fra null her.
I: Ja, for du gikk langs x-aksen fra origo. Og en kan egentlig gå fra hvor som helst, så lenge det er fra grafen, en trenger ikke nødvendigvis starte fra y-aksen heller. Altså, der punktene er lesbare.
Allysa: Ja (nikker bekreftende)
I: Hva tror du at stigningstallet blir da?
Allysa: Jeg tipper at det blir halvparten, at det blir 5.

Eleven er veldig rask med svar, noe som kan være bekreftende for at denne typen

Derimot elevene som svarer $f(x) = 50x + 50$ kan være påvirket av læreverkets eksempel på stigningstallet, vises på Figur 4.23 under, som også ifølge Ben-Zeev og Star (2001) kan være noe som elevene skaper falsk korrelasjon av. Slik det er vist på figuren er Δx satt til å være én i teksten og illustrert med tallet 1 i forbindelse med grafen, om elevene forstår dette som at når rutenettet legges til i oppgaver, i grafikkfeltet i GeoGebra, kan elevene forbinde det med en form for geometrisk avlesning per rute. Ett funn gjort av Nilsen (2013) som gir dette fenomenet en beskrivelse «én bort, a opp/ned», er at dette en introduksjonsform av stigningstallet som er vanlig i norske læreverk.

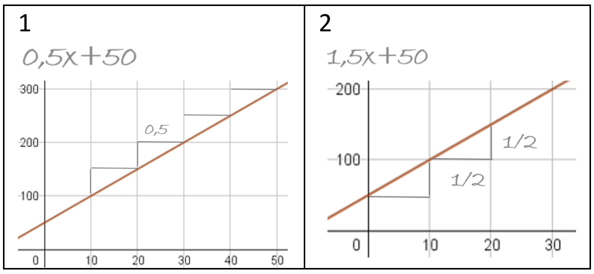

Den rette linja

$y = ax + b$

skjærer y-aksen i punktet $y = b$. Når x øker med én enhet, øker y med a enheter. Tallet a kaller vi stigningstallet, og b kaller vi konstantleddet.

Figur 4.23

Tre elever fra gruppe II, virker til å forbinde det nylig omtalte fenomenet enda mer med rutenettet, denne gangen uten å ta høyde for verken Δx eller Δy, og leser av a per rute, denne rasjonelle feilen vurderes også til å være falsk korrelasjon, to av besvarelsene er illustrert på Figur 4.24.



Figur 4.24

I første besvarelsen skriver eleven 0,5 over stigningstallmerket, ikke ved siden av den og fullfører ikke alle merkene, det kan likevel være både elevens måte å gjøre det på eller noe misforståelse, eleven til tross for det skriver $y = 0{,}5x + 50$.

På besvarelse 2 er bildet litt annerledes, eleven bruker brøknotasjon $\frac{1}{2}$ på grafen for å indikere stigningstall, som er da per rute, og oppgir svaret som $y = 1{,}5x + 50$. Duval (2017) framhever viktigheten av det naturlige språket i matematikk både muntlig og skriftlig, og det faktumet er at det som sies er gjennomsiktig for den som snakker, noe som ikke er tilfellet for den som lytter, den som lytter tolker det som blir sagt. Denne besvarelsen er et godt eksempel på viktigheten av det Duval sier. Denne feilen, altså fra $\frac{1}{2}$ til 1,5, selv om dette er ikke konvertering, dette er behandling, likevel er det viktig å ta til følge, hvis aksene ikke var skalert og det faktiske stigningstallet var $\frac{1}{2}$, ville eleven ikke lykkes med konverteringen på grunn av det naturlige språket. Forslag til opprinnelsen av tallet 1,5, er nettopp det naturlige språket, eleven skriver i brøknotasjon på grafen, det er mulig at eleven tenker *en halv*, videre skriver eleven i den algebraiske representasjonen 1,5 mulig fordi eleven tenker *en,halv* og ikke *en og en halv*. Muntlig kommunikasjon er komplisert på den måten at det som grammatisk skrives ned ikke alltid blir uttalt, eller hørt, noe som kan skape misforståelser og i matematikk kan disse misforståelser gi noen mentale representasjoner som fra det muntlige språket kan bli overført til det matematiske språket og videre ikke ufullstendig forståelse, som det omtalte tilfellet er kanskje et eksempel på.

Siste eleven i denne kategorien tegner et stigningstallmerke og skriver $\frac{1}{2}$ ved siden av, men oppgir ikke funksjonsuttrykket og derfor ikke føres inn på oversikten over feil.

Av besvarelser der elevene enten forveksler mellom a og b, eller svarer noe annet er det to fra gruppe II og seks fra gruppe I.
Konverteringer der elevene forveksler mellom a og b eller b med skjæringspunktet med x-aksen, forekommer i to besvarelser, en i hver gruppe. Den ene svarer «*50x -10*», den andre «*50x+0,1*».
I den førstnevnte besvarelsen, kan det virke som at -10 kan komme av skjæringspunktet med x-aksen, her gis det ingen skriftlige hint eller utregninger. 50 her kan komme av Δx også, det likevel antas at siden eleven bruker -10 i uttrykket og av flere punkter merket av eleven på grafen ingen ligger i b, antas det at eleven bruker Δx som a, dette er også på grunnlag av svaret eleven gir på neste oppgave. Denne besvarelsen tolkes etter Ben-Zeev (1998) for å være falsk korrelasjon for a og overgeneralisering for b.
Mens i andre besvarelsen skriver eleven «*10/100=0,1 Går du en verdi til høyre så må du gå 0,1 opp for å treffe grafen.*» Eleven kjenner til algoritmen for stigningstallet men det virker som at den ikke oppfattet fullt ut, algoritmen brukes dessuten på konstantleddet og uten forbehold for at grafen ikke går gjennom origo. Skjæringspunktet med y-aksen er markert med et godt synlig punkt, derfor tolkes det her at eleven bruker den som a. Det kan se ut som at eleven bruker sin egen feilaktig regel avledet fra $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ og tilpasser den til gjeldende oppgave, derfor vurderes denne konverteringen til å inneholde feil av typen partiell tilpasning.
En besvarelse er som følger «*økningen er 50 for hver 10-ende verdi. 50·10=500. Økningen da vil være 500 for hvert 1 verdi bortover x-aksen. y=500x+50*», her kan det være at eleven bruker algoritmen for stigningstallet men multipliserer i stedet. Det kan også ha sammenheng med elevens erfaring med statistikk og histogram, der bredde multiplisert med lengde på søyler, gir areal. Med det nevnt, vurderes elevens oppstilling av tall og tatt i betraktning at Δy er plassert først, antas det at algoritmen for a brukes. Derfor vurderes denne feilen til fravær av kritikk, basert på den skriftlige forklaringen, der eleven fra hver tiende verdi gjennom multiplikasjon kommer fram til per en x-verdi.
En av elevene som oppgir 50 som stigningstall, var intervjuet da med hovedfokus på en annen oppgave, i den forbindelse ble det gått også gjennom oppgaver som hadde noen feil, denne eleven heter Linnea og utdrag fra intervju som vedrører denne oppgaven gjengis under (replikkene 249-260):

> *I*: Her har du en graf. Hvis du ser på den, hva tenker du nå?
> *Linnea*: Den der (peker på skjæringspunktet med y-aksen).
> *I*: Ja, flott.
> *Linnea*: Ja, for den går i femti.
> *I*: Hvis du nå går en rute til høyre, da er det ti x-enheter du går til høyre.
> *Linnea*: Da må jeg opp femti.
> *I*: Ja. Skriv det ned, så du husker. (Linnea skriver ned 50 og 10 på grafen). Så for ti x-enheter endrer y-verdien seg med 50. Hva tror du den y endrer seg med per 1 x-enhet?
> *Linnea*: Fem
> *I*: Hva blir funksjonsuttrykket ditt da?
> *Linnea*: $50x + 50$. Nei, femt.. Skal kanskje ha ett? (Her tenker Linnea om hun skal ha bare ett av de femtitallene ser på grafen og notatene sine). Nei, femti skal stå til sist. (Skriver ned 50)
> *I*: Og per en x-enhet?
> *Linnea*: Fem. [..] Aaah! (virker glad) Ja, nå skjønner jeg. Fem x pluss femti. (Skriver $5x +$ foran 50) Jaaa, for det er ti der, og femti, ja, nå skjønner jeg (smiler).

Linnea trenger ikke mange veiledende spørsmål og svarer raskt på dem, det kan virke sånn at hun blir litt forvirret av at både skjæringspunktet med y-aksen og Δy er begge femti, enn av noe annet ...

Av besvarelser ellers er det to som følger «*(-10, 50)*« og «*-10x+50*», disse vurderes som lineær dekomposisjon etter Ben-Zeev (1998). Utover det leser to av elevene bare punkter av grafen men oppgir ikke funksjonsuttrykket.

Av elever som klarer å lage tekstoppgave til grafen er det fire i hver gruppe som tar forbehold til begge meningsenhetene, to elever i av hver gruppene produserer oppgaver uten høyde for konstantleddet. To elever i gruppe I laget avlesningsoppgaver og en i gruppe II skrev «*y-aksen kan evn være prisen og x-aksen enten antall liter eller kilo*»

Et eksempel fra hver gruppe hvor oppgavene tar hensyn til begge meningsenhetene, selv om en av elevene bestemte feil stigningstall og oppgaven tar utgangspunkt i det algebraiske uttrykket, er gjengitt under:

1. «*f(x)=10x+50. Ove betaler 50 kr i inngangspenger til en karusell på kino. For best opplevelse koster det 10 kr for hver gang han kjøper. Hvis Ove kjøper 5 i en pakke får han?*»
2. «*y=5x+50. Ida vasker hos bestemor. Bestemor vil gi Ida penger for jobben så hun bestemmer at Ida får 50 kr for å vaske. Siden det ikke er så mye så mye å vaske så sier bestemor at hun øker med 5 kr per min for at Ida skal få litt ekstra. Hva tjener Ida på en time*
   kom ikke på noe bedre oppgave og min bestemor kunne gjort dette»

I elevoppgaven som gjengis først er det noe uklart hva eleven mener med spørsmålet, likevel er det viktig å merke at selv om eleven ikke fant riktig stigningstall, viser eleven forståelse for den semantiske meningen i uttrykket. Det gjelder også elev som er gjengitt som nummer to, elevens oppgave øker litt i kompleksitet da det brukes minutter i teksten og time i spørsmålet. Begge viser likevel konseptuell forståelse for den semantiske meningen i uttrykkene og dermed for det matematiske objektet lineær funksjon.

I neste oppgave får elever en graf igjen med skalerte akser og bes om å bestemme det riktige stigningstallet til grafen ved å få oppgitt som brøk og opplyst om at dette ikke er korrekt.

4.1.12 Oppgave 10: $Grafisk \rightarrow Algebraisk$ (skalerte akser)

Oppgaven skal utforske strategier brukt for å finne stigningstall. I følge Duval (2006) Systematisk variasjon i prestasjoner hos elevene kan på en bedre måte observeres ved en systematisk representasjonsvariasjon innen kilderegister til dens konverterte målregister. Kognitiv avstand mellom innholdene i kilderepresentasjon og målrepresentasjon er medvirkende årsak til elevers suksess eller systematiske feil. I denne oppgaven skal elevene utføre konvertering som ikke er ulikt konverteringen i forrige oppgave, det er ikke samme matematisk objekt, men aksene er fortsatt skalerte og elevene bes om å bestemme stigningstall på samme måte som de har gjort det i forrige oppgave. Forskjellen er at oppgaven etterspør dette på en annen måte, her behandles kun stigningstallet, utenfor konteksten til en lineær funksjon.

Tabell 4.14

Gruppe I				Gruppe II			
10 Graf→Algebraisk				10 Graf→Algebraisk			
		Frequency	Percent			Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	10	47,6	Valid	Ubesvart	7	33,3
	Δy / annet	5	23,8		annet	3	19,0
	a=Δx/Δy	2	9,5		a=Δx/Δy	6	23,8
	a=Δy/Δx pr.rute	1	4,8		a=Δy/Δx pr.rute	1	4,8
	a=y/Δx	1	4,8		a=y/Δx	1	4,8
	a=Δy/Δx, 7/3 e.l	1	4,8		a=Δy/Δx, 7/3 e.l	1	4,8
	a=Δy/Δx	1	4,8		a=Δy/Δx	2	9,5
	Total	21	100,0		Total	21	100,0

Denne konverteringen er ikke-kongruent og kompleksitetsgraden øker også fordi elever får oppgitt brøk som potensielt kan skape forvirring og i Frekvenstabell 4.14 framgår det at antallet elever som besvarer oppgaven i begge gruppene går ytterligere ned i akkompagnement med antallet korrekte besvarelser som gis på denne oppgaven. På grunnlag av mange ulike svar er kategoriene i denne oppgaven noe generelle.

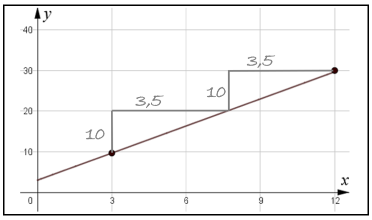
Av besvarelser som ble kategorisert som annet, er det to i gruppe I, en gruppe II som alle skriver at stigningstallet kan ikke være $\frac{2}{3}$ eller 0,666, fordi dette kan en se på grafen, noe videre svar foreligger ikke. Ellers er det elever som skriver.

Av besvarelsene fra gruppe I på spørsmålet hvorfor det foreslåtte stigningstallet er feil, er det en elev som svarerslik det er gjengitt «*fordi det øker med 20 i y linjen og 9 i x linjen*» men konkret svar foreligger ikke. En annen elev som ble spurt om intervju og senere intervjuet, dette presenteres i neste kapittel, skriver at det er for lite informasjon til å finne stigningstallet. Denne eleven virker noe forvirret av denne oppgaven, som antas til å være av at stigningstallet er tatt ut av konteksten, eleven skriver «*... det kan heller ikke øke med 2/3 når x øker med 3 per og vi vet ikke hva 2/3 er av. Er det 2/3 av 1 eller 2/3 av 10?*»

Siste besvarelse under denne kategorien fra gruppe I svarer 20, dette ble i forrige delkapittel kategorisert som falsk korrelasjon etter Ben-Zeev og Star (2001).

En annen elev fra gruppe II leser av Δy med hensyn til skalering på y-aksen og Δx settes sammen av både tre x-enheter med hensyn til skalering og per rute, dette er illustrert på Figur 4.25.

Som det er vist på figuren, har eleven tatt forbehold for skaleringen på x-aksen med 3 først og videre legger til en halv rute og får 3,5 i stedet for 4,5. På anmodning om å forklare studentens (oppgave) tankegang, og hvorfor er $\frac{2}{3}$ feil, svarer eleven «*Fordi man går ikke 2y opp per 3x, aner ikke hvor de har det fra*». Det virker som at eleven tenker på skalering av aksene og det kan se ut som et glipp men løsningen som oppgis er «*Per 3,5x går grafen opp med 10y. 10y : 3,5x gir 2,85y per x. y=2,85x+0,5*» Slik det ser ut på konstantleddet skjer det deling per rute. Derfor klassifiseres denne feilen også til å være falsk korrelasjon. ...



Figur 4.25

Resten av besvarelser som ble kategorisert som annet i gruppe II, er det en elev som svarer 60 og en annen skriver «*jeg tror at studenten tenker at 2 er stigningstallet og 3 er konstantleddet.*»

En elev fra gruppe I og tre elever fra gruppe II svarer $\frac{1}{3}$ eller $\frac{3}{10}$ dette er svar etter feilaktig regel $\frac{\Delta x}{y}$ under kategorien $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Elever som svarer $\frac{1}{3}$ gir ingen forklaring, men noen deler x-akse per enhet, altså setter tallene 1 og 2 på x-aksen, derfor tolkes dette til at elevene leser på en eller annen måte av 3, mulig er det selve skjæringspunktet med y-aksen, mulig kommer tallet fra forslaget i oppgaven i utgangspunktet.

Tre elever fra gruppe II svarer følgende: en elev svarer $\frac{3}{5}$ etter $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, der det kan se ut som at eleven leser av 5 som endring på y-aksen, en annen elev svarer 3 og tredje elev svarer $\frac{3}{2}$. Elev som svarer $\frac{3}{2}$ virker til å tenke per rute også, men siden besvarelsen. Disse feil tolkes her som partiell tilpasning, da elevene alle sammen bruker regelen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, men tilpasser den bare til delvis. Besvarelsen $\frac{3}{2}$ føres i tillegg til det inn under kategori falsk korrelasjon over rasjonelle feil.

En elev fra gruppe I skriver «*for hver gang vi går til høyre så går vi 3 enheter og 10 opp*» men oppgir ikke noe videre svar eller forklaring, likevel ble denne besvarelsen tatt under denne kategorien, men da telles ikke med for å ha gjort feil.

Under $\frac{y}{\Delta x}$, derunder er kategori y som stigningstall. En elev fra gruppe I, svarer 10 her tas det ikke forbehold om endring i x heller, og en fra gruppe II oppgir svaret som $\frac{10}{3}$. Begge elever tar utgangspunkt i origo, forskjellen på dem er at. Disse besvarelser vurderes til kritikk-relaterte feil, derunder fravær av kritikk. Elev som svarer 10 uten hensyn til ....

Av elever som leser av stigningstallet per rute er det en i hver gruppe, der det er noe variasjon i En annen elev i denne gruppen skriver «*7,5x eller 3/4*», om eleven mente å skrive 0,75 men skrev feil, kan tenkes, likevel ser det ut går eleven ut ifra $\frac{3\ ruter\ langs\ y}{4\ ruter\ langs\ x}$ hvor det dermed ikke tas høyde for at grafen ikke går gjennom origo. En besvarelse i gruppe II, som er avlest per rute og svaret som foreligger er $\frac{1}{2}$. Disse besvarelser vurderes til å inneholde feil av typen falsk korrelasjon

To elever, en i hver gruppe etter avlesning av det som ser ut som konstantledd oppgir sine svar «*stigningstallet er 5/3 fordi i y aksen så øker det med 5 og x aksen øker med 3*» og en annen «*i dette tilfellet så er 3 skjæringspunktet og vi ser at første punkt ligger på 3 og 10 da vet vi at vi må ha 7 igjen fra 3 for å ha 10 derfor svaret blir feil. 7/3 er svaret tror jeg. Stigningstallet er 7*». Disse besvarelser kategoriseres ikke som feil, da slik det er forklart på hver sin måte leser elevene av eller regner ut 5 og 7 med utgangspunkt i en graf der det er vanskelig å gjøre det.

Besvarelser som foreligger på denne oppgaven varierer veldig, og av dem som svarer er det flere som ser bort fra skjæringspunktet med y-aksen i sine beregninger, uansett hvordan beregningen utføres. Dette kan skyldes med at i denne oppgaven er stigningstallet tatt ut av konteksten som elevene er kjent med og de blir heller ikke spurt om noe i forbindelse med konstantleddet, som kan minne på de viktige meningsenheter. På denne måten blir løsningene noe friere enn ellers.
Det kan også tyde på noe tendens eller preferanser blant elever til å lese av verdiene de trenger til å finne stigningstall helst med utgangspunktet i y-aksen, mens valg av vilkårlige punkter, som er markert tydelig, for å gi hint til en mulig løsningsmetode, på grafen er mindre utbredt.
Sammenlignet med forrige oppgaven som også hadde skalerte akser, men der flere elever lyktes med konverteringen, kan det hende at brøk som utgangspunkt i oppgaven forvirret flere.
Antallet ulike svar og strategier i løsningsprosessen kan tyde på at oppgaver som ikke er utformet slik elever er vant til å se dem fører til en del forvirring og lavere prestasjoner. Noe som igjen fremhever viktigheten i det Duval (2006) mener at metodologien i valg av oppgaver kan ikke bare være basert på repeterende løsning av oppgaver som har samme struktur eller mekaniske aktiviteter, oppgaver bør varieres systematisk og som Duval (2006) legger meget stor vekt på, er at oppgaver bør varieres ikke bare innen det opprinnelige registeret, som for eksempel ulike verditabeller som representerer forskjellige objekter, oppgaver må også omhandle interne variasjoner innen hvert register, som tolkes her som ulike variasjoner av spesifikke representasjoner av samme objekt. (Duval, 2006)

Siste oppgave som analyseres er oppgave som går ut på gjenkjennelse av funksjonsuttrykk og grafer gitt i koordinatsystemer uten merking på aksene. Dette er en oppgave der kognitiv avstand er stor

4.1.13 Oppgave 11: $Grafisk \leftrightarrow Algebraisk$ (skalerte akser)

Seks funksjonsuttrykk og seks tilhørende grafer ble gitt til elevene for å finne tilhørende par, resultatene framkommer i frekvenstabell 4.15

Gruppe I				Gruppe II			
11 Algebraisk↔Graf				11 Algebraisk↔Graf			
		Frequency	Percent			Frequency	Percent
Valid	Ubesvart	3	14,3	Valid	Ubesvart	1	4,8
	1/6 korrekt	2	9,5		1/6 korrekt	2	9,5
	2/6 korrekt	2	9,5		2/6 korrekt	5	23,8
	3/6 korrekt	5	23,8		3/6 korrekt	1	4,8
	4/6 korrekt	2	9,5		4/6 korrekt	2	9,5
	6/6 korrekt	7	33,3		6/6 korrekt	10	47,6
	Total	21	100,0		Total	21	100,0

Tabell 4.15

Elever som fikk til oppgaven og gjenkjente og klarte å koble sammen korrekt alle algebraiske og grafiske representasjoner er til sammen 17 av 42.
Her blir det interessant å se på frekvenser over hvilke grafer og algebraiske uttrykk ble gjenkjent oftest. Derfor blir det i analysen av besvarelser på denne oppgaven gått gjennom kategori for kategori for mulig å finne et mønster av hva elever ikke så ofte gjenkjenner. I følge Duval (2006) legges det lite vekt på gjenkjennelsesoppgaver i undervisningen og mer på avlesningsoppgaver som ofte etterspør

prosesser ledet av *lokal* forståelse som for eksempel punktplotting og ikke *global* forståelse som styres av tolkningsprosess av kvalitative visuelle variabler. Ikke minst nevner Duval (2006) at det ser ikke ut til at elever har store problemer med å konstruere en graf ut fra funksjonsuttrykk, men når elevene får i oppgave å gjenkjenne av flere mulige alternative grafer og deres funksjonsuttrykk, for eksempel $y = x + 2$, $y = x$, $y = -x$, er 60% av elevene som gjenkjente $y = x$ og bare 25% gjenkjente $y = 2x$, mens suksessrate i følge Duval (2006) ville ligge over 90% hvis elever ble bedt om å konstruere disse to grafer ut fra funksjonsuttrykket.
Utfra tall i denne studien vises det også at det er mange flere som fikk til å skissere graf på oppgave 2, med størst suksess i gruppe II på 71,4 % er det 47,6 % fra denne gruppen som greide denne oppgaven korrekt. Forskjellen i gruppe I er ikke så markant, det kan også skyldes med at denne gruppen var den første som tok denne testen og en uke før gruppe II.

Av 11 elever i gruppe I og 10 elever i gruppe II som besvarer oppgaven delvis ble det satt opp en oversikt over grafnummer og antallet elever som gjenkjente disse i hver gruppe. Den er vist i tabell 4.16.

	Gruppe I	**Gruppe II**	**Totalt**	
Graf	*Antall elever*	*Antall elever*	*Antall elever*	*Prosent*
1	7	7	14	66,7
2	9	6	15	71,4
3	2	0	2	9,5
4	2	3	5	23,8
5	6	4	10	47,6
6	1	1	2	9,5
Totalt			21	100,0

Tabell 4.16

Slik det vises i oversikten er graf 3 og 6 gjenkjent av bare to elever hver, og graf 4 gjenkjennes av 5 elever. Grafer som ble gjenkjent av flest elever er graf 2, 15 elever til sammen og graf 1, 14 elever. Mens graf 5 gjenkjennes av 10 elever.
Hvorfor er det akkurat disse grafer som gjenkjennes oftest, er vanskelig å si. Men graf to er parallell med x-aksen og derfor er en meningsenhet visuelt mer markant,
Å se grafer og deres algebraiske uttrykk, eller vite hvordan en kan plotte dem i koordinatsystem, er ikke nok til å kunne gjenkjenne samme funksjon gjennom bare disse to representasjonene fordi det trenges en dypere kognitiv egenskap, nemlig "å kunne skille mellom hvordan to grafer som virker visuelt like, er matematisk forskjellige". Den visuelle kontrasten mellom en eller flere visuelle egenskaper, virker som om det er bare en. Når grafene ser like ut er den visuelle diskrimineringen ikke åpenbar for elever, og evnen til å diskriminere det som er matematisk relevant i hver av grafene vil være avhengig av konstruksjon av kognitivt nettverk. (Duval, 2006, s. 125) En lineær graf har fem egenskaper som visuelt dobler seg. (Duval, 2017) Da dette ikke kan tolkes som feil, vil ikke besvarelser på denne oppgaven være med i hovedoversikten over rasjonelle feil, men dette kan være et eksempel på hva Duval (2017) mener med gjenkjenning av visuelle egenskaper og at slike oppgaver er viktig at elevene får jobbe med.

Gjennom dette delkapittelet har det blitt presentert skriftlige besvarelser på testen som ble utarbeidet i forbindelse med denne studien. Alle besvarelser med innhold av feil ble analysert og oppsummert på grunnlag av teori presentert i kapittel 2 som ligger til grunn for studien. I neste delkapittel vil intervju, som ble gjennomført som tredje og endelige runde i innsamling av datamaterialet, analyseres i lys av teori og for å få en dypere innsikt i utfordringer som elever har i konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner.

4.2 Analyse av intervju

I kapittel 3 ble det presentert metoden og prosesser under datainnsamling i anskaffelse av materialet som blir behandlet i denne studien. Datainnsamlingen ble gjennomført i tre runder, to runder med innsamling av skriftlig materialet fra to grupper med elever og en runde med intervju.
Intervjuene som ble gjennomført, ble gjennomført på grunnlag lag av den skriftlige testen og besvarelser gitt av elever. Informantene ble valgt ut basert på besvarelser gitt på enkelte oppgaver i

testen, som videre fremkalte behovet for mer informasjon. To elever i hver gruppe, fire til sammen ble intervjuet i forbindelse med dette, disse elever heter Leander, Linnea, Viola og Alyssa. Intervjuene presenteres i den rekkefølgen som elevene ble presentert i studien.

4.2.1 Intervju med Leander

Leander ble spurt om intervju i forbindelse med oppgave 10, slik det også er nevnt i delkapittel 4.1, da Leander skriver, i tillegg til det som ble gjengitt i forrige delkapittel, på spørsmålet om hva er stigningstallet følgende: «*(3, 10) (12, 30) ukjent*» og som redegjørelse av besvarelsen «*det er for lite informasjon for at vi kan vite det. Det ser ut til at grafen ikke går gjennom midten av punktene*». (Replikkene 400-417)

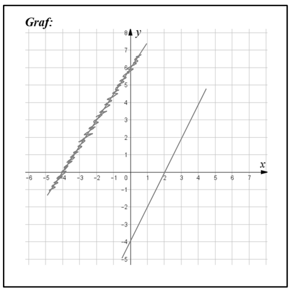
> *I*: På oppgave 10 så mener du at det er ikke nok informasjon, hva tenker du på da?
> *Leander*: (Ser på oppgaven) Jeg tenkte da at man kan ikke ser helt hvor denne her går. (Peker på punkt (12, 30) og linjen gjennom) For hvis du ser her, så går den ikke gjennom midten av punktet.
> I: Ja. Men hvis du tenker sånn, ikke tenk på linjen, tenk punktene nå.
> *Leander*: Ja
> I: Hvis du skulle for eksempel regne ut stigningstallet til linjen gjennom punktene, hva ville du ha gjort? Tenk på punktene.
> *Leander*: Hm [.]
> I: Hvis du ser for eksempel på oppgave 9, hvordan løste du den? For der måtte du også finne stigningstallet.
> *Leander*: Ja, da tenkte jeg, gikk jeg (peker på grafen, fingeren glir fra skjæringspunktet med y-aksen mot ti og opp til hundre) halv opp. Så for hver ti så går den femti opp.
> I: Så hvis du ser på oppgave 10 nå.
> *Leander*: Ja, jeg kan jo ta ni delt på tjue.
> I: Men ni det er antallet x-enheter parallelt med x-aksen. (Peker på oppgave 9 igjen, tilbake til grafen i oppgave 10) Her går du parallelt med x-aksen ti.
> *Leander*: Ja
> I: Så går du parallelt med x-aksen ni (Ser på oppgave 10) Og her går du parallelt med y-aksen femti. (Tilbake til oppgave 9, for å få fram analogisk tenkning) Per ti x-enheter, er det femti y-enheter oppover, så finner du at per en x-enhet
> *Leander*: Fem
> I: (Ser igjen på oppgave 10) Per ni x-enheter så beveger du deg
> *Leander*: Tjue opp. Da blir det tjue delt på ni, så den er ukjent.
> I: Det blir stigningstallet
> *Leander*: Ja

Leander, bes om å se på en annen oppgave fordi denne var løst korrekt og ved Leander er en av de få elever som lager en tekstoppgave som ivaretar det semantiske innholdet i kilderepresentasjonen, dermed tar høyde for begge meningsenheter.
Utfra intervjuet virker eleven noe usikker på stigningstallet som meningsenhet, det kan også se ut som at eleven ønsker gjerne denne konverteringen til å være en mer bestemt konvertering, altså til det symbolske registeret, slik det vanligvis blir gjort, mens meningsenheten alene, løsrevet fra konteksten, gir mindre mening. Det kan virke som at Leander streber med konseptet, eller fraværet av sådan. Dessuten brøknotasjon fremkaller et behov hos Leander for at brøken skal være en del av noe og så lenge den ikke er det, er den ukjent, som Leander sier: «*så den er ukjent*», og slik det forstås her, er det vanskelig for Leander å overføre analogisk tenking fra en oppgave til en annen. Ben-Zeev (1998) sier at elever ved møtet med ukjente problemstillinger kan søke etter oppgaver med lik overflatestruktur som ble vellykket løst før og anvende metoder brukt før på nye problemstillinger. Kognitiv avstand mellom kilde- og målrepresentasjon i følge Duval (2006) er stadig en tilbakevendende utfordring for elever i konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner. I dette tilfelle er kilderepresentasjon en graf og dens målrepresentasjon, slik oppgaven etterspør den, er knyttet til det symbolske semiotiske systemet, men oppgaven spør kun om den ene meningsenheten. Slik det tolkes her er dette noe som for Leander gjør dybdestrukturer i oppgavene, som han bes om å sammenligne, til helt forskjellige og derfor vanskelig å se analogien. Duval (2006)

sier at konvertering av en semiotisk representasjon kan ikke bare betraktes som konvertering til et kodet system og at metodologien bør være interne variasjoner av oppgaver innen samme register. Konvertering som aktivitet i følge Duval (2017) krever dissosiasjon av det representerte objektet og innholdet i en bestemt representasjon. Meningsenhetene og symboler, som er tegn, sammen med regler fra det symbolske semiotiske systemet danner grunnlaget for syntaks og gir semantisk mening til innholdet i en algebraisk representasjon. Å skille representasjonen fra det den representerer, og tegn, i dette tilfellet stigningstallet, fra det tegnet refererer til, er ikke trivielt og er vanskelig. (Duval, 2006) I denne oppgaven får elever graf og en brøk og slik Duval (2006) tolkes her, opplever eleven nettopp denne utfordringen fordi det er vanskelig, både grafen og brøken blir adskilt fra dens algebraiske representasjon, som er $\frac{2}{3}x + 4$, og på denne måten blir brøken adskilt fra det den refererer til, nemlig stigningstallet, slik elever er vant i å se det.
Neste intervju som presenteres behandler akkurat det som ble presentert i gjeldende analyse, nærmere bestemt, det elever kan tro at stigningstallet refererer til.

4.2.2 Intervju av Linnea

Besvarelser på oppgave 2 ble presentert og analysert i delkapittel 4.1.4, av mangfoldige typer rasjonelle feil som ble gjort under konvertering $A \rightarrow G$, finnes det kritikk-relaterte feil som Ben-Zeev (1998) klassifiserer som negasjon, dette er benektelse av mekanismer som signaliserer overtredelse av matematiske prinsipper og som følge en prosess kalt normalisering i anordning å unngå at indre kritikk aktiveres igjen. To besvarelser på oppgave 2 og etterhvert flere, slik det ble presentert i kapittel 4.1, klassifiseres til å inneholde nettopp denne type feil. Besvarelsen som denne intervju baserer seg på er presentert på Figur 4.26 til høyre. Eleven som intervjues heter Linnea og intensjonen med følgende intervju er å se nærmere på denne type feil, samtidig å forsøke at Linnea får at i analysen av skriftlige besvarelser ble det ikke denne typen feil
Linnea ble intervjuet noen uker etter selve testen, derfor trenger litt tid til å se på det som ble gjort og emnet.



Figur 4.26

Intervju med Linnea (replikkene 200-207):

> *I:* kan du forklare meg hva du tenkte når du løste oppgave 2? ($A \rightarrow G$, Gitt: $f(x) = -4x + 6$, elevene skal tegne grafen)
> *Linnea:* (Ser på sin egen løsning) (Ler) Jeg husker jo ikke.
> *I:* Se på hva du har gjort, og hvis du husker ikke, så får du av meg et nytt ark, så kan vi gjøre den på nytt.
> *Linnea*: Ja. Skal vi se. Jo -4 der (peker på grafen, den skjærer y-aksen -4) det er på grunn av den der $-4x$ (peker på funksjonsuttrykket)
> I: Ja
> *Linnea*: Pluss seks, nei, hæ to (grafen skjærer x-aksen i 2), nei jeg husker ikke. (Ser på løsningsmetoden sin: «*y=-4 x=2 -4+6=2*») Minus fire pluss seks lik to, minus fire, to, de to punktene da. (Peker på linjen og skjæringspunktene med x- og y-aksen)
> I: Men der står det fire eks pluss seks lik to minus og du skriver minus fire pluss seks ($-4 + 6$), hvor ble det av x?
> *Linnea*: Den ble borte (ler).

Etter Ben-Zeev (1998) er dette en kritikk-relatert feil, der den interne kritikken benektes. Eleven er klar over at det skjedde en feil, fordi det vises usikkerhet i besvarelsen i form av to grafer, hvor den ene strykes over og en ny, som også er feil, tegnes. Men i denne prosessen der a i uttrykket blir brukt som skjæringspunktet med y-aksen, mister eleven den siste meningsenheten (skjæringspunktet med y-aksen). (Duval, 2006, 2017) Dette gir mindre mening til uttrykket og eleven vet at ett til punkt er nødvendig for å tegne linjen. Dette punktet er vanskelig å finne nå som semantikken til uttrykket er helt endret. Derfor for å normalisere det, fjerner eleven x og på denne måten kommer videre. (Ben-Zeev, 1998)
Videre løses oppgaven på nytt (replikkene 208-223)

I: Først tegnet du linjen der (peker på linjen som er stryket over), så ombestemte du deg og tegnet en ny.
Linnea: Ja, men siden det står $-4x$ der (funksjonsuttrykket), så burde jo linjen egentlig være der (peker på den som ble forkastet, denne skjærer x-aksen i -4) Siden det er x
I: Hmm.. Vi skal løse oppgaven på nytt, og ikke gå direkte fra uttrykket til graf. Men la oss se først på oppgave 8. Der klarte du å finne uttrykket fra enten graf eller tabellen. Men siden du skriver at å finne uttrykket var ikke så lett, så tror jeg du brukte tabellen. (tilbake til oppgave 2) Her har du uttrykk $f(x) = -4x + 6$, hva kan du gjøre for å gjøre det litt enklere for deg?
Linnea: Tegne en sånn greia. (Peker på tabell i oppgave 3)
I: Du kan gjøre det ja, verditabell.
Linnea: (Begynner å tegne verditabell) Jeg husker nesten ikke hvordan jeg gjør det. (Smiler)
I: Ikke tenk på det nå, vi kommer på det.
Linnea: Okey
I: $-4x$, hva betyr egentlig $-4x$? Hva er det -4 og x?
Linnea: Gange
I: Skriv det ned til deg -4 gange
Linnea: Minus fire gange eks pluss seks. Ja, for da kan jeg velge hvilke tall jeg vil for x.
I: Det kan du gjøre ja.
Linnea: -4 gange 2 er -8 pluss 6 [.] 14, nei, det er $-8 + 6$, det er -2.
I: Flott! Ser du det er lettere for deg når du skriver det ned, for da glemmer du ikke alle tegn.
Linnea: Ja

Videre setter Linnea opp tabellen, ved å bestemme to til verdier for x og regne ut verdier for y, plotter inn punktene i koordinatsystemet og skisserer grafen. Ved å gå via tabell er intensjonen å gå bort fra regelen som elevene bruker for å skissere lineære funksjoner. For det kan virke som at når elevene blir presentert for den, blir andre metoder og dermed sammenhenger som danner forståelse for meningsenhetene forkastet av elevene, samtidig som regelen kan oppfattes feil eller ufullstendig som er Linneas tilfellet. (replikkene 224-236)

I: Hvis du nå ser på denne linjen du har nå og de du tegnet første gang. Har -4 noe sammenheng med aksene på den linjen du tegnet nå?
Linnea: Nei
I: Tallet 6, det tallet har noe med y-aksen å gjøre. Mens koeffisientene, tallene foran x, de betyr noe helt annet.
Linnea: Ja, for det er ikke det at de skal krysse gjennom der (peker på sine to tidligere grafer)
I: Nei.
Linnea: Er ikke det egentlig s.. sånn (begynner forsiktig men uoppfordret å tegne en enhet til høyre fra skjæringspunktet med y-aksen og 4 ned til grafen)
I: Sånn, ja. Du går en x-enhet til
Linnea: høyre og fire ned
I: Og derfor så?
Linnea: minus fire
I: Ja
Linnea: Litt husker jeg. (Ler) For på den der, (peker tilbake på sin tidligere besvarelse) tenkte jeg jo helt feil. Ja, nå husker jeg.

Samtale videre dreier seg om oppgave 8, der eleven har funnet uttrykket ved hjelp av tabellen i utgangspunktet, uten å bruke grafen til annet enn å lese av verdiene som manglet i tabellen, for så å bruke tabell til å utforme den algebraiske representasjonen. Påfølgende studeres grafen og det diskuteres hvor vidt en kan finne uttrykk ved å se på grafen, og viktigheten av å være oppmerksom på at endring i y kan bare finnes per en x-enhet.

Denne intervju tar utgangspunkt i elevens forståelse og manipulering av meningsenheter i uttrykk for lineære funksjoner. Slik det tolkes her har eleven ikke fullstendig oppfattelse av semantikken i uttrykket og meningen som ligger i stigningstallet og konstantleddet. Det kommer tydeligere fram når eleven peker på den forkastede grafen og sier at linjen burde gå gjennom $(-4, 0)$.

Gjennom å løse oppgaven på nytt, uten bruk av regelen som det ser ut til at eleven lente seg på i løsning av oppgaven under testen, ser Linnea at grafen endrer utseende og uoppfordret tegner stigningstallmerke for å illustrere opprinnelsen til -4 i uttrykket. Det i seg selv ikke er nok for

konseptualisering av det matematiske objektet, men det er et visuelt hjelpemiddel for å skille mellom de to meningsenhetene.
Linneas utgangspunkt for skissering av grafen på testen var en lineær dekomposisjon, tolket etter Ben-Zeev (1998), hvor Linnea ut fra sin kunnskap vet at en av meningsenhetene i uttrykket har en sammenheng med y-aksen men er usikker på hvilken og gir først begge mening som skjæringspunkter med hver sin akse. På denne måten forveksler Linnea objektet med innholdet i representasjonen. (Duval, 2017) På grafen som forkastes forbindes stigningstallet med x-aksen, samtidig som noe i Linnea sier at det ikke er korrekt, da blir stigningstallet gitt rollen som skjæringspunkt og det semantiske innholdet mister mening ytterligere som Linnea rasjonelt retter oppi ved å bryte med matematiske prinsipper. I følge Duval (2017) er metodologien for å isolere matematisk relevante meningsenheter bør være systematisk variasjon av representasjoner og for grafer disse variasjonene bør være rent visuelle og korrespondere med kvalitative egenskaper i visuell gjenkjennelse. En av disse kvalitative egenskaper aktuelle for eleven er å se om grafen går opp eller ned for å isolere stigningstallet, slik at syntaksen i algebraisk representasjon ikke knyttes til aksene ved den grafiske framstillingen.
Analysen av dette intervjuet viser at elever ser ut til å forbinde aksene, eller deres «merkelapper», x og y, i koordinatsystemet, direkte til syntaksen det algebraiske uttrykket. Disse «merkelappene» er også til å finne i verditabeller og denne feilaktige måten å dekomponere et algebraisk uttrykk på og faktumet at endring i x medfører endring i y, pekte ut neste informant i denne studien, elev som heter Viola.

4.2.3 Intervju av Viola

Eleven tas ut på grunnlag av sine svar på oppgaver 4, 5 og 6 hvor eleven i alle tre tilfeller svarer etter en feilaktig regel $f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$, tolket ut av tabellen. Som ble vurdert som grafisk lineær dekomposisjon, da det kan virke som at elever har en slags skjematisk mental representasjon av syntaksen i uttrykk sammenstilt med aksene og kolonner i tabeller. Flere elever utfører konvertering $T \rightarrow A$ på samme vis, og ellers noe ulike variasjoner, dette ble vist og diskutert i forrige delkapittel. Som nevnt har Viola brukt en konsekvent feilaktig metode på de fleste oppgaver er kilderepresentasjon. (Replikkene 100-103)

> *I*: Kunne du være så snill og forklare meg hvordan du tenkte i oppgaver der du gikk fra verditabell til funksjonsuttrykk?
> *Viola*: Mmm […] Jeg så at her (eleven peker på tabell i oppgave 4) så x-verdien blir større med 1 og for hver x-verdi så går det med 2 opp (peker på kolonne for y-verdier), så jeg satte $x + 2$. For, for hver $1x$ så stiger verdien med 2 (tegner buede linjer fra 3 til 5 til 7).
> *I*: Det samme gjorde du på oppgaven her? (peker på oppgave 5)
> *Viola*: Ah.. For der gikk det fire opp for hver to eks. (Elevsvaret på oppgave 5 er: $f(x) = 2x + 4$)

Intensjonen videre er å få Viola til å legge bort tankegangen der variasjonen mellom x-verdiene gir stigningstallet og variasjonen mellom y-verdiene gir konstantledd. Siden eleven har lyktes med oppgave 2 ($A \rightarrow G$), der eleven tydelig bruker regelen «*en x-enhet til høyre og opp eller ned*», da det ikke er satt opp noe verditabell i besvarelsen, virker det som at det kan være en måte å gjøre det på, uten for mye eventuell innblanding fra intervjuer. Slik at eleven gjør mest mulig på egen hånd (replikkene 104-106):

> *I*: Hvis du skulle løst oppgaven annerledes, hvis du skulle gå fra tabell, men ikke direkte til funksjonsuttrykk. Hva kunne du ha gjort med tallene i tabellen?
> *Viola*: Sette opp sånn en graf (Ser litt lurende på intervjuer)
> *I*: Ja. Kan du være så snill og gjøre det?

Viola får ett nytt utskrift av oppgaveheftet og setter i gang med å tegne koordinatsystem og sette opp tall på aksene. Kort stund etter punktene er plottet inn og linjen er skissert gjennom punktene. (Replikkene 112-114)

Viola: Sånn (smiler, er fornøyd)
I: Nå vil jeg be deg om å lese av funksjonsuttrykket fra grafen
Viola: Da ville jeg satt (skriver $f(x) =$ tar et lite mellomrom) tre bak (skriver 3). For den begynner i 3. [...]

Stille, Viola teller og tegner en x-enhet til høyre og 2 opp til grafen, gjentar fra punktet "en til høyre to opp", skriver $2x$ i mellomrommet i $f(x) =$ 3, setter pluss mellom dem. Ser på oppgavearket der på den samme oppgaven har eleven svart tidligere $x + 2$ og på funksjonsuttrykket som eleven er kommet fram til under intervju, virker overrasket og smiler. (Replikkene 115-118)

I: Flott! Stor forskjell?
Viola: (Ler) Ja, det ble litt annerledes.
I: Skal vi se på tallene i tabellen sammen litt nå?
Viola: Ja

Videre handler samtalen om tabellen og grafen om variasjon mellom x- og y-enhetene, per en x-enhet på graf, varierer y med 2, sammenligner med tabellen. (Replikkene 119-120)
Viola: Aaah.

Ser videre på oppgave 5. Eleven får velge selv å se på tall i tabellen eller tegne graf som hjelperepresentasjon og hun setter i gang med graf.
Viola: Det var lettere å se når man tegner

I koordinatsystemet bruker Viola tall på aksene slik de forekommer i tabellen: x-akse $(2, 4, 6$ osv.), y-akse $(2, 4, 8, 12, 16)$ Her ser man allerede at både intervallene på y-aksen mellom enhetene er ujevne og valg av tall noe uheldig. Viola får likevel fullføre, plotte inn punktene og tegne grafen. Når uttrykket skal settes opp eller leses av, ser eleven på grafen og sier at "*det blir ikke lett å se*". Hun får et nytt ark og etter forslaget fra intervjuer ikke skalerer aksene denne gangen og etter plotting og skissering kommer fram til uttrykket $f(x) = 2x + 1$.
Aktiviteten blir etterfulgt av graf-tabell – samtale, der det diskuteres hopp parallelt med x-aksen i forhold til endring i y-verdiene, sammenligning med tabellen, tilbake til graf igjen, slik fortsettes det en stund. Eleven videre ser på uttrykket sitt i første besvarelse, der det står $f(x) = 2x + 4$. (Replikkene 121-122)
Viola: Men jeg fikk til den da (peker på $2x$).
I: Ja, men den der toeren kommer fra da du så på hva x-verdiene varierte med.

Tilbake til tabellen og diskuterer videre om elevens første forklaring på stigningstallet endring i x-verdiene i tabellen, endring i y, så til grafen igjen for å se hvor egentlig den andre toeren i $f(x) = 2x + 1$ kommet fra og det er endring i y-verdiene.
Det samme tallet som i denne oppgaven kan oppstå fra tre ulike kilder ($\Delta x, x_1$ og korrekte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$), tre forskjellige 2-tall, sett i denne sammenhengen, ser fortsatt ut til å skape forvirring hos eleven, noe som ikke er rart for de ser helt like ut der de står i de to forskjellige funksjonsuttrykkene. Utfra det kan en si at eleven strever med oppfatning av semantikken i utrykket, og sammenhengen mellom x- og y-verdiene i tabellen knyttes direkte til syntaks i algebraiske uttrykket, samt grafisk fremstilling, på en skjematisk måte.
Likevel hvis Viola både skriftlig på første besvarelse og muntlig under intervju senere, ikke beskrev sin metode, og bare skrev $f(x) = 2x + 4$, ville denne feilaktige oppfatningen, som for Viola ble til en feilaktig regel, ikke kommet fram. Og uttrykket ville ende opp med status delvis riktig ved vurdering. Det er samtidig viktig å si at denne tabellen i oppgaven ble utarbeidet med tanke på å variere tall på en måte som ikke er vant for elevene og ofte ikke gjøres i lærebøkene hvor tabellene er noe homogene og lite variert med hensyn til innholdet i dem. Så lenge tabellene er lite varierte mye av feil og for mange elever kan føre til produksjon av feilaktige regler (Ben-Zeev, 1998), som kan være

vanskelig å fange opp nettopp sånne tre «forskjellige» 2-tall og deres opprinnelse. For eleven er det vanskelig å se den syntaktiske feilen når det semantiske uttrykket er delvis korrekt.

Duval (2006) sier at en konvertering som transformasjon er fører til utfordringer fordi det samme matematiske objektet skal gjenkjennes først i kilderepresentasjon og så i målrepresentasjon, utfordringen i det er at to representasjoner som det skal konverteres mellom ikke har noe til felles. Med dette menes at innholdet i kilderepresentasjon har ingenting, verken syntaktisk eller semantisk til felles med innholdet i målrepresentasjon. Derfor kan to representasjoner feilaktig assosieres med to helt forskjellige objekter. (Iori, 2017) Konvertering er en spontan transformasjon når representasjoner er kongruente, ved å tegne graf i oppgave 4, finner Viola funksjonsuttrykket relativt enkelt. Den kognitive avstanden mellom representasjoner i oppgave 5 er større, da tegn i tabellen er valgt ut på en slik måte at konverteringen ikke er lenger kongruent og meningsenhetene ikke er lenger synlig. Violas metode på oppgaven løst først ikke fungerer fordi hun skalerer akser i partall og punktene som plottes inn blir unøyaktige. Etter å ha gjort det på nytt og kommet fram til algebraisk representasjon, vises Violas ufullstendige oppfatning av semantiske meningen i uttrykket gjennom kommentaren av $2x$-leddet hun fant under testen og kom fra Δx i tabellen. Prosedurale ferdigheten i å skissere graf er ikke nok for konseptualisering av funksjonsbegrepet og i Violas tilfellet virker det som at forvirringen ligger i at det matematiske objektet forveksles med innholdet i representasjonen som igjen avhenger av det valgte registeret, noe som Duval (2017) mener er så viktig å skille. Og som Berg (2013) mener er essensielt å praktisere i lærerutdanningen.

Bruk av alle representasjoner som et matematisk objekt mulig kan ha, for å fremme forståelse for matematiske objektet gjennom dens semiotiske representasjoner og de viktige meningsenheter som ulike representasjoner inneholder er viktig og nødvendig for å forstå matematikk i dybden. (Duval, 2017) Grunnen til det er at under konvertering fra et semiotisk system til et annet avsløres betydningen til meningsenhetene og ulike representasjoner avslører innholdet i matematisk objekt på ulike måter. (Duval, 2006) Neste intervju bekrefter nettopp det Duval (2006, 2017) er opptatt av i å formidle, at kun bruk av alle representasjoner, fremmer matematisk utvikling.

4.2.3 Intervju av Alyssa

Siste av de gjennomførte i forbindelse med denne studien intervjuer som presenteres er intervju av Alyssa. Alyssa ble spurt om intervju på grunnlag av det hun skrev på utvalgte oppgaver i besvarelse på testen. På oppgave 3 kan det leses følgende: ”*Trengte å tegne grafen inn i koordinatsystemet over. Fant da ut y verdiene til x_1. Fant at det er 3 mellom hver y_i og skjønte at det er jo det stigningstallet forteller meg* ☺ ”, dette etterfølges av oppgave 4 der hun skriver: ”*etter en AHA -opplevelse i forrige oppgave* ...” Figur ... viser svaret til Alyssa. Det ble derfor av interesse å finne ut nøyaktig hvilken Aha-opplevelse eleven refererer til, dette presenteres i intervju under (Replikkene 300-303):

> *I*: Her er din besvarelse. Du har gjort det veldig bra. Det jeg lurte på er på oppgaven 3 var du veldig glad, du tegnet en smily og på oppgave 4 skriver du at: «etter en Aha opplevelse på forrige oppgaven …» Kan du fortelle meg hva slags opplevelse du hadde?
> *Alyssa*: Eh, på første eller andre oppgaven så valgte jeg jo å ikke bruke, jeg tror det var den (blar til oppgave 1) Så valgte jeg jo å ikke bruke verditabellen, fordi jeg heller løste oppgaven uten verditabeller. Bare se på stigningstall og sånt. Så jeg, jeg må bare se litt hva jeg skrev og sånt […] (Ser på oppgaven 3 og 4) Ehm.. Jeg tror jeg har [..] Ja, Ehm […] Jeg tror det jeg mente er, at det er, jeg husket jo ikke hvordan jeg skulle bruke tabellen..
> *I*: Mmm, ja
> *Alyssa*: Så jeg tenkte at denne oppgaven her, klarer jeg jo ikke å løse. Derfor så tenkte jeg, men da tegner jeg heller grafen bare inn her
> (peker på koordinatsystemet i oppgave 2, og den ene av grafene der)

Også så jeg jo at, ja, når jeg skal sette inn i verditabellen, så er det jo bare tre og tre mellom hver (peker på y-kolonnen i tabellen i oppgave 3). For jeg klarte jo heller ikke å se, disse så gjorde jeg jo ikke (peker på oppgaver 3, 4 og 5), jeg måtte hoppe over de først og komme tilbake til, helt på slutten.

Peker på oppgave 3, og tabellen nederst, og referer til at y-verdier er høye tall jo lenger ned i tabellen en kommer, og y-aksen i koordinatsystemet, der grafen er tegnet, ikke går så høyt opp, det blir dermed umulig å lese av flere verdier for å fylle ut hele tabellen. Oppdagelsen at økningen mellom y-verdiene var 3 som eleven observerer på grafen og økning i y-verdiene i tabellen gjør det mulig for eleven å regne videre uten hjelp fra grafen for å fullføre tabellen.

Alyssa: For da skjønte jeg jo, etter denne her (oppgave 3), at jeg skjønte sammenhengen med stigningstallet og at det er det samme det øker med på, i y-kolonnen da. Og siden jeg har ikke brukt verditabell så mye, så skjønte jeg jo denne sammenhengen da jeg tegnet grafen og så at, ja det var sammenhengen.

Verditabell:

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Finn funksjonsuttrykk som passer til tabellen.

Løsningsmetode/ beskriv hvordan du tenkte:

Etter en AHA-opplevelse i
forrige oppgave fant jeg
det slik:
Stigningstall blir +2x da det er
2 imellom hver y i tabellen.
Konst. Leddet blir +3 da
Grafen må skjære y i 3.
Grafen skjærer y når x=0.
I tabellen står det at
Y er 3 når x er 0

Funksjonsuttrykk: $f(x)=+2x+3$

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Figur 4.27

Alyssa sier selv at oppgaver (3, 4, 5) med tabeller måtte vente helt til slutt fordi hun husket ikke hvordan tabellene skulle brukes.
Når alle andre oppgaver er gjort, vender eleven tilbake til tabell-oppgaver og ved å tegne grafen og lese første verdier fra grafen fyller ut tabellen så lenge det går. y-aksen på oppgave 2 der eleven tegner grafen slutter etter $y = 8$. Det blir derfor umulig for eleven å lese av grafen for å fylle ut hele tabellen etter $(3, 7)$. Ved å se på at stigningstallet til grafen er 3 og observere at y-verdiene endrer seg med 3 per en x-verdi i y-kolonnen i tabellen oppdager eleven sammenhengen med stigningstallet, denne oppdagelsen gjør eleven ved regning fyller ut resten av tabellen. Og videre klarer å løse oppgaver 4 og 5 ved å bruke samme tenkemåten og den sammenhengen som eleven fant i oppgave 2, hvor på oppgave 5, fyller eleven manglende x- og y-verdier, slik at x-verdiene varierer med 1 og finner funksjonsuttrykket. Dette er det Duval (2017) mener med forhold som kreves i matematisk aktivitet og at flere registre mobiliseres samtidig, eleven har to SR, graf og tabell, hvor eleven sammenlikner de parallelle endringer i begge og hvor det andre registeret det symbolske (tabell), hvilke endringer i en representasjon fører til ekvivalente endringer i den andre representasjonen, og dette registeret avslører de meningsenhetene som eleven kunne opprinnelig se på grafen.(Duval, 2017, s.73-74) Kognitiv koordinering mellom registre...
Eleven gjenkjenner objektet i algebraisk form og tegner grafen, dette er prosedural kunnskap som eleven har, og videre viser selvtillit til å utforske sin egen måte å løse oppgaven og på denne måten viser det Duval (2017) kaller to essensielle kognitive egenskaper i løsning av disse oppgaver, som fører til konseptuell kunnskap, eller konseptualisering. Dette bekrefter hvor viktig det er å bruke alle mulige semiotiske representasjoner til et matematisk objekt.
Alyssa har gode prosedurale ferdigheter som tillater henne utføre først en konvertering til graf som hun kan bruke til lokal aktivitet som avlesning av de første punkter for å fylle ut tabellen før hun hun ser sammenhengen. Kilpatrick med flere (2001) oppsummerer matematisk kunnskap og kompetanse ved å forene fem tett sammenflettede tråder som er produktiv disposisjon, prosedural flytt, strategisk kompetanse, adaptivt resonnement og konseptuell forståelse. Videre definerer de prosedural flytt i form av fleksible, nøyaktige, effektive og hensiktsmessige ferdigheter i gjennomføring av prosedyrer og konseptuell kunnskap i betydning av «forståelse for matematiske konsepter, operasjoner, og sammenhenger». (Kilpatrick sitert i Fan, 2014, fritt oversatt)

Med dette intervjuet om en elevs opplevelse, gleden over den opplevelsen og med en bekreftelse på poenget Duval avsluttes analysen

I neste kapittel presenteres og diskuteres funn i og resultater av denne studien

5. Diskusjon av resultater og funn

Gjennom en lang kvalitativ analyse av hver enkel besvarelse som inneholdt noe form for avvik i konvertering mellom semiotiske representasjoner av lineære funksjoner, ble hvert feil analysert og klassifisert i kapittel 4. I dette kapittelet vil hovedresultater presenteres først for så deretter diskuteres per oppgave og forklares på grunnlag av tidligere studier.

5.1 Diskusjon per oppgave

Feil gjort i oppgave 1 har også blitt fordelt på deloppgavene utfra hva som kunne antas at den enkelte elev gjorde først, dette for å unngå å telle samme feil flere ganger og ta forbehold for følgefeil som kunne oppstå. Oppsummert for oppgave 1 er feil produsert under konvertering fra det naturlige språket og til tabell, graf og algebraisk uttrykk, slik de framkommer i tabell 5.1.

$\mathbf{1\ V \rightarrow G}$			
1	$x \leftrightarrow y$	Kritikk mangler	3
2	$(0{,}0/origo = (0{,}5)$	Kritikk svak	1
3	$x + 4$	Partiell tilpasning	4
4	$4x + 1$	Analogi (semantisk induksjon)	1
5	$5x$	Analogi (semantisk induksjon)	2
$\mathbf{1\ V \rightarrow A}$			
1	$1 \cdot 1 + 5$	Svak kritikk	1
2	$4x + 1$	Analogi (semantisk induksjon)	1
3	$5x$	Analogi (semantisk induksjon)	1
$\mathbf{1\ V \rightarrow T}$			
1	$x + 4$	Partiell tilpasning	1
2	$x + 1$	Generalisering	4
3	$x \leftrightarrow y$	Generalisering	1
4	$2x + 3$	Falsk korrelasjon	1

Tabell 5.1

Generelt har gruppe II prestert best på deloppgave verbalt til graf, denne gruppen har tatt testen en uke senere enn gruppe I, og derfor kan ha utviklet bedre prosedurale ferdigheter, likevel har menge elever i den førstnevnte gruppen ikke har uført konvertering fra $V \rightarrow T$, som kunne gi som det ble vist i kapittel 4, videre utfordringer som følgefeil.
Disse feil både kritikk-relaterte og induksjonsfeil, kan alle ha sammenheng med elevers mentale representasjoner som utgangspunkt. (Duval, 2017) Og dermed være forbundet til kompleksiteten i konvertering generelt, og deriblant av det matematiske språket.
Matematikk kan bli betraktet som diskursiv aktivitet på grunn av sin bruk av diskursive ressurser og manipulering av spesialiserte notasjonssystemer, språk, og visuelle redskaper. Læring i matematikk innebærer bruk av språk. Bruken av det naturlige språket i matematikk inkluderer både matematiske og ikke-matematiske karakteristikker. (Planas et al., 2018) Planas med flere bemerker at også utdanningsforskning innen matematikk har mye fokus å skille mellom matematiske og ikke-matematiske karakteristikker for å kunne observere hvordan dette fungerer i praksis. Pedagogiske strategier, deriblant selve innfallsvinkelen i hele faget 2P-Y, som skal være praktisk, dermed læreverk utarbeidet til faget impliserer ofte at det skal skapes assosiasjoner mellom matematikk og virkelige situasjoner, for å utvikle matematiske konsepter og prosedyrer. Denne motsetningen ifølge Planas med flere (2018) kan virke som både kilde til utfordringer og forvirring og som hjelpemiddel i utvikling av matematisk kunnskap.
Utover faktumet at mangfoldet av semiotiske representasjoner er nødvendig for konseptualisering av matematiske objekter, Branchetti med flere (2015) sier at helt i begynnelse på grunn av ikke tilstrekkelig kunnskap kan koordinering mellom mange registre og bygging av forbindelser mellom representasjoner være en hindring for elever. Deres studie forbinder ulike feil som produseres av elever i konvertering mellom verbale og grafiske representasjoner, med avkoding av tekst.

På oppgave 2 slik det er vist i tabell 5.2 er det 10 besvarelser som inneholder feil av typen der elever enten knytter stigningstallet til x-aksen eller ser på uttrykket som punkt.

$\boldsymbol{2\ A \rightarrow G}$			
1	$Graf: (0{,}6)\ og\ (-4{,}0)$	Lineær dekomposisjon	6
2	$(0, -4)\ /\ (6, 0)$	Partiell tilpasning	4
3	$metode: speilvendt$	Generalisering	1
4	$Graf: (0, -4)$og $(0, 2)$	Negasjon	2

Tabell 5.2

Disse mentale representasjoner av punkter gjennom partiell tilpasning, lineær dekomposisjon, eller falsk korrelasjon, som etter Ben-Zeev (1998) ble utviklet og tilpasset gjennom denne studien til lineære funksjoner, og som generelt kan illustreres til å være på formen: $(\square, \lozenge) \Leftrightarrow y = \square\ x + \ \lozenge$, er en gjenganger blant elever i begge gruppene. Gjennom analysen ble det funnet ut at elever erstatter symboler i slike skjematiske representasjoner med meningsenheter fra algebraiske uttrykk, verdiene fra tabeller, eller meningsenheter fra algebraiske uttrykk som inn i tabeller og som generelt ble det funnet ut at bruken av det illustrerte skjema kan variere ettersom elever i tillegg har skjematiske framstillinger av akser eller falsk korrelasjon i forbindelse med første verdier i tabellene. Mentale representasjoner omfatter ett sett av bilder eller forestillinger som en person kan ha i forbindelse med et objekt eller situasjon og som ifølge Duval (2017) er viktig å skille fra semiotiske representasjoner.
Feil er, etter Muzangwa med flere (2012) symptomer på misforståelser og kan relateres til både prosedural og konseptuell kunnskap, eller begge. Feil kan være ufarlige glipp, som bare trenger å korrigeres noen ganger før en person utvikler intern kritikk som vil signalisere overtredelser. (Ben-Zeev, 1998) Eller feil, hvis de ikke blir korrigert tilstrekkelig nok, kan slå dypere rot og mange som har utfordringer, har dem på grunn av misforståelser og dermed utvikling av falske konsepter som kan komme fra dybden i individets mentale forestillinger. (Ben-Zeev, 1998; Muzangwa et al., 2015)
Leinhardt med flere (1990) mener at forklaringer er en nøkkelkomponent i matematikkundervisningen, hvor instrukser generelt er en del av all undervisning, og som innføring i nye emner inkluderer disse eksempler og en variasjon av representasjoner. I denne sammenhengen kan innføringer i nye emner bli sett som metoder gjennom hvilke elever blir presentert ovenfor matematiske konsepter. Det som er karakteristisk med disse innføringer er at de inkluderer nøye utvalgte representasjoner og velutviklede muntlige forklaringer. (Leinhardt et al., 1990) Lineære funksjoner ofte innføres gjennom presentasjon av akser, punkter og deretter selve det matematiske objektet, på denne måten kan elever bruke kunnskapen de har og bruke den på ukjente eller ikke oppfattede konsepter. Rasjonelle feil og feilaktige regler kan utvikles av elevene som følge av undervisningen, eksempler fra bøker og oppgaver.
Som det ble nevnt og forklart i kapittel 3, har disse to grupper med elevene noe ulike utgangspunkter. Gruppe I ble presentert og eksponert for verditabeller i større grad under innføring i emnet, da dette var tenkt som et opplegg som kunne ikke gjennomføres i sin helhet. Mens gruppe II jobbet med verditabeller i den grad læreverket dekket denne typen semiotisk representasjon.
Dermed på oppgave 3 i testen, oppsummert med typer feil i Tabell 5.3, har flere fra gruppe II ikke besvarte oppgaven, flere ikke fullfører og tar kun med noen få verdier, og det forekommer samme type feil som ble presentert i form av skjematisk mental representasjon under diskusjon av forrige oppgave. I denne oppgaven tar denne mentale representasjonen en annen form, hvor to elever en i hver gruppe setter inn meningsenhetene inn som første verdier x_1 og y_1, hvor av en elev fra gruppe I benytter seg av noe som kan se ut til å komme fra timen hvor elevene jobbet med korresponderende koordinatpar. 10 elever av 11 i gruppe II starter tabellen med $x_1 = 0$ mens bare fire i gruppe I bruker denne verdien som førte verdi. Acevedo Nistal med flere (2012) i sin studie fant

$\boldsymbol{3\ A \rightarrow T}$			
1	$x_n \rightarrow ax$	Kritikk mangler	1
2	$a \rightarrow b = f(x)$	Falsk korrelasjon	1
3	$a - b$	Negasjon	1
4	(a, b)	Lineær dekomposisjon	2

Tabell 5.3

ut at bruk av verditabeller blant elever var overraskende lite utbredt. Dette er også noe som er blant denne studiens hovedfunn, inntil videre funn, nemlig at i konvertering fra tabell til algebraisk representasjon korrelerer elever endring i x med stigningstallet og endring i y med konstantleddet. Disse resultatene oppsummert for begge grupper som antallet feil presenteres videre i tabell 5.4. Totalt 2 elever fra gruppe I og 4 elever fra gruppe II som bruker en eller annen variant av verdiene i tabellen til å sette opp uttrykket eller endring mellom verdiene. Denne forskjellen mellom disse to grupper blir bare større med økt grad av kompleksiteten i verditabellene i oppgaver utover i testen. Elevenes bruk av verdier fra tabellen er rasjonell nok både sett fra perspektiver til skjematisk dekomposisjon og generalisering av regler med $(\square, \lozenge) \Leftrightarrow y = \square\ x +\ \lozenge$, det er likevel av interesse å finne ut hvilke utfordringer disse kan peke ut.

4 $T \to A$			
1	$y_0x + \Delta y$	Kritikk mangler	1
2	$y_0x + \Delta y$	Svak kritikk	1
3	$x_1x + y_1$	Lineær dekomposisjon	1
4	$\Delta x \cdot x + \Delta y$	Generalisering	2

Tabell 5.4

Slik det ble analysert og demonstrert i kapittel 4, må disse funn kunne forklares med noe og i sin studie Acevedo Nistal med flere (2012) finner i tillegg at elevers prestasjoner i med tabeller var generelt dårlige i relativt enkle oppgaver noe som de opplevde som bemerkelsesverdig siden evner til å bruke denne representasjonsformen viste seg til å være merkbart lave.
I deres studie viser resultater lav nøyaktighet og betydelig motvilje i applisering av denne semiotiske representasjonen til oppgaveløsning, samtidig som elever viste generelt begrenset forståelse av verditabeller. Eneste måten tabeller viste seg til å bli brukt eller manipulert av elever var å utvide den eller ved å bruke noen få verdier fra tabellen til å finne en regel som følgelig ble feil. (Acevedo Nistal, et al., 2012) Forfattere refereres også til en annen studie i forbindelse med anvendelse av grafiske kalkulatorer som observerte at elever brukte helst symbolsk manipulering i oppgaveløsning, mens tabellene kun ble anvendt som et hjelpemiddel eller sikker sjekk. Disse observasjonene bekreftes også av intervju med Alyssa i delkapittel 4.2, hvor hun sier at hun valgte å ikke bruke tabellen i oppgave 1. Acevedo Nistal med flere (2012) sier videre at å finne årsaker til disse observasjoner bør være et anliggende for videre forskning, mens en forklaring på deres resultater angir de til å kunne ligge i læreverket som ble brukt ved skolen der forskningen fant sted, hvor verditabeller som representasjon presenteres som et mellomtrinn i konvertering fra algebraisk til grafisk representasjon. (Acevedo Nistal et al., 2012) Generelt også i denne studien kan det virke som at tabellene blir bruk av elevene kun i innlæringsfasen og inntil de blir presentert for regelen som gir dem mulighet til å utføre konverteringer som $A \to G$ og $G \to A$ direkte. Dette er observasjon fra begge deltakergrupper, samtidig som det er noe mer synlig at gruppe II er noe mindre fortrolig med tabellene.
I denne studien har læreverkets mangelfulle bruk av verditabeller blitt presentert allerede i kapittel 2 hvor et eksempel vises og videre beskrives, mens valget av andre kilder til verditabeller til undervisning i gruppe I ble begrunnet i kapittel 3. Av denne grunnen blir dette argumentet brukt til å bestemme typer rasjonelle feil til å være falsk korrelasjon i analyse i kapittel 4. Av 35 aktuelle verditabeller i læreverket, kun 11 starter med andre verdier enn $(0, \{\quad\})$. Derfor å se på utviklingen av antallet feil gjort av elever i gruppe II i oppgaver videre sammenlignet med gruppe I blir mer aktuelt. Tabell 5.5 viser antallet ulike typer feil gjort i begge grupper.
Slik det er vist i analysen er det kun tre av totalt 23 feil som er gjort under denne konverteringen $T \to A$ er fra gruppe I. Besvarelsene per elev gjennom flere oppgaver ble også vurdert i forhold til svar som ble produsert. Som tidligere nevnt gruppe I vært eksponert for verditabeller i mer omfattende mengder og variasjoner enn elever i gruppe II. Følgelig kan det mulig gi noe validitet til analysen. Av funn gjort under analysen av oppgave 5 er de slik det framkommer i tabellen over.

Elevene bruker de første verdier fra tabell som både konstantledd og stigningstall, og de bruker endring mellom verdiene til samme formålet like så. I denne studien kan forklaringen til dette være

Tabell 5.5

5 $T \to A$			
1	$a = \Delta y$	Falsk korrelasjon av $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ når $\Delta x \neq 1$	8
2	$a = \Delta x$	Lineær dekomposisjon ved grafisk avlesning	2
3	$a = y_1$	Fravær av kritikk / falsk korrelasjon	1 + 1
4	$a = x_1$	Punktvis lineær dekomposisjon	1
5	$b = y_1$	Falsk korrelasjon av eksempler/ Punktvis lineær dekomposisjon	4 + 1
6	$b = x_1$	Falsk korrelasjon	1
7	$b = \Delta x$	Grafisk lineær dekomposisjon	1
8	$b = \Delta y$	Grafisk lineær dekomposisjon / Fravær av kritikk	1 + 1
9	$b = y_1 - x_1$	Fravær av kritikk	1

læreverket brukt ved den aktuelle skolen som datamaterialet til denne forskningen kommer fra. Slik det er vist i eksempelet hentet fra det respektive læreverket i kapittel 2...., både verditabellen og bruk av ordet *tydelig* kan være et påvirkende faktor på hvordan det oppfattes av elever.
Chang med flere (2016) skriver at elevers evner til å konvertere (koordinere) mellom multiple semiotiske representasjoner avhenger av den pedagogiske konteksten og selv om undervisningen gitt i klasserommet bør vektlegges, er denne undervisningen ofte styrt av læreplanmateriell, som oftest læreverk. Undersøkelser viser at læreverk har meget stor innflytelse på gjennomføring av læreplaner og innholdet som presenteres i bøker blir mest sannsynlig presentert av lærere. Dermed metoder brukt for å presentere emner i læreverk påvirker pedagogikken. Videre skriver de at, sett bort fra undervisning, kan presentasjonen av semiotiske representasjoner i bøker ha en direkte effekt på elevenes læring, dette er i tråd med Ben-Zeev (1998), spesielt hvis elever bruker bøker på egen hånd. (Chang et al., 2016) Videre følger diskusjon av resultater på oppgave 6.

Resultatene på besvarelser på denne oppgaven er noe jevnere mellom gruppene og like typer feil forekommer begge grupper. Tabell 5.6 viser de oppsummerte resultater.

6 $T \to G$			
1	$x - x_1$	Falsk korrelasjon av $x_1 = y_0$ når $x_1 \neq 0$, men $y_1 = 0$	2
2	$y = x_1 \cdot x + y_n$	Lineær dekomposisjon (avlesning fra tabell)	1
3	$G: x \leftrightarrow y$	Falsk korrelasjon (speiling av tabell)	3
4	$(\square, \lozenge) \Leftrightarrow y = \square\ x + \lozenge$	Punktvis lineær dekomposisjon (per punkt fra tabell)	1
5	$f(x) = \Delta x \cdot x + \Delta y$	Lineær dekomposisjon (grafisk avlesning fra tabell)	1
6	$f(x) = x_1 \cdot x + y_1$	Punktvis lineær dekomposisjon (fra tabell)	1
7	$Regel\ for\ a$	Generalisering (plotting av punkter etter regel)	1
8	$b = y_1 - x_1$	Svak kritikk	3

Tabell 5.6

Noen elever tar seg i det og skisserer riktig graf, mens andre ikke klarer det. En elev tegner flere linjer som kan mulig forklares også med at eleven ser på en funksjon lokalt, som en serie punkter, og ikke globalt ved å se korrespondansen. (Van Dooren et al., 2012) Forveksling mellom koordinatene i et punkt er i følge Adu-Gyamfi med flere (2012) en vanlig feil blant elevene. Likevel elever får gitt en tabell og ikke punkter som de rasjonelt nok speiler, mulig fordi det er slik de er vant i å se tabeller. Og dette er noe som kan skape forvirring i følge Bossé med flere (2011) fordi semiotiske representasjoner av samme matematisk objekt kan varieres alt ettersom hva en ønsker å undersøke.

Funn som er gjort i forbindelse med denne oppgaven er at mange elever i begge grupper speiler verditabellen, som antagelig blir gjort på grunn av at y-verdiene denne gangen er ført inn i tabellen slik elever er vant til å se dem i læreverket som x-verdier.
McGee & Martinez-Planell (2014) finner i sin studie at det symbolske registeret ikke var representert i en eneste lærebok når det kom ti doble og triple integraler, og at utelatelse av tabeller var å finne overalt, som om det var underforstått at elever og studenter ikke lenger trenger dem. De skriver også at uteblivelse av disse representasjoner påvirker millioner av studenter.
I denne studien er funn knyttet til om ikke helt uteblivelse, så meget homogene fremstillinger av dem i læreverket med enkelte preferanser som kan mulig gi elever utfordringer med å utvikle konseptuell kunnskap. Og i noen tilfeller kan elever, slik resultatene viser det, utvikle falsk korrelasjon som konsekvens av lite variasjon av verdier i verditabeller. (Ben-Zeev & Star, 2001) Dette er et av poengene til Duval (2006, 2017), slik det forstås her, at variasjon i representasjoner ikke bare fra de forskjellige semiotiske registre, men også innen samme register som er nødvendig for å kunne utvikle forståelse og dermed dybdelæring i matematikk.

I besvarelser på oppgave 7 er det ingen store forskjeller mellom gruppene resultater mellom gruppene, disse resultater oppsummert for begge, vises i Tabell 5.7. Noen elever tegner to linjer fra et gitt punkt. Testen ble tatt tidlig i innlæringsprosessen, noe som kan påvirke resultatene, da hvor mye tid elever trenger for å tilegne nytt kunnskap er individuelt. Elever lærte om punkter, så ble elever presentert for formelle algebraiske notasjon for lineære funksjoner. Den tidligere kunnskap som er lært og forstått kan brukes av elever på nye situasjoner uten at den tidligere begrenses til å gjelde på ny. (Ben-Zeev, 1998) I oppgaven som blir diskutert videre er bildet igjen noe helt annet.

$7\ P \rightarrow A$			
1	$(\square, \lozenge) \Leftrightarrow Linje$	Generalisering (punkt som linje)	3
2	$f(x) = x + 4$	Fravær av kritikk	2
3	$x \pm y$	Svak kritikk	1

Tabell 5.7

Denne oppgaven ba elever om å konvertere fra grafisk representasjon og til algebraisk, elevene blir i tillegg bedt om å fylle ut ferdig en verditabell. Resultatene samlet presenteres i Tabell 5.8. Resultater i besvarelser på denne oppgaven igjen viser noen forskjeller på disse to gruppene, dette ble de ble presentert og analysert i forrige kapittel.

$8\quad G \rightarrow A \quad G \rightarrow T$			
1	$x_0 \cdot x + y_0$	Lineær dekomposisjon (avlesning fra graf)	2
2	(y_0, x_0)	Generalisering (punktnotasjon)	1
3	$-2\ \times / + 6$	Svak kritikk / Kritikk mangler	2
4	$y_1\ eller\ T\ feil$	Kritikk mangler (tabell)	3
5	$x \leftrightarrow y$	Partiell tilpasning	2
6	$y_1 = b$	Falsk korrelasjon	5
7	$x_1 \cdot x + y_0$	Punktvis lineær dekomposisjon (fra tabell)	1
8	$1 + x_0$	Kritikk mangler (grafisk)	1

Tabell 5.8

Elever som leser av omvendt når de gis y-koordinat er noe som i følge Bossé med flere (2011) er et kjent problem, da en må tenke litt annerledes. Denne konverteringen generelt i begge grupper bydd på utfordringer. Likevel igjen i denne oppgaven et funn som peker seg ut blant besvarelser fra gruppe II er noe forvirring rundt de første verdiene i tabellen, fem elever i denne gruppen bruker y_1 som konstantledd, eller det avleste setter skjæringspunktet inn for y_1 i tabellen.
Rezat (2010) skriver at læreverk er den viktigste ressurs i undervisning og læring og blant forskningen som er blitt gjort rundt bruk av læreverk blant lærere er det lite forsking som undersøker elevenes bruk av læreverk. På grunnlag av det gjennomføres det en studie, gjennom hvilken det blir funnet ut elever bruker bøker av ulike grunner men like fullt bruker dem ikke bare på befaling av en lærer, men også selvstendig. Elever i løsning av oppgaver søker til læreverk inntil de finner brukbar informasjon

for å løse matematiske problemer. Videre viser studien at det var mulig å gjenkjenne noe som blir kalt ulike individuelle utnyttelse-skjemaer av læreverk relatert til aktiviteter som ble gjort. Disse skjemaer var ikke generelle men ulike elever hadde ulike forestillinger. Alle elever i denne studien brukte bøker for å se etter informasjon, forskjellen var hvordan de anvende informasjonen. (Rezat, 2010)

For denne studien kan det utfra læreverkets innhold av og i verditabeller, kan det virke som at disse brukes kun en overgangsfase eller til bestemmelse av konstantleddet. Chang med flere (2016) fant ut at i forbindelse med verditabeller i mange bøker ber elever kun til å lese av omtrentlige verdier og dermed fungerer som grove estimater

Nilsen (2013) finner en viss trend blant norske læreverk for eksempel i forbindelse med innføring av stigningstall. Dette er noe som blir diskutert videre i tilknytning besvarelser på oppgaver 9 og 10.

Resultater over besvarelser på oppgaver 9 og 10 er vist i tabeller 5.9 og 5.10. Begge oppgaver vil diskuteres samtidig.

9 $G \rightarrow A$ (Skalerte akser)			
1	$a = y/\Delta x$	Kritikk mangler	4
2	$a = \Delta y$	Falsk korrelasjon	6
3	$b = x_0$	Generalisering av regel	1
4	$a \leftrightarrow b$	Partiell tilpasning av flere regler	1
5	$a: \Delta y \cdot \Delta x$	Kritikk mangler	1
6	$x_0 \cdot x + b$	Punktvis lineær dekomposisjon /likning	2

Tabell 5.9 og 5.10

10 $G \rightarrow A$ (Stigningstall, skalerte akser)			
1	$a = \Delta y$	Falsk korrelasjon	2
2	$a = \Delta x/\Delta y$	Partiell tilpasning	7
3	$a = y/\Delta x$	Kritikk mangler	2
4	$a\ per\ rute$	Falsk korrelasjon	3

Disse to oppgaver begge med skalerte akser ber elever om å finne funksjonsuttrykket i den første og bestemme stigningstallet i den andre. Mange flere elever får til oppgave 9, og veldig få både besvarer og svarer korrekt oppgave 10. Slik de ble nevnt over, dominerer det en trend i læreverk som kan være misvisende for elever og mange rasjonelle feil produsert i denne oppgaven kan ha en sammenheng med det. (Nilsen, 2013) Frafall av elever på oppgave 10 i begge grupper, kan også være deres prosedurale og ikke konseptuelle forståelse for stigningstallet i seg selv. Lithner (2017) skriver at oppgaver i læreverk ofte kan gjøres uten en instruksjon fra en lærer, dette ved å se på eksempler kopiere prosedyrer uten å ta i betraktning matematisk relevante egenskaper, som i dette tilfellet er brøken i oppgave 10 som skulle mine elever på regelen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ og dermed være et hint på hva en skal se etter på grafen. Videre mener Lithner (2017) at største hindring for elever i læring av matematikk er ikke-kreativ og matematisk overfladisk resonering. Og at deres resonering er dominert av det de husker eller å lete etter kjente eksempler snarere enn å se etter meningsbærende egenskaper til et matematisk objekt. (Palm et al., 2006) Dette er også noe som vises av Ben-Zeev (1998) Studier i utdanningsforskning indikerer at på grunn av dette har elever få muligheter for å utvikle en andre måter å resonere på. (Lithner, 2017) Dette viser resultater på disse to oppgaver også, da elever som løser oppgave 9 som er av noe mer lik utseende som oppgaver i læreverket, klarer veldig få seg på oppgave 10. Dette er også tilfellet med oppgave 11 som skal diskuteres videre.

Oppgave 11 er heller ikke en typisk læreverkoppgave som er kjent for elevene, og omtrent halvparten av elevene ikke klarer å fullføre den i sin helhet. Sammenlignet med konvertering $A \rightarrow G$, for eksempel på oppgave 2, og hvor mange av elever fra gruppe II spesielt fått den til klarer ikke så mange denne. Akser er ikke avmerket med tallverdier og elever kun må forholde seg til de visuelle egenskaper som skal etter forventning kunne gjenkjennes av elever. Duval (2017) legger meget stor vekt på akkurat dette og peker ut utfordringer ved det. Prøver heller ikke er oftest utarbeidet på denne måten, slik hele denne testen i forbindelse med denne studien er. Lithner (2017) mener at krav til matematisk resonering i lærerproduserte prøver er velutviklet med fokus på overfladisk tenkning, de gjør det mulig til å lykkes med løsningen ved stort sett bruk av algoritmisk tenkning og memorert resonering som ikke er langvarig. Elever under slike prøver trenger ikke relasjonell forståelse av konsepter og metoder som brukes for å løse oppgaver. (Palm et al., 2006) Disse Analysen av konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner i skriftlige besvarelser på testen presenterer mangfoldet av rasjonelle feil produsert per konvertering. Tabell 5.11 under viser typer feil slik de ble tolket og klassifisert i kapittel 4 og antallet ulike typer feil per konvertering, dessuten summen av ulike feil oppsummert i begge grupper. Dette er blitt gjort etter Ben-Zevs (1998) taksonomi over rasjonelle feil. En oversikt over typer feil og fordelingen følger med som Vedlegg 1.

Tabell 5.11

Konvertering	**Kritikk-relaterte feil**			**Induktive feil**					**Per konvertering**
	Kritikk mangler	Kritikk svak	Negasjon	Syntaktisk induksjon				Semantisk induksjon	
				Partiell tilpasning	Mis-spesifikasjon		Falsk korrelasjon	Analogi	
		Konkur-ranse			Lineær Dekomposisj.	Generali-sering			
1 $V \to G$	3	1		4				3	**11**
1 $V \to T$				1		5	1		**7**
1 $V \to A$		1						2	**3**
2 $A \to G$			2	4	6	1			**13**
3 $A \to T$	1		1		2		1		**5**
4 $T \to A$	1	1			1	2			**5**
5 $T \to A$	3				6		14		**23**
6 $T \to G$ $G \to A$		3			4	1	5		**13**
7 $P \to A$	2	1				3			**6**
8 $A \to G$ $A \to T$	5	1		2	4	1	5		**18**
9 $G \to A$ $A \to V$	5			1	2	1	6		**15**
10 $G \to A$	2			7			3		**12**
TOTALT	**22**	**8**	**3**	**19**	**25**	**14**	**35**	**5**	**131**
	Kritikk-relaterte feil →		**33**	**Feil ved syntaktisk induksjon →**		**93**	**Feil ved semantisk induksjon →**	**5**	

Resultatene diskutert i de to foregående delkapitler gir nå et grunnlag for å kunne besvare forskningsspørsmålene som ligger til grunnlag for denne studien. Disse spørsmålene er:

1) Hvilke utfordringer møter elevene ved konvertering mellom ulike representasjoner av lineære funksjoner?

Utfordringer manifesterer seg gjennom feil i en matematisk aktivitet, derfor ved å analysere:

2) Hvilke typer feil disse utfordringer viser seg gjennom og
3) Hva kan være mulige kilder til disse typer feil?

Første spørsmålet spør om hvilke utfordringer møter elever ved konvertering mellom ulike representasjoner av lineære funksjoner. Svaret på dette spørsmålet er, slik det ble vist i delkapittel 4.1, at elever forbinder eksempler som gis til å være regler og derfor produserer feilaktige regler på grunnlag av det. Elever får heller ikke nok varierte oppgaver som igjen kan være med på å forebygge at slike feilaktige regler dannes. Dette fører videre til neste utfordring, nemlig at når elever møter oppgaver med små justeringer som er uvante for dem, enten så klarer de ikke å løse oppgavene eller ofte løser dem feil. Det kommer også fram, eller det kan se ut som at elever at elever ikke vet om skjæringspunktet med x-aksen, derfor kan dette øke antallet elever som forbinder stigningstallet med x-aksen. Skjæringspunktet med x-aksen er heller ikke et fokusområde i læreverket, noe som tar fra elever mulighet til å lære om dette visuelle middelet. Som følge av det blir neste utfordring 0-verdiene i tabeller mistolket, slik det ble vist i delkapittel 4.1, flere av elever gjorde feil der y-

verdiene i tabellen ble satt til å være null. Der prosedurale ferdigheter ser ut til å være gode, som å skissere graf, er konseptuell forståelse ikke nødvendig oppnådd, dette viste seg i begge grupper, på grunnlag av besvarelser på oppgaver 10 og 11. Derfor gir det neste utfordring, nemlig det Duval (2017) kaller visuelle egenskaper til en lineær graf, det vil videre si at elever har utfordringer med å se de visuelle egenskaper. Elever har utfordringer med skalerte akser. Dette videre fører til utfordring med verditabeller igjen, elevene forventer Δx til å være ofte én, og kun ser på Δy, dette er en utfordring også grafisk. Elever har utfordringer med punkter som blir både til linjer og verdiene settes inn i funksjonsuttrykk, eller hentes fra funksjonsuttrykk og settes inn i som første verdier i tabeller. Regler er også en utfordring som brukes av elever i feil sammenheng, som for eksempel besvarelse der *en x-enhet til høyre og opp / ned* brukes av en elev for å plotte inn punkter. Elever viser utfordringer med å skape et helhetlig bilde av objektet funksjon og dens representasjoner. Og viktig utfordring som peker seg fra det igjen ut er at elever ikke er fortrolig med verditabeller og helst ikke bruker dem når de lærer seg direkte regler og derfor utfordringer med utvikling av konseptuell forståelse. Utfordringer som peker seg ut fra det igjen er, og som virker til å ha noe påvirkning er at elever ikke bruker tabeller i den grad det er ønskelig og tabeller helst med variert innhold, det kan være en videre utfordring å forstå skalering av aksene, for å bruke regelen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uten konseptualisering, kan bli vanskelig. Derfor kan det hende at så mange har utfordringer med det og dermed brukes regelen i mange variasjoner. Disse utfordringer ble manifestert gjennom rasjonelle feil som ble analysert utfra besvarelser. Videre skal det besvares neste forskningsspørsmål.

Det andre forskningsspørsmålet i denne studien handlet om hvilke feil disse utfordringer viser seg gjennom. Til sammen ble det produsert 131 feil gjennom alle konverteringsoppgaver.
Ifølge Ben-Zeev (1998) ikke alle feil behøver å være enten syntaktiske eller semantiske, feil kan være glipp som forekommer som følge av uoppmerksomhet, ikke nok opptrente ferdigheter i et emnet eller som følge av negasjon. Alle disse feil ble det vist eksempler på i analysekapittel, til sammen er det 33 kritikk-relaterte rasjonelle feil i begge grupper. Likevel er de fleste rasjonelle feil produsert under syntaktisk induksjon. (Ben-Zeev, 1998) Slik det fremkommer fra oversikten i tabell 5.11, hvor oversikten gir hele 93 feil ved syntaktisk induksjon, tolket etter Ben-Zeev (1998), klassifisert og begrunnet gjennom analysen i denne studien. Antallet semantiske feil er merkbart mindre, bare fem, det er dermed ikke sagt at det er slik i realiteten, alle disse feil har en sammenheng med oppgave 1, som er en tekstoppgave, der elever kan trekke analogi med virkeligheten, slik det er tolket her fra taksonomien.
Størst antallet rasjonelle feil ble produsert under konvertering fra tabell til algebraisk representasjon på Oppgave 5, 23 feil der 14 av dem feil ved falsk korrelasjon. Trenden som først ble synlig i Oppgave 5, å bruke representasjon verditabell for å bestemme meningsenheter, med det menes at stigningstallet ble bestemt av mange elever utfra Δy og konstantleddet ved y_1 hentet fra tabellen. Trenden ser ut til å fortsette gjennom alle oppgaver som har verditabell som kilde- eller målrepresentasjon. 18 rasjonelle feil ble til under konvertering fra graf til algebraisk uttrykk og til verditabell. Slik det ble vist under analysen, er det flere elever som virker til å være forvirret av første verdier i tabellen. 64 av totalt 131 feil produseres under konvertering fra eller til verditabell, da er 6 feil på Oppgave 7 ikke er medregnet. Likevel er 25 feil av 64 på disse oppgavene er feil gjort ved falsk korrelasjon. (Ben-Zeev & Star, 2001)
Mange feil også produseres under konvertering fra graf til algebraisk uttrykk, der aksene er skalert, på oppgaver 9 og 10, til sammen 27 rasjonelle feil. 9 av dem ble vurdert til å komme fra falsk korrelasjon.
Generelt, slik de produserte rasjonelle feil ble vurdert her, er det mest av rasjonelle feil som produseres ved falsk korrelasjon. 35 feil ble vurdert til å ha noe relasjon til feilaktige regler skapt på bakgrunn av eksempler, og kan skyldes både læreverkets bruk og eksempler gitt ellers. Blant elevene kan det se ut til vise seg gjennom alle oppgaver som har en tabell, på noen oppgaver i større grad overrepresentert i besvarelser fra gruppe II. Grunnen til forskjellen mellom disse to grupper ble beskrevet i kapittel 3. Trenden å knytte meningsenheten konstantledd til førte verdi som en

bestanddel i en tabell, er noe som etter Ben-Zeev (1998) er falsk korrelasjon mellom bestemte egenskaper og spesifikke algoritmer. Bestemte egenskaper i dette tilfellet er konstantledd mens spesifikke algoritmen er læreverkets forslag på bestemmelse av konstantleddet med en påfølgende visualisering i tabellform og grafisk.
Lineær dekomposisjon som grunn er også en gjenganger blant rasjonelle feil og 25 feil ble klassifisert til å ha denne opprinnelsen. 17 av dem er gjort i forbindelse med konvertering hvor verditabell er en enten kilde- eller målrepresentasjon.
Til sammen er det 72 rasjonelle feil av 131 totalt, enten er det kritikk-relaterte feil eller feil gjort ved syntaktisk induksjon, er gjort under konvertering fra eller til verditabell. Mens resten av dem, 59 feil, er fordelt på konverteringer fra verbal til enten graf ellet algebraisk representasjon, henholdsvis 11 og 3. 13 er gjort ved konvertering fra algebraisk til grafisk representasjon, 6 feil er gjort fra ved konvertering fra 2 punkter til grafisk representasjon. Og 27 til sammen på oppgaver 10 og 11 fra grafisk representasjon til algebraisk der aksene er skalert. Antallet feil på konvertering fra eller til tabell, 72, og 27 feil ved konvertering fra graf i et koordinatsystem med skalerte akser, som gir 99 rasjonelle feil til sammen, kan også ha en sammenheng, det vil videre sagt litt mer om i forbindelse med didaktiske implikasjoner.
Klassifikasjon av feil etter Ben-Zeev (1998) presentert i tabellen per konvertering er tolket fra skriftlige besvarelser og det kunne ha vært andre grunner til det. Det må også tas i betraktning at testen ble utført tidlig i innlæringsperioden i både gruppe I og gruppe II, henholdsvis i uke 3 og uke 4. Likevel er dette feil som stammer fra en prosess der elevene lærer nytt fagstoff og derfor er det viktig å ha kjennskap til, fordi disse må korrigeres og da blir det av relevans å ha kjennskap til hvor de mulig oppstår og hvilke utfordringer dette kan gi for elevene videre. For eksempel ifølge Ben-Zeev (1998) hvis ikke eleven blir korrigert tilstrekkelig nok, vil dette føre til feil som er vanskelig å rette når de har utviklet seg til misoppfatninger. Disse feil likevel er blitt observert og klassifisert i denne studien og hva kan være mulige kilder til disse feil blir det siste spørsmålet denne studien vil svare på.

Kildene eller opprinnelse til rasjonelle feil slik de ble analysert, tolket og klassifisert i kapittel 4.1 og ytterligere bekreftet av intervjuene i kapittel 4.2 er ifølge Ben-Zeev (1996, 1998) feil som forekommer som følge av induktiv tenkning, analogisk tenkning, skjematisk og modellbasert tenkning og falsk korrelasjonell tenkning, disse belyses videre. Disse mekanismer sklir mer i hverandre enn de er distinkte, likevel kan disse være
De overnevnte mekanismer resulterer i feil som betegnes som rasjonelle feil. (Ben-Zeev, 1996, 1998) Tatt i betraktning at lærere instruerer ikke til hvordan slike feilaktige algoritmer kan skapes og at disse feil forekommer likevel i besvarelser, kan det skyldes med at elever produserer deres egne regler under løsningsprosesser av egen oppfinnsomheten og mulig blir genereres av elevenes overlæring på bakgrunn av lærebøkenes eksempler, tidligere undervisning og dessuten kan være motivert av elevers kunnskaper fra tidligere som overgeneraliseres på et senere tidspunkt.
Læreverket som brukes ved den aktuelle skole varierer representasjoner av matematiske objekter i liten grad innen semiotiske systemer. For ikke å forvirre elever brukes de samme representasjoner i undervisningen. Tekstbøker påvirker I stor grad innfallsvinkelen til hvordan lærere presenter et matematisk emnet og implementerer deres forståelse av hvordan elevene tilegner seg kunnskap. (Wang, 2015) Ben-Zeev (1998) argumenterer derfor er at elevers feilaktige og misvisende matematiske tenkning er «korrekt» tatt i betraktning at den følger systematiske regler og feilaktige regler som produseres basert på prosedyrer som fungerte effektivt før.
Induktiv tenkning
Elever oppfatter informasjon induktivt ved bruk av løsningseksempler som benyttes for å for å formidle informasjonen, og elever virker til å være avhengig av slike eksempler. I valg mellom å bruke eksempel på løsning av en oppgave eller skriftlige beskrivelser og forklaringer, elever viser overveldende tendenser til å velge den førstnevnte ifølge Ben-Zeev (1996). Elever viser tendens til å følge prosedyrer illustrert i løsningseksempeler på nye situasjoner uten å innse at dette kan være feil. Denne type læring under bestemte forhold kan gi korrekt innlæring, men også feilaktig. Slik det ble vist i flere eksempler av besvarelser i delkapittel 4.1 var det flere elever som brukte Δy konsekvent

som stigningstall eller konstantledd. Dette er generalisering med det menes konklusjoner gjort før det hentes tilstrekkelig med informasjon som mulig kan være basert på løsningsløsningseksempler utført tidligere. Denne generaliseringen på grunn av elevers mekaniske repetisjon eller utilstrekkelig kunnskap går over til overgeneralisering.

Analogisk tenkning

Denne typen tenkning i sin natur oppstår ved løsning av nytt problem (mål) ved analogi, hvor eleven henter et liknende problem løst effektivt i fortiden og tilpasser disse problemene hverandre med den hensikten å finne løsningen. Og som Ben-Zeev (1996) gjør klart er det å innhente en slik kildeproblem, er ikke uten videre en triviell og lett oppgave, fordi for å bruke et problem som kilde krever at eleven gjenkjenner dens relevans til målproblemet. Analogisk tenkning blir dermed en utfordring når kilde- og målrepresentasjon, i dette tilfellet, har en underliggende likhet og prinsipper, men ulike overfladiske trekk. Dette ofte omhandler konvertering fra verbalform til algebraisk slik det ble vist i besvarelser på oppgave 1, hvor elever ble vurdert til å kunne ha brukt en slik tenkning, hvor $5x$ og $4x + 1$ var funksjonsuttrykket som ble funnet.

Skjematisk og modellbasert tenkning

Schemata er en slags modell som sett fra kognitivt perspektiv, er en mental mekanisme som organiserer informasjonen som kommer inn. For eksempel sies det at i tekstoppgaveløsning utvikler elever tre ulike modeller: endring, kombinasjon og sammenligning. Der det skjer tilegnelse av "delvis-hel" skjema og det skal være med på å dissosiere oppgaver i "hel", "kjent del" og "ukjent del". (Ben-Zeev, 1996) Oppgaver hvor elevene brukte slike modeller var ofte oppgaver med verditabeller, men også oppgaver der det skulle konverteres til grafiske eller algebraiske representasjoner og en slik modell som kunne bli brukt er på formen slik det presentert også tidligere og er $(\square, \lozenge) \Leftrightarrow y = \square\, x + \lozenge$.

Falsk korrelasjonell tenkning

Læreverk i matematikk kan ofte ha korrelasjoner mellom spesifikke egenskaper knyttet til oppgaver og operatorer som brukes til å løse disse oppgavene. Eksempler i bøkene gir elever algoritmer som kan brukes på lignende oppgaver, det er uten noen forklaringer på hvorfor algoritmene fungerer, eller begrunnelse for applisering. På denne måten forkynner elever syntaktiske oppskrifter (Ben-Zeev & Star, 2001, s. 254) Elever vil ofte utvikle løsningsmetoder i tiltro til den overfladiske strukturen til løsningseksempelet. Dette ble demonstrert med rikelige eksempler i denne studien, der slike eksempler på verditabeller i læreverket og homogene fremstillinger av dem med hensyn til innholdet, som elever bruker senere som regel. Og eksempel på det er å bruke y_1 som konstantledd Nå

6. Refleksjoner og didaktiske implikasjoner

6.1 Refleksjoner

Av flere større og mindre funn i denne studien, et utpeker seg mer enn andre, nemlig elevers forhold til og bruk av verditabeller, lærebokens påfallende tilnærming til verditabeller og dessuten homogen eksemplifisering av disse, som fører videre til nokså snevert bruk av dem og noe snever oppbygging av konseptuell kunnskap blant brukere.

Tabeller ser ut til å bli brukt av elevene kun i begynnelsen av opplæringen, for så å bli glemt eller brukt som et hjelpemiddel, i forstanden overgangsmiddel når den direkte overgangen mellom algebraisk uttrykk og graf er kognitivt ikke oppnådd og ikke som den faktiske representasjon for det matematiske objektet som en verditabell er for funksjoner.

Skjæringspunktet med x-aksen er ikke et berørt tema i gjeldende lærebok, denne mangelen kan se ut til å kunne ha innvirkning på at den syntaktiske og semantiske siden ved det matematiske språket kan bli ytterligere misforstått av elevene når sentrale aspekter og egenskaper ved et matematisk objekt, som i dette tilfellet lineære funksjoner, ikke gis nok oppmerksomhet til. Det kan bli lett å se dette i forbindelse med kun undervisning i slike tilfeller, da det kan alltids stilles krav om og videre

begrunnes med lærerens ansvar for å fremme elevers utvikling. Viktige momentet her er at før en lærer faktisk oppdager slike sammenhenger som funn i denne studien, noe som ikke er fullt så enkelt å oppdage fordi elever helst unngår å bruke tabeller, og glemmer dem for godt når den prosedurale ferdigheten ved direkte skissering, eller avlesning, og prøver ikke er konstruert på denne måten som testen i gjeldende studien, har eleven lært det allerede og mulig produsert en feilaktig regel som følge av det. Lærere både bruker og anbefaler supplementer, men det er også opp til hver enkelt å ta anbefalinger til følge. "*Learning results from want the student does and thinks and only from what the student does and thinks. The teacher can advance learning only by influencing what the student does and learn.*" (Simon H. A. sitert i Ambrose et al., 2010)
Det bør likevel ikke glemmes at en læreverk er like styrende i opplæringen og står ofte nærmere et klasserom enn læreplan, og elever ofte foretrekker å jobbe med en bok, for der har de eksempler som de er så glad i, slik Ben-Zeev (1998) viser til. Dessuten en læreverket er det elever har tilgjengelig når læreren ikke er det, de blir brukt av elever ikke bare i klasserommet, og dermed er også en direkte kilde til kunnskap og matematiske konsepter, hvis oppbygging, om kunnskapen blir konseptualisert på en ikke korrekt måte og kan ikke korrigeres av læreren når disse eventuelt feilaktige konsepter dannes, dette er kjent til å føre til dypere misforståelser hos elever heller enn dybdelæring. Disse misforståelser kan være som kjent vondt å vri på om de har vært der lenge nok. Variasjonen i og innfallsvinkler til oppgaver som er ment til å være med på utvikling av konseptuelle forståelsen av og dermed dybdelæring om meningsenheter til matematiske objekter eller egenskaper ved dem bør være stor nok til at denne utviklingen faktisk skjer og ikke bremser ned utviklingen og muligheter.

6.2 Didaktiske implikasjoner

Av egen erfaring i et klasserom, kan det sies at verdien 0 ved oppsett av tabeller ble det ofte henvendt til, fordi at denne verdien utløser ikke behov for kalkulator hos elever som første reaksjon, dermed ingen forstyrrelser eller avbrytelser i undervisningen, alt dette med de beste intensjoner. Men etter funn i denne studien skal det vurderes nøye om hva som er best.
Som en oppsummering og en anbefaling på hvordan en kan bruke taksonomien, sier Ben-Zeev (1998) at innledende løsningseksempler har en kritisk påvirkning på produksjon av feil, fordi slike eksempler kan ha høy korrelasjon med en falsk egenskap og en bestemt algoritme som elever bygger en form av preferanse til å plukke opp. Videre foreslås det at "nonexamples", som forskeren kaller det og som her oversettes og tolkes som mot-eksempler på et bestemt konsept eller algoritme, bør presenteres helt fra begynnelsen av innlæringsfasen. Som Duval (2006) påpeker handler det ikke bare om mengder av konverteringsoppgaver gjort men også variasjon av representasjoner i produsert av respektive registre bør være stor. Det blant annet nevnes viktigheten av å undersøke ikke bare fra utfra teoretisk perspektiv, men også utdanningsperspektiv både akkumulering av korrekt matematisk tenkning, men også med hensyn til det som fremkaller feilaktige prestasjoner. (Ben-Zeev, 1996)
En annen implikasjon, som det ble reflektert over er, stammer fra det naturlige språket som brukes og går ut på, at når det blir snakket om skjæringspunktet, sies det skjærings***punkt***, når elever blir presentert for den algebraiske representasjon $f(x) = ax + b$, reduseres et punkt $(0, y_0)$ til et tall b, det er mulig ikke rart at elever kan bruke punkter på mange ulike måter som for eksempel forslaget fra tidligere $(\square, \lozenge) \Leftrightarrow y = \square\ x + \ \lozenge$, som Ben-Zeev kaler lineær dekomposisjon. Duval (2017) sier at reduksjon av punkt til en regel en kan føre til videre reduksjon. Under analysen og bestemmelse av typer feil, som var en lang prosess, ble det gjort noen betraktninger for hvordan denne reduksjonen kan se ut for elever. Forslaget er at for elevene ser det ut som en elegant måte å bli kvitt noe på, derfor kan dette knyttes av elevene også til svingningstallet, for hvis det er lov å gjøre det med b så kan en gjøre det med a. For å illustrere dette er som en mulig tankeprosess hos elever når de er under innlæring av et nytt emnet, og har ikke ennå forstått semantikken, så kan dette se ut omtrent som det er vist under:

$$(a, b) \leftrightarrow (x, y)$$

$$f(x) = ax + (0,b) \quad \rightarrow \quad f(x) = ax + (0,y) \quad \rightarrow \quad f(x) = (a,x) + (0,y)$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = xx + y$$

Med dette menes at elever forveksler meningsenhetene med koordinater, fordi grafisk er det der b kommer fra samtidig som b er et punkt, men i $f(x) = ax + b$ vises det ikke. Elevene direkte forbinder b med y-aksen, derfor kan det bli lett å se a på denne måten og hvis de ikke er oppmerksomme på skjæringspunktet med x-aksen, kan de rasjonelt nok gjøre den om til a, også fordi at verditabeller ikke er konsentrert om det.
Skalerte akser, er en utfordring for elever, her kan forslaget være at arbeid med veditabeller samtidig med grafer med skalerte akser kunne vært med å bidra på elevenes forståelse av regelen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nitsch (2015) foreslår at alle representasjoner må ha lik fordeling i et læreverk. En implikasjon likevel som er viktig er å bruke verditabeller i mye større grad og variasjoner innen verditabeller, slik at elevene ikke utarbeider feilaktige regler. Og som vist kapittel 4 og diskutert i kapittel 5 når de oftest møter homogene fremstillinger av tabeller, tror de at det er slik det skal være. Når de lærer å lese av funksjonsuttrykket direkte, eller anvender den til å skissere grafen, glemmer de verditabell i sin helhet og slik forskningslitteraturen viser, er dette ikke et unikt fenomen i denne studien.
Intervju med Alyssa og hennes opplevelse viser hvor viktig det er å bruke alle representasjonsformer for å kunne utvikle forståelse for konsepter. Og verditabeller er ikke bare et hjelpemiddel eller mellomfase, det er en semiotisk representasjon som er et nyttig verktøy på vei mot forståelse av det matematiske objektet lineære funksjoner og bør ikke undervurderes.

Litteraturliste

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). What counts as a flexible representational choice? An evaluation of students' representational choices to solve linear function problems. Instructional Science, 40(6), 999–1019. https://link.springer.com/article/10.1007/s11251-011-9199-9

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. School science and mathematics, 112(3), 159-170

Ambrose, S. A., Bridges, M. W., DiPietro, M., Lovett, Marsha C., Norman, M. K. (2010). How Learning Works. Seven Research-Based Principles for Smart Teaching https://firstliteracy.org/wp-content/uploads/2015/07/How-Learning-Works.pdf

Ben-Zeev, T. (1996). When erroneous mathematical thinking is just as "correct": The oxymoron of rational errors. In Sternberg, R. J., Ben-Zeev, T. (Eds.), The nature of mathematical thinking (pp. 55–80. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Ben-Zeev, T. (1998). Rational errors and the mathematical mind. General Review of Psychology, 2, s. 366–383.
https://www.researchgate.net/profile/Avi_Ben-Zeev/publication/232559651_Rational_errors_and_the_mathematical_mind/links/00b49536bd28789316000000.pdf

Ben-Zeev, T., & Star, J. R. (2001). Spurious correlations in mathematical thinking. Cognition and Instruction, 19, 253–275.
https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/S1532690XCI1903_1

Ben-Zeev, T. (1996). When erroneous mathematical thinking is just as "correct": The oxymoron of rational errors. In Sternberg, R. J., Ben-Zeev, T. (Eds.), The nature of mathematical thinking (pp. 55–80. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum
https://www.google.com/books?hl=no&lr=&id=SX8pPNs3PCkC&oi=fnd&pg=PA55&dq=Ben-Zeev,+T.+(1996).+When+erroneous+mathematical+thinking+is+just+as+%E2%80%9Ccorrect%E2%80%9D:+The+oxymoron+of+rational+errors.+In+Sternberg,+R.+J.,+Ben-Zeev,+T.+(Eds.),+The+nature+of+mathematical+thinking+(pp.+55%E2%80%9380.+Mahwah,+NJ:+Lawrence+Erlbaum+&ots=XcNPS24L-h&sig=qENqAGdt9yXYnpbg95ZrIx803J4

Berg, C. V. (2009). Developing algebraic thinking in a community of inquiry: Collaboration between three teachers and a didactician. Doctoral dissertation at the University of Agder. Kristiansand, Norway: University of Agder.

Berg, C.V. (2013). Enhancing Mathematics Student Teachers' Content Knowledge: Conversion between Semiotic Representations. In CERME 8 (pp. 2946-2955).

Bossé,M. J., Adu-Gyamfi, K., & Meredith R. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings:
https://www.researchgate.net/profile/Kwaku_Adu-Gyamfi2/publication/267920348_Assessing_the_Difficulty_of_Mathematical_Translations_Synthesizing_the_Literature_and_Novel_Findings/links/54bcd3100cf24e50e9409638.pdf

Burkhardt, H.,& Shoenfeld A. H., (2003) Improving Educational Research:Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/0013189x032009003

Brandt, K., Leece, R., Trushkowsky, M., Appleton, E. (2015) Math: Problem-Solving in Functions and Algebra. THE CUNY HSE CURRICULUM FRAMEWORK https://www2.cuny.edu/wp-content/uploads/sites/4/page-assets/academics/academic-programs/model-programs/cuny-college-transition-programs/adult-literacy/cuny-hse-curriculum-framework/Section4CUNYHSEFrameworkMath-Revised-10-24-17.pdf

Branchetti, L., Ferretti, F., Lemmo, A., Maffia, A., Martignone, F., Matteucci, M., & Mignani, S. (2015). *A longitudinal analysis of the Italian national standardized mathematics tests. CERME9* (s. 1695–1701)

Botten, Geir (2016): *Matematikk med mening*. Caspar forlag. (s.57-65) http://www.caspar.no/wp-content/uploads/2016/05/matematikk-med-mening-kapittel-3.pdf

Boyatzis, R. E. (1998). Transforming qualitative information: Thematic analysis and code development. Thousand Oaks, CA: Sage.

Bryman, A. (2016): *Social Research methods*, 5th edition, Oxford

Chang B. L., Cromley G. J. & Tran N. (2015) Coordinating Multiple Representations in a Reform Calculus Textbook

Chang, B. L., Tran, N., & Cromley, J. G. (2016). Varying demands for coordinating multiple representations in a reform calculus textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Advanced online publication.

Chiara, A., Lindström P., Arzarello, F., Holmqvist K., Robutti O., Sabena C.. (2015): Reading mathematics representations: En eye-tracking study, https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-013-9484-y

Clement, J., Lochhead, J., and Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. American Mathematical Monthly, 8, 286-290. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00029890.1981.11995253?journalCode=uamm20

Devor, J. L. & Berk, K. N. (2012): *Modern Mathematical Statistics whith Applications*, Second edition, Springer

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. I F. Hitt & M. Santos (Red.), Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (s. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA. https://eric.ed.gov/?id=ED466379

Duval, R. (2006): *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, volume 61 https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. New York: Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-56910-9.pdf

Edmonds-Wathen C., Trinick T, and Durand-Guerrier V., (2016): Impact of Differing Grammatical Structures in Mathematics Teaching and Learning, i Barwell et al. Mathematics Education And Language Diversity

Fauskanger, J., Bjuland, R., (2018) Deep Learning as Constructed in Mathematics Teachers' Written Discourses (s.149-160)
https://www.iejme.com/makale_indir/2054

Gagatsis, Athanasios og Myria Shiakalli (2010): *Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving*, Educational Psychology, 24:5, 645-657, DOI

Gordon P.S. and Gordon F.S.,(2010) Functions, Data and Models : An Applied Approach to College Algebra, American Mathematical Society,
https://ebookcentral.proquest.com/lib/agder/reader.action?docID=3330432

Hattikudur S., Richard W. Prather, Pamela Asquith, Martha W. Alibali, Eric J. Knuth, Mitchell Nathan. (2012) Constructing Graphical Representations: Middle Schoolers' Intuitions and Developing Knowledge About Slope and Y-intercept
https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1949-8594.2012.00138.x

Hitt, F., (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134

Iori, M. (2017). Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. Educational Studies in Mathematics, 94(3), 275–291. doi: 10.1007/s10649-016-9726-3

Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.

James Thomas and Angela Harden Methods for Research Synthesis Node, Evidence for Policy and Practice Information and Co-ordinating (EPPI-)Centre, Social Science Research Unit, 18 Woburn Square, London WC1H 0NS http://eppi.ioe.ac.uk/cms/Default.aspx?tabid=188)

Kilpatrick,J., Swafford,J., & B. Findell (Eds.). National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Leinhardt, Zaslavsky, and Stein (1990): *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching*. American Educational Research Association

Lithner, J. (2003). Students mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 29–55. https://link.springer.com/article/10.1023/A:1023683716659

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM Mathematics Education*. doi: 10.1007/s11858-017-0867-3

Maguire M. & Delahunt B., (2017) Doing a Thematic Analysis: A Practical, Step-by-Step Guide for Learning and Teaching Scholars, AISHE-J, Volume 3

MacGregor,M., Stacey,K. Cognitive Models Underlying Students' Formulation of Simple Linear Equations Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No. 3 (May, 1993), pp. 217-232 Published by: National Council of Teachers of Mathematics Stable https://www.jstor.org/stable/749345

McGee, D. L. & Martinez-Planell, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. International Journal of Science and Mathematics Education, 12(4), 883–916 https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10763-013-9437-5.pdf

Muzangwa, J. & Chifamba, P. (2012). Analysis of Errors and Misconceptions in the Learning of Calculus by Undergraduate Students. Acta Didactica Napocensia, 5(2), 1-10.

Nilsen, Hans Kristian (2013): *Learning and Teaching Functions and the Transition from Lower Secondary to Upper Secondary School*. Doktorgradsavhandling. Universitetet i Agder.

Niss, M. (2004). The danish "KOM" project and possible consequences for teacher education. I R. Strässer, G. Brandell, B. Grevholm, & O. Helenius (Red.), Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education. (s. 179- 190). Stockholm: The Royal Swedish Academy of Science. https://www.researchgate.net/profile/Ola_Helenius/publication/317475540_Educating_for_the_Future_Proceedings_of_an_International_Symposium_on_Mathematics_Teacher_Education/links/593b185f458515e398c8d30e/Educating-for-the-Future-Proceedings-of-an-International-Symposium-on-Mathematics-Teacher-Education.pdf#page=183

Niss, M., & Hoejgaard, T. (eds.) (2011) Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. English edition, October 2011 (IMFUFAtekst no. 485). Roskilde: Roskilde University. https://forskning.ruc.dk/files/35932281/IMFUFA_485.pdf

Niss, M. & Jensen, T.H. (red.) (2002). Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark, “KOM-projektet”. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Undervisningsministeriet.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2015). Students’ competencies in working with functions in secondary mathematics education—empirical examination of a competence structure model. International Journal of Science and Mathematics Education, 13(3), 657-682. doi: 10.1007/s10763-013-9496-7

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaalje, A., Storstøl, O., Hals, S. (2014): *Sinus matematikk 2P-Y, påbygging til generell studiekompetanse*. Cappelen Damm

Palm (2006)

Planas, N. (2018, online first). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. To appear in Educational Studies in Mathematics https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9810-y

Rezat, S. (2009). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1260–1269). Lyon, France: INRP.

https://www.researchgate.net/profile/Sebastian_Rezat/publication/268420097_THE_UTILIZATION_OF_MATHEMATICS_TEXTBOOKS_AS_INSTRUMENTS_FOR_LEARNING/links/580a370308ae74852b52fd59.pdf

Rillero, P. (2016). Deep conceptual learning in science and mathematics: Perspectives of teachers and administrators. Electronic Journal of Science Education, 20(2), 14–31. https://eric.ed.gov/?id=EJ1188252

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102–1118). Oxford: Oxford University Press. https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb1/prof/PSY/PAE/Team/Schneider/RittleJohnsonSchneiderInPress.pdf

Saldaña, J. (2009) The coding for qualitative Researchers. SAGE Publications Inc. https://us.sagepub.com/en-us/nam/the-coding-manual-for-qualitative-researchers/book243616

Schleppegrell, M.J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. Reading & Writing Quarterly, 23(2), 139– 159. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10573560601158461

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of “well-taught” mathematics courses. Educational Psychologist, 23, 145-166. https://www.ams.org/journals/notices/200006/fea-schoenfeld.pdf

Schoenfeld, A. H., (2000): *Purposes and methods of research in mathematics educati*on (ss.641-649) https://www.ams.org/journals/notices/200006/fea-schoenfeld.pdf

Schoenfeld A.H., (2010)
https://pdfs.semanticscholar.org/67ed/862c1883fa6b2f5dbd9011d95335aa45c3f0.pdf
Gordon P.S. and Gordon F.S.,(2010) Functions, Data and Models : An Applied Approach to College Algebra, American Mathematical Society, https://ebookcentral.proquest.com/lib/agder/reader.action?docID=3330432

Statsministerens kontor [NO]
https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Udir (2019): https://hoering.udir.no/Hoering/v2/286?notatId=575, https://hoering.udir.no/Hoering/v2/197?notatId=358

Thomas J. & Harden A. Methods for the thematic synthesis of qualitative research in systematic reviews (http://eprints.ncrm.ac.uk/468/1/1007_JTAHthematic_synthesis.pdf)

Wang, Y., Barmby, P., & Bolden, D. (2017). Understanding linear function: a comparison of selected textbooks from England and Shanghai. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 131–153. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x

Wellington, J. (2015): Educational Research: *comtemporary issues and practical approaches* 2th edition. Bloomsbury

Vedlegg 1

Konvertering	**Kritikk-relaterte feil**			**Induktive feil**				
	Kritikk mangler	Kritikk svak	Negasjon	Syntaktisk induksjon				Semantisk induksjon
		Konkur-ranse		Partiell tilpasning	Mis-spesifikasjon		Falsk korrelasjon	Analogi
					Lineær Dekomp.	Generali-sering		
1 $\boldsymbol{V \rightarrow G}$	$x \leftrightarrow y$ (3)	$(0{,}0/origo = (0{,}5)$ (1)		$x + 4$ (4)				$4x + 1$ (1) $5x$ (2)
1 $\boldsymbol{V \rightarrow T}$				$x + 4$ (1)		$x + 1$ (4) $x \leftrightarrow y$ (1)	$2x + 3$ (1)	
1 $\boldsymbol{V \rightarrow A}$		$1 \cdot 1 + 5$ (1)						$4x + 1$ (1) $5x$ (1)
2 $\boldsymbol{A \rightarrow G}$			$Gj.: (0, -4)$ og $(0, 2)$ (2)	$(0, -4)$ / $(6, 0)$ (4)	$Gj.: (0{,}6)$ og $(-4{,}0)$ (6)	$metode:$ $speilvendt$ (1)		
3 $\boldsymbol{A \rightarrow T}$	$x_n \rightarrow$ ax (1)		$a - b$ (1)		(a, b) (2)		$a \rightarrow b =$ $f(x)$ (1)	
4 $\boldsymbol{T \rightarrow A}$	$y_0x + \Delta y$ (1)	$y_0x + \Delta y$ (1)			$x_1x + y_1$ (1)	$\Delta x \cdot x + \Delta y$ (2)		
5 $\boldsymbol{T \rightarrow A}$	$a = y_1$ (1) $b = \Delta y$ (1) $b = y_1 - x_1$ (1)				$a = \Delta x$ (2) $a = x_1$ (1) $b = y_1$ (1) $b = \Delta x$ (1) $b = \Delta y$ (1)		$a = \Delta y$ (8) $a = y_1$ (1) $b = y_1$ (4) $b = x_1$ (1)	
6 $\boldsymbol{T \rightarrow G}$ $\boldsymbol{G \rightarrow A}$		$G: feil$ (3)			$x_1 \cdot x + y_n$ (1) $(\square, \lozenge)$ (1) $\Delta x \cdot x + \Delta y$ (1) $x_1 \cdot x + y_1$ (1)	Regel for a (1)	$x - x_1$ (2) $G: x \leftrightarrow y$ (3)	
7 $\boldsymbol{P \rightarrow A}$	$x + 4$ (2)	$x \pm y$ (1)				$(\square, \lozenge) \Leftrightarrow$ $Linje$ (3)		
8 $\boldsymbol{A \rightarrow G}$ $\boldsymbol{A \rightarrow T}$	$-2 + 6$ (1) y_1/T feil (3) $1 + x_0$ (1)	-2×6 (1)		$x \leftrightarrow y$ (2)	$x_0 \cdot x + y_0$ (3) $x_1 \cdot x + y_0$ (1)	(y_0, x_0) (1)	$y_1 = b$ (5)	
9 $\boldsymbol{G \rightarrow A}$ $\boldsymbol{A \rightarrow V}$	$a: y/\Delta x$ (4) $a: \Delta y \cdot \Delta x$ (1)			$a \leftrightarrow b$ (1)	$x_0 \cdot x + b$ (2)	$b = x_0$ (1)	$a = \Delta y$ (6)	
10 $\boldsymbol{G \rightarrow A}$	$a: y/\Delta x$ (2)			$a: \Delta x/\Delta y$ (7)			$a: \Delta y$ (2) $a: pr\ rute$ (3)	

Vedlegg 2

$\mathbf{1\ V \rightarrow A}$			
1	$1 \cdot 1 + 5$	Svak kritikk	1
2	$4x + 1$	Analogi (semantisk induksjon)	1
3	$5x$	Analogi (semantisk induksjon)	1

$\mathbf{1\ V \rightarrow T}$			
1	$x + 4$	Partiell tilpasning	1
2	$x + 1$	Generalisering	4
3	$x \leftrightarrow y$	Generalisering	1
4	$2x + 3$	Falsk korrelasjon	1

Vedlegg 3

Representasjoner av lineære funksjoner

Navn:____

Felt der du finner ***fett kursiv*** skrift er til dine besvarelser.

Du bestemmer selv hvordan du velger å løse oppgavene, bruk dine metoder.

Du kan hoppe over oppgavene og komme tilbake til dem senere

Masse lykke til!

TUSEN TAKK for at du hjelper meg ved å besvare oppgavene

Oppgave 1

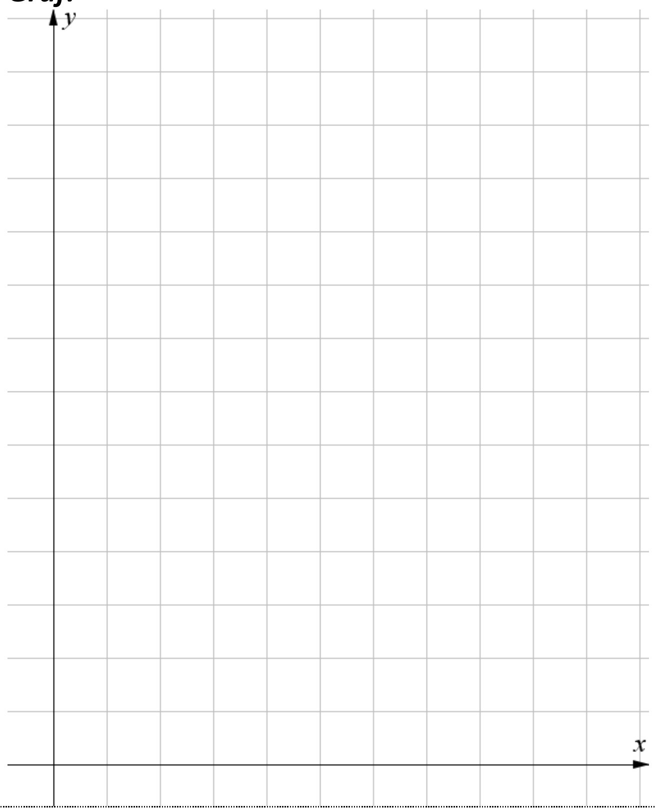
Situasjon fra virkeligheten:

Else skal flytte hjemmefra når hun er ferdig på VGS. Hun samler på designglass til sitt kjøkken.
Hun har allerede 5 glass og skal kjøpe inn 1 glass hver måned fram til hun flytter ut.

Kan du finne regelen/ funksjonsuttrykket?

Fyll ut feltene, det er du som bestemmer hvilket felt du skal starte med først

Graf:



Verditabell:

x	y

Løsningsmetode / beskriv kort hvordan du tenkte:

Funksjonsuttrykk:

I hvilken rekkefølge gjorde du denne oppgaven? Skriv svar under, hva du gjorde først, som nummer 2 og til sist.
1.
2.
3.

Oppgave 2

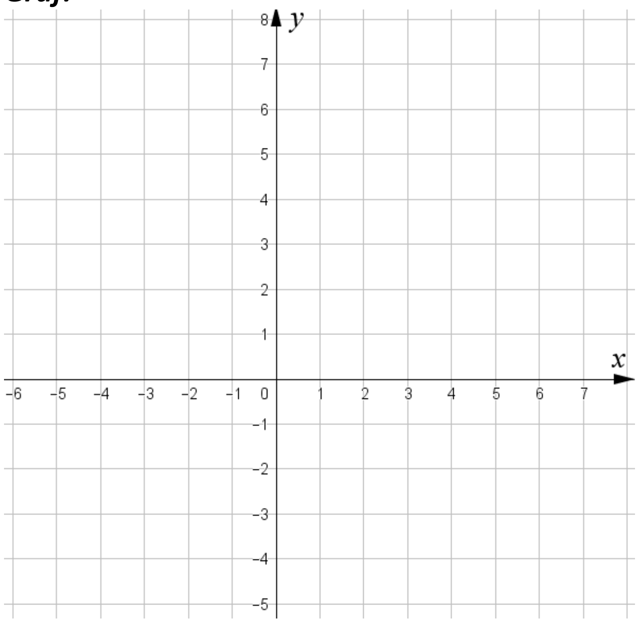
Funksjonsuttrykk:

$$f(x) = -4x + 6$$

Tegn grafen til $f(x)$

Løsningsmetode/ beskriv kort hvordan du tenkte:

Graf:



Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Oppgave 3

Funksjonsuttrykk:

$$f(x) = 3x - 2$$

Sett opp verditabell til $f(x)$

Løsningsmetode/ beskriv kort hvordan du tenkte:

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Verditabell:

x	y

Oppgave 4

Verditabell:

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Finn funksjonsuttrykk som passer til tabellen.

Løsningsmetode/ beskriv hvordan du tenkte:

Funksjonsuttrykk:______________________________

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Oppgave 5

Verditabell:

x	y
2	5
4	9
6	13
8	17
10	21
12	25
14	29

Finn funksjonsuttrykk som passer til tabellen.

Løsningsmetode/ beskriv hvordan du tenkte:

Funksjonsuttrykk:__________________________________

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Oppgave 6

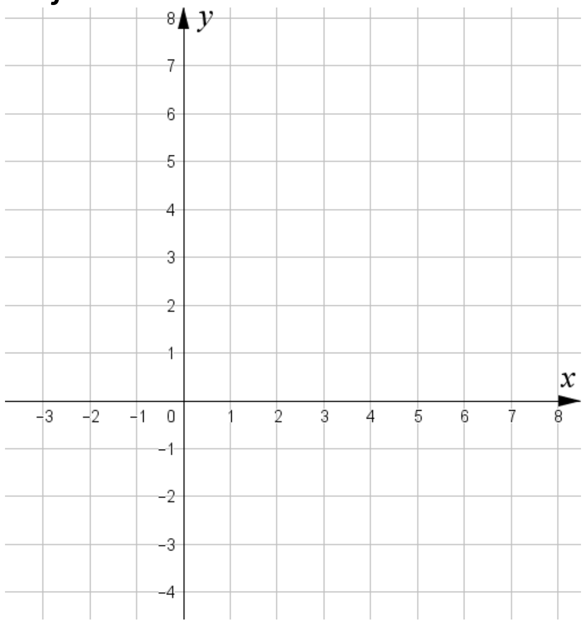
Verditabell:

x	y
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

Tegn grafen utfra tabellen og skriv funksjonsuttrykk:

Løsningsmetode/ beskriv kort hvordan du tenkte:

Graf:



Funksjonsuttrykk:_____________________

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Oppgave 7

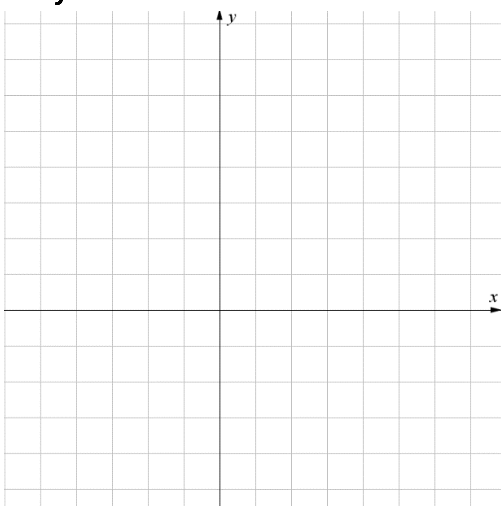
Finn likning til en rett linje som går gjennom punktene: (1, 4) og (3, 4)

Du kan bruke koordinatsystemet til høyre:

Løsningsmetode/ beskriv kort hvordan du tenkte:

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

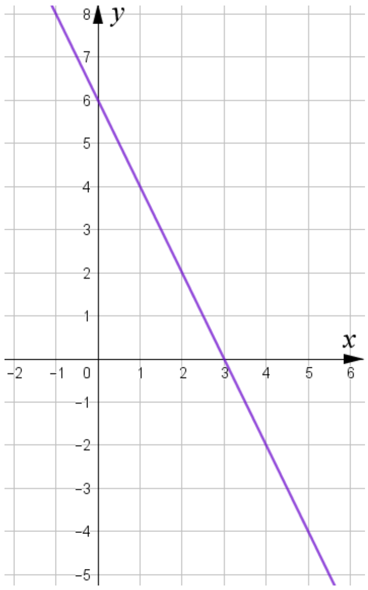
Graf:



Likning:_________________________

Oppgave 8

Finn funksjonsuttrykket til grafen under og fullfør tabellen



Funksjonsuttrykk:

____

Fullfør tabellen til grafen:

x	y
-1	
0	
2	2
	0
4	

Løsningsmetode/ beskriv kort hvordan du tenkte:

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

____

____

____

____

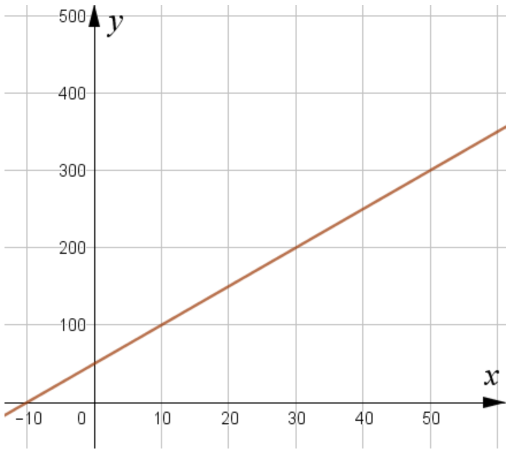
____

____

____

Oppgave 9

Finn funksjonsuttrykket til grafen under



Løsningsmetode/ beskriv kort hvordan du tenkte:

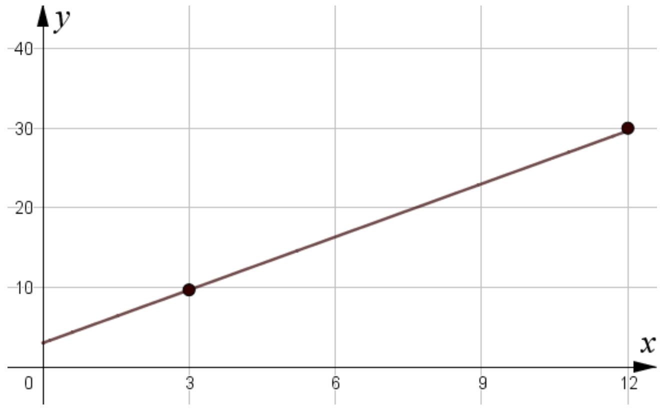
Funksjonsuttrykk: ________________________

Lag en tekstoppgave som du mener passer til grafen:

____
____
____
____
____
____
____

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

Oppgave 10
En student ble bedt om å finne stigningstallet til linjen gjennom to punkter på grafen til venstre:



Studenten svarte at stigningstallet er $\frac{2}{3}$.
Dette er ikke korrekt svar!

a) Hvorfor $\frac{2}{3}$ er feil svar? Forklar hva som er galt med studentens tankegang.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

b) Hva er korrekt svar på spørsmålet? Hva er stigningstallet?

____
____
____
____

Forklar hvorfor du mener at dette er svaret?

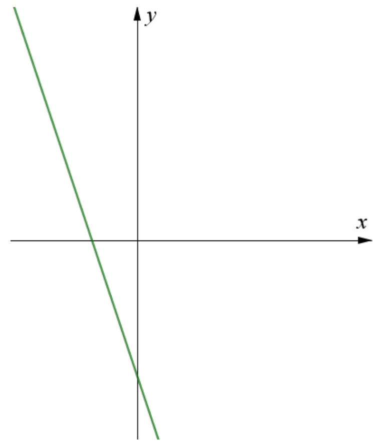
Oppgave 11

Hvilket funksjonsuttrykk hører til hvilken av grafene? (Merk stigningstall og at skjæringspunktet med y-aksen på hver av grafene er ulik)

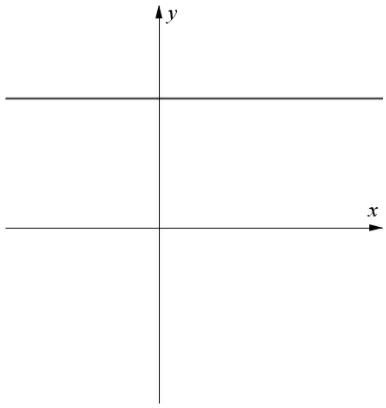
a) $y = x + 4$ **b)** $y = x - 2$ **c)** $y = \frac{1}{2}x$

d) $y = -3x - 3$ **e)** $y = 3$ **f)** $y = -2x + 3$

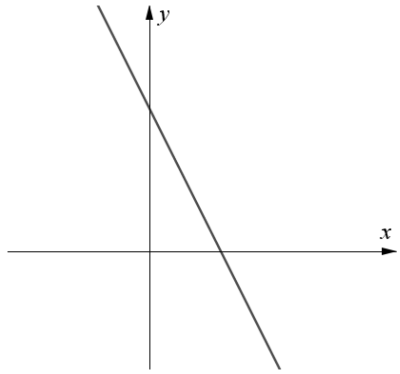
1



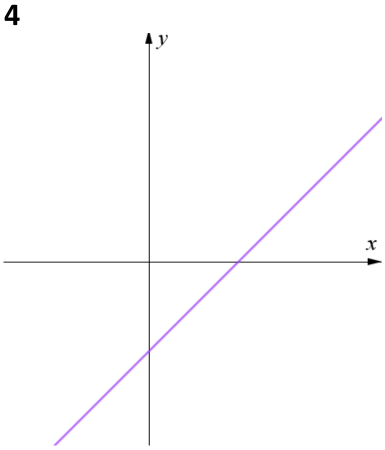
2



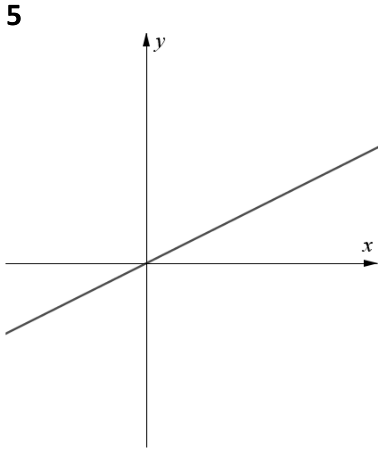
3



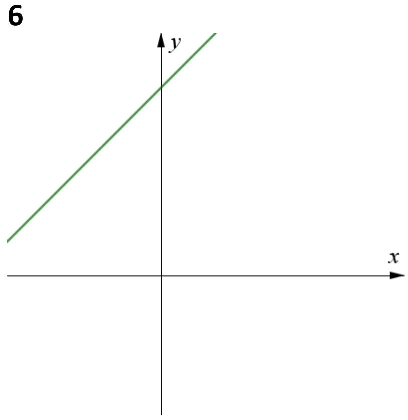
4



5



6



Skriv svarene dine i tabellen under:

Funksjonsuttrykk	*Graf-nummer*
a) $y = x + 4$	
b) $y = x - 2$	
c) $y = \frac{1}{2}x$	
d) $y = -3x - 3$	
e) $y = 3$	
f) $y = -2x + 3$	

Vedlegg 4

Semi-intervju

1. Kan du fortelle meg hvordan du tenkte da du løste oppgave?
2. Hvis du ser på oppgaven nr. ___ . Hva gjorde du her for å løse den?
3. Hva kunne du gjort på oppgave nr.___ da?
4. Kunne du gjort noe for å løse oppgaven?
5. Hva kunne du gjort for å hjelpe deg selv i løsningen av oppgave ___?

Vedlegg 5

Intervju med Viola
(100) I: Kunne du være så snill og forklare meg hvordan du tenkte i oppgaver der du gikk fra verditabell til funksjonsuttrykk?
(101) Viola: Mmm […] Jeg så at her (eleven peker på tabell i oppgave 4) så x-verdien blir større med 1 og for hver x-verdi så går det med 2 opp (peker på kolonne for y-verdier), så jeg satte x+2. For, for hver 1x så stiger verdien med 2 (tegner buede linjer fra 3 til 5 til 7).
(102) I: Det samme gjorde du på oppgaven her? (peker på oppgave 5)
(103) Viola: Ah.. For der gikk det 4 opp for hver 2x. (Elevsvaret på oppgave 5 er: f(x)=2x+4)
Intensjonen videre blir å få eleven til å legge bort denne tankegangen der variasjonen mellom x-verdiene gir stigningstallet og variasjonen mellom y-verdiene gir konstantledd. Siden eleven har lyktes med oppgave 2 (A→G), der eleven tydelig bruker bokregelen en-bort og opp eller ned, virker det som at det kan være en måte å gjøre det på uten for mye eventuell innblanding fra intervjuer. Slik at eleven gjør mest mulig på egen hånd:
(104) I: Hvis du skulle løst oppgaven annerledes, hvis du skulle gå fra tabell, ikke direkte til funksjonsuttrykk. Hva kunne du ha gjort med tallene i tabellen?
(105) Viola: Sette opp sånn en graf (Ser litt lurende på intervjuer)
(106) I: Ja. Kan du være så snill og gjøre det?
Eleven får et nytt utskrift av oppgaveheftet og setter i gang med å tegne koordinatsystem og sette opp tall på aksene. Kort stund etter:
(107) Viola: Da bliiir.. ja.. (tenker, ser på tabellen) Da begynner den i 3 (plotter inn punkt (0, 3))
(108) I: Neste blir?
(109) Viola: Da blir det 5 (Plotter inn (1, 5)). Der ja.. Også tre ni (begynner å bli sikrere på seg selv, plotter (3, 9), vil fortsette videre)
(110) I: Det der egentlig holder (med tanke på at aksene begynner å gå utenfor rutefeltet for innføring, stoppes eleven fra å plotte videre, for å unngå eventuelle skjevheter)
(111) Viola: Det holder?
Videre dreier samtalen seg om hvor mange punkter vi trenger for å skissere en rett linje, etter litt peking virker eleven overbevist om at alle punkter ikke trenger å være med, men at de vil likevel ligge på linjen. Og eleven tegner linjen gjennom punktene.
(112) Viola: Sånn (smiler, er fornøyd)
(113) I: Nå vil jeg be deg om å lese av funksjonsuttrykket fra grafen
(114) Viola: Da ville jeg satt (skriver f(x)=   tar et lite mellomrom) 3 bak (skriver 3). For den begynner i 3. [...] (Stille, eleven teller og tegner en x-enhet til høyre og 2 opp til grafen, gjentar fra punktet 1 til høyre 2 opp, skriver 2x i mellomrommet f(x)=   3, setter pluss mellom dem. Ser på oppgavearket der på den samme oppgaven har eleven svart tidligere x+2 og på funksjonsuttrykket som eleven er kommet fram til under intervju, virker overrasket og smiler)
(115) I: Flott! Stor forskjell?
(116) Viola: He, he. Ja, det ble litt annerledes.
(117) I: Skal vi se på tallene i tabellen sammen litt nå?
(118) Viola: Ja
Videre handler samtalen om tabellen og grafen om variasjon mellom x- og y-enhetene, per 1 x-enhet på graf, varierer y med 2, sammenligner med tabellen.
(119) Viola: Aaaah.
Ser videre på oppgave 5. Eleven får velge selv å se på tall i tabellen eller tegne graf som hjelperepresentasjon. Eleven setter i gang med graf
(120) Viola: Det var lettere å se når man tegner
I koordinatsystemet bruker eleven tall på aksene slik de forekommer i tabellen: x-akse (2, 4, 6 osv), y-akse (2, 4, 8, 12, 16) Her ser man allerede at både intervallene på y-aksen mellom enhetene er ujevne og valg av tall noe uheldig. Eleven får likevel fullføre, plotte inn punktene og tegne grafen. Når uttrykket skal settes opp/ leses av ser eleven og sier at det blir ikke lett å se. Eleven får nytt ark og

etter forslaget fra intervjuer setter opp ikke skalerte tall på aksene og etter plotting og skissering kommer fram til uttrykket f(x)=2x+1. Aktiviteten blir etterfulgt av graf ←→ tabell – samtale, der det diskuteres fram hopp parallelt med x-aksen i forhold til endring i y-verdiene, sammenligning med tabellen, tilbake til graf igjen, slik fortsettes det en stund. Eleven videre ser på uttrykket sitt i første besvarelse, der det står f(x)=2x+4:
(121) Viola: Men jeg fikk til den da (peker på 2x).
(122) I: Ja, men den der toeren kommer fra da du så på hva x-verdiene varierte med.
Tilbake til tabellen og diskuterer videre om elevens første forklaring på stigningstallet endring i x-verdiene i tabellen, endring i y, så til grafen igjen for å se hvor egentlig den andre toeren i f(x)=2x+1 kommet fra og det er endring i y-verdiene.
Det samme tallet som oppstår i to ulike kilder, to forskjellige 2-tall, sett i denne sammenhengen, ser fortsatt ut til å skape forvirring hos eleven, noe som ikke er rart for de ser helt like ut der de står i de to forskjellige funksjonsuttrykkene. Og hvis eleven både skriftlig på første besvarelse og muntlig under intervju senere, ikke forklarte tankegangen / tenkemåten sin, og bare skrev f(x)=2x+4, ville denne misoppfatningen (denne feilen gjentas av eleven i flere oppgaver) ikke kommet fram. Og uttrykket ville ende opp med status delvis riktig. Det er samtidig viktig å si at denne tabellen i oppgaven ble utarbeidet med tanke på å variere tall på en måte som ikke er vant for elevene og ofte ikke gjøres i lærebøkene hvor tabellene er noe homogene og lite variert med hensyn til innholdet i dem. Så lenge tabellene er lite varierte mye av feil og for mange elever kan føre til misoppfatninger, fordi det kan bli vanskelig å fange opp nettopp sånne to «forskjellige» 2-tall.
Etter noen forhandlinger
(123) I: Når (peker i tabellen) x-enhetene ender seg med 2, y-enhetene ender seg med 4. Så, per 2 x-enheter, vokser y-verdien med 4. Hva vil y-verdiene vokse med per 1 x-enhet?
(124) Viola: Å, ja, å.. Da blir det 2.
(125) I: ja. Er det? (ser på eleven)
(126) Viola: Ja (nikker), da skjønner jeg litt mer.
(127) I: Oppgave 6 (T→G→A). Hvis du forklarer meg hvordan du tenkte..
(128) Viola: Jeg tenkte [.] Mmm […] (ser på tabellen og grafen som ble produsert) Feil, ser jeg, hmm(smiler). Jeg tenkte at den starter i -2.
(129) I: Men -2 er x-koordinat når y=0.
(130) Viola: Ja, så når x er -2 og y er 0, så skulle den startet på x-linjen i -2. (Begynner å plotte inn (-2, 0) i samme 1. originale oppgaveheftet) Nei […] (tviler)
(131) I: Så når x er -2 og y er 0, vil punktet være?
(132) Viola: På linja (bekreftende, peker på x-aksen). -1 og 1 vil være der. (Plotter)
(133) I: Ja
(134) Viola: (Tviler noe på (0, 2) og spørrende opp. Får bekreftende nikk og plotter inn resten av punktene, skisserer linjen) Sånn, det var litt annerledes. Så da ville utrykke blitt (skriver) f(x)=x+ (-2) (Ser tvilende opp og peker på skjæringspunktet med x-aksen)
(135) I: Hva skal du se på når du skal bestemme konstantledet?
(136) Viola: Hvor linja skjærer y-aksen. Da blir det x+2 (Stryker over parentesene og – i utrykket sitt)
(137) I: Når du tegnet den første grafen din [.] Så du på tabellen og tenkte at -2 var skjæringspunktet fordi det er en 0 der? (mener den korresponder med 0) Så du etter nuller i tabellen?
(138) Viola: Jeg tror ikke jeg har gjort så mange oppgaver med sånne tabeller, var mest uttrykk så skulle jeg tegne grafen.
Snakker litt om at å lese av når en ser grafen er mye enklere og omvendt. (Prosedural kunnskap)
(139) I: Skal vi se på oppgave 3 nå. Den har du ikke gjort. Når du ser på den nå, hva tror du at du kunne ha gjort?
(140) Viola: Jeg kunne […] Tegne grafen.
(141) I: Ja
(142) Viola: Også […] Mmm […] Ja (ler)
(143) I: Prøv å tegne da
(144) Viola: (Tegner, plotter inn skjæringspunktet med y-aksen. Så er eleven ikke sikker lenger)

(145) I: du har ett punkt nå, hvis du ser på funksjonsuttrykket nå. Hva betyr 3-tallet foran x
(146) Viola: En bort og 3 opp
(147) I: Ja. Klarer du
(148) Viola: Aha (Plotter og skisserer grafen)
(149) I: Så hvis du skulle sette tall inn i tabellen, noen punkter. Skjæring med y, hva blir x-koordinaten da?
(150) Viola: Null
(151) I: ja
Fortsetter å avlese koordinatene og fylle ut tabellen. Grafen er noe unøyaktig og å avlese y-koordinaten når x=3 blir vanskelig. Setter i gang med å regne ut ved å sette inn verdiene inn i funksjonsuttrykket. Eleven virker usikker på metoden. På spørsmålet hva er 3x og hva er det mellom 3 og x, svarer eleven +?. Snakker om det. Regner. (21 min 57 sek: Aha.. Aaaa)
24:07 Oppgave 8

Intervju med Linnea
(200) I: kan du forklare meg hva du tenkte når du løste oppgave 2? (A→G, Gitt: f(x)=-4x+6, elevene skal tegne grafen)
(201) Linnea: (Ser på sin egen løsning) (Ler) jeg husker jo ikke.
(202) I: Se på hva du har gjort, og hvis du husker ikke, så får du av meg et nytt ark, så kan vi gjøre den på nytt.
(203) Linnea: Ja. Skal vi se. Jo -4 der (peker på grafen, den skjærer y-aksen -4) det er på grunn av den der -4x (peker på funksjonsuttrykket)
(204) I: Ja
(205) Linnea: +6, nei, hæ 2 (grafen skjærer x-aksen i 2), nei jeg husker ikke. (Ser på løsningsmetoden sin: y=-4, x=2; -4+6=2) -4+6=2, -4, 2, de to punktene da. (peker på linjen og skjæringspunktene med x- og y-aksen)
(206) I: men der står det minus fire eks pluss to (-4x+6) og du skriver minus fire pluss seks (-4+6), hvor ble det av x?
(207) Linnea: Den ble borte, he-he.
(208) I: først tegnet du linjen der (peker på linjen som er stryket over), så ombestemte du deg og tegnet en ny.
(209) Linnea: Ja, men siden det står -4x der (funksjonsuttrykket), så burde jo linjen egentlig være der (peker på den som ble forkastet, denne skjærer x-aksen i -4) Siden det er x
(210) I: Hmm.. Vi skal løse oppgaven på nytt, og ikke gå direkte fra uttrykket til graf. Men la oss se først på oppgave 8. Der klarte du å finne uttrykket fra enten graf eller tabellen. Men siden du skriver at å finne uttrykket var ikke så lett, så tror jeg du brukte tabellen. (tilbake til oppgave 2) Her har du uttrykk f(x)=-4x+6, hva kan du gjøre for å gjøre det litt enklere for deg?
(211) Linnea: Tegne en sånn greia. (Peker på tabell på oppgave 3)
(212) I: Du kan gjøre det ja, verditabell.
(213) Linnea: (Begynner å tegne verditabell) Jeg husker nesten ikke hvordan jeg gjør det.(Smiler)
(214) I: Ikke tenk på det nå, vi kommer på det.
(215) Linnea: Okey
(216) I: -4x, hva betyr egentlig -4x? Hva er det -4 og x?
(217) Linnea: Gange
(218) I: Skriv det ned til deg -4 gange
(219) Linnea: -4 gange x pluss 6. Ja, for da kan jeg velge hvilke tall jeg vil for x.
(220) I: det kan du gjøre ja.
(221) Linnea: -4 gange 2 er -8 pluss 6 [.] 14, nei, det er -8+6, det er -2.
(222) I: Flott! Ser du det er lettere for deg når du skriver det ned, for da glemmer du ikke alle tegn.
(223) Linnea: Ja
Videre setter eleven opp tabellen, ved å bestemme to til verdier for x og regne ut verdier for y, plotter inn punktene i koordinatsystemet og skisserer grafen.
(224) I: hvis du nå ser på denne linjen du har nå og de du tegnet første gang. Har -4 noe sammenheng med aksene på den linjen du tegnet nå?
(225) Linnea: Nei
(226) I: Tallet 6, det tallet har noe med y-aksen å gjøre. Mens koeffisientene, tallene foran x, de betyr noe helt annet.
(227) Linnea: Ja, for det er ikke det at de skal krysse gjennom der (peker på sine to tidligere grafer)
(228) I: Nei.
(229) Linnea: Er ikke det egentlig s.. sånn (begynner forsiktig men uoppfordret å tegne en enhet til høyre fra skjæringspunktet med y-aksen og 4 ned til grafen)
(230) I: Sånn, ja. Du går 1 x-enhet til
(231) Linnea: høyre og fire ned
(232) I: Og derfor så?
(233) Linnea: minus fire
(235) I: Ja

(236) Linnea: Litt husker jeg (Ler) For på den der, (peker tilbake på sin tidligere besvarelse) tenkte jeg jo helt feil. Ja, nå husker jeg.
Videre følger samtale om oppgave 8, der eleven har funnet uttrykket ved hjelp av tabell i utgangspunktet, uten å bruke grafen til annet enn å lese av verdiene som manglet i tabellen, for så å bruke tabell til å forme algebraiske uttrykket. Nå studeres grafen og det diskuteres hvorvidt en kan finne uttrykk ved å se på grafen, og viktigheten av å være oppmerksom på at endring i y kan bare finnes per 1 x-enhet.
Oppgave 9.
(249) I: Her har du en graf. Hvis du ser på den, hva tenker du nå?
(250) Linnea: Den der (peker på skjæringspunktet med y-aksen).
(251) I: Ja, flott.
(252) Linnea: Ja, for den går i femti.
(253) I: Hvis du nå går en rute til høyre, da er det ti x-enheter du går til høyre.
(254) Linnea: Da må jeg opp femti.
(255) I: Ja. Skriv det ned, så du husker. (Eleven skriver ned 50 og 10 på grafen). Så for ti x-enheter endrer y-verdien seg med 50. Hva tror du den y endrer seg med per 1 x-enhet?
(256) Linnea: Fem
(257) I: Hva blir funksjonsuttrykket ditt da?
(258) Linnea: 50x+50. Nei, femt.. Skal kanskje ha ett? (ser på grafen og notatene sine). Nei, femti skal stå til sist. (Skriver ned 50)
(259) I: Og per 1 x-enhet?
(260) Linnea: Fem. [..] Aaah! (virker glad) Ja, nå skjønner jeg. Fem x pluss femti. (Skriver 5x+ foran 50) Jaaa, for det er ti der, og femti, ja, nå skjønner jeg (smiler)
Oppgaven diskuteres videre, der antallet x-enheter økes, som fører videre til økning i y-enheter, ser litt på proporsjonalitet mellom de ulike kombinasjonene, at de gir 5 uansett.
Oppgave 10.
(272) Linnea: Den der to tre deler skjønte jeg ikke helt.
(273) I: Det er akkurat sånn som du tenkte på oppgave 8. En rute
(274) Linnea: Ah, ja.
(275) I: Hvor mange x-enheter går du her?
(276) Linnea: Tolv
(277) I: Ja, men hvis du ser mellom punktene?
(278) Linnea: Å ja, ni
(279) I: Ja, og da må du opp?
(280) Linnea: Ti, tjue, tjue.
(281) I: Hva tror du stigningstallet blir?
(282) Linnea: Tjue
(283) I: Per ni x-enheter, ja. Men hva med per en x-enhet?
(284) Linnea: Tre (Smiler) Jeg skjønner ikke.
(285) I: Hvis du ser på forrige oppgaven. Hvordan du har gjort det der. Der gikk du?
(286) Linnea: Ja, 10
(287) I: (Peker tilbake) Her går du?
(288) Linnea: Ni
(289) I: En trenger ikke å starte på y-aksen, eller i skjæringspunktet, for å bevege seg til høyre, en kan starte hvor som helst på en rett linje. Der det er lett å se. Her går du ni til høyre, og 20 opp. Der gikk du? (Peker på forrige oppgave)
(290) Linnea: Femti
(291) I: (Tilbake) Her 20
(292) Linnea: Å ja, skal jeg dele sånn som jeg der? Ah, tjue delt (sammenligner oppgavene) på tolv
(293) I: Er du sikker på at det er tolv?
(294) Linnea: Nei, ni, ni. (Skriver 20/9)

Videre dreier samtalen seg om stigningstall som brøk, desimaltall og heltall. Divisjonsalgoritmen hvis en foretrekker desimaltall. Diskuterer oppgave 11.

Intervju med Alyssa

(300) I: Her er din besvarelse. Du har gjort det veldig bra. Det jeg lurte på er på oppgaven 3 var du veldig glad, du tegnet en smily og på oppgave 4 skriver du at: «etter en Aha opplevelse på forrige oppgaven…» Kan du fortelle meg hva slags opplevelse du hadde?

(301) Alyssa: Eh, på første eller andre oppgaven så valgte jeg jo å ikke bruke, jeg tror det var den (blar til oppgave 1) Så valgte jeg jo å ikke bruke verditabellen, fordi jeg heller løste oppgaven uten verditabeller. Bare se på stigningstall og sånt. Så jeg, jeg må bare se litt hva jeg skrev og sånt […] (Ser på oppgaven 3 og 4) Ehm.. Jeg tror jeg har [..] Ja, Ehm […] Jeg tror det jeg mente er, at det er, jeg husket jo ikke hvordan jeg skulle bruke tabellen..

(302) I: Mmm, ja

(303) Alyssa: Så jeg tenkte at denne oppgaven her, klarer jeg jo ikke å løse. Derfor så tenkte jeg, men da tegner jeg heller grafen bare inn her (peker på koordinatsystemet i oppgave 2, og den ene av grafene der) Også så jeg jo at, ja, når jeg skal sette inn i verditabellen, så er det jo bare tre og tre mellom hver (peker på y-kolonnen i tabellen i oppgave 3). For jeg klarte jo heller ikke å se disse så gjorde jeg jo ikke (peker på oppgaver 3, 4 og 5), jeg måtte hoppe over de først og komme tilbake til, helt på slutten. (peker på oppgave 3, og tabellen nederst, og referer til y-verdier er høye tall jo lenger ned i tabellen en kommer og y-aksen i koordinatsystemet, der grafen er tegnet, ikke går så høy opp og dermed umulig å lese av mer og at oppdagelsen at økningen mellom y-verdiene var tre da eleven leste av grafen, og dermed kunne regne videre uten hjelp fra grafen for fullføre tabellen) For da skjønte jeg jo, etter denne her (oppgave 3), at jeg skjønte sammenhengen med stigningstallet og at det er det samme det øker med på, i y-kolonnen da. Og siden jeg har ikke brukt verditabell så mye, så skjønte jeg jo denne sammenhengen da jeg tegnet grafen og så at, ja det var sammenhengen.

Eleven gjorde feil på oppgave 9, denne oppgaven ble gjort før eleven oppdaget kovariansen mellom x- og y-enheter i verditabeller i oppgaver 3, 4 og 5, siden disse ble gjort til sist. Derfor ser vi på Oppgave 9:

(304) I: Så har du gjort det veldig bra videre, men så på denne oppgaven (9). Hvis du tenker på disse tabellene som vi snakket om nettopp og denne sammenhengen du fant ut der. Samtidig ser på oppgaven og din løsning på den. Hva tenker du?

(305) Alyssa: Jeg ser jo med en gang at [.] jeg har [...] eller er det det som jeg har gjort feil at jeg startet i origo der, eller at jeg hadde dummet meg ut på at jeg tenkte ut ifra at den skulle krysse i null? (Eleven tenker på at fra origo er det 10 x-enheter til høyre og 100 y-enheter opp til grafen, utregningen blir da 100/10, dermed gir det stigningstallet 10, men grafen skjærer y-aksen i 50)

(306) I: Ja, det er det du har tenkt.

(307) Alyssa: Jeg har skrevet at 10 verdier til høyre går grafen 100 opp, men det gjør jo den ikke, den går 50 opp. For jeg tenkte fra null her.

(308) I: Ja, for du gikk langs x-aksen fra origo. Og en kan egentlig gå fra hvor som helst, så lenge det er fra grafen, en trenger ikke nødvendigvis starte fra y-aksen heller. Altså, der punktene er lesbare.

(309) Alyssa: Ja (nikker bekreftende)

(310) I: Hva tror du at stigningstallet blir da?

(311) Alyssa: Jeg tipper at det blir halvparten, at det blir 5.

(312) I: Her da. Hva tenker du om oppgave 10 nå?

(313) Alyssa: Eh, denne husker jeg at jeg ikke fikk til i det hele tatt. (Smiler og leser oppgaven høyt for seg selv.) Men har jeg fått [.] skal vi se (Ser på grafen, leser sitt svar: «Grafen går ikke 0.66 per 1 x verdi) Men har jeg gjort det gærent?

(314) I: Det er ikke helt korrekt. Og jeg vil si da at siden du tar endring i y-enhetene som 10 så gikk du jo igjen fra origo og langs x-aksen tre enheter også gikk du opp.

(315) Alyssa: Ja, har vært litt lettere hvis jeg gikk derfra til dit (peker på punktene på grafen)

(316) I: Ja, for som sagt så kan du gå fra hvor som helst på grafen, så lenge punktene er lett leselige. Og viktig at du ikke går langs x-aksen for da øker du med de enhetene som konstantledet er.

(317) Alyssa: Ja, aha, ja.

(318) I: Så hvis du skulle finne stigningstallet nå, hva ville du gjort?

(319) Alyssa: Ja, hva skal jeg si, jeg vet på en måte hva jeg vil gjøre, men så vil jeg dobbeltsjekke i notatene mine, for det er ikke helt ferskt inne akkurat nå. […]
(320) I: Du gikk hvor mange x-enheter?
(321) Alyssa: Så, her fra, fra tre til tolv, ni [.]
(322) I: Også måtte du? På oppgave 9, for å finne fram til (peker på tidligere tegnet hjelpelinjer på forrige oppgave)
(323) Alyssa: (Ser igjen på grafen i oppg. 10) Hmm, da har jeg gått 20 opp. Jaa, er det her jeg bruker y_1 minus y_2 delt på x_1 minus x_2
(324) I: delta y delt på delta x, eller endring i y delt på endring i x.
(325) Alyssa: Ja. Jeg ville jo tatt (skriver og sier samtidig) $\frac{30-10}{12-3} = \frac{20}{9}$.
(326) I: Ja, og der har du stigningstallet.
(327) Alyssa: Å ja.
Eleven virker litt mer usikker på dette svaret, og det er litt ny situasjon, men likevel forstår. Videre snakker om brøk og desimaltall, divisjonsalgoritmen.

Intervju med Leander
Oppgave 10
(400) I: På oppgave 10 så mener du at det er ikke nok informasjon, hva tenker du på da?
(401) Leander: (Ser på oppgaven) Jeg tenkte da at man kan ikke se helt hvor denne her går. (Peker på punkt (12, 30) og linjen gjennom) For hvis du ser her, så går den ikke gjennom midten av punktet.
(402) I: Ja. Men hvis du tenker sånn, ikke tenk på linjen, tenk punktene nå.
(403) Leander: Ja
(404) I: Hvis du skulle for eksempel regne ut stigningstallet til linjen gjennom punktene, hva ville du ha gjort? Tenk på punktene.
(405) Leander: Hm [.]
(406) I: Hvis du ser for eksempel på oppgave 9, hvordan løste du den? For der måtte du også finne stigningstallet.
(407) Leander: Ja, da tenkte jeg, gikk jeg (peker på grafen, fingeren glir fra skjæringspunktet med y-aksen mot ti og opp til hundre) halv opp. Så for hver ti så går den femti opp.
(408) I: Så hvis du ser på oppgave 10 nå.
(409) Leander: Ja, jeg kan jo ta ni delt på tjue.
(410) I: Men ni det er antallet x-enheter parallelt med x-aksen. (Peker på oppgave 9 igjen, tilbake til grafen i oppgave 10) Her går du parallelt med x-aksen ti.
(411) Leander: Ja
(412) I: Så går du parallelt med x-aksen ni (Ser på oppgave 10) Og her går du parallelt med y-aksen femti. (Tilbake til oppgave 9, for å få fram analogisk tenkning) Per ti x-enheter, er det femti y-enheter oppover, så finner du at per en x-enhet
(413) Leander: Fem
(414) I: (Ser igjen på oppgave 10) Per ni x-enheter så beveger du deg
(415) Leander: Tjue opp. Da blir det tjue delt på ni, *så den er ukjent*
(416) I: Det blir stigningstallet
(417) Leander: Ja

Eleven tenker at brøk er en del av noe som i dette tilfellet er ukjent for eleven, for i besvarelsen skriver eleven at vi ikke vet 2/3 av hva, av 1, eller av 10. her virker det som om brøk er til større forvirring enn selve stigningstallet, vant å se heltall som det dermed blir det

Vedlegg 6

Tegnbruk i intervju:
. Avsluttet setning
? Spørsmål
[.] Pause under 3 sekunder
[...] Pause lenger enn 3 sekunder
( ) Beskrivelse av ikke verbale gester
… Kortere pause

Vedlegg 7

Samtykkeskjema NSD

Vil du delta i prosjektet
" En studie i elevenes forståelse av linearitet, lineare funksjoner med fokus på konvertering mellom ulike representasjonsformer"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et prosjekt hvor formålet er å undersøke hvorvidt alternative arbeidsmåter i matematikk gir utbedret resultater hos elever i konvertering mellom ulike representasjonsformer for lineære funksjoner.
I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å undersøke om ulike arbeidsmåter i matematikk gjør det lettere for elever å bevege seg mellom ulike representasjonsformer for lineære funksjoner. Med dette menes å finne funksjonsutrykk ved å se på verditabell eller graf, tegne graf utfra et funksjonsutrykk eller tabell, sette opp verditabell utfra graf eller likning.

For å gjøre det mulig vil jeg be deg om å besvare en matematisk test etter at vi blir ferdig med opplegget. Resultatene i deres klasse skal sammenlignes med resultater på samme test hentet i en gruppe / klasse der undervisningsopplegget ikke var gjennomført.

Jeg skal også se på ulike typer feil som forekommer i disse to grupper når elevene jobber med de forskjellige representasjonsformer for lineære funksjoner.
Dette prosjektet gjennomføres i forbindelse med min masterstudie i matematikk og matematikkdidaktikk og skal gi meg datamaterialet for min masteroppgave.

Ansvarlig for prosjektet
Universitetet i Agder (Kristiansand).

Hva innebærer det for deg å delta?
Svare på spørsmål i forbindelse med din skriftige besvarelse på testen.

- Dette innebærer at du og intervjuer går gjennom din skriftlige besvarelse og samtaler om ulike metoder du har brukt

Det er frivillig å tillate meg å bruke din besvarelse
Din besvarelse vil være anonymisert og behandlet anonymt under analysen. Det vil ikke påvirke din karakter i faget eller ditt forhold til skolen / læreren på noen måter.

Hvis du velger å gi meg ditt samtykke i å bruke din besvarelse til analyse, kan du når som helst trekke samtykket tilbake ved å ta kontakt med meg uten å oppgi noen grunn. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du senere ombestemmer deg.

Ditt personvern – hvordan jeg oppbevarer og bruker din besvarelse
Jeg vil bare bruke din besvarelse til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Ingen av deltakerne vil kunne gjenkjennes i masteroppgaven og eventuell bruk av besvarelser som eksempler vil være anonym.

Hva skjer med besvarelsen din når prosjektet avsluttes?
Undervisningsopplegget skal etter planen avsluttes 01.02.19. Alle samtykkeskjemaer, spørreskjemaer og besvarelser vil bli slettet/ makulert i løpet av juni/ juli 2019, så snart oppgaven som jeg skal skrive er ferdig skrevet, levert og evaluert av Universitetet i Agder.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir meg rett til å analysere besvarelsen din?
Din besvarelse analyseres basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved Claire Berg på epost (claire.v.berg@uia.no) og Natalie Jakobsen på epost (Natalie.Jakobsen@bfk.no, tlf.: 984 13 775)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Claire Berg Natalie Jakobsen
Prosjektansvarlig Masterstudent
(Veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «En studie i elevenes forståelse av linearitet, lineare funksjoner med fokus på konvertering mellom ulike representasjonsformer», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ min besvarelse på intervju kan brukes til prosjektet

Jeg samtykker til at mine besvarelser behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. juni/juli 2019

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 8

NSD sin vurdering
Skriv ut
Prosjekttittel
Elevenes vanskeligheter i oversettelsesprosessen mellom ulike representasjoner av lineære funksjoner. (En studie i elevenes forståelse av linearitet, lineare funksjoner med fokus på konvertering mellom ulike representasjonsformer)
Referansenummer
555758
Registrert
26.11.2018 av Natalie Jakobsen - natalj17@student.uia.no
Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag
Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)
Claire Vaugelade Berg, claire.v.berg@uia.no, tlf: 38141728
Type prosjekt
Studentprosjekt, masterstudium
Kontaktinformasjon, student
Natalie Jakobsen, Natalie.Jakobsen@gmail.com, tlf: 98413775
Prosjektperiode
01.01.2019 - 19.04.2019
Status
29.04.2019 - Vurdert

Vurdering (2)

29.04.2019 - Vurdert
NSD har vurdert endringen registrert 18.04.2019. Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 29.04.2019. Behandlingen kan fortsette. OPPFØLGING AV PROSJEKTET NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til med prosjektet! Kontaktperson hos NSD: Eva J B Payne Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)
11.01.2019 - Vurdert
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 11.01.2019, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte. MELD ENDRINGER Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres. TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 22.06.2019. LOVLIG GRUNNLAG Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Ungdommer 17 år skal selv samtykke til deltagelse. Ut fra en helhetsvurdering av opplysningenes art og omfang, vurderer vi det slik at ungdommer 17 år

har forutsetninger for å forstå hva deltagelse innebærer og kan samtykke til deltakelse på selvstendig grunnlag. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a. PERSONVERNPRINSIPPER NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet DE REGISTRERTES RETTIGHETER Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned. FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon. OPPFØLGING AV PROSJEKTET NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til med prosjektet! Kontaktperson hos NSD: Eva J B Payne Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)