Kontinuitetsbegrepet

En lærebokanalyse om behandlingen av kontinuitet i videregående skole

HENRIK LØVIK NJØLSTAD

VEILEDER
Olav G. Dovland

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært en krevende og lærerik prosess og markerer slutten på fem år ved Universitetet i Agder.

Jeg vil takke veileder Olav G. Dovland ved institutt for matematiske fag for gode innspill, tilbakemeldinger og motivasjon i arbeidet med oppgaven.

Takk til familie og gode venner for positive ord og ekstra oppmuntring gjennom dette semesteret. En spesiell takk går til min fantastiske samboer Ingun for god støtte gjennom hele studieperioden. Den ville ikke vært det samme uten deg.

Takk til Oda for god hjelp med korrekturlesing og alle andre medstudenter, forelesere og praksislærere som har gjort studietiden til en lærerik og utfordrende periode. En ekstra hilsen går til Jørgen og Ragnar i Hadronet. Dere har gjort det til en fornøyelse å studere realfag her i Kristiansand.

Kristiansand, mai 2019

Henrik Løvik Njølstad

Sammendrag

Fordi teorien om komplekse tall anses som for komplisert, blir mange elever fortalt at det ikke er mulig å ta kvadratrot av negative tall. Av samme årsak introduseres ikke den formelle definisjonen av grenseverdi og kontinuitet i videregående skole. Jeg mener at vi ikke kan anta at elevene er tjent med å bli skjermet fra virkeligheten fordi den er " for komplisert". Tvert imot, tror jeg at elevene både kan bli nysgjerrige og motiverte dersom de kan få et usensurert innblikk inn i matematikkens verden.

Denne studien omhandler kontinuitetsbegrepet og tar for seg følgende problemstilling:

- På hvilken måte bidrar lærebøker i videregående skole til å gi elever en korrekt matematisk forståelse av kontinuitetsbegrepet?

For å svare på dette har jeg formulert følgende forskningspørsmål:

- Hvordan bidrar innholdet i lærebøkene til å styrke elevenes matematiske forståelse av kontinuitetsbegrepet?
- Hvilken betydning har lærebøkers presentasjon av kontinuitetsbegrepet for utviklingen av elevenes begrepsbilde?
- I hvilken grad bidrar lærebøker i matematikk til at elever får erfaring med matematisk resonnering?

I studien har jeg undersøkt hvordan to lærebøker i Matematikk R1 presenterer kontinuitetsbegrepet. Analysen er basert på et rammeverk utarbeidet av Charalambous et al. (2010) og bruker en kombinasjon av kvantitative og kvalitative metoder. Det er brukt forskjellige rammeverk for å kode de ulike elementene av lærebøkene. Blant disse blir et rammeverk om imitativ og kreativ resonnering brukt for å kode hva oppgavene krever av elevene (Lithner, 2008). For å identifisere hvordan regler og definisjoner blir begrunnet, har jeg tatt i bruk rammeverket til Thompson et al. (2012) for å kode hvordan de ulike egenskapene begrunnes i teksten.

Teorien som omhandler elevenes begrepsbilde og begrepsdefinisjon tar utgangspunkt i rammeverket til Tall og Vinnier (1981), samt funn fra tidligere gjennomførte studier gjort av Juter (2006, 2011, 2017). Videre drøfter jeg hvordan to ulike konseptualiseringer av kontinuitet ("naturlig kontinuitet" og "Cauchy-Weierstrass kontinuitet") påvirker elevenes begrepsforståelse.

I studien finner jeg at lærebøkene definerer kontinuitet med utgangspunkt i en uformell definisjon av grenseverdibegrepet. Dette kan begrense elevenes muligheter til å forstå kontinuitetsbegrepet og kan gjøre at grunnlaget for å gjennomføre matematisk resonnering svekkes. Mange av oppgavene blir gitt rett etter et eksempel, noe som ikke bidrar til at elevene får mulighet til å utvikle egne løsningsstrategier. Det diskuteres hvorfor bruk av ordet 'sammenhengende', fordi det ikke blir presist definert, vil kunne påvirke elevenes fremtidige forståelse av det matematiske begrepet. Videre presenteres det hvordan en introduksjon av $\varepsilon-\delta$ definisjonen av grenseverdi og kontinuitet kan gjennomføres og det diskuteres hvordan det kan bidra til å gi elever en bedre begrepsforståelse.

Summary

The theory on complex numbers is often considered too complicated for upper secondary students. Because of that, students are told that it is not possible to calculate the square root of negative numbers. For a similar reason, the formal definition of limits and continuity are not introduced in upper secondary school. I believe it is not beneficial to withhold knowledge that may be concidered to be "too complicated". On the contrary, I believe that students can become curious and motivated, if given an uncensored view into the world of mathematics.

This thesis deals with the notion of continuity and will attempt to answer the following research question:

- In what way does upper secondary textbooks help students obtain a correct mathematical understanding on the notion of continuity?

I have formulated the following research aims in order to address the research question:

- How does the content in textbooks strengthen students' mathematical understanding of the notion of continuity?
- What significance does the presentations of the notion of continuity have for the development of students' concept image?
- To what extent does mathematical textbooks provide students with experience in mathematical reasoning?

In the study, I have examined how two Norwegian textbooks present the notion of continuity. The analysis is based on a framework designed by Charalambous et al. (2010) and uses a combination of quantitative and qualitative research methods. I have used different frameworks to encode the various elements in the textbooks. Among these, a research framework for imitative and creative reasoning is used in order to encode mathematical tasks (Lithner, 2008). Furthermore, to investigate how properties and definitions are presented to the students, I have adopted a framework by Thompson et al. (2012) to be able to code how properties are justified in the narrative.

The theory that deals with development of students' concept image and concept definition is based on Tall and Vinner's (1981) framework, as well as findings from former studies completed by Juter (2006, 2011, 2017). I discuss how two different conceptualizations of continuity ("natural continuity" and "Cauchy-Weierstrass continuity") influence students understanding of the notion (Núñez et al., 1999).

In the study, I find that the textbooks define continuity purely based on an informal definition of the notion of limits. This might limit the students' opportunities to fully learn the notion of continuity and restrict their basis for conducting mathematical reasoning. Many of the tasks provided are given right after an example, which does not contribute to help the students abilities for developing problem-solving strategies. The thesis discusses why the use of the word 'connected', since it is not properly defined, could conflict with the students future understanding of the mathematical definition. This paper also presents how an introduction of the ε - δ definition of limits and continuity can be accomplished and discuss how it can help the students to obtain a better understanding of the notions.

Innholdsfortegnelse

Forord **iii**

Sammendrag **v**

Summary **vii**

Innholdsfortegnelse **ix**

1 Innledning **1**
1.1 Bakgrunn for valg av oppgave 1
1.2 Gammel og ny læreplan 2
1.3 Problemstilling og forskningsspørsmål 3

2 Teori **5**
2.1 Begrepsavklaringer 5
2.1.1 Grenseverdi 5
2.1.2 Kontinuitet 6
2.1.3 Deriverbarhet 6
2.1.4 Sammenhengende mengder 6
2.2 Tidligere forskning 7
2.2.1 Tidligere forskning på lærebøker 7
2.3 Matematisk forståelse 8
2.4 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon 9
2.4.1 To former for kontinuitet 9
2.4.2 Grenseverdier, deriverbarhet og kontinuitet 10
2.5 Resonnering 10
2.5.1 Imitativ resonnering 10
2.5.2 Kreativ resonnering 11
2.5.3 Bevisrelatert resonnering 12
2.5.4 Generiske eksempler 12

3 Metode **15**
3.1 Dokumentanalyse 15
3.1.1 Innholdsanalyse 15
3.2 Valg av lærebøker 16
3.3 Utarbeidelse av rammeverk 16
3.4 Gjennomføring av analyse 18
3.4.1 Egenskaper 18
3.4.2 Resonnering 19

3.4.3 Svartyper . . . 20
3.4.4 Sammenhenger . . . 21
3.5 Aspekter ved studiens kvalitet . . . 21
3.5.1 Validitet . . . 21
3.5.2 Reliabilitet . . . 22
3.5.3 Etiske aspekter . . . 22

4 Resultater og analyse 23
4.1 Horisontal analyse . . . 23
4.1.1 Bakgrunnsinformasjon . . . 23
4.1.2 Helhetlig struktur . . . 24
4.2 Vertikal analyse . . . 25
4.2.1 Matematisk innhold . . . 25
4.2.1.1 Illustrasjoner . . . 26
4.2.1.2 Egenskaper . . . 27
4.2.2 Kreves av eleven . . . 27
4.2.2.1 Resonneringsformer . . . 28
4.2.2.2 Svartyper . . . 29
4.2.3 Sammenhenger mellom begreper . . . 30

5 Diskusjon 33
5.1 Uformell og formell begrepsdefinisjon . . . 33
5.1.1 En uformell tilnærming til Cauchy-Weierstrass definisjonen . . . 33
5.1.1.1 Funksjon med delt funksjonsuttrykk . . . 35
5.1.1.2 Vise kontinuitet for et isolert punkt . . . 35
5.1.1.3 Anvendelse av definisjonen i grenseverdioppgaver . . . 36
5.1.1.4 Aktivitetens potensiale og begrensninger . . . 36
5.1.2 Forståelse av andre begreper . . . 37
5.1.3 Anvendelser av kontinuitetsegenskapen . . . 37
5.2 Kontinuitet og begrepsbilde . . . 37
5.2.1 Grafiske illustrasjoner . . . 37
5.2.2 Sammenhengende mengder og funksjoner . . . 39
5.3 Matematisk resonnering . . . 40
5.3.1 Imitativ resonnering . . . 40
5.3.2 Kreativ resonnering . . . 41
5.3.3 Bevisrelatert resonnering . . . 41

6 Konklusjon 43
6.1 Oppsummering . . . 43
6.2 Implikasjoner for fremtidige lærebøker . . . 44
6.3 Tanker om videre studier . . . 45

Referanser 47

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av oppgave

Etter å ha fullført et studieforberedende utdanningsprogram ved videregående skole, skal elever ha grunnlag for å studere ved et universitet eller en høgskole. Det er svært viktig at elevene får en god begrepsforståelse i sentrale emner og forstår hvordan matematiske begreper henger sammen. På den måten vil elevene kunne oppdage at matematikk er et fagfelt som baseres på logiske sammenhenger. Studier indikerer at studenter på universitetsnivå trekker upresise konklusjoner på grunnlag av et ufullstendig begrepsbilde (Juter, 2017). Enkelte studenter har en forståelse av at funksjoner med delt funksjonsuttrykk ikke kan være kontinuerlige og at grafen til en funksjon kun kan bestå av én sammenhengende kurve for at funksjonen skal være kontinuerlig (Tall & Vinner, 1981).

Læreren er den personen jeg ser på som den viktigste aktøren til å hjelpe elever å lære, ved å formidle forståelse, motivere og skape gode læringssituasjoner. I norsk skole er det ikke forhåndsbestemt hvilke læremidler læreren må forholde seg til, såfremt kompetansemålene oppfylles. Likevel, i planlegging av aktiviteter og undervisning, spiller lærebøker ofte en sentral rolle. Det matematiske innholdet i undervisningen er sterkt påvirket av det litterære innholdet i bøkene (Rezat, 2012; Jamieson-Proctor & Byrne, 2008; Fan, Zhu & Miao, 2013). Til tross for at det i dag finnes ulike typer læringsmateriell som digitale fagtekster, undervisningsfilmer og interaktive oppgaver, vil lærebøker være elevenes hovedkilde til faglig innhold. Det er derfor viktig at lærebøkene kommunisere det matematiske innholdet på en god måte.

I en norsk studie på bruk av lærebøker i klasserommet, svarte 58 % av lærerne som deltok (n=67) at de *ikke* selv har bestemt hvilken lærebok de bruker i egen undervisning. Til tross for at bare 52 % var fornøyde med læreboka, svarer likevel 49 % at læreboka brukes som hovedredskapet i forberedelsen av undervisningen (Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015). Ettersom lærebøker påvirker hva som blir formidlet til elevene er det viktig at innholdet i boka legger opp til god formidling, gode aktiviteter og gir elever mulighet for en god begrepsforståelse. Læreboka skal i tillegg kunne benyttes av personer som ønsker seg en bedre matematisk forståelse uten tilgang på ekstern veiledning og bør derfor presentere begreper slik at leseren kan opparbeide seg en god begrepsforståelse.

Kontinuitet er et sentralt og viktig begrep i kalkulus, tett tilknyttet andre begreper som grenseverdi og deriverbarhet. Det sees på som et vanskelig begrep, både å lære bort og å lære selv (Núñez, Edwards & Filipe Matos, 1999). Det antydes at studenter har uberettiget sterk selvtillit når det kommer til egne ferdigheter i denne delen av matematikken og at dårlig begrepsforståelse er alvorlig for fremtidige lærere som skal senere bidra til hensiktsmessige læringssituasjoner (Juter, 2006). Å gi elever et godt begrepsbilde av kontinuitet og grenseverdi vil kunne være med på å gi studentene økt fleksibilitet i anvendelser av begrepene (Juter, 2011).

I forbindelse med fagfornyelsen, skal alle læreplanene i grunnskolen og på videregående skole fornyes. Kunnskapsdepartementet har i forbindelse med fagfornyelsen initiert et prosjekt for å utvikle *kvalitetskriterier til læremidler i ulike fag*. Kvalitetskriteriene for matematikk er allerede utarbeidet av Svingen & Gilje (2018) for Utdanningsdirektoratet og gjenspeiler et ønske om økt fokus på kvalitet for at læringsmidlene skal gi elever økt læringsutbytte.

1.2 Gammel og ny læreplan

Som nevnt, er det kompetansemålene i læreplanen som regulerer hvilken kunnskap som skal formidles til elevene. I nåværende læreplan inngår kontinuitetsbegrepet under fagområdet *funksjoner* for Matematikk R1 hvor det blant annet står at "sentrale begreper i hovedområdet er grense, kontinuitet og derivasjon" (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 3). Kompetansemålet som er aktuelt for kontinuitetsbegrepet er at eleven "skal kunne gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare" (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 5).

Ettersom norsk skole befinner seg midt i en prosess hvor gjeldende læreplan fra 2006 skal byttes ut, vil det være relevant å undersøke hvilke konsekvenser dette vil ha for fremtidige læremidler. Til tross for at det foreløpig ikke er bestemt hvordan læreplanen vil bli til slutt, ble et foreløpig forslag gjort tilgjengelig for offentlig høring i Mars 2019. Til dette forslaget er det formulert nye kompetansemål som beskriver hvilken kunnskap elevene skal sitte igjen med etter endt utdanning (Utdanningsdirektoratet, 2019):

> Mål for opplæringen er at eleven skal kunne:
>
> - diskutere om og argumentere for om en funksjon er kontinuerlig eller diskontinuerlig i et punkt i definisjonsområdet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige
> - bruke ulike strategier for å utforske og bestemme grenseverdier til funksjoner og argumentere for egne løsninger
> - gjøre rede for begrepene grenseverdi og kontinuitet
> - gi eksempler på funksjoner som ikke er deriverbare og begrunne hvorfor de ikke er det

I forslaget til den nye læreplanen blir kompetansemålet fra 2006 delt inn i flere, mer konkrete kompetansemål. I tillegg til at det eksplisitt står at elevene skal *begrunne* hvorfor funksjoner ikke er deriverbare skal elevene også kunne *diskutere* og *argumentere for* om en funksjon er kontinuerlig eller diskontinuerlig *i et punkt i definisjonsområdet*. For at elevene skal være i stand til å gjøre dette, må de først få en god forståelse av begrepene.

1.3 Problemstilling og forskningsspørsmål

Denne studien vil derfor forsøke å belyse følgende problemstilling:

- På hvilken måte bidrar lærebøker i videregående skole til å gi elever en korrekt matematisk forståelse av kontinuitetsbegrepet?

Ved å gjennomføre en lærebokanalyse for hvordan begrepet blir behandlet i to norske lærebøker, vil jeg forsøke å kartlegge hvilke fremstillinger og definisjoner som legges til grunn for å gi eleven en forståelse av hva som menes med kontinuerlige funksjoner.

Forskningsspørsmål for å svare på dette er:

- Hvordan bidrar innholdet i lærebøkene til å styrke elevenes matematiske forståelse av kontinuitetsbegrepet?
- Hvilken betydning har lærebøkers presentasjon av kontinuitetsbegrepet for utviklingen av elevenes begrepsbilde?
- I hvilken grad bidrar lærebøker i matematikk til at elever får erfaring med matematisk resonnering?

Kapittel 2

Teori

2.1 Begrepsavklaringer

Denne studien tar i all hovedsak for seg kontinuitetsbegrepet. Grenseverdi og deriverbarhet har riktignok svært mange likhetstrekk til kontinuitet og vil følgelig også inngå i deler av studien. Derfor finner jeg det hensiktsmessig å inkludere enkelte begrepsdefinisjoner, både for å minne leseren om definisjonene og for å kunne henvise til disse ved et senere tidspunkt. Følgende definisjoner av grenseverdi og kontinuitet, vil senere bli referert til som ε - δ – eller Cauchy-Weierstrass definisjonen.

2.1.1 Grenseverdi

La f være en funksjon definert på et intervall $[a, b]$, $c \in (a, b)$ og la L, M og N være tre tall.

- Vi sier at f har *høyresidig grenseverdi* L for $x = a$, og skriver $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, hvis det for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $x \in D_f$ med $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

- Vi sier at f har *venstresidig grenseverdi* M for $x = b$, og skriver $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = M$, hvis det for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $x \in D_f$ med $b - \delta < x < b \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$.

- Vi sier at f grenser mot N når x grenser mot c, og skriver $\lim\limits_{x \to c} f(x) = N$, hvis det for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $x \in D_f$ med $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - N| < \varepsilon$.

- Det følger nå at $\lim\limits_{x \to c} f(x) = N \iff \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = N = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$.

- Med andre ord gjelder at dersom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, vil det være mulig å få $f(x)$ så nær L som ønskelig, så lenge valg av δ er liten nok.

- Selv om ε - δ definisjonen kan brukes for å bevise at $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ i konkrete eksempler, egner den vanligvis seg ikke for å bestemme L.

2.1.2 Kontinuitet

- En funksjon $f : D_f \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig for et *indre punkt* $a \in D_f$ dersom det til hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $x \in D_f$ med $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- Dersom $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ og $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, er funksjonen kontinuerlig i venstre randpunkt a. Tilsvarende er f kontinuerlig i høyre randpunkt b hvis $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
- En funksjon er kontinuerlig på et intervall hvis og bare hvis den er kontinuerlig i hvert punkt i intervallet.
- Hvis $f : D_f \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig for alle $a \in D_f$, omtales f som en *kontinuerlig* funksjon.
- En funksjon f er altså kontinuerlig for $x = a$, dersom og bare dersom $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Hvis $\lim_{x \to a} f(x)$ ikke eksisterer, eller eksisterer men ikke er lik $f(a)$, sier vi at f er *diskontinuerlig* for $x = a$.
- Hvis en funksjon f er diskontinuerlig for $x = a$, men $\lim_{x \to a} f(x) = L$ eksisterer, kan vi *kontinuerlig utvide* funksjonen ved å definere $f(a) = L$.

2.1.3 Deriverbarhet

La $f : D_f \to \mathbb{R}$ være en funksjon og la $a \in D_f$.

- f er *deriverbar* i $x = a$, og vi skriver $f'(a)$ for *den deriverte til f i* $x = a$, dersom følgende grenseverdi eksisterer:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
- Dersom f er deriverbar for alle $a \in D_f$, kalles f en *deriverbar funksjon*.
- For at grenseverdien ovenfor skal kunne eksistere, må $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Dette medfører at hvis f er deriverbar, er den også kontinuerlig for $x = a$.
- Dersom $D_f = [a, b]$, vil det etter denne definisjonen ikke ha mening å snakke om hvorvidt f er deriverbar i randpunktene, a og b.

2.1.4 Sammenhengende mengder

En delmengde M av $\mathbb{C}$ kalles *sammenhengende* hvis den ikke kan skrives som en disjunkt union av to ikke-tomme, relativt åpne delmengder av M (Hustad, 1982).

- De reelle tallene, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, er en sammenhengende mengde. Det er ikke mulig å finne to relativt åpne delmengder $M_1 \subseteq \mathbb{R}$ og $M_2 \subseteq \mathbb{R}$ slik at $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ og $M_1 \cup M_2 = \mathbb{R}$
- Kontinuerlige bilder av sammenhengende mengder er sammenhengende: Hvis M er sammenhengende og $f : M \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, er $f(M)$ sammenhengende.

2.2 Tidligere forskning

For å utarbeide en passende innfallsvinkel til denne oppgaven, er det av interesse å gi en oversikt over hva som er gjort tidligere av studier om lærebokanalyse og forståelse av matematiske begreper. I denne delen vil det derfor bli presentert ulike tilnærminger til lærebokanalyse, samt studier på studenter og elevers forståelse av begreper innenfor matematisk analyse.

2.2.1 Tidligere forskning på lærebøker

Forskning på lærebøker er fremdeles et felt i en utviklingsfase der det enda ikke er etablert et felles forskningsparadigme og det er derfor fremdeles et behov for ytterligere studier (Fan, 2011). Forskning på lærebøker har inntil nylig vært lite gjennomført innenfor matematikkdidaktikk i Norden, i motsetning til internasjonalt der det de siste tiårene har vært gjort mangfoldige studier (Fan et al., 2013; Grevholm, 2017).

Fan et al. (2013) har i en studie kategorisert hva slags type forskning som er gjort på lærebøker. Der fant de at *lærebokanalyse og sammenlikning* er det vanligste studieområdet og de fleste studiene er blitt gjort av bøker i grunnskolen. Studiene i denne kategorien fordeler seg på to områder: Det ene omfatter analyse av lærebøker fra et eller flere land for å identifisere likhetstrekk og ulikheter. Det andre området omfatter analyse av en enkeltbok eller bokserie med fokus på hvordan spesifikke emner og begreper blir behandlet. Sammenlikning av lærebøker kan skje først etter en analyse av hver enkelt bok. Derfor inngår begge disse områdene innenfor samme kategori. Lærebokanalyse deles videre inn i fem aspekter avhengig av fokusområde hvor en studie ofte vil innebefatte flere aspekter. De fem aspektene er: (1) matematisk innhold og emne; (2) kunnskap og pedagogikk; (3) kjønn, etnisitet, rettferdighet, kultur og verdier; (4) sammenlikning av ulike lærebøker og (5) konseptualisering og metodologisk tilnærming (Fan et al., 2013, s. 637).

Stylianides (2009) har analysert hvordan en serie lærebøker fra USA gir elevene mulighet til å ta del i matematisk resonnering og bevisføring. Hensikten med analysen var å se hvorvidt lærebøkene gir elevene mulighet til å utforske hvordan sammenhenger i mønster kan føre til antakelser som videre kan føre til generering av bevis. Det kom frem at blant de 4855 oppgavene som ble analysert, ga omtrent 40% av dem minst én slik mulighet og mer enn 50% var ikke designet for å engasjere eleven i resonnering og bevisføring.

I en annen studie av ni lærebøker på 8. trinn i Australia om resonnering, har Stacey & Vincent (2009) funnet at de fleste bøkene presenterer forklaringer og ikke bare 'regler uten begrunnelse' i emnene som ble analysert. De fant imidlertid at forklaringene hovedsakelig blir brukt for å utlede eller berettige regneregler, i stedet for å tilrettelegge for utforskning hos elevene og at det heller ikke skilles på forskjellene ved ulike former for bevisføringer.

En annen form for lærebokstudie, er Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa (2010) sin studie om hvordan lærebøker fra Kypros, Irland og Taiwan tar for seg behandlingen av addisjon og subtraksjon av brøk. I motsetning til Stacey & Vincent (2009) og Stylianides (2009), er dette en komparativ studie av lærebøker på tvers av land som gir mulighet til å se nærmere på internasjonale forskjeller og likheter. Studien baserer seg på en tredelt modell hvor hovedtilnærmingene klassifiseres som *horisontal, vertikal* og *kontekstuell* analyse (Charalambous et al., 2010).

Den horisontale analysen tar for seg oppsettet og oppbygningen av læreboka, hvilke emner som dekkes, hvordan de er strukturert og eventuelle tilleggsressurser som er inkludert. Den vertikale analysen går i dybden på et enkeltemne og/eller begrep og deles inn i tre underkategorier: (1) kommunikasjon med elevene – hvordan læreboka formidler innholdet til elevene; (2) krav til eleven – hvilke kognitive krav og svartyper som forventes av eleven og (3) sammenhenger – sammenhenger mellom emner, koplinger til situasjoner utenfor skolen og aktiviteter i klasserommet. Den kontekstuelle analysen tar for seg hvilke måter læreboka blir brukt i læringsøyemed av både elev og lærer. I studien avdekkes det tydelige forskjeller mellom landene i forhold til hvilke kognitive krav oppgavene stiller til elevene. Dette vil igjen være utslagsgivende for hvilke kognitive krav lærerne stiller elevene og hvilke krav som som stilles til lærerne.

En liknende studie, som også tar for seg internasjonale forskjeller, er en studie av Li (2000) som sammenligner behandlingen av addisjon og subtraksjon av heltall mellom amerikanske og kinesiske lærebøker. I studien finner Li (2000) at det er størst variasjon av oppgavekrav i de amerikanske bøkene, men at de kinesiske lærebøkene har et høyere nivå av matematisk innhold. Resultatene i studien støtter opp under viktigheten av å inkludere oppgaveanalyse i forskning på pensumlitteratur, for ikke å miste et viktig aspekt for forståelsen av elevers erfaringer med matematikk i skolen.

2.3 Matematisk forståelse

Det finnes ulike teorier om hvordan man oppnår matematisk forståelse. I Sfard (1991) sin tilnærming differensieres det mellom to former for matematisk forståelse; operasjonell og strukturell. Med operasjonell forståelse menes det at matematiske begreper sees på som en prosess, algoritme eller sekvensiell handling. Dersom man har en strukturell forståelse, vil matematiske begreper sees på som abstrakte objekter. En operasjonell forståelse av funksjoner er for eksempel å beherske hvordan funksjoner brukes i beregninger eller utregninger, mens Bourbakis[1] definisjon er et eksempel på strukturell forståelse (Sfard, 1991).

En strukturell begrepsforståelse krever mindre av arbeidsminnet, kan gjøre lagring og organisering av ny informasjon mer effektiv og vil være med på å gi et holistisk bilde av begrepet. Sfard (1991) beskriver veien dit via tre faser. I den første fasen blir eleven kjent med prosessene knyttet til begrepet og gjennom repeterende øvelser blir prosessen etter hvert internalisert (*interiorized*). Kondensering (*Condensation*), som er den neste fasen, handler om å beherske, forenkle, kombinere og generalisere prosesser. Her vil eleven redusere omfattende prosesser til mindre, mer håndterlige deler og vil evne å se prosessen i en større sammenheng. Denne fasen varer så lenge begrepet er knyttet til prosessen, først når eleven løsriver begrepet fra prosessen og ser på det som et eget objekt, har begrepet blitt *reifisert*. *Reifikasjon* er derfor definert som et "ontologisk skifte – en plutselig evne til å se det allerede kjente i et helt nytt lys" (Sfard, 1991, s. 19). Først når et grunnleggende begrep er reifisert, kan det brukes i internaliseringsfasen for begrep på høyere nivå.

Forskning på matematisk forståelse har tidligere hatt en *dikotomisk* tilnærming (som for eksempel relasjonell og instrumentell (Skemp, 1976) eller konseptuell og prosedural (Hiebert & Lefevre, 1986)). Sfard bygger videre på dette og antyder i stedet en *dualistisk* epistemologi. Selv om man ønsker at elevene skal oppnå en strukturell begrepsforståelse, blir den ikke til uten den operasjonelle. Det er to typer forståelse som avhenger av hverandre.

Slavit (1997) presenterer videre hvordan forståelse av ulike egenskaper bidrar til at elevene kan oppnå reifikasjon. Reifikasjon oppnås når eleven forstår begrepene uten å være avhengig av spesifikke eksempler på funksjoner eller funksjonstyper. For å kunne være i stand til å beskrive et begrep, er det nødvendig å kjenne til egenskapene som betegner begrepet. Gjennom å se eksempler på ulike typer funksjoner og analysere ulikheter og forskjeller, vil elevene få mulighet til å hente ut egenskapene som er felles og dermed skape et generelt begrepsbilde for funksjoner. Kontinuitet er en av flere egenskaper Slavit trekker frem som vil kunne bidra til at elevene oppnår reifikasjon av funksjonsbegrepet.

[1] f is a function from one set to another, say A to B, if f is a subset of the Cartesian product of A (the domain) and B (the range or codomain), such that for every $a \in A$ there is exactly one $b \in B$ with $(a, b) \in f$ (Drijvers, 2010, s. 121)

2.4 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Begrepsbildet *(concept image)* beskriver hele den kognitive strukturen som assosieres med et begrep, inkludert mentale bilder og tilhørende egenskaper og prosesser (Tall & Vinner, 1981). Det dannes gjennom erfaringer og endres gjennom nye erfaringer og modning. Begrepsdefinisjonen *(concept definition)* er den formelle ordlyden som brukes for å definere begrepet. En begrepsdefinisjon for funksjoner vil kunne være 'en relasjon mellom to mengder A og B hvor hvert element i mengden A blir tilordnet et element i mengden B'. Ofte brukes begrepsdefinisjonen i introduksjonen av et begrep, mens i det videre arbeidet brukes den formelle definisjonen i mindre grad og det blir i større grad jobbet med eksempler (Tall & Vinner, 1981).

Elever konstruerer sitt eget, individuelle begrepsbilde til de ulike begrepsdefinisjonene avhengig av hva man blir eksponert for (Tall & Vinner, 1981). For eksempel arbeider man i stor grad med elementære funksjoner. Disse kan representeres *algebraisk* i form av et funksjonsuttrykk, og har en *grafisk* representasjon. Disse representasjonene vil være med på å danne begrepsbildet og det vil etter en stund være dette som dominerer begrepsforståelsen, ikke begrepsdefinisjonen. En konsekvens av dette vil kunne være at elever får en forståelse av at de elementære funksjonene er ekvivalent med alle funksjoner.

I studien finner Tall & Vinner (1981) at studenter bruker argumenter som "grafen er ikke sammenhengende" og "funksjonen er ikke gitt av ett enkelt uttrykk" som forklaringer på at funksjoner er diskontinuerlige. Dette indikerer at studentene har fått en forståelse av at kontinuerlige funksjoner må kunne tegnes "uten å løfte pennen" og må ha et enkelt, algebraisk uttrykk for å være kontinuerlige.

2.4.1 To former for kontinuitet

I en kasusstudie om behandlingen av kontinuitet, fremhever Núñez et al. (1999) et skille mellom to vanlige tilnærmingsmåter til begrepet: (1) *naturlig kontinuitet* og (2) *Cauchy-Weierstrass kontinuitet*. Den første tilnærmingsmåten ble tatt i bruk allerede på 1600-tallet og er en "intuitiv definisjon" av kontinuitet som en 'prosess uten hopp, avbrytelser eller plutselige endringer'. Den baseres på kognitive inntrykk som bevegelse, flyt og endring over tid. Metaforer om et objekt i bevegelse kan bli brukt for å beskrive hvordan en bevegelse er kontinuerlig ved at objektet ikke kan hoppe mellom ulike posisjoner uten å måtte ha befunnet seg i alle posisjonene mellom (Núñez et al., 1999).

Typiske egenskaper for en kontinuerlig funksjon i henhold til naturlig kontinuitet er: (1) den kontinuerlige funksjonen dannes av en bevegelse; (2) funksjonen har retning; (3) kontinuitet fremtrer av en bevegelse; (4) det er en enhet som beveger seg; (5) bevegelsen resulterer i en statisk linje uten 'hopp' og (6) en statisk linje er uten retning. På samme måte som man beskriver bevegelser i hverdagen, beskrives funksjoner med liknende, intuitive metaforer som *voksende*, *oscillerende*, de kan *nærme seg* verdier og *gå mot* en verdi.

Cauchy-Weierstrass definisjonen bygger derimot på et helt annet kognitivt innhold, nemlig på statiske, diskrete elementer og implisitt ekskluderer den naturlige definisjonen. Disse to definisjonene er kognitivt 'radikalt forskjellige', men den ene er ikke overlegen den andre (Núñez et al., 1999). Den rigide definisjonen er derimot ofte bedre enn den intuitive definisjonen til å håndtere "mer komplekse funksjoner som $f(x) = x\sin(1/x)$, men gir ikke nødvendigvis en bedre begrepsforståelse" (Núñez et al., 1999, s. 55).

En linje kan for eksempel karakteriseres på to vidt forskjellige måter: (1) som en *holistisk*, kontinuerlig linje hvor punkter er lokasjoner *på* linjen, men som ikke nødvendigvis utgjør hele linjen; (2) som en *mengde punkter* hvor punktene ikke ligger på linjen, men er det som utgjør linjen. Disse har ulike kognitive egenskaper, hvor den første konseptualiseringen samsvarer med naturlig kontinuitet og den andre med Cauchy-Weierstrass kontinuitet.

2.4.2 Grenseverdier, deriverbarhet og kontinuitet

I en studie av lærerstudenters evne til å gjenkjenne sammenhenger mellom begrepene kontinuitet, deriverbarhet, grenseverdi og integraler, fant Juter (2011) at et godt begrepsbilde ikke nødvendigvis gir bedre forutsetninger for å skille mellom egenskapene til disse fire begrepene. Imidlertid vil et dårlig utviklet begrepsbilde gjøre at studentene mangler den fleksibiliteten som behøves for senere å kunne legge til rette for gode diskusjoner i klasserommet.

Som en del av en større studie av studenters forståelse av kontinuitet og deriverbarhet, har Juter (2017) også undersøkt sammenhengen mellom studentenes foretrukkende representasjonsform og begrepsforståelse. I løpet av et kurs i kalkulus svarte 207 studenter på et spørreskjema hvor 11 av disse deltok i en intervjurunde. Hensikten med studien var å undersøke studentenes forståelse og sammenhengen mellom det og at de uttrykte svarene formelt eller intuitivt.

I studien kommer det frem at de eneste studentene som kunne bevise at deriverbare funksjoner er kontinuerlige og som hadde en fullverdig begrepsforståelse, var studentene som foretrakk en formell teoretisk representasjonsform. Studentene som bare hadde en intuitiv forståelse i form av bilder og/eller ord klarte verken i spørreskjema eller i løpet av intervjuet å argumentere for sammenhengen mellom kontinuitet og deriverbarhet. Formelle representasjoner virker dermed å være viktigst for å utvikle en konseptuell forståelse av begrepene (Juter, 2017).

2.5 Resonnering

Ulike matematikkoppgaver krever ulike former for kunnskap og resonnering av elevene. Lithner (2006) definerer resonnering til å omhandle tankerekkefølgen, tenkemåten, hvordan man presenterer påstander og trekker konklusjoner. Det handler ikke utelukkende om bevisføring, men også om hvordan eleven tenker i løsningen av en matematisk oppgave. Argumentasjon er en essensiell del av resonneringen og handler om å overbevise seg selv og andre om at resonneringen er korrekt. Lithner (2008) har utarbeidet et rammeverk for å kategorisere hva slags form for resonnering som kreves i en oppgave hvor resonnering er fordelt i to hovedkategorier: *imitativ* og *kreativ*.

Resonnering ser ut også til å få en tydeligere rolle i den kommende læreplanen. I det offentlige høringsdokumentet som tar for seg læreplanfornyelsen, står det hvordan elever som studerer matematikk for realfag skal få erfaring med resonnering og argumentasjon (Utdanningsdirektoratet, 2019):

> Å resonnere i matematikk R handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk R handler om at elevene begrunner og beviser gyldigheten til framgangsmåter, resonnementer og løsninger.

Denne tilnærmingen samsvarer med hva Lithner (2008) kategoriserer som kreativ resonnering og er det man ønsker at elever skal få erfaring med. Han har riktignok gjennom flere studier funnet at imitativ resonnering er den dominerende formen for resonnering i lærebokoppgaver (Lithner, 2006). For å undersøke hvordan situasjonen er i norske lærebøker, vil det i kommende avsnitt presenteres forskjellen mellom de ulike kategoriene.

2.5.1 Imitativ resonnering

Imitativ resonnering (IR) handler hovedsak om å kopiere (imitere) et eksempel eller å følge en formel (Lithner, 2008). Denne formen for resonnering krever at eleven i stor grad evner å huske tidligere oppgaver, løsninger og formler for å kunne løse et matematisk problem. Oppgaver som forventer bruk av imitativ resonnering vil raskt kunne løses av elever med god hukommelse og som er flinke til å sortere informasjon, men vil ikke være med på å utvikle elevens ferdigheter i matematisk problemløsning. Lithner (2008) har identifisert to underkategorier av imitativ resonnering: *memorerende* og *algoritmisk*.

En oppgave som krever at eleven husker, og korrekt kan gjengi, tidligere presentert informasjon uten form for begrunnelse er en oppgave som krever memorerende resonnering (MR). Gjengivelse av definisjoner, fakta eller bevis er typisk for slike oppgaver. Kriteriene for denne formen for resonnering er:

1. Strategivalg baseres på å huske et fullstendig svar.
2. Utførelsen består i å skrive ned svaret.

Den andre formen for imitativ resonnering, er algoritmisk resonnering (AR). En slik oppgave krever at eleven kan reprodusere en handlingsekvens for å komme frem til riktig svar. Kriteriene for denne formen for resonnering er:

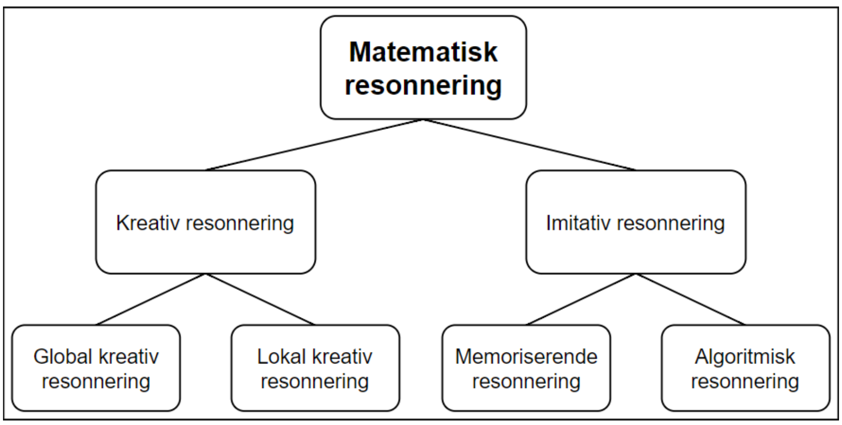
1. Strategivalg baseres på å gjenkjenne regler som vil kunne garantere korrekt svar.
2. Etter at eleven har gjenkjent de nødvendige reglene, vil resonneringen være triviell og bare unødvendige feil vil forhindre at eleven svarer korrekt på spørsmålet.

Algoritmisk resonnering vil fungere i enkle rutineoppgaver dersom eleven vet hvilken algoritme som trengs for å løse oppgaven. Her kan eleven enten følge samme handlingsmønster som i en tilsvarende eksempeloppgave eller få hjelp av en ekstern person dersom oppgaven ikke er tilstrekkelig lik som et tidligere eksempel.

2.5.2 Kreativ resonnering

Den andre hovedkategorien Lithner (2008) har klassifisert, er kreativ resonnering (CR). Denne kjennetegnes ved at eleven må konstruere en ny løsningssekvens på grunnlag av argumenter som er kan forankres i de matematiske egenskapene til de involverte komponentene i oppgaven. Kreativ resonnering behøver ikke bety at oppgaven er spesielt utfordrende, men at eleven minst en gang i løpet av oppgaven møter et ukjent element.

Bergqvist (2007) har gjort et ytterligere skille mellom *lokal kreativ resonnering* (LCR) og *global kreativ resonnering* (GCR). En oppgave krever lokal kreativ resonnering dersom den kan løses nesten utelukkende med utgangspunkt i imitativ resonnering og kreativ resonnering bare kreves for å modifisere enkelte steg i algoritmen. Dersom det kreves kreativ resonnering i store deler av en oppgave, vil den kategoriseres som global kreativ resonnering. Figur 2.1 viser en komplett oversikt over de ulike formene for resonnering.



Figur 2.1: Oversikt over ulike former for imitativ og kreativ resonnering

2.5.3 Bevisrelatert resonnering

Bevis er grunnleggende for matematisk forståelse og essensielt for kommunisering og utvikling av matematisk kunnskap (Stylianides, 2008) og inngår som en grunnleggende ferdighet for å *kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig* i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2006). Thompson, Senk & Johnson (2012) skriver at mange matematikere og matematikklærere mener at resonnering og bevis er sentralt for å lære og utføre matematikk *(doing mathematics)*. Hensikten med å bruke et bevis kan variere ut fra hvilken kontekst det brukes. For eksempel kan det brukes for å forklare eller verifisere en påstand eller for å generere ny kunnskap (Stylianides, 2008). Bevis kan også brukes med konkret hensikt å lære om hvordan og hvorfor et argument fører til generelle resultat, eller om ulike bevisformer som induksjonsbevis eller kontrapositive bevis.

Thompson et al. (2012) har gjennomført en studie om bevisføring i ulike lærebøker fra videregående skole. Der kommer det fram at det er store forskjeller når det gjelder hvor mange matematiske egenskaper som bevises eller rettferdiggjøres innenfor fagområdet algebra. Studien tar blant annet for seg hvordan bevisrelatert resonnering *(proof-related reasoning)* blir brukt for å forklare ulike matematiske egenskaper. Rammeverket illustrert i figur 2.2 brukes for å kode hvordan lærebøkene rettferdiggjør de ulike matematiske egenskapene som blir presentert. Av alle egenskapene som ble presentert (n=383) ble omtrent 40 % av disse ikke bevist i teksten og ca. 10 % ble etterlatt for eleven å vise. Elevene vil dermed ikke få mulighet til å lese eller fullføre bevis for mange av resultatene, som det likevel forventes at de skal kunne forstå og anvende (Thompson et al., 2012).

G	*General*: The property is justified with a proof.
S	*Specific*: The property is justified using a deductive argument based on a specific case or cases.
L	*Left to the student*: A justification of the property is left for the student to complete, typically with a problem in the exercises for which a justification of some type is required.
N	*No justification*: There is no justification provided and no explicit mention is made of leaving the justification to the student.

Figur 2.2: Kategoriene brukt for å kode bevisrelatert resonnering i lærebøker (Thompson et al., 2012, s. 261)

2.5.4 Generiske eksempler

Et generisk eksempel gjør det mulig å se det generelle ved hjelp av det spesielle (Mason & Pimm, 1984; Balacheff, 1988). Hensikten med et generisk eksempel er å fremme ideen i en definisjon eller et teorem, ved å bruke ett eller flere eksempler og argumentere for at resultatet vil kunne gjelde generelt. Om et generisk eksempel kan brukes som et bevis er en pågående diskusjon (Leron & Zaslavsky, 2013; Reid & Vallejo Vargas, 2018), men vil ikke bli presentert her. I stedet ønsker jeg å trekke frem noen fordeler og restriksjoner ved generiske eksempler.

Ettersom generiske eksempler tar utgangspunkt i hovedideen til et fullstendig bevis, kan det hjelpe elever med å gjennomføre bevis uten de strenge kravene til symbolbruk og formalitet (Leron & Zaslavsky, 2013; Reid & Vallejo Vargas, 2018). Et generisk eksempel kan videre utvides til et generelt bevis, ved gradvis å generalisere deler i argumentet uten at strukturen endres. På denne måten kan elever få en god oversikt over hovedideene til det formelle beviset, til tross for at gjennomføringen av det formelle beviset hadde vært over hva man kan forvente av aldersgruppen (Leron & Zaslavsky, 2013).

Generiske eksempler vil ikke kunne erstatte formelle bevis i matematikken. I et fullstendig bevis må alle sammenhenger utledes, mens i generiske eksempler tillattes det at enkelte 'sannheter' observeres (Leron & Zaslavsky, 2013). Derfor vil det kunne stilles spørsmål til generaliserbarheten av resultatene og det vil også være viktig å diskutere gyldigheten av denne typen argument med elevene.

Om man aksepterer ulike bevis vil avhenge av sosiale og psykologiske settinger (Reid & Vallejo Vargas, 2018). Selv om et generisk eksempel ikke blir ansett som et gyldig bevis på universitetsnivå, vil det samme eksempelet kunne være tilstrekkelig argumentasjon i videregående skole. Uansett vil argumentene kunne benyttes som utgangspunkt for elevers resonnering. Ettersom de samme deduktive resonnementene brukes i generiske eksempler og formelle bevis, vil elevene likevel få erfaring med hvordan matematisk argumentasjon bygges opp.

Kapittel 3

Metode

I denne delen vil jeg innledningsvis presentere kort hva som kjennetegner lærebok– og dokumentanalyse som forskningsretning og begrunne hvorfor denne metoden egner seg for min studie. Videre vil jeg presentere utvalget brukt i studien, for deretter å beskrive hvordan kodingen av datamaterialet er gjennomført. Til slutt vil jeg kommentere oppgavens gyldighet og pålitelighet, samt drøfte forskningsetiske aspekter relevant for denne typen studie.

3.1 Dokumentanalyse

Dokumentanalyse er en systematisk metode for å gjennomgå og evaluere både skriftlig og elektronisk utgitte dokumenter (Bowen, 2009). Med dokumenter menes materiale som ikke er produsert spesielt med tanke på forskning. Det kan omfatte alt fra personlige dokumenter som dagbøker eller brev, til offentlige dokumenter som lovverk eller pressemeldinger (Bryman, 2016). Dokumentanalyse vil enten kunne brukes som en del av en mixed-methods studie eller som en selvstendig forskningsmetode.

Det er flere faktorer som spiller inn på hvordan elever tilegner seg kunnskap. Hvem som underviser, hvordan det undervises og kvaliteten på læringsmiljøet vil påvirke hva elevene sitter igjen med av kunnskap etter endt skolegang. Ettersom tidligere studier viser at også læreboka i stor grad påvirker undervisningen, har jeg valgt å gjennomføre lærebokanalyse for å belyse én av disse faktorene. Dette er en form for dokumentanalyse der det er innholdet i bøkene som utgjør datamaterialet.

3.1.1 Innholdsanalyse

Innholdsanalyse er en tilnærming til dokument og tekstanalyse, for å kvantifisere innholdet i forhåndsbestemte kategorier på en systematisk og etterprøvbar måte (Bryman, 2016). Det er en transparent forskningsmetode ettersom kategoriseringen av innholdet tydelig kan forhåndsdefineres slik at det er mulig å gjennomføre tilsvarende studier eller oppfølgingsstudier. I motsetning til studier som for eksempel tar i bruk observasjon, er innholdsanalyse en diskré forskningsmetode der forskeren ikke direkte påvirker datamateriale.

Innholdsanalyse har, som alle andre forskningsmetoder, noen begrensninger det er verdt å trekke frem (Bryman, 2016). Kvaliteten på studien vil i stor grad avhenge av hvor godt innholdet som blir analysert er, hvilken kontekst det opprinnelig er presentert i og om konteksten samsvarer med formålet med studien. I tillegg vil det som oftest forekomme en viss form for tolkning når innholdet kodes, slik at resultatene også vil kunne avhenge av hvem som gjennomfører studien.

En fellesnevner for lærebøker i matematikk, er at de består av to typer innhold: Først presenteres fagstoffet sammen med definisjoner, illustrasjoner og eksempler, deretter gis det oppgaver som eleven skal løse for å kontrollere at fagstoffet er forstått. Innholdsdelen vil bli analysert kvalitativt og de ulike elementene vil kategoriseres med utgangspunkt i relevante kodingsskjema presentert senere i denne delen. For å analysere oppgavene, vil en kvantitativ metode brukes for å bidra til å gi et bedre innblikk i hvilke forventinger som stilles til elevene.

Det har tidligere har blitt argumentert mot bruk av mixed methods, fordi kvalitativ og kvantitativ forskning gjenspeiler to ulike forskningsparadigmer (Bryman, 2016; Creswell & Plano Clark, 2011). Kombinasjonen av å bruke kvalitativ og kvantitativ metode mener jeg likevel vil være viktig for å styrke studien og jeg finner begge aspektene nødvendig for å gi et helhetlig bilde av lærebøkene og kunne svare på problemstillingen. Dette valget kan også begrunnes i resultatene fra studien til Li (2000).

3.2 Valg av lærebøker

Waagene & Gjerustad (2015) har gjennomført en spørreundersøkelse blant lærere om hvilken lærebok som benyttes i matematikk for første året i videregående skole. 41 % av dem som deltok (*n*=75) svarte at de brukte Sinus (Cappelen Damm) og totalt 39 % svarte at de brukte én av tre bøker utgitt av Aschehoug (Matematikk, Matematikk for yrkesfag eller TALL I ARBEID). Resterende 20 % svarte at de brukte boka Sigma (Gyldendal Norsk Forlag), noe som vil bety at disse tre forlagene stod for alle lærebokressursene blant de spurte lærerne. Det er verdt å nevne at det i norsk skole er et begrenset antall lærebøker som brukes i videregående skole og kontinuitet inngår bare i kompetansemålene for ett fag (Matematikk R1). Dette begrenser mulighetene for valg av lærebøker.

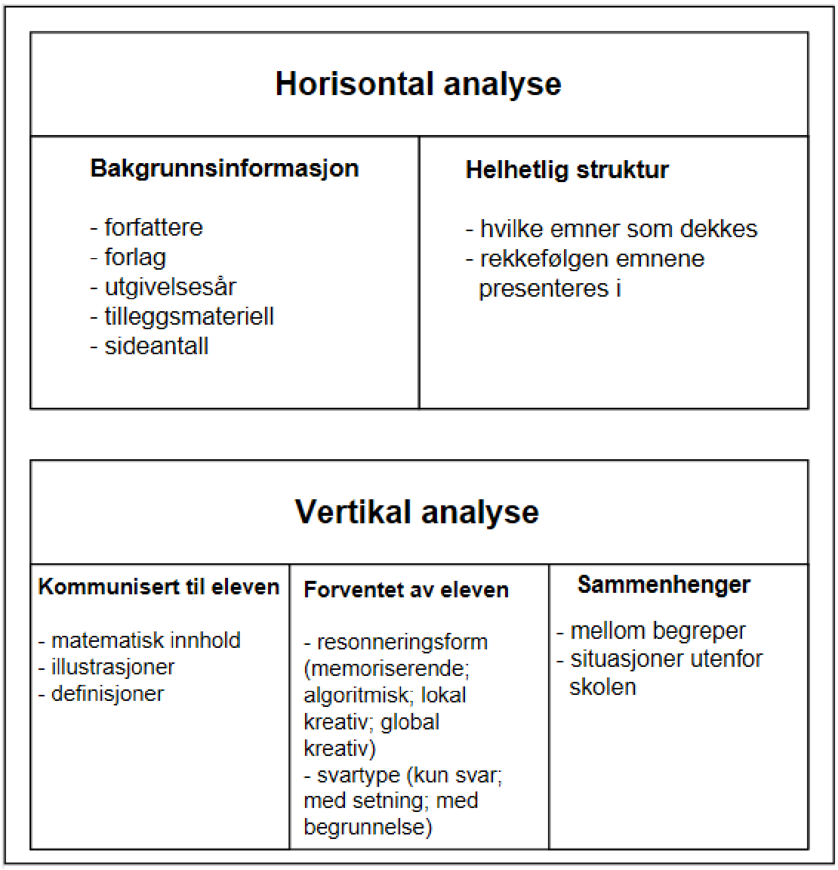
Lærebøkene som dekker begrepene for denne oppgaven og som vil bli analysert er *Matematikk R1* (Heir, Engeseth, Moe & Borgan, 2015) og *Sinus matematikk : R1 : lærebok i matematikk : studiespesialiserende program* (Oldervoll, Vaaje, Svorstøl & Hals, 2018), heretter kalt for "Sinus R1". Disse lærebøkene er utgitt av de to forlagene Waagene & Gjerustad (2015) fant som de hyppigst brukte. Jeg har valgt å ikke inkludere Sigma R1 (Gyldendal) i analysen ettersom det ikke forventes store variasjoner i behandlingen av begrepene.

3.3 Utarbeidelse av rammeverk

I utarbeidelsen av rammeverket brukt i analysen, har jeg valgt å ta utgangspunkt i den komparative analysemodellen utarbeidet av Charalambous et al. (2010). Selv om hensikten med studien ikke er å sammenlikne kvaliteten på lærebøkene, vil bruk av rammeverket likevel bestå av en systematisk gjennomgang av innholdet i bøkene. Hovedmålet med studien er å undersøke hvordan kontinuitetsbegrepet blir formidlet, noe som den vertikale analysen vil gi grunnlag for å svare på. Den horisontale analysen vil på den andre siden være med på å gi et innblikk i bøkenes struktur og dermed gi grunnlag for å vurdere hva som skal inkluderes i den vertikale delen. En kontekstuell analyse vil ikke bli gjort, da dette ikke vil være med på å besvare problemstillingen for denne studien. Som det anbefales av Fan (2011), vil bøkene bli analysert hver for seg for at resultatene deretter presenteres opp mot hverandre.

En fullstendig oversikt over analysestrukturen kan sees i figur 3.1. Første del vil bestå av å få oversikt over bakgrunnsinformasjonen og strukturen til lærebøkene og dermed også oversikt over hvilke deler av lærebøkene som er relevante å inkludere i den vertikale analysen. Deretter vil innholdet i de delene av lærebøkene som tar for seg de aktuelle begrepene presenteres og analyseres i henhold til relevant teori. Ettersom kontinuitet er tett koplet til andre matematiske begreper, vil den horisontale analysen gi innblikk i hvordan lærebokforfatterne har valgt å strukturere rekkefølgen begrepene blir presentert i.

For å se nærmere på hva som kommuniseres til elevene, vil lærebøkenes tilnærming til kontinuitet vurderes i forhold til om det brukes metaforer til den naturlige definisjonen og/eller Cauchy-Weierstrass



Figur 3.1: Rammeverket brukt for analysen. Modellen tar utgangspunkt i Charalambous et al. (2010) sin modell, med hensiktsmessige endringer for å besvare forskningsspørsmålene

definisjonen (Núñez et al., 1999). Videre vil jeg forsøke å identifisere hva slags metaforer og uformelle forklaringer som brukes i formidlingen av det matematiske innholdet og hvordan disse kan relateres til elevenes begrepsbilde og begrepsdefinisjon (Tall & Vinner, 1981). Med illustrasjoner, menes de grafiske bildene som inngår i formidling av begrepene.

Det vil videre bli identifisert i hvilken grad regler og definisjoner bevises eller begrunnes. For at et utsagn skal betegnes som en regel, må det fremkomme tydelig i teksten at det er et generelt resultat og hvor resultatet er gyldig. Det eksisterer flere rammeverk for koding av argumentering av matematiske egenskaper (Thompson et al., 2012; Stylianides, 2008, 2009). Jeg har valgt å bruke kategoriene fra Thompson et al. (2012) sin studie, da disse er utarbeidet spesifikt for å kode påstander i tekst.

I analysen av hva læreboka krever av eleven, velger Charalambous et al. (2010) å analysere oppgavene basert på følgende kognitive krav: *memorization; procedures with connections; precudures without connections; doing mathematics* (Stein et al., 1996). Ettersom studien handler om begrepsforståelse, og fordi resonnering og problemløsing vil få en større rolle i den nye læreplanen, velger jeg å ta i bruk rammeverket om kreativ og imitativ resonnering (Lithner, 2008; Bergqvist, 2007). Dette fokuserer på hva slags form for resonnering oppgavene krever av eleven og vil kunne bidra til å svare på spørsmålet om hvorvidt innholdet i lærebøkene bidrar til å øke elevenes kompetanse i matematisk resonnering.

Som del av det siste elementet av den vertikale analysen vil jeg undersøke hvordan lærebøkene knytter kontinuitet til andre begreper. Definisjonen av kontinuitet har svært mange fellestrekk med definisjonen av grenseverdi og kontinuitet er tett knyttet til deriverbarhet. Derfor er det rimelig å forvente at disse begrepene sees i lys av hverandre, slik at elevene blir bevisstgjort på disse relasjonene. I tillegg til å se på sammenhenger mellom begreper, er det interessant å undersøke om det trekkes sammenhenger til situasjoner utenfor skolematematikken. Med dette menes eksempler, forklaringer eller oppgaver presentert på en slik måte at begrepet ikke utelukkende relateres til en matematisk kontekst, men også til andre situasjoner. Slike sammenhenger er relevante for utvidelsen av elevenes begrepsbilde og vil kunne være med på å styrke elevenes begrepsdefinisjon. Om elevene gis mulighet til å oppdage at matematiske begreper bygger på hverandre og ikke presenteres som selvstendige begreper kan også si noe om lærebøkenes fremstilling av matematikkfaget.

3.4 Gjennomføring av analyse

For å illustrere hvordan deler av analysen blir gjennomført, vil jeg her presentere hvordan ulike elementer i lærebøkene er blitt kategorisert. Hensikten med dette er, med hjelp av eksempler, å gi innsyn i hvordan jeg har gjennomført fordelingen mellom de ulike kategoriene.

3.4.1 Egenskaper

Kategoriene brukt for å kode egenskapene og reglene presentert i kapitlene er hentet og oversatt fra Thompson et al. (2012) sitt rammeverk (figur 2.2).

G Generelt bevis: Egenskapen begrunnes med et fullstendig bevis.

Et eksempel på en begrunnelse som klassifiseres slik, er sammenhengen mellom deriverbarhet og kontinuitet (Heir et al., 2015, s. 122)[1]:

For at grenseverdien $\lim\limits_{x \to a} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ skal eksistere,
må altså $\Delta f(a) \to 0$ når $\Delta x \to 0$.
Men det betyr at $f(a + \Delta x) \to f(a)$ når $\Delta x \to 0$.
Her kan vi sette $a + \Delta x = x$. Da vil $\Delta x \to 0$ føre til at $x \to a$.
Resultatet blir at $f(x) \to f(a)$ når $x \to a$, altså at $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Og da er f kontinuerlig for $x = a$

S Spesifikt bevis: Egenskapen begrunnes ved bruk av et deduktivt argument basert på ett eller flere eksempler.

Følgende argument for at alle polynomfunksjoner er kontinuerlige, er et eksempel på et spesifikt bevis (Oldervoll et al., 2018, s. 52):

Hvis $f(x) = x^2 - 2x + 1$, gir [grenseverdisetningene] at

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a}(x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \to a} x^2 - \lim_{x \to a}(2x) + \lim_{x \to a} 1 \\
&= \lim_{x \to a}(x \cdot x) - 2 \cdot \lim_{x \to a} x + 1 = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x - 2 \cdot a + 1 \\
&= a \cdot a - 2a + 1 = f(a)
\end{aligned}$$

[1]Denne argumentasjonen er formulert svært tungvint og blir dermed vanskelig å forstå. Dersom notasjonen $f(x) - f(a)$ hadde vært brukt i stedet for $\Delta f(a)$, ville argumentet blitt enklere å følge: Hvis $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ eksisterer, må $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0 \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ er kontinuerlig for $x = a$.

Ettersom $f(a)$ eksisterer og $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ for alle $a \in \mathbb{R}$, er f kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

På den samme måten som ovenfor kan vi vise at alle polynomfunksjoner P er kontinuerlige for alle $x \in \mathbb{R}$. Grafen blir derfor sammenhengende[2], og vi kan finne grenseverdier ved innsetting.

$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$

F Fullføres av eleven: Begrunnelse av egenskapen overlates til eleven.

Ingen steder i de analyserte kapitlene ble eleven oppfordret til å fullføre et påbegynt argument eller til å konstruere et eget argument.

I Ingen begrunnelse: Påstanden presenteres uten begrunnelse.

"Eksponentialfunksjoner er kontinuerlige funksjoner" er et eksempel på en påstand uten begrunnelse (Heir et al., 2015, s. 111).

3.4.2 Resonnering

Ettersom oppgavene gitt i lærebøkene er ulikt strukturert, har jeg valgt å skille mellom *ordinære oppgaver* og *eksamenstrening*. I de ordinære oppgavene inkluderes oppgaver som gis i kapittelet og eventuelle tilleggsoppgaver så lenge det kommer tydelig frem at disse hører til samme kapittel. For eksamenstrening inkluderes oppgavene ment for at eleven kan bruke for å øve mot eksamen og som har relevans til kapittelet. Etter kategorisering av oppgavene, er resultatene satt opp i et regneark for å gjøre det mulig å presentere resultatene på en hensiktsmessig måte.

For å illustrere hvordan oppgavene vil bli kategorisert innenfor de ulike resonneringformene, vil kriteriene presenteres sammen med en eksempeloppgave og begrunnelse.

MR Dersom en oppgave ber eleven om å gjengi en definisjon eller regel, vil den falle inn under memorerende resonnering. Eksempel på en slik oppgave vil kunne være:

Hva vil det si at en funksjon er kontinuerlig i et punkt x_0?

Svar på en denne oppgaven vil kunne være:

At funksjonen f er kontinuerlig for $x = x_0$ betyr at $f(x_0)$ eksisterer og $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Utfordringen i denne oppgaven er å gjengi korrekt definisjon uten mangler og krever ingen forståelse av begrepet kontinuitet av eleven.

AR En oppgave kategoriseres som algoritmisk resonnerende dersom den krever at eleven resonnerer med utgangspunkt i en tidligere gitt algoritme. En slik oppgave vil kunne være ferdige oppsatte stykker som eleven skal fullføre. Et eksempel på en slik oppgave er:

Regn ut $\lim_{x \to 2}(3x - 5)$

Her kreves det at eleven kan gjenkjenne de riktige stegene i løsningsprosedyren og resonneringen vil kunne gå slik:

$$\lim_{x \to 2}(3x - 5) = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$$

[2]Begrepet "sammenhengende" er ikke veldefinert i Sinus R1, men brukes likevel flere ganger i delkapittelet om kontinuitet.

Største utfordringen i denne oppgaven er å gjenkjenne hvilken algoritme som passer og krever i utgangspunktet ingen forståelse av begrepene som inngår i oppgaven.

LCR I oppgaver som krever lokal kreativ resonnering er det en hovedvekt på imitativ resonnering, med behov for kreativ resonnering i minimum ett steg. En slik oppgave vil skille seg fra eksempeloppgavene slik at eleven ikke bare kan imitere en løsningsalgoritme. Eksempel på en slik oppgave hentet fra Sinus R1 er:

Bestem konstanten a slik at funksjonen f blir kontinuerlig i delingspunktet

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax, & x < 3 \\ x^3 + 2x, & x \geq 3 \end{cases}$$

For å løse denne oppgaven, må eleven identifisere hva som skal til for at funksjonen er kontinuerlig i delingspunktet og resonneringen vil kunne gå slik:

$$f(x) \text{ er kontinuerlig i } x = 3 \text{ dersom } \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 3^3 + 2\cdot 3 = 27 + 6 = 33 \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = 33$$

$$\text{Altså må } 33 = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 2x^2 + ax = 2\cdot 3^2 + 3a = 18 + 3a \Rightarrow a = \frac{33-18}{3} = 5$$

Utfordring i denne oppgaven er å gjenkjenne at de ensidige grenseverdiene må sammenfalle for at en funksjon med delt funksjonsuttrykk skal være kontinuerlig. Årsaken til at denne oppgaven faller inn under lokal kreativ resonnering, er at oppgaven krever at eleven kombinerer kjente algoritmer for kontinuitet i et delingspunkt med innsetting av funksjonsverdi for å løse en likning. Ettersom det ikke tidligere er presentert tilsvarende oppgaver, har ikke eleven mulighet til å følge en algoritme gjennom hele oppgaven og vil dermed også få behov for kreativ resonnering.

GCR For at en oppgave skal kategoriseres som globalt kreativt resonnerende, må oppgaven i all hovedsak kreve kreativ resonnering og liten grad av imitativ resonnering. Et eksempel på en slik oppgave hentet fra Matematikk R1 (Heir et al., 2015, s. 102):

Definisjonsmengden til en funksjon er $[1, 6]$.

Skisser hvordan grafen til funksjonen kan se ut hvis funksjonen er diskontinuerlig for $x = 4$.

I denne oppgaven er utfordringen å skissere en graf som er diskontinuerlig i et punkt uten at det påvirker definisjonsmengden. Eksempel på et svar som *ikke* er riktig, vil være en skisse av en rasjonal funksjon som har nevner lik null for $x = 4$. Problemet er da at definisjonsmengden til f er ikke lenger er $[1, 6]$, som var en forutsetning gitt i oppgaven. En mulig løsning vil derimot å skissere en graf som gjør et sprang for $x = 4$.
Det kan hende at det tidligere er presentert en funksjon som kan modifisere til å passe med oppgaven. Ordlyden i denne oppgaven er ikke tidligere gitt og er blant årsakene til at denne er kategorisert som GCR.

3.4.3 Svartyper

For å undersøke hva slags type svar oppgavene krever av elevene, er oppgavene kategorisert etter følgende kriterier: (i) bare svar; (ii) svar og setning og (iii) utdypende forklaring eller begrunnelse. Etter å ha fått et overblikk over oppgaveformuleringer, har jeg utarbeidet kjennetegn for å identifisere hvilken kategori oppgaven faller inn under. En oppgave som består av flere deloppgaver vil falle inn under den "høyeste" kategorien en deloppgave faller inn under.

(i) 'tegn', 'bestem', 'løs', 'regn ut' er eksempler på kjennetegn på at oppgaven forventer et svar i form av et tall, et uttrykk eller en graf. Oppgaven stiller ingen eksplisitte forventinger til at eleven skal begrunne svaret ved å vise utregning eller liknende.

(ii) 'bestem [...] hvis de eksisterer', 'vis at', 'undersøk om' er eksempler på kjennetegn på at oppgaven forventer svar med setning. Det er ikke tilstrekkelig å utføre en beregning, eleven må også presentere sin matematiske vurdering i svaret.

(iii) For at en oppgave skal inngå i den siste kategorien, må oppgaven være formulert slik at den eksplisitt ber eleven om å begrunne svaret.

Enkelte av oppgavene som faller inn under den første kategorien vil i praksis kreve at eleven i løpet av oppgaven gjør en beregning for å komme til svaret. Det vil derfor være naturlig at eleven inkluderer en utregning som en del av besvarelsen. Til tross for at læreren mest sannsynlig har forventinger til hva en besvarelse skal inneholde, har jeg valgt å ikke ta hensyn til dette. Læreren bør kreve at elevene kan vise en utdypende forklaring eller fremgangsmåte. Hvis det ikke gjøres, vil det være vanskelig å vurdere hvorvidt eleven har forståelse for det han eller hun har gjort. Kategoriseringen jeg har valgt å gjennomføre, tar utgangspunkt i hva slags type svar som eksplisitt etterspørres i oppgaven. De implisitte forventingene vil avhenge av faktorer som ikke undersøkes i denne studien.

3.4.4 Sammenhenger

For å undersøke hvilke sammenhenger som gjøres mellom kontinuitet, grenseverdi og deriverbarhet vil jeg, i tillegg til å analysere kapitlene hvor kontinuitetsbegrepet blir behandlet, bruke lærebøkenes stikkordregistre for å undersøke om begrepene blir behandlet andre steder i bøkene. Dette gjøres fordi stikkordregisteret vil være et naturlig sted for eleven å undersøke hvor i læreboka et begrep blir behandlet. Det er relevant å se på hvilke sammenhenger som gjøres mellom begrepene, fordi det kan belyse hvilket innsyn elevene får til hvorfor begrepene introduseres og hvordan egenskapene kan benyttes i ulike situasjoner.

3.5 Aspekter ved studiens kvalitet

3.5.1 Validitet

Denne studien tar bare for seg et utvalg begreper, det er derfor ikke mulig å si om man hadde fått tilsvarende resultater ved å analysere de andre delene av lærebøkene. Det er heller ikke mulig å generalisere resultatene fra oppgaveanalysen, selv om det er gjort et forsøk på å inkludere et bredt utvalg oppgaver. Modellen vil likevel kunne brukes for å analysere andre begreper enn de som inngår i denne studien. Jeg mener at det heller ikke er urimelig å kunne forvente en liknende fordeling av oppgavene i de øvrige kapitlene og at resultatene beskriver en tendens for hva slags type oppgaver elevene blir gitt.

Selv om denne studien tar for seg lærebøker som én faktor til elevers forståelse av begrepene, er det naturligvis også andre elementer som spiller inn. Om innholdet i lærebøkene er en faktor som har stor betydning for elevenes begrepsforståelse, fremkommer ikke i studien. I norsk skole er det læreren som formidler matematikken til elevene og funn fra tidligere studier antyder at lærebøker påvirker undervisningen (Lepik et al., 2015). Likevel er det ikke sikkert at lærere som underviser dette faget faktisk styres av lærebøkene, men det vil uansett ikke være urimelig å anta at lærebøkene har påvirkning for hva elevene lærer.

3.5.2 Reliabilitet

Lærebøker som datakilde for analyse, vil kunne anses som pålitelig ettersom innholdet er tilgjengelig og vil ikke endres i etterkant. Innholdsanalyse er i utgangspunktet en transparent og til dels objektiv forskningsmetode (Bryman, 2016). Likevel vil det forekomme en viss grad av interpretering når datamateriale skal kodes og kategoriseres som vil kunne påvirke resultatene i studien.

For å styrke studiens troverdighet, burde oppgavene også vært kategorisert av en annen person. Da hadde det vært mulig å tallfeste reliabiliteten i den kvantitative analysen og påvise eventuell bias som følge av subjektive tolkninger. I mangel på tilgang til en person med mulighet for å gjennomføre en slik kontroll, har jeg i stedet valgt å inkludere eksempler på kategoriseringen for å tydeliggjøre hvordan kodingsskjemaene er tatt i bruk. Fordi enkelte oppgaver har vært utfordrende å kategorisere, ville likevel resultatene kunne blitt annerledes dersom tilsvarende analyse hadde blitt gjennomført av en annen person.

3.5.3 Etiske aspekter

Når det kommer til de forskningsetiske spørsmålene, kan det blant annet diskuteres om studien presenterer lærebøkene nøytralt. Studien har ikke som hensikt å fremstille lærebøkene på en bestemt måte, verken positivt eller negativt. Resultatene som fremkommer i studien er heller ikke ment for å benyttes som argument for hvilken bok som egner seg best, men for å belyse mulige årsaker til elevenes forståelse av kontinuitetsbegrepet. Jeg har forsøkt å presentere resultatene på en objektiv måte ved å være tydelig på hvordan de ulike elementene i lærebøkene er kategorisert. Ved å analysere alle oppgavene, i stedet for å trekke frem et mindre utvalg, mener jeg også har bidratt til å gi en rettferdig fremstilling av lærebøkene.

Kapittel 4

Resultater og analyse

Dette kapittelet vil bestå av resultater og kommentarer til den horisontale- og vertikale analysen. Utvalg av kapitler og delkapitler fra de ulike lærebøkene er tatt med utgangspunkt i forskningsspørsmålene. Selv om bøkene i utgangspunktet er analysert hver for seg, vil resultatene bli presentert samlet.

4.1 Horisontal analyse

Den horisontale analysen består av to hovedkategorier: bakgrunnsinformasjon og helhetlig struktur. Denne delen av analysen tar for seg det visuelle og strukturen til bøkene. Dette er også den første vurderingen som vil bli gjort i valg av lærebok. Ved å få oversikt over strukturen til bøkene, vil det bli mulig å identifisere hvor innholdet som vil inngå i den vertikale analysen er lokalisert.

	Matematikk R1	Sinus R1
Forfattere:	Heir, Odd Engeseth, John Moe, Håvard Borgan, Ørnulf	Oldervoll, Tore Hals, Sigbjørn Vaaje, Audhild Svorstøl, Otto
Forlag:	Aschehoug	Cappelen Damm
Utgivelsesår:	2015	2018
Tilleggsmateriell:	Nettsted for elever Nettsted for lærer	Felles nettside for lærer og elev
Sideantall; sidestørrelse:	448; 26cm x 18cm	527; 24cm x 16cm
Antall kapitler:	7	9

Tabell 4.1: Oversikt over bakgrunnsinformasjonen for lærebøkene

4.1.1 Bakgrunnsinformasjon

Det er ingen store forskjeller mellom de lærebøkene utover at det er ulike forlag og forfattere. Riktignok er sideantallet i Sinus R1 høyere enn for Matematikk R1, men ettersom Sinus R1 har et mindre format, gir det totalt et tilnærmet likt omfang. Som det kommer frem i tabell 4.1, er kapittelantallet ulikt, noe som kan indikere at forfatterne har valgt å strukturere innholdet på forskjellige måter. Begge forlagene har tilgjengelige gratis nettressurser for elever. Aschehoug har i tillegg et eget nettsted for lærere som krever innlogging med lisens.

4.1.2 Helhetlig struktur

For å se på hvordan innholdet er fordelt i bøkene, presenteres rekkefølgen til de ulike emnene i tabell 4.2. Hovedforskjellen i kapittelfordelingen av fagstoffet er vektorer og vektorregning som Sinus R1 fordeler over tre kapitler. Matematikk R1 presenterer funksjoner og funksjonsbegrepet før funksjonsdrøfting, mens det for Sinus R1 er motsatt. Øvrige emner blir presentert i tilnærmet identisk rekkefølge.

Avslutningsvis er det i Sinus R1 en oppgavesamling til de ulike kapitlene og i Matematikk R1 avsluttes det med eksamenstrening som er fordelt i to kategorier, med og uten hjelpemidler, tilpasset gjeldene eksamensform.

Matematikk R1	Sinus R1
1 Algebra	1 Algebra
2 Logaritmer	2 Derivasjon
3 Funksjoner	3 Rasjonale funksjoner og potensfunksjoner
4 Funksjonsdrøfting	4 Logaritmer og eksponentialfunksjoner
5 Geometri	5 Geometri
6 Vektorer	6 Vektorer
7 Sannsynlighet	7 Vektorregning
Eksamenstrening	8 Vektorer og kurver
	9 Sannsynlighetsregning
	Oppgaver

Tabell 4.2: Kapittelinndeling for Matematikk R1 og Sinus R1.

Ettersom hensikten med denne oppgaven er å undersøke håndtering av begrepet kontinuitet, har jeg identifisert hvilke kapitler som tar for seg dette begrepet. Denne oversikten fremkommer i tabell 4.3 hvor det er verdt å fremheve at i Matematikk R1 inngår kontinuitet som en del av kapittelet om funksjoner, mens det i Sinus R1 inngår som en del av funksjonsdrøftingen. Rekkefølgen grenseverdier og kontinuitet blir presentert er også forskjellige i de to bøkene. Ut ifra kapittelinndelingen ser det ut som at Matematikk R1 introduserer kontinuitet etter grenseverdier, mens det er motsatt i Sinus R1[1].

Matematikk R1	Sinus R1
3 Funksjoner	2 Derivasjon
3A Funksjonsbegrepet	2.1 Kontinuerlige funksjoner
3B Grenseverdier	2.2 Noen spesielle grenseverdier
3C Kontinuitet	2.3 Derivasjon
3D Rasjonale funksjoner	2.4 Derivasjon av polynomer
3E Eksponentialfunksjoner	2.5 Funksjonsdrøfting
3F Logaritmefunksjoner	2.6 Krumning og vendepunkter
3G Deriverbarhet	2.7 Størst og minst

Tabell 4.3: Kapittelinndeling av kapitlene som tar for seg kontinuitet.

[1]Etter å ha sett nærmere på delkapittel 2.1 i Sinus R1 fant jeg at grenseverdier presenteres sammen med kontinuerlige funksjoner. Det var ikke mulig å avgjøre ut ifra oversikten fra innholdsfortegnelsen.

4.2 Vertikal analyse

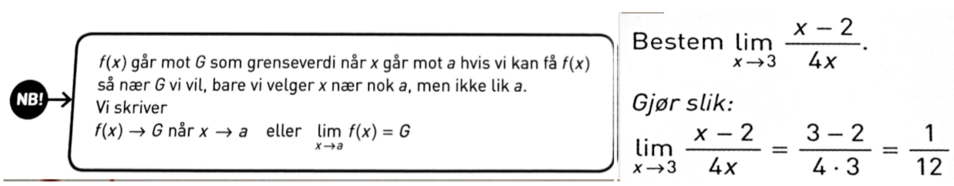
Som tidligere beskrevet, består den vertikale analysen av tre hovedkategorier: *kommunisert til eleven*, *kreves av eleven* og *sammenhenger*. Datamaterialet er utvalgt med utgangspunkt i de aktuelle kapitlene identifisert i forrige avsnitt. Første del av denne analysen handler om hvordan innholdet blir *kommunisert til eleven*. Dette innebærer hvordan illustrasjoner, eksempler og beviser blir benyttet for å formidle begrepene. Videre vil det skilles mellom hvilke oppgaver som krever imitativ og kreativ resonnering (Lithner, 2008) for å analysere hva lærebøkene *krever av eleven*. Avslutningsvis vil det bli gjort en analyse av eventuelle *sammenhenger* som gjøres mellom andre begreper og situasjoner utenfor skolen. Basert på forrige analysedel, vil kapittel 3 i Matematikk R1 og kapittel 2 i Sinus R1 utgjøre datamaterialet for denne delen av analysen.

4.2.1 Matematisk innhold

I Matematikk R1 introduseres kontinuitet på følgende måte: "Ordet *kontinuerlig* kan vi forklare som vedvarende, uopphørlig eller forløpende. Tenk for eksempel på hvordan utetemperaturen varierer i løpet av en dag" (Heir et al., 2015, s. 98). Sinus R1 skriver at hvis en funksjon er kontinuerlig i et intervall "kan vi tegne grafen uten å løfte blyanten fra papiret" (Oldervoll et al., 2018). Den første beskrivelsen er en metafor til det Núñez et al. (1999) betegner som 'naturlig kontinuitet'.

Formuleringen av begrepsdefinisjonen er tilnærmet identisk i begge bøkene. Grenseverdibegrepet anvendes for å definere kontinuitet ved at "f er kontinuerlig for $x = a$ dersom $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$". En betingelse for punktet som er under evaluering blir derimot definert på ulike måter: I Sinus R1 formuleres den ved at "$f(a)$ må eksistere", mens i Matematikk R1 er betingelsen at "$a \in D_f$". Presiseringen som blir gjort i Matematikk R1 om at det bare er meningsfylt å evaluere kontinuitet for punkter som er en del av definisjonsmengden, er gjennomgående for senere eksempler og illustrasjoner. Som det fremkom i den andre delen av den horisontale analysen, defineres ikke grenseverdibegrepet i Sinus R1 før det tas i bruk i definisjonen av kontinuitet. I stedet introduseres disse begrepene samtidig og kontinuitet brukes som en anvendelse av grenseverdi.

Matematikk R1 definerer grenseverdi med referanse til 'Cauchy-Weierstrass definisjonen' (figur 4.1), til tross for at denne betydningen av grenseverdi ikke blir videreført. I første eksempel etter at definisjonen er gitt brukes *innsettingsmetoden* som fremgangsmåte for å bestemme grenseverdien. I Sinus R1 brukes den samme formuleringen for betydningen av grenseverdi, men ikke gitt som en begrepsdefinisjon. Begge bøkene illustrerer bruk av grenseverdi med innsettingsmetoden og underbygger resultatene til Tall & Vinner (1981) om at studenter klarer å løse oppgaver til tross manglende forståelse av konseptdefinisjonen.


NB!

$f(x)$ går mot G som grenseverdi når x går mot a hvis vi kan få $f(x)$ så nær G vi vil, bare vi velger x nær nok a, men ikke lik a.
Vi skriver
$f(x) \to G$ når $x \to a$ eller $\lim_{x \to a} f(x) = G$

Bestem $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{4x}$.

Gjør slik:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{4x} = \frac{3-2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$

Figur 4.1: Matematikk R1 sin definisjon[2] av grenseverdi med eksempel på bruk (Heir et al., 2015, s. 91-92).

Ved å introdusere grenseverdier, oppstår muligheten til å undersøke hva som skjer med funksjoner omkring verdier utenfor definisjonsmengden. Ettersom $h(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ ikke er definert for $x = 1$ er det ikke mulig å kalkulere $h(1)$, men det er likevel mulig å avgjøre hvordan funksjonen "oppfører seg" omkring $x = 1$. Derfor vil det å arbeide med oppgaver av typen $\lim_{x \to 3} (x-2)/4x$ (figur 4.1)

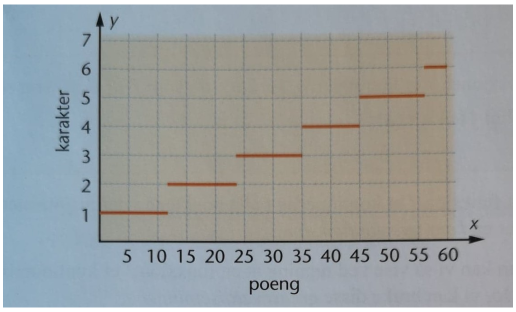
[2] I definisjonen burde det mer presist stå "uten å sette x lik a" i stedet for "men ikke lik a"

være meningsløse å regne på, ettersom uttrykket er definert for $x = 3$ og det eneste som er nødvendig, er å substituere x med 3. Nytteverdien av grenseverdi inntreffer i det øyeblikket man skal bestemme for eksempel $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2}$ eller $\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}$, hvor substitusjon av x med henholdsvis ∞ eller a ikke gir mening.

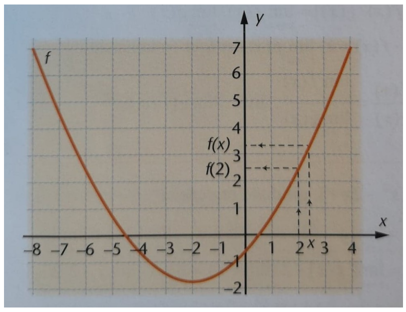
Siden funksjonene som inngår i lærebøkene og som er utgangspunkt for kontinuitetsdrøftingen er (nesten utelukkende) polynomfunksjoner, rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og/eller logaritmefunksjoner, vil ikke elevene erfare utfordringer ved bruk av grenseverdi for å bestemme hvorvidt funksjonene er kontinuerlige og heller ikke erfare behovet for en annen teoretisk tilnærming til konseptet. Dette kan også være med på å styrke en oppfatning om at funksjoner og grenseverdier alltid kan bestemmes ved innsettingsmetoden.

4.2.1.1 Illustrasjoner

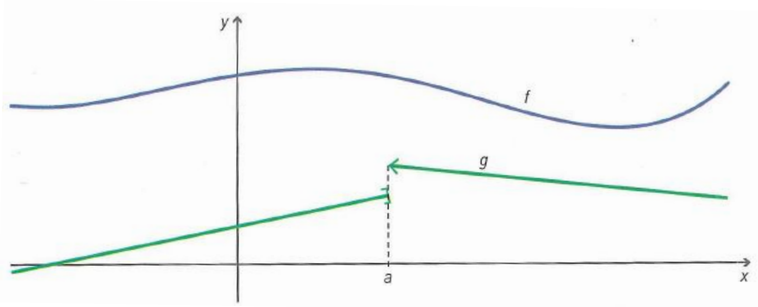
Illustrasjonene som blir presentert i bøkene er ment for å underbygge påstandene som formuleres i teksten. Det forklares i Sinus R1 at den første grafen som blir gitt (figur 4.2a) ikke er sammenhengende på hele intervallet $[0, 60]$, men kontinuerlig på ulike delmengder. Det er også verdt å bemerke at for å illustrere diskontinuerlige funksjoner, bruker begge lærebøkene funksjoner som gjør sprang. Det fremkommer ingen illustrasjoner av diskontinuitet med hull i delkapitlene om kontinuitet, men dette blir presentert sammen med forklaringen av funksjonsgrenser.



(a) Grafen er ikke sammenhengende– og dermed heller ikke kontinuerlig på intervallet $[0, 60]$, men kontinuerlig på intervallet $(0, 10)$.



(b) Grafen er kontinuerlig– og dermed også sammenhengende (siden D_f er sammenhengende).

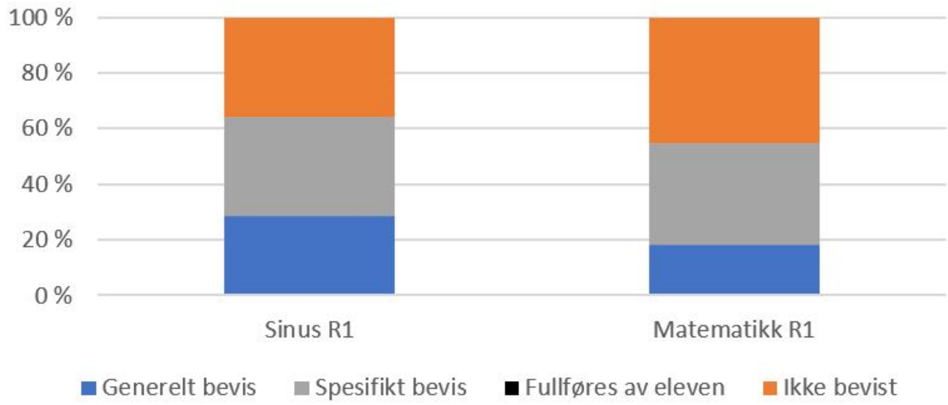


(c) Figuren viser grafen til en sammenhengende kurve f og en funksjon g som gjør et sprang ved $x = a$.

Figur 4.2: Illustrasjoner av kontinuerlige og diskontinuerlige funksjoner. Figur 4.2a og 4.2b er hentet fra Sinus R1 (Oldervoll et al., 2018, s. 51). Figur 4.2c er hentet fra Matematikk R1 (Heir et al., 2015, s. 98).

4.2.1.2 Egenskaper

Totalt presenteres det 25 egenskaper i kapitlene. Av disse blir $40\,\%$ ikke bevist, $24\,\%$ bevises generelt og $36\,\%$ bevises spesifikt (figur 4.3). I begge bøkene er det inkludert generelle argument for at deriverbarhet impliserer kontinuitet og for definisjonen av den deriverte. I Sinus R1 inngår det i tillegg generelle bevis for at den deriverte til en sum av to funksjoner er lik summen av de deriverte til funksjonene, og at $(k \cdot u(x))' = k \cdot u'(x)$. Bøkene har som nevnt tidligere ulik struktur som medfører at de sistnevnte bevisene ikke inngår i kapittel 3 i Matematikk R1, men det finnes imidlertid tilsvarende bevis i det påfølgende kapittelet om derivasjonsregler.



Figur 4.3: Fordeling i prosent for egenskapene/reglene som presenteres i kapittel 2 i Sinus R1 og kapittel 3 i Matematikk R1. Ingen av egenskapene er kodet til *fullføres av eleven*

For egenskapene som omhandler kontinuitet, vises det med spesifikke bevis at alle polynomfunksjoner og rasjonale funksjoner er kontinuerlige på definisjonsmengden. At eksponentialfunksjoner og logaritmiske funksjoner er kontinuerlige funksjoner blir ikke bevist, selv om det i Matematikk R1 står at "det kan vises at logaritmefunksjoner er kontinuerlige funksjoner" (Heir et al., 2015, s. 116).

Tilsvarende det Thompson et al. (2012) fant i sin studie, er det også her flere egenskaper som ikke blir bevist eller rettferdiggjort i teksten. Dette medfører at den eneste måten elevene kan forholde seg til disse egenskapene på, er gjennom utenatlæring. Når begreper ikke blir presentert ved bruk av bevisrelatert resonnering, vil ikke elevene få den fleksibiliteten til begrepene som det er ønskelig at de skal ha.

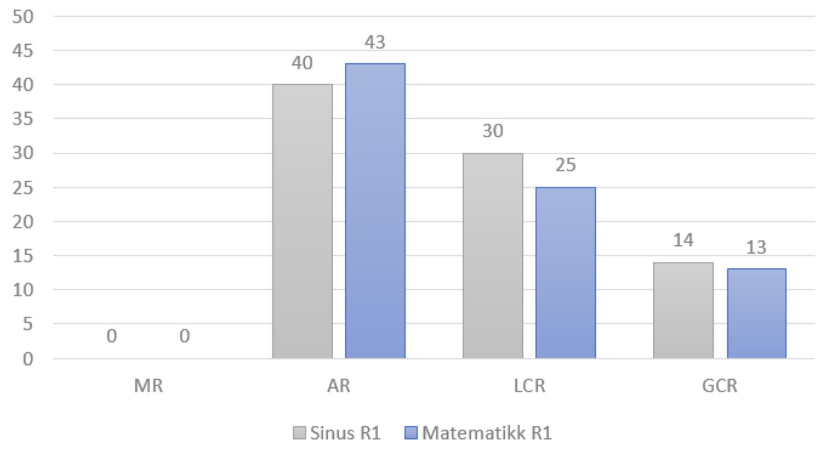
4.2.2 Kreves av eleven

Oppgavene i bøkene er strukturert på to ulike måter. I Matematikk R1 blir det gitt 81 oppgaver i kapittel 3 som er differensiert mellom 'innlæringsoppgaver', 'røde oppgaver' og 'blå oppgaver'. Røde oppgaver er tiltenkt å være en naturlig fortsettelse etter innlæringsoppgavene og de blå oppgavene skal gi større utfordringer. I Sinus R1 differensieres ikke oppgavene, det blir gitt 32 oppgaver i kapittelet og medfølger også 52 ekstraoppgaver mot slutten av boka, noe som totalt utgjør 84 oppgaver.

I tillegg til de ordinære oppgavene, gis det i Matematikk R1 en *kapitteltest* bestående av totalt 7 oppgaver og det blir i begge bøkene inkludert oppgaver ment som eksamenstrening. Her gis det i Sinus R1 totalt 64 oppgaver hvor 18 av disse er tidligere eksamensoppgaver. I Matematikk R1 er det 9 oppgaver som alle er tidligere eksamensoppgaver.

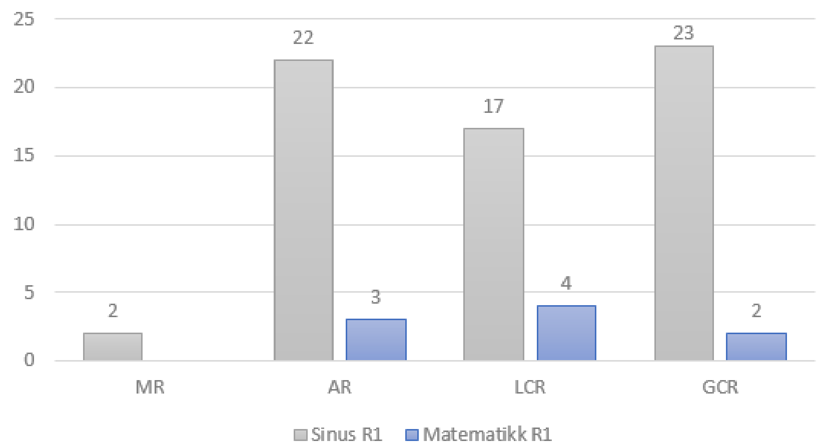
4.2.2.1 Resonneringsformer

Resultatene fra analysen av hva slags type resonnering de ordinære oppgavene krever presenteres i figur 4.4. Oppgaveantallet og fordelingen mellom de ulike type resonnering er omtrent det samme for begge lærebøkene. Det ble ikke avdekket oppgaver som krever memorerende resonnering og begge bøkene har størst andel oppgaver som krever algoritmisk resonnering. Dersom man ser på hovedkategoriene imitativ– og kreativ resonnering, er oppgavefordelingen relativ lik: I Sinus R1 kategoriseres 47,6 % av oppgavene som IR, mens denne andelen er 53,1 % i Matematikk R1.

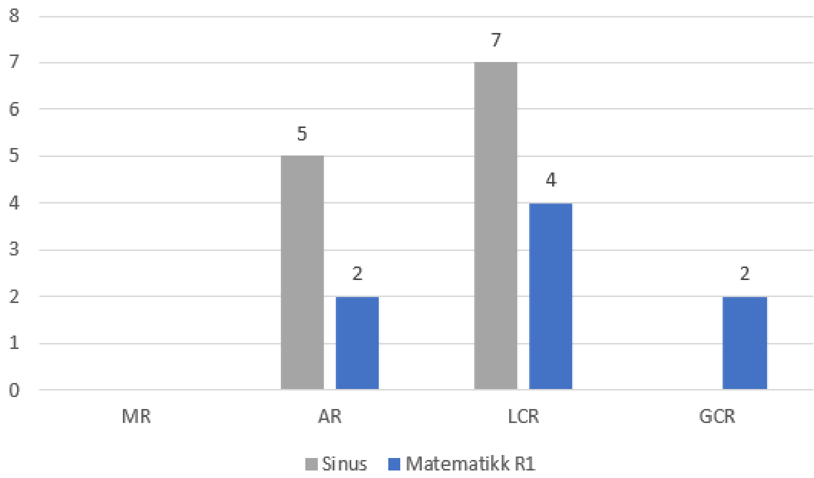


Figur 4.4: Fordeling av resonneringsform for de 'ordinære oppgavene' for kapittel 2 i Sinus R1 og kapittel 3 i Matematikk R1.

Etter å ha analysert oppgavene som er rettet mot eksamenstrening (presentert i figur 4.5), kan man se at det i Sinus R1 gis to oppgaver som krever memorerende resonnering og det er en jevnere fordeling mellom de øvrige kategoriene. Det er her totalt sett størst vektlegging av CR: 62,5 % for Sinus R1 og 66,7 % for Matematikk R1. Totalt gir Sinus R1 en større tilgang på CR oppgaver enn Matematikk R1. Ettersom det gis svært få oppgaver av typen 'eksamenstrening' til kapittel 3 i Matematikk R1, er det vanskelig å vurdere om fordelingen er representativ for resten av boka. Andelen LCR og CR oppgaver er høyere enn for de 'ordinære oppgavene', noe som kan tyde på at forfatterne har en oppfatning om at IR er bedre egnet for begrepsinnlæring enn CR.



Figur 4.5: Fordeling av resonneringsform gitt som 'eksamenstrening' for kapittel 2 i Sinus R1 og kapittel 3 i Matematikk R1.



Figur 4.6: Fordeling av de ordinære oppgavene tilhørende kapittel 2.1 i Sinus R1 og kapittel 3C i Matematikk R1. Ingen av oppgavene gitt i disse delkapitlene krever memorerende resonnering.

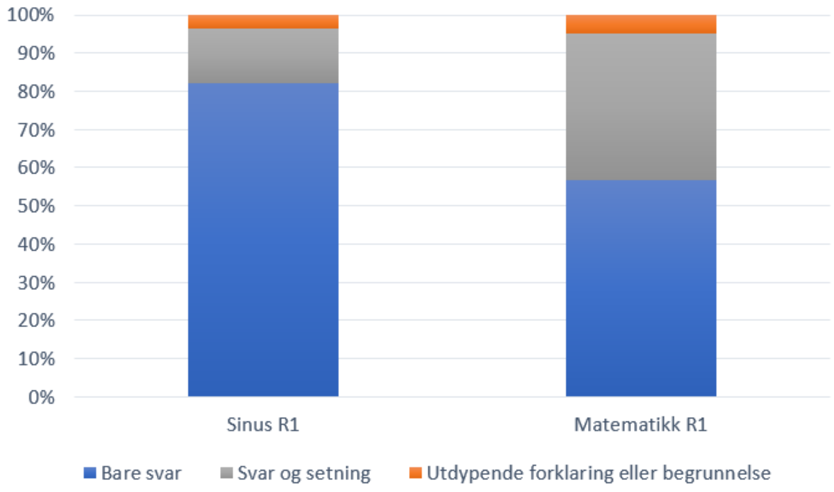
Sammenlikning av 'ordinære oppgaver' og 'eksamenstrening' viser at andelen oppgaver som krever en form for kreativ resonnering er høyere for oppgavene gitt i den sistnevnte kategorien. Dersom oppgaver gitt på prøver følger et tilsvarende mønster, bør vektleggingen av IR og CR i de ordinære oppgavene gjenspeile dette. Elevene blir i første omgang utfordret på hvorvidt de evner å reprodusere algoritmer, men vil kunne streve med å sette opp og løse de eksamensoppgavene som krever en annen form for resonnering.

Elever som jobber med ordinære oppgaver vil ende opp med i all hovedsak å erfare algoritmisk resonnering. Selv om det i begge bøkene er en stor andel oppgaver av typen LCR, krever også disse stort sett algoritmisk resonnering. Dersom man ønsker at elevene skal utvikle seg til å bli selvstendige problemløsere, vil det være hensiktsmessig å utfordre dem til også å utvikle de kreative evnene innenfor resonnering. Lithner (2008) ser på en slik fordeling som en potensiell utfordring. Et stort fokus på utenatlæring vil være med på å gi elevene øyeblikkelig mestringsfølelse og kortvarig belønning. De vil oppleve mestring i regne– og eksamensoppgaver som er tilpasset denne oppgaveformen, men på sikt vil matematikken kunne oppleves som meningsløs.

Dersom elevene prioriterer å løse ordinære oppgaver, vil de i liten grad få erfare oppgaver som krever global kreativ resonnering. Dermed vil de også få begrenset erfaring med viktigheten av å kjenne til og kunne bruke egenskapene som kjennetegner begrepsdefinisjonene. Dette kan potensielt ha konsekvenser for elevenes resultater i vurderingssituasjoner. Dersom oppgaver gitt på prøve eller eksamen forventer en annen form for resonnering enn det elevene er kjent med, kan oppgavene oppleves som ekstra utfordrende og de kan oppleve problemer med å løse disse.

4.2.2.2 Svartyper

Hva slags form for svar som etterspørres i oppgavene er forskjellig i de analyserte bøkene. Mens omtrent 4 % av oppgavene i Sinus R1 og 5 % i Matematikk R1 ber elevene om å begrunne eller forklare svaret (figur 4.7), krever 82 % av oppgavene i Sinus R1 og 57 % av oppgavene i Matematikk R1 bare et enkelt svar. Disse resultatene kan være med på å forsterke enkelte elevers opplevelse av at matematikkfaget handler om å "komme frem til et riktig svar", og ikke om å skape seg en god begrepsforståelse for å kunne bruke de matematiske egenskapene på en fleksibel måte.



Figur 4.7: Fordeling i prosent for hvilken type svar som etterspørres i de ordinære oppgavene i kapittel 2 i Sinus R1 og kapittel 3 i Matematikk R1

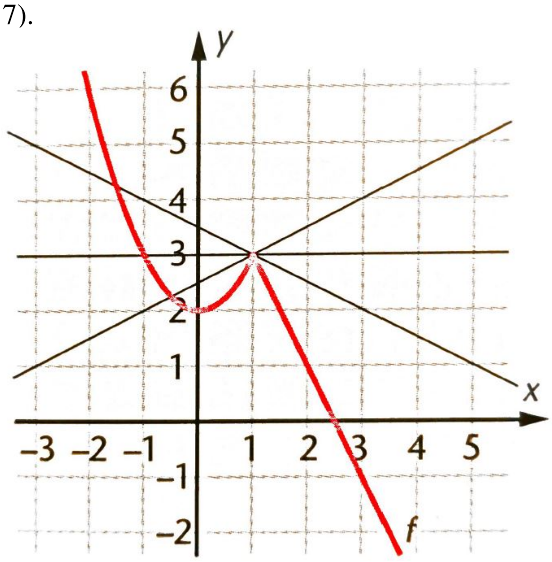
4.2.3 Sammenhenger mellom begreper

Basert på innholdsoversikten og indeksen blir det ikke avdekket at kontinuitet, grenseverdi og deriverbarhet behandles andre steder i lærebøkene enn i de allerede nevnte kapitlene. Derfor vil det bare være innholdet som inngår i disse to kapitlene som vil bli presentert.

Ettersom definisjonen av kontinuitet i begge bøkene tar utgangspunkt i grenseverdi, vil det måtte være innlysende for eleven at dette er begreper som er relaterte til hverandre. Det som derimot er en utfordring, er at dersom bøkene ikke gir elevene en tilstrekkelig forståelse av grenseverdibegrepet vil dette få direkte konsekvenser for forståelsen av kontinuitet. Da ingen av bøkene presenterer en formell definisjon av grenseverdi, begrenser det også elevenes mulighet for å danne seg en konseptuell forståelse av både grenseverdi– og kontinuitetsbegrepet (Juter, 2017).

At "f er deriverbar for $x = a$" medfører at "f er kontinuerlig for $x = a$", blir i begge bøkene argumentert for ved å kombinere definisjonen til den deriverte og grenseverdi-definisjonen for kontinuitet. Det er imidlertid den kontrapositive implikasjonen "f er ikke kontinuerlig for $x = a$" $\Rightarrow$ "f er ikke deriverbar for $x = a$" som illustreres grafisk og vil indirekte være med på å forsterke elevens begrepsbilde såfremt de allerede har tilstrekkelig forståelse av gyldigheten til et kontrapositivt bevis.

At "f er kontinuerlig for $x = a$" ikke nødvendigvis medfører at "f er deriverbar for $x = a$" blir også argumentert for i begge bøkene, men på to ulike måter. Sinus R1 argumenterer for dette grafisk ved at man ikke kan tegne en entydig tangent i delingspunktet til funksjonen illustrert i figur 4.8.



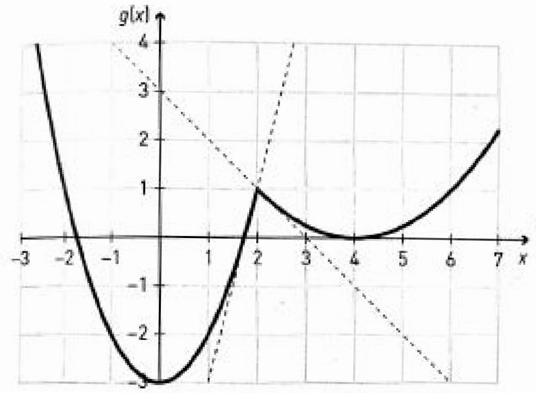
Figur 4.8: Illustrasjon av en kontinuerlig funksjon som ikke er deriverbar (Oldervoll et al., 2018, s. 63)

I tillegg til en grafisk forklaring blir denne sammenhengen også vist ved regning i Matematikk R1 (figur 4.9). Dette vil kunne være med på styrke elevenes aksept til gyldigheten av det grafiske argumentet samtidig som det kan være med på å forsterke begrepsbildet for betydningen av ensidige grenseverdier.

EKSEMPEL 18

Funksjonen g er gitt ved $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{når} \quad x < 2 \\ \frac{1}{4}(x-4)^2 & \text{når} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Forklar at g ikke er deriverbar for $x = 2$.



Gjør slik grafisk:
Vi ser for oss sekanten gjennom $(2, g(2))$ og $(2 + \Delta x, g(2 + \Delta x))$.

- Stigningstallet til sekanten går mot 4 når $\Delta x \to 0^-$.
- Stigningstallet til sekanten går mot -1 når $\Delta x \to 0^+$.

Stigningstallet for sekanten går ikke mot én bestemt grenseverdi.
Derfor er ikke g deriverbar for $x = 2$.

Gjør slik ved regning:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{g(2+\Delta x) - g(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(2+\Delta x)^2 - 3 - (2^2 - 3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} (4 + \Delta x) \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{g(2+\Delta x) - g(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{1}{4}(2+\Delta x - 4)^2 - \frac{1}{4}(2-4)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{1}{4}(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\tfrac{1}{4}\Delta x - 1\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

De ensidige grenseverdiene er ikke like.

$g'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(2+\Delta x) - g(2)}{\Delta x}$ eksisterer derfor ikke.

Altså er ikke g deriverbar for $x = 2$.

Figur 4.9: Eksempeloppgave som illustrerer hvordan en funksjon kan være kontinuerlig uten å være deriverbar (Heir et al., 2015, s. 123)

Kapittel 5

Diskusjon

I dette kapittelet vil det først bli presentert en konkurranse som kan bli brukt for å introdusere Cauchy-Weierstrass definisjonen av kontinuitet og grenseverdi. Deretter vil jeg forsøke å belyse hvordan lærebøkene bidrar til å gi elevene en god forståelse av kontinuitetsbegrepet. Med utgangspunkt i resultatene fra forrige kapittel vil jeg forsøke å lage et grunnlag som kan brukes å svare på forskningsspørsmålene.

5.1 Uformell og formell begrepsdefinisjon

Núñez et al. (1999) skriver følgende: "rather than looking for better ways to help students learn 'rigorous' definitions of pre-given mathematical ideas, we need to examine the kinds of understanding and sense-making we want students to develop" (s. 61). På den andre siden finner Juter (2017) at studenter uten forståelse av den formelle definisjonen heller ikke har en fullverdig forståelse av begrepene og klarer derfor ikke å formidle den matematiske kunnskapen sin til andre på en god måte. Dette betyr ikke at man allerede i videregående skole skal forvente at elevene behersker ε - δ definisjonen, men den kan brukes som et supplement for å gi mening til begrepene grenseverdi og kontinuitet.

Samtidig som grenseverdibegrepet introduseres, burde elevene derfor bevisstgjøres på at

$$\text{“}\lim_{x\to a} f(x) = L\text{”} \iff \text{“vi kan gjøre } f(x) \text{ så nær } L \text{ vi ønsker, bare vi velger } x \text{ nærme nok } a\text{”}$$

er en *uformell begrepsdefinisjon* og at det også eksisterer en *presis begrepsdefinisjon*. Den er upresis i den forstand at 'så nærme vi ønsker' og 'velger x nærme nok' vil kunne ha ulik betydning i ulike kontekster (Adams & Essex, 2013).

Ettersom lærebøkene definerer kontinuitet med utgangspunkt i grenseverdibegrepet, vil graden av forståelse til disse begrepene henge tett sammen. Dersom en elev ikke har en god forståelse av grenseverdier, vil det bli utfordrende å få en god forståelse av kontinuitet. På en annen side, utfyller begrepene hverandre og man kan få frem forskjellen i begrepene ved at grenseverdien til en funksjon kan eksistere, til tross for at funksjonen ikke er kontinuerlig.

5.1.1 En uformell tilnærming til Cauchy-Weierstrass definisjonen

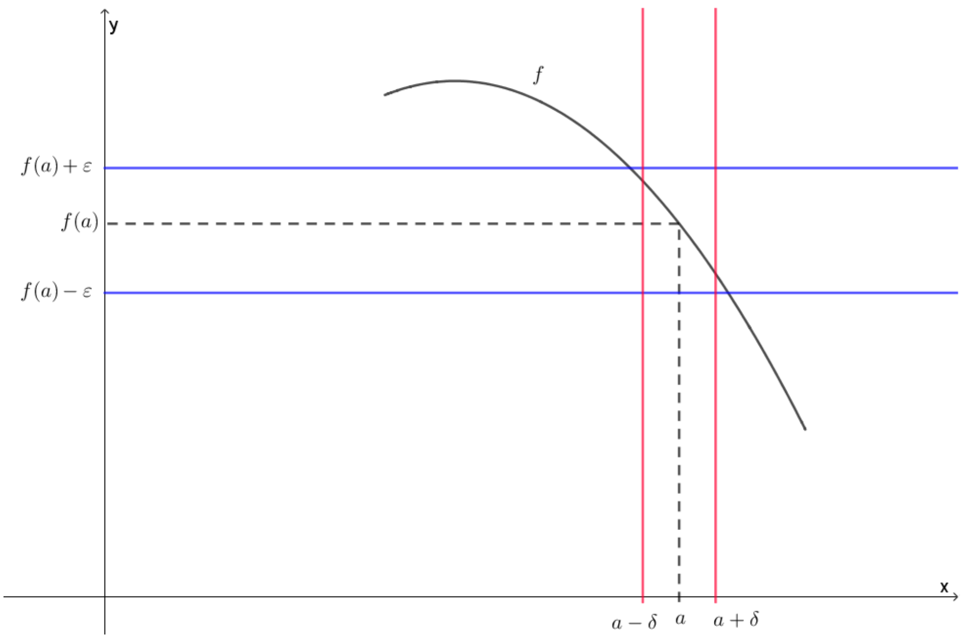
For at elevene skal få en forståelse av kontinuitet og grenseverdi, vil introduksjon av Cauchy-Weierstrass definisjonen være helt avgjørende (Juter, 2017). Elevene vil da få en alternativ representasjon å assosiere til begrepene, som også konkretiserer vagheten i "så nær vi vil, bare vi velger x nær nok". (Núñez et al., 1999) mener faktisk at dette er det *eneste* aspektet ε - δ definisjonen presiserer og stiller seg kritisk til om ε - δ definisjonen fanger essensen i hva kontinuitet er.

Definisjonen forutsetter for at f skal være kontinuerlig i et indre punkt $x = a$, må det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $x \in D_f$ med $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Uttrykt på en annen måte kan man si at for at en funksjon skal være kontinuerlig for $x = a$, kan $f(x)$ bare ha funksjonsverdier i intervallet $E = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ så lenge $x \in D = (a - \delta, a + \delta) \cap D_f$. Dette medfører at dersom man for hver $\varepsilon > 0$ ikke klarer å finne en $\delta > 0$ slik at denne sammenhengen gjelder, er funksjonen diskontinuerlig for $x = a$.

For å betrakte dette samspillet mellom ε og δ, kan man gi en innføring til egenskapene for den formelle definisjonen for både kontinuitet og grenseverdi ved å gjennomføre følgende konkurranse (Dovland & Pettersen, u.å.):

1. To elever blir gitt en funksjon som skal tegnes i en graftegner og en verdi a som skal undersøkes.
2. Elev A starter med å velge en verdi for ε som avgjør størrelsen på intervallet $E = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ og markerer intervallet i graftegneren.
3. Elev B sin oppgave er å finne en positiv verdi for δ slik at det for alle $x \in D$ gjelder at $f(x)$ kun har verdier i E. Intervallet $(a - \delta, a + \delta)$ markeres i samme graftegner.
4. Elev B vinner konkurransen dersom han/hun klarer å finne en passende verdi for δ, ellers vinner elev A.

Figur 5.1 illustrerer hvordan grafikkfeltet vil kunne se ut med en funksjon f og intervallene D og E Konkrete eksempler på forskjellige konkurranser med mulige løsninger presenteres i påfølgende avsnitt.



Figur 5.1: Illustrasjon av konkurransen mellom elevene. Elev A starter med å velge ε som bestemmer intervallet E avgrenset av de blå linjene. Elev B må deretter bestemme δ for å klare å gjøre det røde intervallet så smalt at funksjonsverdiene i D ikke overskrider E.

5.1.1.1 Funksjon med delt funksjonsuttrykk

Undersøk om funksjonen f er kontinuerlig for $x = 2$ gitt ved $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$

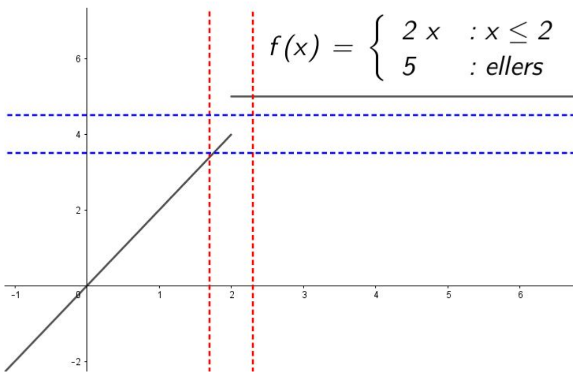
Dersom elev A bestemmer $\varepsilon = 0.5$, vil funksjonsverdiene til $f(x)$ måtte ligge innenfor $E = (4 - 0.5, 4 + 0.5) = (3.5, 4.5)$ ettersom $f(2) = 4$. Elev B skal videre prøve å finne en passende δ. Dersom eleven forsøker med $\delta = 0.3$, må han/hun deretter undersøke om $f(x) \in E$ for $x \in (1.7, 2.3)$. Her kan elev B oppdage at $f(1.65) = 3.3 \notin E$ og må endre valg av δ for å ha mulighet til å vinne (figur 5.2a). Velger elev B en mindre verdi, for eksempel $\delta = 0.1$ vil alle funksjonsverdiene for $x \in (1.9, 2]$ være inkludert i E, men funksjonsverdiene for $x > 2$ vil fremdeles ikke være innenfor.

Hvis elev A velger $\varepsilon = 1.5$ for funksjonen $f(x)$, vil elev B klare å bestemme δ for å vinne. Ettersom sammenhengen mellom ε og δ skal gjelde for *alle* $\varepsilon < 0$, må elevene bevisstgjøres på at det derfor ikke nødvendigvis betyr at funksjonen er kontinuerlig, men at det potensielt er valgt en for stor verdi for ε. Dette illustrerer også hvilken rolle eksempler kan spille i matematiske bevis; et moteksempel er tilstrekkelig som motbevis, der et eksempel er ikke tilstrekkelig for å bevise en påstand.

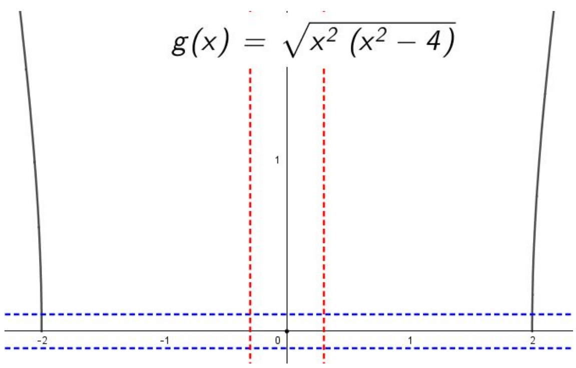
5.1.1.2 Vise kontinuitet for et isolert punkt

Tilsvarende kan vi forsøke å avgjøre om funksjonen g, gitt ved $g(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 4)}$ og med definisjonsmengde $D_g = (-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (2, \infty)$ er kontinuerlig for $x = 0$.

Elev A kan starte med å oppgi $\varepsilon = 0.1$ og elev B må deretter forsøke å bestemme en $\delta > 0$ slik at alle funksjonsverdiene for $x \in D$ ligger i intervallet $E = (-0.1, 0.1)$. I dette tilfellet er det tilstrekkelig for elev B å velge $\delta = 0.3$ ettersom den eneste verdien for $x \in (-0.3, 0.3) \cap D_g$ er $x = 0$. Siden $g(0) = 0 \in (-0.1, 0.1)$, vinner eleven og vil vinne så lenge han/hun velger $0 < \delta < 2$ i dette tilfellet.



(a) $\varepsilon = 0.5$ og $\delta = 0.3$.
For at denne funksjonen skulle vært kontinuerlig for $x = 2$, måtte det vært mulig å gjøre det røde intervallet så smalt at alle funksjonsverdiene i dette intervallet ville vært innenfor det blå intervallet.



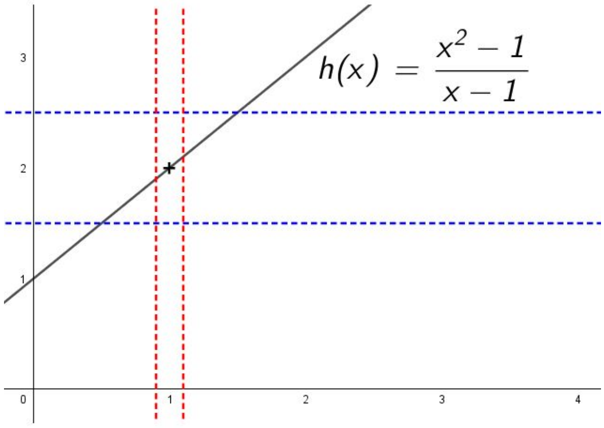
(b) $\varepsilon = 0.1$ og $\delta = 0.3$.
For et isolert punkt vil det alltid være mulig å bestemme δ ettersom det alltid eksisterer et intervall omkring punktet der funksjonen ikke er definert.

Figur 5.2: Illustrasjon av hvordan valg av ε og δ påvirker intervallene $(a - \delta, a + \delta)$ og E for funksjonene f og g.

5.1.1.3 Anvendelse av definisjonen i grenseverdioppgaver

Denne konkurransen kan brukes på tilsvarende måte for å bestemme om en funksjonsgrense stemmer ved å vurdere om $\lim_{x\to a} h(x) = L$. Elev A vil begynne med å velge ε og elev B skal deretter forsøke å finne en δ slik at $h(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ for alle $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$.

Som et eksempel kan vi bruke spillet for å undersøke om $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Elev A kan starte med å velge $\varepsilon = 0.5$ og elev B må finne en δ slik at $h(x) \in (1.5, 2.5)$ for alle $x \in (1-\delta, 1+\delta) \setminus \{1\}$. Elev B vinner her ved å velge $0 < \delta < 0.5$ og vil for denne funksjonen alltid vinne dersom $0 < \delta < \varepsilon$ (illustrert i figur 5.3).



Figur 5.3: Illustrasjon av hvordan elev B kan velge $\delta = 0.3$ for å få funksjonsverdiene til ikke å overskride det blå intervallet bestemt av $\varepsilon = 0.5$.

5.1.1.4 Aktivitetens potensiale og begrensninger

Konkurransen er konstruert slik at dersom funksjonen er kontinuerlig eller grenseverdien er korrekt, vil alltid eleven som bestemmer δ kunne vinne. For funksjoner som er diskontinuerlige vil derimot den andre eleven ha mulighet til å vinne, dersom valg av ε er tilstrekkelig liten. At vinneren er forhåndsbestemt avhengig av hvilken funksjon som drøftes og hvordan rollene fordeles, får frem egenskapen i Cauchy-Weierstrass definisjonen. For å engasjere elevene til å velge små verdier, kan man også la de bytte roller underveis slik at vil de kunne forsøke å "overgå" hverandre. Samtidig vil de kunne observere hvordan bredden på intervallene henger sammen med verdiene av ε og δ.

Øvelsen kan videre brukes for å la elevene utforske hvordan ulike funksjoner vil være kontinuerlige på hele definisjonsmengden. Gjennom å utforske hvordan maksimal verdi for δ vil avhenge av ε, gis elevene mulighet til å argumentere for at ulike funksjoner vil være kontinuerlige uansett hvilken x-verdi som analyseres. Følger man en progresjon fra lineære funksjoner til høyere ordens polynomfunksjoner, vil elevene selv få muligheten til å erfare at alle funksjoner av denne typen vil måtte være kontinuerlige.

Fordi ε - δ definisjonen bygger på en statisk tilnærming til funksjoner og ikke handler om en *bevegelse med retning*, vil man også kunne unngå forvirringen om at kontinuerlige funksjoner må være sammenhengende på $\mathbb{R}$. Det må imidlertid ikke legges skjul på at denne tilnærmingen av kontinuitet og grenseverdi er kognitivt utfordrende. I tillegg går ikke aktiviteten inn på den algebraiske skrivemåten som hører med. Det kan derfor ikke forventes at elevene etter denne øvelsen skal være i stand til å gjennomføre fullverdige argumenter for å bevise kontinuitet.

Når studenter på et tidspunkt skal lære begrepsdefinisjonen, vil de kunne ha vanskeligheter med å forstå betydningen av "for alle $\varepsilon > 0 \ldots$" (Dawkins, 2012). Ettersom øvelsen presentert over undersøker sammenhengen mellom konkrete verdier for ε og δ, kan det virke som om det handler om "for en enkelt $\varepsilon > 0 \ldots$" og ikke "for enhver $\varepsilon > 0 \ldots$". Det kan i første omgang oppleves som at dette ikke er en veldig viktig nyansering, men som for eksempel funksjonen f får frem (figur 5.2a).

5.1.2 Forståelse av andre begreper

I lærebøkene som er analysert i denne studien blir kontinuerlige funksjoner presentert med egenskapene som at de er sammenhengende, ikke gjør sprang og kan være deriverbare. Begrepet defineres tilsvarende som for grenseverdi og det argumenteres for hvilke funksjonstyper som er kontinuerlige.

Tidligere i dette kapittelet argumenterte jeg for at forståelsen av definisjonen til grenseverdi påvirker forståelsen av kontinuitet. Ettersom definisjonen av grenseverdi er upresis, kan det være utfordrende for elevene å forstå hva som er den egentlige betydningen av begrepet. Med en manglende forståelse av grenseverdi, vil heller ikke forståelsen av kontinuitet bli fullstendig. Forståelsen vil kunne forbedres ved å introdusere ε - δ definisjonen, men man kan samtidig ikke forvente at elevene skal klare å beherske definisjonen fullstendig.

Den formelle definisjonen vil likevel gi en annerledes og mer konkret tilnærming til begrepene. Ettersom definisjonen bygger på en annen kognitiv tilnærming til funksjonsbegrepet, hvor bevegelsesmetaforene ikke lenger er aktuelle, utfordres elevenes intuitive forståelse. Det kan være at denne tilnærmingen viser seg å være for kompleks for enkelte elever. Dersom den introduseres sammen med bruk av digitale graftegner, slik det er illustrert ovenfor, mener jeg likevel at det vil kunne få en positiv konsekvens for begrepsforståelsen.

5.1.3 Anvendelser av kontinuitetsegenskapen

Det eksisterer også andre egenskaper som gjør kontinuitet til et interessant begrep, men som ikke inngår i lærebøkene. Skjæringssetningen, middelverdisetningen og ekstremalverdisetningen er eksempler på egenskaper som ikke behandles, men som kunne bidratt til å legitimere innføringen av kontinuerlige funksjoner.

Elever bruker allerede resultatet fra ekstremalverdisetningen i forbindelse med at de finner bunn- og toppunkt både digitalt og ved regning. Beviset for ekstremalverdisetningen bygger på kompletthetsegenskapen til de reelle tallene og vil ikke være aktuelt å begi seg inn i. Likevel er en forutsetning for resultatet at funksjonen er kontinuerlig på et lukket intervall. Derfor er det nødvendig å ha en presis forståelse av hva som menes med kontinuerlige funksjoner.

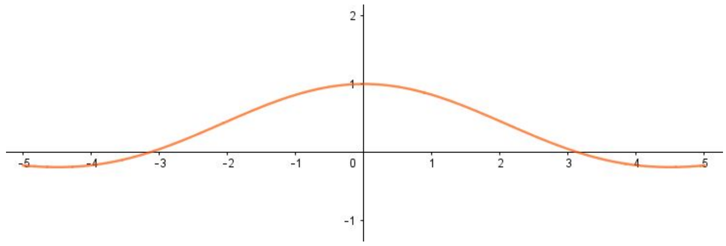
5.2 Kontinuitet og begrepsbilde

Tidligere har jeg trukket frem studier der det er funnet at studenter har ukorrekte begrepsbilder av blant annet kontinuitet og grenseverdi. Det vil være naturlig å assosiere det grafiske bildet av en funksjon med funksjonen, selv om dette bare er én av flere representasjonsformer. Et grafisk bilde vil derfor ofte være det elever visualisere seg i arbeid med funksjoner. Dette avsnittet vil ta for seg hvordan grafiske illustrasjoner benyttes i arbeid med kontinuerlige funksjoner, hvilke konsekvenser det har for elevenes begrepsforståelse og noen presiseringer som vil være viktige å foreta.

5.2.1 Grafiske illustrasjoner

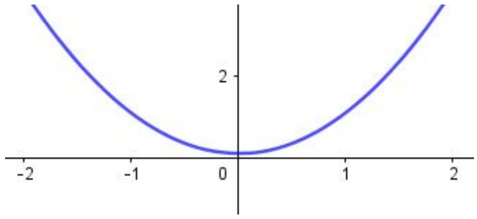
Et problem relatert til forståelsen av kontinuitetsbegrepet, er oppfatningen om at det eksisterer en ekvivalens mellom at funksjoner kan tegnes sammenhengende og kontinuitet (Tall & Vinner, 1981). Denne oppfatningen kan knyttes til hvordan begrepet blir presentert og illustrert. For å illustrere at en graf er diskontinuerlig, fremstilles en graf som åpenbart ikke er sammenhengende, i enkelte tilfeller uten at definisjonsmengden til funksjonen er bestemt. På grunn av kompletthetsegenskapen til de reelle tallene, vil denne relasjonen gjelde for funksjoner med $\mathbb{R}$ som definisjonsmengde. I de tilfellene der definisjonsområdet derimot ikke er $\mathbb{R}$, som for eksempel rasjonale funksjoner, vil de kunne være kontinuerlige selv om grafen ikke har en sammenhengende kurve.

Til tross for at en grafisk fremstilling av en funksjon vil være et nyttig redskap til å visualisere hvilke egenskaper funksjonen har, kan man tenke seg at man bør være forsiktig med å gjennomføre funksjonsanalyse utelukkende basert på et grafisk bilde. Det er ikke vanskelig å komme med eksempler på funksjoner som tilsynelatende ser kontinuerlige ut på $\mathbb{R}$, men som har hull i definisjonsmengden. Både $h(x)$ (figur 5.3) og $i(x)$ (figur 5.4) er eksempler på slike funksjoner. Dersom man skulle ha vurdert kontinuitet ut ifra den grafiske fremstillingen, uten å kjenne til funksjonsuttrykket, ville man raskt kunne ha kunne konkludert med at disse funksjonene er kontinuerlige på $\mathbb{R}$.

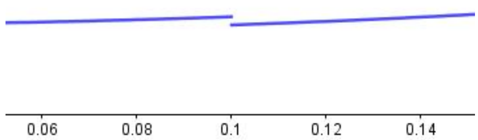


Figur 5.4: Eksempel på en funksjon $i(x) = \sin(x)/x$ som tilsynelatende ser kontinuerlig ut på $\mathbb{R}$, men har hull for $x = 0$.

I begge lærebøkene som er analysert, presenteres det oppgaver der eleven skal avgjøre hvor ulike funksjoner er kontinuerlige og diskontinuerlige, med utgangspunkt i et grafisk bilde uten algebraisk uttrykk. For funksjoner som har et tydelig sprang vil det være mulig å si at funksjonen er diskontinuerlig da de ensidige grenseverdiene åpenbart vil være forskjellige dersom man antar at funksjonen er definert på $\mathbb{R}$, men det er ikke nødvendigvis slik at funksjonen *ikke* gjør et sprang selv om det ikke er synlig ut ifra det grafiske bildet (figur 5.5).



(a) For dette grafiske bilde av $j(x)$, kan det virke som funksjonen er kontinuerlig på $\mathbb{R}$

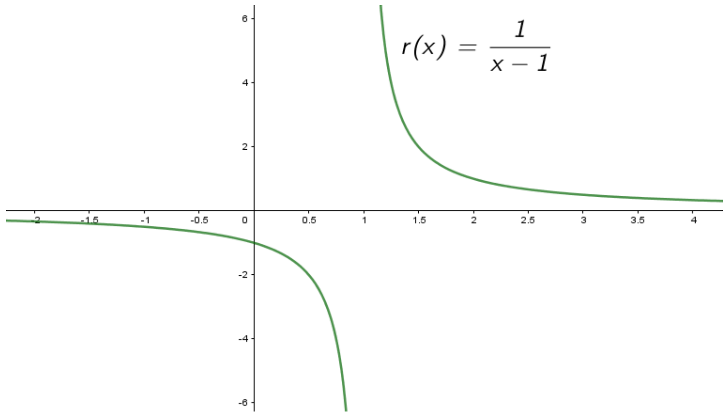


(b) Ved å forstørre grafen kan vi se at $j(x)$ gjør et sprang når $x = 0.1$

Figur 5.5: Funksjonen $j(x) = \begin{cases} x^2 + 0.1, & x > 0.1 \\ x^2 + 0.11, & x \leq 0.1 \end{cases}$ er diskontinuerlig på $\mathbb{R}$

Rasjonale funksjoner er definert for alle verdier der neveren ikke er null. Slike funksjoner vil være kontinuerlige på hele denne mengden og dermed omtales som kontinuerlige funksjoner. Funksjonen $h(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ (figur 5.3) har en diskontinuitet for $x = 1$. Hvis $h(x)$ skal skisseres skal den ikke tegnes sammenhengende, men det er likevel ikke mulig å skille grafen til $h(x)$ og funksjonen $(x+1)$ fra hverandre. Dette er fordi $\lim_{x \to 1} h(x) = 2$ og funksjonen kan kontinuerlig utvides ved å definere $h(1) = 2$.

Funksjonen $r(x) = 1/(x - 1)$ (figur 5.6) er et eksempel på en annen rasjonal funksjon som også har en diskontinuitet for $x = 1$. Denne funksjonen gjør derimot et "uendelig sprang" for $x = 1$ og kan derfor ikke kontinuerlig utvides på samme måte som h. Grafen til r kan åpenbart ikke skisseres av én sammenhengende linje, til tross for at funksjonen er kontinuerlig (fordi den ikke er definert på en sammenhengende mengde).



Figur 5.6: Eksempel på en rasjonal funksjon som er kontinuerlig, men som gjør et "uendelig sprang" for $x = 1$ og ikke kan tegnes sammenhengende.

Grafiske illustrasjoner er en representasjonsform som brukes for å bidra til en bedre forståelse av funksjonsbegrepet (Leinhardt et al., 1990). Ettersom grafene blir en vesentlig del av elevenes begrepsbilde, er det naturlig at denne representasjonsformen også brukes til innlæring av andre grenseverdi og kontinuitet. Det er riktignok nødvendig å være bevisst på de restriksjonene som et grafisk bilde har i forbindelse med funksjonsdrøfting.

5.2.2 Sammenhengende mengder og funksjoner

I avsnitt 3.4.1 gis et eksempel på hvordan 'sammenhengende' benyttes i én av lærebøkene. Min oppfatning er at ordet ofte blir brukt som et adjektiv og ikke som et matematisk begrep. Det brukes for å beskrive en graf som er kontinuerlig og det etterlates dermed til eleven å gi ordet mening. Dette vil få konsekvenser for elevene når de på et senere tidspunkt skal lære om *begrepet* sammenhengende. Det kan være at elevene har skapt et individuelt begrepsbilde for hva 'sammenhengende' betyr som ikke vil samsvare med begrepsdefinisjonen.

Definisjonen av sammenhengende funksjoner krever at man bruker både ekstremalverdisetningen og skjæringssetningen og det kan derfor ikke forventes at man skal begi seg inn på dette i videregående skole. Hvis ordet likevel skal benyttes, bør relasjonen mellom 'sammenhengende' og 'kontinuerlige funksjoner' presiseres. Det vil kunne være korrekt å si at en funksjon har en sammenhengende graf *dersom* den er kontinuerlig på en delmengde av $\mathbb{R}$, nettopp fordi $\mathbb{R}$ er en sammenhengende mengde. På en annen side vil en diskontinuerlig funksjon *ikke* ha en sammenhengende graf og 'at en funksjon er kontinuerlig' betyr ikke nødvendigvis at grafen består av én sammenhengende kurve:

$$\begin{aligned}
\text{grafen er sammenhengende} &\Rightarrow \text{funksjonen er kontinuerlig} \\
\text{funksjonen er ikke kontinuerlig} &\Rightarrow \text{grafen er ikke sammenhengende} \\
\text{funksjonen er kontinuerlig} &\not\Rightarrow \text{grafen er sammenhengende}
\end{aligned}$$

Elever vil kunne få en oppfatning av at en "funksjon er kontinuerlig" er ekvivalent med at "*hele* grafen kan tegnes uten å løfte blyanten" så lenge 'sammenhengende' blir brukt på en upresis måte. Hvis lærebøkene skal trekke sammenhenger mellom kontinuerlige funksjoner og funksjoner som kan tegnes "uten å løfte blyanten", er det derfor nødvendig at elevene også har forståelse av egenskapene til ulike tallmengder. Denne sammenhengen gjelder kun dersom det er snakk om kontinuitet over en sammenhengende mengde.

5.3 Matematisk resonnering

Det er tidligere presentert ulike kategorier for hva som betegner resonnering i matematikk (figur 2.1). Memorerende og algoritmisk resonnering er to former for imitativ resonnering og handler om at eleven evner å reprodusere et fullstendig svar eller en løsningssekvens. Kreativ resonnering handler om at eleven med utgangspunkt i egenskapene til begrepene, klarer å konstruere en løsningssekvens som er tilpasset de forutsetningene som er gitt i oppgaven.

5.3.1 Imitativ resonnering

Flertallet av oppgavene som blir gitt i lærebøkene i studien er av typen AR. Oppgavene faller ofte innenfor denne kategorien, fordi det i forkant presenteres et eksempel som tar for seg en tilsvarende oppgave som elevene kan imitere. Selv om det også er en del LCR oppgaver, består de fleste stegene i løsningsprosessen for disse likevel i å imitere en tidligere gitt algoritme. Denne typen oppgaver kan bidra til å internalisere begrepene, men det er ikke nødvendigvis uproblematisk. En potensiell utfordring med at elevene møter mange slike oppgaver, er at de etter hvert kan bli så vant med å bruke fremgangsmåten i tidligere eksempler at de ikke resonnerer på egenhånd.

La oss se på en funksjon som kan illustrere dette:

Avgjør om funksjonen f er deriverbar for $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \leq 4 \\ \frac{x^2}{4}, & x > 4 \end{cases}$$

For mange vil det ikke være åpenbart at denne funksjonen er diskontinuerlig for $x = 4$. Dersom man bruker fremgangsmåten gitt i Matematikk R1, Eksempel 18 (figur 4.9) som utgangspunkt for resonneringen, ville det vært mulig å konkludere at funksjonen er deriverbar for $x = 4$ på følgende måte:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(2(4+\Delta x)+4) - (8+4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\
&= 2 \\
\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\frac{(4+\Delta x)^2}{4}) - (\frac{4^2}{4})}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} (2 + \Delta x) \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x}$$

Ettersom de ensidige grenseverdiene er like er $f(x)$ deriverbar for $x = 4$

Feilen i dette resonnementet er at $f(4) = 12$, uavhengig av om $\Delta x \to 0^+$ eller $\Delta x \to 0^-$ og ville ikke oppstått dersom eksempelet først hadde evaluert kontinuitet i delingspunktet. En elev som gjentatte ganger oppnår korrekt resultat ved bruk av algoritmisk resonnering, vil heller ikke nødvendigvis klare å se problemet i dette resonnementet. Dersom elevene venner seg til at oppgavene som regel kan løses med

AR, risikerer man å miste refleksjonen for hvilke matematiske egenskaper som gjør fremgangsmåten og resonnementet gyldig.

Det er viktig at elevene lærer seg å beherske de nødvendige regneteknikkene som behøves for å være i stand til å løse oppgaver selvstendig. Det er derfor nødvendig å gi oppgaver som gir elevene øvelse i nettopp dette og det vil kunne være gunstig å gi oppgaver tilsvarende dem som er kategorisert som AR. Slike oppgaver har ofte mange likhetstrekk og gir derfor elevene mulighet til å repetere og oppleve mestring.

AR oppgaver gir også elevene mulighet til raskt å løse oppgaver på egenhånd, ettersom eksemplene kan bistå dem som "står fast". Chatterley & Peck (1995) påpeker derimot et problem som kan oppstå med denne typen innlæring. Dersom elever ikke får mulighet til å streve med oppgaver og i stedet for blir presentert løsningsalgoritmer de ikke forstår gyldigheten av, kan det forhindre utviklingen av en konseptuell begrepsforståelse. Basert på liknende argumenter mener Lithner (2008) at elevene på sikt ikke er tjent med å arbeide med oppgaver av denne typen og at disse oppgavene ikke bidrar til å utvikle elevenes ferdigheter i problemløsning.

5.3.2 Kreativ resonnering

Størsteparten av oppgavene som gis i lærebøkene krever at elevene bare gir et kort svar på problemet og bare omlag 5 % av oppgavene i hver av bøkene ber elevene begrunne svaret eller fremgangsmåten. For å oppnå bevissthet til resonneringen i løsningsprosessen, bør det etableres forventinger om at elevene skal være i stand til å begrunne valg av fremgangsmåte. Begrunnelsene man skal forvente bør også ikke være "fordi det var slik det ble gjort i eksempelet", men baseres på *hva* eleven er opptatt av å finne ut av og *hvorfor* fremgangsmåten bidrar til å oppnå dette.

Ved å lære elevene hvordan de kan bruke begrepsegenskapene til å trekke konklusjoner, vil de ikke lenger i like stor grad behøve å huske hvilken matematisk formel eller fremgangsmåte som er nødvendig for å løse en oppgave. Dette kan gjøres ved å sette fokus på *hvorfor* egenskapene brukes, i stedet for *hvordan* algoritmene skal utføres.

Dersom elevene skal få erfaring i å utforme egne resonnementer for å løse problemer, bør undervisningen (og derfor også lærebøkene) legge til rette for dette. Da vil det kunne være hensiktsmessig å ha en større andel oppgaver av typen GCR, som krever at elevene må kjenne til begrepenes egenskaper og implementere dem på en korrekt måte i resonneringen. Dette betyr likevel ikke at lærebøkene nødvendigvis bare skal inneholde oppgaver av denne typen. I stedet kan innholdet presenteres på en slik måte at elevene selv får mulighet til å utforske begrepene. Da vil elevene få anledning til å utarbeide egne, fleksible løsningsstrategier, som de vil være kunne være i stand til å akkomodere nye situasjoner og ukjente oppgaver.

5.3.3 Bevisrelatert resonnering

Hvis en elev er i stand til å argumentere for påstander ved bruk av begrepsdefinisjoner, vil det kunne tyde på at han eller hun har tilegnet seg tilstrekkelig begrepsforståelse og evner å kommunisere dette på en god måte (Stylianides, 2008). I motsetning til å kunne reprodusere en definisjon, som ikke nødvendigvis medfører at eleven forstår innholdet, vil anvendelse av en definisjon kreve at innholdet er forstått og at eleven behersker å tilpasse den til nye situasjoner.

Å gjennomføre matematiske bevis og komme med moteksempler er utfordrende og det viser seg at studenter ikke har tilstrekkelig kunnskap knyttet til det å produsere matematiske bevis og motbevis (Ko & Knuth, 2009). Det gis et generelt bevis til bare 24 % av egenskapene som presenteres, og elevene er dermed i større grad avhengig av læreren for å få kjennskap til matematiske bevis. Disse funnene samsvarer med resultatene i studien til Ko & Knuth (2009).

Forskere argumenterer for at enkelte matematikklærere i større grad fokuserer på formalitetene i bevisene, framfor studentenes matematiske tankegang (Ko & Knuth, 2009). Fischbein (1982) påpeker at det er nødvendig å ta hensyn til elevenes intuitive forståelse av bevis, dersom man ønsker en forbedret matematisk forståelse. Det argumenteres også for at ved å fokusere på individuelle feilslutninger, i stedet for å henvise til en korrekt fremgangsmåte, vil bidra til å forbedre studentenes matematiske resonneringsevner (Ko & Knuth, 2009). Ansvaret for dette faller dermed på læreren, men krever at han eller hun må ha tilstrekkelig kunnskap for å være i stand til å oppdage eventuelle feil i logiske resonnement.

Et alternativ til formelle bevis vil kunne være å bruke generiske eksempler for å lære elevene om hvordan bevisene er strukturert. På den måten vil elevene få muligheten til å få erfaring med flere beviser, uten de strenge kravene til tegnsetting og generalisering. På den måten vil de kunne utvikle strategier for resonnering som vil kunne overføres til andre matematiske fagområder. Konkurransen som ble presentert i kapittel 5.1.1 vil kunne tilpasses til å brukes som et generisk eksempel for kontinuitetsbegrepet.

Kapittel 6

Konklusjon

For å undersøke hvordan lærebøkene bidrar til at elever får en korrekt matematisk forståelse av kontinuitetsbegrepet, har denne studien forsøkt å svare på følgende tre forskningsspørsmål:

- Hvordan bidrar innholdet i lærebøkene til å styrke elevenes matematiske forståelse av kontinuitetsbegrepet?
- Hvilken betydning har lærebøkers presentasjon av kontinuitetsbegrepet for utviklingen av elevenes begrepsbilde?
- I hvilken grad bidrar lærebøker i matematikk til at elever får erfaring med matematisk resonnering?

I de siste avsnittene vil jeg først forsøke å oppsummere de viktigste funnene fra studien i lys av forskningsspørsmålene. Deretter vil jeg komme med noen implikasjoner for fremtidige lærebøker og avslutningsvis komme med forslag til hva som vil være interessant å studere videre.

6.1 Oppsummering

I løpet av studien har det kommet frem at lærebøkene introduserer kontinuitet ved bruk av metaforer som kan relateres til 'naturlig kontinuitet', uten å ta i bruk den formelle definisjonen. Dette vil føre til at elever ikke vil være i stand til å definere begrepet på en presis måte og kan påvirke elevers oppfatning av matematikk som et veldefinert fag. Dersom det presiseres at definisjonen som tar utgangspunkt i grenseverdi er en *uformell definisjon*, vil man kunne forhindre det siste. Alternativ vil det å introdusere ε - δ definisjonen både kunne gjøre overgangen til universitetsmatematikk mindre, i tillegg til at elevene vil få mulighet til å få en bedre begrepsforståelse. Det kan riktignok ikke forventes at elever i denne aldersgruppen skal være i stand til å reprodusere definisjonen og bruke den i egne bevis. Dersom ε-δ definisjonen introduseres bør det gjøres for å underbygge den intuitive tilnærmingen til kontinuitetsbegrepet.

Tidligere studier har avdekket at studenter har manglende begrepsforståelse av kontinuitet og det antydes at dette skyldes et begrepsbilde som ikke samsvarer med begrepsdefinisjonen. For eksempel kan "sammenhengende graf" ende opp med å bli ekvivalent med "funksjonen er kontinuerlig". Fordi 'sammenhengende' er et ord som brukes i dagligspråket vil det kunne være naturlig at dette ordet assosieres med kontinuerlige funksjoner. Når lærebøker bruker 'sammenhengende' for å beskrive kontinuerlige funksjoner, og ikke som et matematisk begrep, forsterkes denne assosiasjonen. Dette kan resultere i at elevene ender opp med å tolke betydningen av ordet på egenhånd. En upresis forståelse av 'sammenhengende‘ vil medføre at begrepet ikke benyttes korrekt og kunne gjøre det vanskeligere å lære på et senere tidspunkt.

Fordi grenseverdi blir brukt til å definere kontinuitet vil forståelsen av disse begrepene henge sammen. I tillegg til en manglende forståelse av grenseverdibegrepet kan utfordringene elevene har til kontinuitets-begrepet også være på grunn av et ukorrekt begrepsbilde av funksjoner. Manglende begrepsforståelse vil være en årsak til misoppfatninger og det kan i etterkant kunne være utfordrende å endre et etablert begrepsbilde. Derfor er det viktig at den som underviser er bevisst på konsekvenser av å gi upresise definisjoner. Det er også viktig at læreren har tilstrekkelig matematisk kompetanse slik at han eller hun har mulighet til å være kritisk til formuleringene i lærebøkene.

Å være i stand til å løse oppgaver selvstendig og begrunne strategivalg krever at elevene har en god begrepsforståelse. Graden av forståelse vil derfor være en forutsetning for elevenes muligheter til å gjennomføre matematiske resonnement. Selv om det er ønskelig at elevene skal utvikle kreative re-sonneringsevner, vil også oppgaver som krever imitativ resonnering bidra positivt med tanke på å øke elevenes begrepsforståelse. Oppgaver som krever algoritmisk resonnering vil bidra til å internalisere begrepene og er derfor viktig i dette stadiet av begrepsutviklingen.

Det er viktig at det legges til rette for at elevene får mulighet til å utvikle egne løsningsstrategier. For å få til dette kan det gis oppgaver som krever at elevene må ta utgangspunkt i egenskapene til begrepene som inngår i oppgaven. I lærebøkene som er studert blir en stor del av oppgavene gitt rett etter et eksempel som beskriver løsningsstrategien. Denne typen oppgaver gir elevene mulighet til å se hvordan de skal gjennomføre beregningene, men ikke nødvendigvis hvorfor argumentene er gyldige.

Dersom kompetansemålene blir stående slik de er formulert i forslaget til den nye læreplanen, vil det kunne være hensiktsmessig å introdusere ε-δ definisjonen. Denne definisjonen vil være svært nyttig for elever som skal argumentere for om en funksjon er kontinuerlig i et punkt i definisjonsområdet. Dette kan riktignok gjøres ved bruk av den uformelle definisjonen, men krever da en forståelse av grenseverdibegrepet. For at elevene skal klare dette kompetansemålet uten å være avhengig av et annet kompetansemål vil ε-δ definisjonen være nødvendig.

6.2 Implikasjoner for fremtidige lærebøker

Med stadig større tilgang på digitale verktøy, kommer også nye muligheter til å ta i bruk dynamiske simuleringer i ulike læringsituasjoner. Bruk av dette vil også kunne være med på å gi en bedre forståelse av grenseverdi og kontinuitetsbegrepet fordi elevene vil få mulighet til å forstørre grafikkfeltet omkring punktet under inspeksjon. Dersom lærebøker på et tidspunkt blir digitale, vil de kunne legge til rette for at elevene kan utforske funksjoner og egenskaper på en måte som trykte lærebøker ikke gir muligheten til.

Ettersom det kommer ny læreplan, vil lærebøkene måtte tilpasses nye kompetansemål og ny overordnet del. Likevel har det tidligere vært slik at innholdet i nye lærebøker i stor grad påvirkes av de allerede eksisterende lærebøkene, blant annet fordi en fullstendig omskriving er en omstendelig prosess (How-son, 2013). Ved å inkludere flere matematiske bevis eller generiske eksempler vil læreren også få en enklere tilgang på disse. Det kan videre øke sannsynligheten for at dette blir inkludert i undervisningen slik at elevene får større erfaring med denne delen av matematikken. Dersom lærebøkene skal stimulere elever til å utvikle matematisk resonnering, bør de også eksponere elevene for oppgaver som bidrar til dette. Det kan gjøres ved å stille forventninger til at elevene alltid skal kunne argumentere for valg og løsningsstrategier.

Slik situasjonen er i dag har forlagene og lærebokforfatterne stor påvirkning for hva som undervises i skolen. Det er derfor viktig at nye bøker tar hensyn til de utfordringene elevene har for forståelse av ulike begreper. Dersom lærebøkene skal tilfredsstille den nye læreplanen som trer i kraft i 2020, bør det også foretas en vurdering om oppgavene, i større grad enn tidligere, skal være av typen ‘kreativ resonnerende'. Da vil elevene videre ha mulighet til å opparbeide seg egne løsningsstrategier som vil kunne gi en større fleksibilitet når eleven skal arbeide med nye oppgaver.

6.3 Tanker om videre studier

Det finnes allerede studier som analyserer matematiske oppgaver med ulike teoretiske tilnærminger (Stein et al., 1996; Bergqvist, 2007), men jeg har foreløpig ikke funnet dette gjennomført systematisk på norske lærebøker. Det vil innenfor dette området kunne være av interesse blant annet å studere hvordan oppgavene i lærebøkene endres når nye læreplaner tas i bruk.

En annen tilnærming som vil være interessant, er sammenlikning av ulike innføringsbøker i Kalkulus eller bøker i reell analyse. Det er gjort få studier på lærebøkene som benyttes etter videregående utdanning, men det er et viktig felt fordi det har betydning for forståelsen til fremtidige lærere i matematikk.

Det er ikke utelukkende lærebøkene som har betydning for elevenes begrepsutvikling. Derfor ville det vært interessant å gjennomføre en longitudinell studie for å undersøke om hvordan ulike undervisningsmåter påvirker elevenes matematiske forståelse. Da ville det samtidig være mulig å tallfeste hvordan arbeid med ulike oppgavetyper spiller inn på elevenes langtidsminne.

Avslutningsvis vil det kunne være interessant å undersøke hvilke forventinger universiteter og høgskoler har til matematikkstudenter. Om forventingene ikke samsvarer med forutsetningene elevene får i videregående skole, bør det vurderes om det må skje en endring i en av institusjonene.

Referanser

Adams, R.A. & Essex, R. (2013). *Calculus : a complete course* (8. utg.). Toronto: Pearson.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216-235.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 348 - 370. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Bowen, G.A. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, *9*(2), 27–40. doi: 10.3316/QRJ0902027

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5. utg.). Oxford: Oxford University Press.

Charalambous, C.Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117-151. doi: 10.1080/10986060903460070

Chatterley, L.J. & Peck, D.M. (1995). We're crippling our kids with kindness!! *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(4), 429 - 436. doi: 10.1016/0732-3123(95)90041-1

Creswell, J.W. & Plano Clark, V.L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2. utg.). Los Angeles: Sage.

Dawkins, P. (2012). Metaphor as a possible pathway to more formal understanding of the definition of sequence convergence. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 331–343. doi: 10.1016/j.jmathb.2012.02.002

Dovland, O.G. & Pettersen, P. (u.å.). *Real numbers in action.*

Drijvers, P. (2010). *Secondary algebra education*. Springer Verlag.

Fan, L. (2011). *Textbook research as scientific research: Towards a common ground for research on mathematics textbooks.* Hentet fra `https://eprints.soton.ac.uk/201715/`

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633–646. doi: 10.1007/s11858-013-0539-x

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–24. Hentet fra `http://www.jstor.org/stable/40248127`

Grevholm, B. (2017). *Mathematics textbooks, their content, use and influences : Research in Nordic and Baltic countries.* Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H. & Borgan, Ø. (2015). *Matematikk R1* (Bokmål[utg.], 2. utg.). Oslo: Aschehoug.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, *2*, 1–27.

Howson, G. (2013). The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective. *ZDM*, *45*(5), 647–658. doi: 10.1007/s11858-013-0511-9

Hustad, O. (1982). *Hovedfagsforelesninger i kompleks funksjonsteori.* Oslo: Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Hentet fra `https://www.mn.uio.no/math/tjenester/kunnskap/kompendier/75nm02217.pdf`

Jamieson-Proctor, R. & Byrne, C. (2008). Primary teachers' beliefs about the use of mathematics textbooks. I *Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA31)* (s. 295–302). Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 407-431. doi: 10.1207/s15327833mtl0804_3

Juter, K. (2011). University students linking limits, derivatives, integrals and continuity. I *Proceedings of the seventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (s. 2043–2052). Hentet fra `http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hkr:diva-17800`

Juter, K. (2017). University students' understandings of concept relations and preferred representations of continuity and differentiability. I *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1 – 5, 2017).* Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME. Hentet fra `http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hkr:diva-17089`

Ko, Y.-Y. & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 68 - 77. doi: 10.1016/j.jmathb.2009.04.005

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1–64. Hentet fra `http://www.jstor.org/stable/1170224`

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom–the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 129–156.

Leron, U. & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving: Reflections on scope and method. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 24–30. Hentet fra `http://www.jstor.org/stable/43894858`

Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in american and chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 234–241. Hentet fra `http://www.jstor.org/stable/749754`

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning.* Citeseer. Hentet fra `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.466.7119&rep=rep1&type=pdf`

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255–276. doi: 10.1007/s10649-007-9104-2

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277–289. Hentet fra `http://www.jstor.org/stable/3482181`

Núñez, R.E., Edwards, L.D. & Filipe Matos, J. (1999, 01. Jun). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1), 45–65. doi: 10.1023/A:1003759711966

Oldervoll, T., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2018). *Sinus matematikk : R1 : lærebok i matematikk : studiespesialiserende program* (Bokmål[utg.], 3. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Reid, D. & Vallejo Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving*, 239-251. Hentet fra `https://edumat.uab.cat/Diseo/Balacheff.pdf` doi: 10.1007/978-3-319-70996-3_17

Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. I G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (red.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (s. 231–245). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-007-1966-8_12

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. doi: 10.1007/BF00302715

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20–26.

Slavit, D. (1997). An Alternate Route to the Reification of Function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 259–281. doi: 10.1023/A:1002937032215

Stacey, K. & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 271–288. doi: 10.1007/s10649-009-9193-1

Stein, M.K., Grover, B.W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488. doi: 10.3102/00028312033002455

Stylianides, G.J. (2008). Investigating the Guidance Offered to Teachers in Curriculum Materials: The Case of Proof in Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(1), 191–215. doi: 10.1007/s10763-007-9074-y

Stylianides, G.J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288. doi: 10.1080/10986060903253954

Svingen, O. & Gilje, Ø. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk.* Utdanningsdirektoratet. Hentet fra `https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf`

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. doi: 10.1007/BF00305619

Thompson, D.R., Senk, S.L. & Johnson, G.J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253–295. doi: 10.5951/jresematheduc.43.3.0253

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering.* (MAT3-01). Hentet fra `http://data.udir.no/kl06/MAT3-01.pdf`

Utdanningsdirektoratet. (2019, 18. mars). *Høringsbrev for Læreplan i matematikk programfag for realfag.* Hentet fra `https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=710`

Waagene, E. & Gjerustad, C. (2015). *Valg og bruk av læremidler: Innledende analyser av en spørreundersøkelse til lærere.* NIFU. Hentet fra `http://hdl.handle.net/11250/297862`