UNIVERSITETET I AGDER

En designstudie av rike oppgaver med utgangspunkt i autentiske broer i Agder

MARTIN SLETTEN

VEILEDER
Pauline Vos

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Temaet for denne oppgaven er et område jeg har stor interesse for og det er et område jeg opplever som positivt for mine elever. Jeg har undervist i matematikk i mange år, og jeg kan se hvordan spesielt svake elever profitterer på en praktisk tilnærming til matematikken. Fagene jeg har tatt i masterstudiet har underbygget og forsterket mine holdninger med teori og forskning på området. Det har vært en lærerik prosess og jeg har som lærer blitt oppdatert på en helt annen måte enn jeg hadde ventet meg. Jeg har lært mye fra tidligere forskning innenfor dette temaet, som opptar både meg og mine kollegaer, slik at jeg har fått mer tyngde og kunnskap innenfor feltet. Dette har vært utrolig gøy, og dette er absolutt noe jeg vil jobbe videre med.

Gjennom det siste året har jeg fått hjelp i varierende grad av gode mennesker rundt meg og disse fortjener en stor takk. En spesiell takk til venner, kolleger og studiekamerater som har stilt opp som prøvekaniner, og som norsklærer for en språk vill matematiker. Dere har gjort et stort bidrag til kvaliteten på denne oppgaven. Min arbeidsgiver har lagt til rette for mitt studieløp i 4 år på en eksemplarisk måte, dere har gjort det veldig enkelt for meg å kombinere jobb og studier. Dette er både jeg og min familie svært takknemlige for.

Det største bidraget har likevel kommet fra min kone som gjennom mange og lange diskusjoner og faglige samtaler har bidratt med en faglig bredde og konkrete momenter som har hjulpet meg i viktige veivalg underveis. Jeg vil også takke for at du har prioritert mine studier i hverdagen og støttet meg i denne perioden.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til min veileder, professor Pauline Vos. Ditt profesjonelle engasjement, din direkte væremåte og din visjonære tankegang har vært med på å forme denne oppgaven. Ved å stille tydelige krav og innspill så har du bidratt til at denne skriveprosessen har vært en god opplevelse uten motbakker.

Kristiansand, mai 2019

Martin Sletten

Sammendrag

Denne masteroppgaven beskriver en studie om det å designe matematiske oppgaver, med utgangspunkt i autentiske broer, i Agder-regionen. Formålet med studien var å designe klasseromsoppgaver, som krever at elevene skal bruke alle aspekter av sin matematisk kompetanse (forklart nedenfor). Studiens empiriske grunnlag var en klasserombasert gjennomføring av oppgavene jeg har designet for å vurdere hvilke matematisk ferdigheter videregående elevene brukte når de løste disse.

Som matematikklærer følger jeg dagens nasjonale læreplan. I 2020 vil det komme en ny nasjonal læreplan, som beskriver et sett med kjerneelementer (Utdanningsdirektoratet, 2018b). Disse samsvarer med de fem trådene, som hver representerer en matematisk ferdighet, av matematisk kompetanse som beskrevet av Kilpatrick, Swafford og Findell (2001). De fem ferdighetene er konseptuell forståelse, regneferdighet, strategisk kompetanse, resonnementsforståelse og engasjement. Denne sammenhengen gjør denne studien veldig relevant for fremtidige lærere, og kan være til inspirasjon og motivasjon for andre med sikte på praktisk bruk og videre forskning.

Det teoretiske kapittelet fokuserer på elevenes matematiske ferdigheter og hvilke teorier som støtter mitt studie. Kilpatrick et al. (2001) sin beskrivelse av matematisk ferdighet ved hjelp av fem kompetanser danner bakteppet for denne oppgaven. I dette kapitlet definerer jeg hvordan "matematisk ferdighet" består av fem tråder som er gjensidig avhengige av hverandre og hvordan utviklingen av matematiske ferdigheter avhenger av utviklingen til hver tråd.

Metoden som er brukt i denne studien er designforskning. Dette er en ung forskningsmetode, som ikke (ennå) er beskrevet i håndbøkene om forskningsmetoder. Ved behov supplerte jeg med elementer fra aksjonsforskning. I designforskning er det tre faser: den foreløpige forskningen, utviklingsfasen og evalueringsfasen. I den foreløpige forskningen orienterte jeg meg i litteraturen, og jeg lagde en oversikt over aktuelle broer i min region. I utviklingsfasen begynte jeg med syv broer og utviklet oppgaver til disse, jeg testet i tre forskjellige gjennomføringer (med venner, kolleger osv.), for så å videreutvikle hver av oppgavene. Til slutt valgte jeg tre matematiske modelleringsoppgaver basert på autentiske broer, som skulle brukes i en klassesituasjon med to videregående skoleelever. I denne evalueringsfasen, også kalt hovedstudien, jobbet studentene sammen for å løse de tre matematiske modelleringsoppgavene, som hadde utgangspunkt i autentiske broer fra lokalområdet. Jeg observerte studentene og tok feltnotater og lydopptak, som jeg senere analyserte. Fra transkripsjonene analyserte jeg elevenes aktivitet, og kategorisert hvert utsagn innenfor den matematisk ferdigheten som passer best. Jeg organiserte så dette arbeidet i en tabell for å få en visuell oversikt over hvilke ferdigheter som ble brukt når i oppgaveløsingen. Resultatet viser at det er behov for alle de fem ferdighetene i hver av de tre oppgavene.

Mine resultater viser at vi kan designe rike oppgaver, som tar utgangspunkt i objekter fra nærområdet, og som utfordrer alle trådene i elevenes matematiske ferdigheter. Det å designe slike oppgaver er en tidkrevende prosess som krever flere runder med testing og forbedring. Elever som jobber med slike oppgaver, vil utvikle fleksible matematikkferdigheter som er nyttige i hverdagen.

Abstract

This master’s thesis describes a study about designing mathematical tasks, starting from authentic bridges in the Agder region. The aim of the study was to design classroom tasks, which require pupils to employ all aspects of their mathematical proficiency (explained below). The empirical basis of the study was a classroom-based implementation of the tasks to evaluate what aspects of mathematical proficiency the high school pupils used when solving the tasks.

As a mathematics teacher, I follow the current national curriculum. In 2020, there will come a new national curriculum, which describes new core elements (Utdanningsdirektoratet, 2018b). These correspond with the five strands of mathematical proficiency as described by Kilpatrick, Swafford and Findell (2001), these five strands are conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning and productive disposition. This connection makes the study I have conducted, very relevant for future teachers and can be for inspiration and motivation for others with a view to practical use and further research.

The theoretical chapter focuses on pupils' mathematical proficiency and which theories that support my study. The five strands of mathematical proficiency as described by Kilpatrick et al. (2001) are the backdrop to this thesis. In this chapter, I define how "mathematical proficiency" consists of five strands that are mutually dependent on each other and how the development of mathematical proficiency depends on the development of each strand.

The method in this study is Design Research. This is a young research method, which is not (yet) described in the handbooks on research methods. When necessary, I picked elements from action research as supplement. In Design Research, we recognize three phases: the preliminary research, the development phase, and the evaluation phase. In the preliminary research, I made an orientation of the literature and I made an inventory of the beautiful bridges in our region. In the development phase, I started from seven bridges and developed tasks, which I tested in three different rounds (with friends, colleagues, etc.), and then re-developed. In the end, I had three mathematical modelling tasks based on authentic bridges, to take into a classroom situation with two high school pupils.
In this evaluation phase, the main study, the group of students worked together to solve the three mathematical modelling tasks about authentic bridges from the local area. I observed the students and took field notes and sound recordings, which I later analysed. From the transcripts, I analysed the pupils’ activities, and into which strand of mathematical proficiency these fitted. I have produced the analysis in a table, to give a visual overview of the strands of mathematical proficiency being used in the solution process. The result show that, for each of the tasks, aspects of all five strands were needed when the group solved the task.

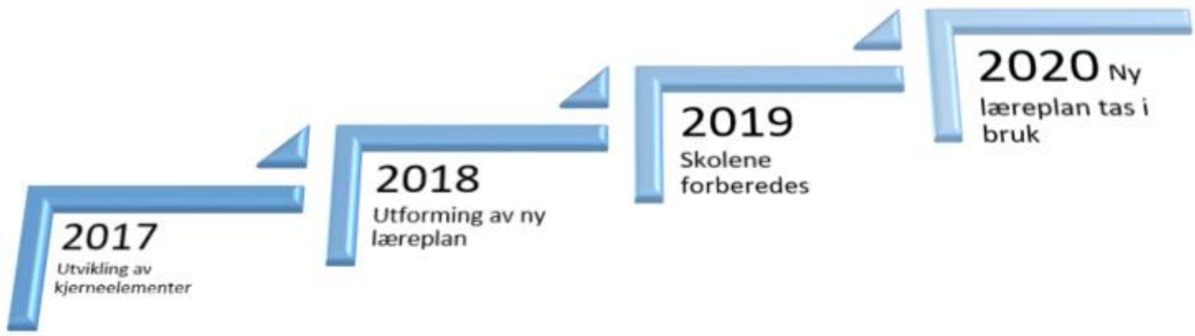
My results show that we can design rich tasks, which start from elements in the local area, and which require students to employ all strands of mathematical proficiency. The design of these tasks is not straightforward but requires several rounds of testing and improving. Students, who work on such tasks, will develop flexible mathematics skills that are useful in everyday life.

Innhold

1 Innledning

1.1 Tema og bakgrunn

Jeg har jobbet som lærer i 10 år, da hovedsakelig med ungdomsskoleelever. Gjennom denne tiden har jeg endret min personlige utførelse av lærergjerningen. Der jeg i starten fulgte bokens progresjon og jobbet mye med standardiserte oppgaver hentet fra bøker, har jeg nå beveget meg mer og mer over mot utradisjonelle oppgaver. Når jeg tar for meg et nytt tema, dykker jeg ned i kompetansemålene og har det som utgangspunkt, for så å hente inspirasjon fra utallige kilder, være seg kollegaer, internett, bøker eller egenproduserte oppgaver. Der jeg tidligere jobbet mot innlæring av standardiserte regneoperasjoner og prosedyrer har jeg nå et større fokus på konsepter og forståelsen av disse. Jeg bruker utforskende oppgaver i større grad hvor eleven selv må velge metode og framgangsmåte for å løse det aktuelle problemet. Min personlige motivasjon for å gjennomføre denne studien støttes i stor grad av forskning og trender innen pedagogikken. Jeg ønsker å eksperimentere med ulike oppgavetyper som ikke følger gitte mønstre og retningslinjer. Det å designe oppgaver som gir elevene opplevelsen av å løse virkelighetsnære problemer er spesielt givende og er mye av drivkraften for meg som lærer.



Figur 1 Fagfornyelsen 2020

Regjeringen kom med en pressemelding i juni 2018 hvor de informerte om at de skal fornye innholdet i skolen gjennom en ny læreplan (Regjeringen.no, 2018). Lærerplanen er et styringsdokument som legger tydelige føringer for hvordan en lærers arbeid skal utføres og hvilke matematiske ferdigheter det er forventet at elevene har etter endt skolegang. Dette påvirker meg som lærer i så stor grad at jeg tenker det er vesentlig å ta hensyn til den nye lærerplanen når jeg nå skal forske på elever og læring. Arbeidet med den nye læreplanen vil fortsette fram mot sommeren 2019 hvorpå arbeidet med å implementere denne i skolen vil skje skoleåret 2020/2021 (figur 1). Høsten 2018 ble det holdt en høringsrunde under arbeidet med å utforme hovedmål i de forskjellige fagene. I matematikkfaget presenterte de i denne forbindelse seks kjerneelementer som Utdanningsdirektoratet senere på høsten utbroderte ytterligere og ga innhold. Disse seks kjerneelementene i matematikk ses på som det viktigste og mest sentrale elevene skal lære i faget (Utdanningsdirektoratet, 2018b). De seks kjerneelementene er;

- Utforskning og problemløsning
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

I mars 2019 sendes forslag til nye lærerplaner i grunnskole og gjennomgående fag på videregående skole på høring (Regjeringen.no, 2019). De seks kjerneelementene nevnt over er fortsatt å regne som grunnmuren i den nye fagplanen for matematikkfaget. På grunn av UDIR sin interesse rundt disse ferdighetene, er det interessant å se hva som kjennetegner disse elementene og hvordan man kan observere de ved å studere utvalgte elever.

> *Dypere innsikt utvikles når elevene ser sammenhenger mellom kunnskapsområder, og når de behersker et mangfold av strategier for å tilegne seg, dele og forholde seg kritisk til kunnskap.* (Utdanningsdirektoratet, 2018c)

I teorien trekkes det også fram spesifikke fordeler ved å mestre denne måten å jobbe på. Det å jobbe med matematiske modelleringsoppgaver skal hjelpe eleven å forstå verden på en bedre måte ved å se etter sammenhenger og koblinger på tvers av fagområder, blandet med elementer fra vår hverdag. Innenfor matematikkfaget så skal det ha en motiverende rolle og det skal hjelpe til å forme forståelsen av konsepter. Modelleringsoppgaver vil også være med på å skape fleksible matematiske ferdigheter hvor de kognitive koblingene hjelper oss å sjonglere mellom våre forskjellige kunnskaper. I 2011 skulle Tyskland danne en ny "Education standard", og da ble matematisk modellering en av seks kompetanseområder det skulle fokuseres på (Kaiser, Schwarz & Buchholtz, 2011). Allerede her kunne man se tendenser til at modellering skulle få større plass i matematikkfaget. Det har også vist seg at elever profiterer på oppgaver som utfordrer kreativiteten og hvor det ikke er gitt hvordan du skal arbeide med oppgaven. Fermi oppgaver (Bergman Ärlebäck, 2009), som er den typen modelleringsoppgave som har inspirert meg i denne studien, er utforskende oppgaver som har til hensikt å skape matematiske kompetanse som er fleksibel hos elevene. Dette er altså bakgrunnen for at jeg velger å skrive en oppgave som omfatter utvikling av modelleringsoppgaver.

I 2015 ble det utgitt en kalender i Münster i Tyskland hvor hver måned hadde et bilde av en bro. Tilhørende hver bro var det en modelleringsoppgave (figur 2).

Pauline Vos som er professor ved institutt for Matematiske fag på UiA har startet et prosjekt i Kristiansand som er inspirert av kalenderen i Münster. Hun og tre masterstudenter, meg inkludert, skal velge tre broer hver, og utvikle en oppgave til hver bro. Jeg har valgt å gjøre en designstudie for å lage oppgaver som skal tilfredsstille diverse kriterier jeg mener, med støtte i teori, skal legge grunnlag for gode oppgaver, der alle elever skal kunne oppleve mestring, samtidig som de blir utfordret på sine matematiske ferdigheter, og utvikler disse. Oppgavene bør være utformet med lav inngang og et høyt tak. Denne typen oppgaver blir omtalt som LiSt-oppgaver, dette står for «lav inngangsterksel, stor takhøyde» (Matematikksenteret). Oppgavene bør ha en lavest mulig inngang, samtidig som man kan fordype seg i oppgaven og ta inn mer kompliserte aspekt slik at oppgaven har et høyt tak. Dette vil da resultere i oppgaver hvor matematiske ferdigheter kan utfordres og utvikles.

For fremtidige lærere er det viktig å ha innblikk i hvordan elever på ulike nivåer forstår og tolker matematiske problemer, både ved hjelp av skriftlig og muntlig forståelse.

1.2 Problemstilling og avgrensing

Det er seks kjerneelementer (Utdanningsdirektoratet, 2018a) framtidens undervisning skal fokusere på i matematikkfaget, disse er veiledende når jeg skal designe og utvikle oppgaver til autentiske broer. Det viser seg også at disse samsvarer med trådene i Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) sin teori “Five Strands of Mathematical Proficiency". Jeg vil derfor ta utgangspunkt i denne teorien når jeg gjennomfører prosjektet mitt, som er et deduktivt forskningsprosjekt. Webb (1982) skriver om hvordan gruppearbeid påvirker elevers forståelse og evner i matematikk, jeg ser på dette som et viktig teoretiske ståstedet for å belyse hva gruppearbeidet gjør for elevenes utbytte. Derfor velger jeg å supplere Kilpatrick et al. (2001) sin teori med Webb (1982) sin teori om gruppearbeid og læring som skjer i samspillet mellom mennesker. Ut fra dette teoretiske perspektivet skal jeg lage oppgaver som baserer seg på deres ideer. I denne sammenhengen vil gode oppgaver være oppgaver som er matematisk korrekte og som stimulerer alle de fem matematiske ferdighetene Kilpatrick omtaler i sin teori, samtidig skal oppgavene være slik at elevene vil profitere på å samarbeide. Jeg skal undersøke følgende problemstilling:

"I hvilken grad kan jeg designe matematikkoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer i Agder, som utfordrer elevenes ferdigheter innenfor gruppearbeid (Webb, 1982) og hver av de fem komponentene i Kilpatrick et al (2001) sin definisjon av matematisk kompetanse (konseptuell forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse, resonnementsforståelse og engasjement)?"

1.3 Oppgavens oppbygging

I kapittel 2 vil jeg forklare det teoretiske grunnlaget som danner det faglige fundamentet for min oppgave. Ved hjelp av trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001) vil jeg forklare hvilke matematiske ferdigheter som må til for å få en stabil matematisk kompetanse, som er sammenhengen mellom disse ferdighetene. Jeg er ikke den første som skal forske på denne typen oppgaver, så jeg henter inspirasjon hos andre forskere når jeg skal se på hva som kjennetegner gode, utforskende oppgaver. Jeg vil se på forskjellige definisjoner, og deretter se det hele i lys av hva utdanningssektoren ønsker at undervisningen skal preges av (Kunnskapsdepartementet, 2016).

I kapittel 3 innleder jeg med å utdype hvilken metode jeg skal bruke i studien. Så følger det en beskrivelse av hvordan jeg designer modelleringsoppgaver som er ment å være relativt enkle i utformingen samtidig som de kan omfavne store fagområder om man har brede matematiske kunnskaper. Deretter skal en gruppe lærere/medstudenter samarbeide i oppgaveløsingen under min observasjon før jeg i neste omgang vil analysere hvordan de arbeidet med modelleringsoppgavene. Denne observasjonen vil fortelle meg om svakheter og forbedringspotensial i oppgavene slik at jeg kan justere de til det bedre før neste gjennomføring. Dette vil jeg gjøre tre ganger før jeg til slutt har et oppgavesett med tre oppgaver til bruk i hovedstudien. I hovedstudien skal jeg observere en liten gruppe elever som skal forsøke å løse oppgavene i fellesskap, hvorpå jeg i etterkant vil utføre en grundigere analyse av deres arbeid

I kapittel 4 har jeg analysert evalueringsfasen og dataene jeg har fra observasjonen. Jeg tar for meg en og en oppgave for så å trekke fram utsagn som viser bruk av forskjellige matematiske kompetanser. Jeg skal anvende Kilpatrick et al. (2001) sin "Five Strands" teori, senere omtalt som trådmodellen, som rammeverk for analysen med et lite tilskudd med tanke på det sosiale aspektet ved gruppearbeid og læring som skjer i mellommenneskelige relasjoner. Ved å se på hvordan elever anvender de forskjellige matematiske ferdighetene i oppgaveløsingen, ønsker jeg å finne konkrete kriterier og konkrete designmessige utforminger en godt designet oppgave bør oppfylle for å stimulere så mange ferdigheter som mulig. Jeg vil vurdere og diskutere elevenes matematiske ferdigheter og se om det er en sammenheng mellom ulike oppgavetyper og hvilke kriterier som er i hver oppgave.

En del av materialet fra analysen tar jeg med meg videre i kapittel 5 hvor jeg diskuterer hvorfor utsagnene antyder bruk av den aktuelle kompetansen. Her vil jeg også presentere diagrammene som visualiserer analysen og viser at alle de matematiske ferdighetene er i bruk når de jobber med mine matematiske modelleringsoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer i Agder.

I kapittel 6 oppsummerer jeg de fem foregående kapitlene og trekker en konklusjon hvor jeg besvarer mitt forskningsspørsmål. Jeg ser på hvordan min studie og dens resultater kan brukes i hverdagen til en lærer. Helt til slutt tar jeg et tilbakeblikk på prosessen jeg har vært gjennom og gjør noen refleksjoner over hvordan mine valg underveis, har påvirket helheten.

Glasbrücke des Landwirtschaftlichen Versicherungsvereins Münster (LVM) Foto: Heiner Witte, Münster View

Januar January

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

The building of the LVM-Insurances in Münster was finished in 2014, it has 17 floors and measures 63 meter. At the height of 40 meter, a glass bridge connects the new building to the old one. It is a 20 meter long steel construction, of which externally one can see only the 12 meter long glass bridge. The colleagues walking over the bridge should not be afraid of heights. Estimate how many square meters of glass they needed when building the bridge.

Foto: Andreas Wessendorf, WWU Münster, Arbeitsstelle Forschungstransfer

Figur 2 En av oppgavene fra kalenderen, Mattebroer i Mûnsterland, oppgaven er oversatt fra tysk til engelsk.

2 Teori

Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning. (Utdanningsdirektoratet, 2018c, s. 11)

Målet med å lage gode modelleringsoppgaver til autentiske broer, er at elevene skal få bred matematisk kompetanse. En oppgave er god dersom elevene gjennom arbeidet med oppgavene, utvikler en stabil og fleksibel matematisk kunnskap som kan anvendes i dagliglivet. I dette kapittelet vil jeg derfor se på hva matematisk kunnskap er, og hvordan elevene kan tilegne seg matematisk kunnskap gjennom undervisning og oppgaveløsing. Vi får en ny læreplan i 2020 som fremhever "dybdelæring" som essensielt for læring i framtidens skole, og jeg vil se på dette opp mot matematikkundervisning og oppgaveløsing.

For å kunne utvikle og designe gode oppgaver må jeg ha en formening om hva som gjør en oppgave god og ta et teoretisk standpunkt som støtter mine tanker om hvordan læring skjer. Med utgangspunkt i eget læringssyn sammenfaller mange av mine tanker med Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell. Den tar for seg flere sider i forbindelse med ferdigheter i matematikk, men de har ikke innlemmet det sosiale aspektet ved læring. Derfor har jeg supplert teorien med gruppeteori fra Webb (1982) og hvordan dette påvirker innlæringen. Ettersom oppgaven har to fokusområder, elevenes læring i matematikk og design av modelleringsoppgaver, har jeg også behov for et teoretisk perspektiv som omtaler forskjellige oppgavetyper og ulike syn på hva som er viktig når jeg skal designe modelleringsoppgavene.

2.1 Sosiokulturell teori

Sosiokulturell teori fokuserer på sammenhengen mellom tanke og kommunikasjon. Det er gjennom kommunikasjon at individet kommer i kontakt med nye måter å tenke og resonnere på. Teorien har sitt grunnlag i språket og baseres på erkjennelsen av at kunnskap er lagret i nettopp språk, da i form av bøker, artikler, dokumenter, etc. Læring er en prosess som ved appropriering av kunnskap overføres fra våre omgivelser og medmennesker. "Vi har i enhver situasjon mulighet til å overta og ta med oss - appropriere - kunnskaper fra våre medmennesker i samspillsituasjoner." (Säljö & Moen, 2001, s. 122). Kunnskap hos et individ oppstår i samspill med andre. Denne kunnskapen må gis en personlig mening for den enkelte, dette samspillet mellom mennesker skjer ved hjelp av språket. Det er med dette i tankene at jeg skal se hvilke matematiske ferdigheter elever, som i samarbeid løser matematiske modelleringsoppgaver til autentiske broer, bruker. For å koble denne tankegangen opp mot skolen, må vi se hvilke føringer skoleeier legger.

2.2 Fagfornyelsen og matematikk

Ludvigsen utvalget, et utvalg som skulle vurdere grunnopplæringens fag, kom i 2015 ut med stortingsmeldingen "Fremtidens skole-fornyelse av fag og kompetanser". Deres mandat var "*å utrede hva elevene vil ha behov for å lære i skolen i et perspektiv på 20–30 år*" (Regjeringen.no, 2015). Denne utredningen dannet grunnlaget for fagfornyelsen som kommer i 2020. Her beskrives matematisk kompetanse ved hjelp av fem delkomponenter; forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. Denne modellen av matematisk kompetanse har de hentet fra Kilpatrick et al. (Regjeringen.no, 2015) og jeg vil komme tilbake til den senere i oppgaven. Fagfornyelsen er bygget på disse tankene, og de har så utviklet seks kjerneelementer i matematikkundervisningen med bakgrunn i denne teorien:

- Utforskning og problemløsning – Elevene skal forske på et problem de ikke kjenner fra før, hvor de må finne og utvikle hensiktsmessige løsningsmetoder. Fokuset skal endres, tidligere har svaret blitt sett på som viktig, nå skal man være mer opptatt av hvilken strategi og framgangsmåte som er brukt for å komme fram til svaret. Gjennom en mer fleksibel kunnskap skal elevene bryte ned problemet til mindre delproblemer som kan løses systematisk.

- Modellering og anvendelser – Elevene skal øves i å løse problemstillinger fra virkeligheten, som de så skal omforme til matematiske modeller, for til slutt å tolke modellen i lys av den opprinnelige problemstillingen. Det legges spesielt vekt på kritisk tenkning, både på egne løsninger og tankerekker så vel som på helheten.
- Resonnering og argumentasjon – Elevene skal se begrunnelsen bak matematiske regler og resultater slik at de ikke får en oppfatning av at matematikken er tilfeldig. Det vektlegges også at elevene skal kunne føre egne resonnementer hvor de argumenterer for eget syn og egne tankerekker.
- Representasjon og kommunikasjon – Elevene skal få muligheten til å snakke matematikk. Ved å bruke begreper og forklare og argumentere for egne løsninger og framgangsmåter. En viktig ferdighet i denne sammenhengen er å koble sammen dagligtale med det matematiske språket og kunne veksle mellom disse språkformene.
- Abstraksjon og generalisering – Elevene skal forstå abstrakt matematikk i økende grad. De skal se sammenhenger og strukturer slik at de lettere kan generalisere, noe som igjen gjør innlæring av ny kunnskap lettere da de kan bygge videre på eksisterende kunnskap. Vi beveger oss bort fra å skulle fokusere på prosedyrer ettersom vi ser klare fordeler av en dypere konseptuell forståelse.
- Matematiske kunnskapsområder- De fem foregående kjerneelementene er metoder for hvordan vi skal tilegne oss matematiske ferdigheter på en best mulig måte. De matematiske kunnskapsområdene oppsummerer de mest grunnleggende temaene som skal læres. (Utdanningsdirektoratet, 2018b)

Gjennom å arbeide med disse kjerneelementene skal elevene erfare dybdelæring. "Dybdelæring betyr at elevene gradvis og over tid utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fag" (Kunnskapsdepartementet, 2016, s. 14). Matematikkundervisningen i Norge har blitt kritisert for å legge mest vekt på tavleundervisning, hvor elevene får presentert algoritmer, for så å øve på disse hver for seg. Denne måten å undervise på fordrer ikke dybdelæring, men overflatelæring, hvor en legger mest vekt på fakta uten sammenheng i faget (Kunnskapsdepartementet, 2016).

I forslagene til kompetansemål på hvert trinn brukes verb som "utforske, eksperimentere, forklare, beskrive, representere, formulere, utvikle, generalisere, modellere" for å fortelle hvordan elevene skal tilegne seg matematisk kunnskap (Regjeringen.no, 2019). Disse verbene bygger opp under de seks kjerneelementene, og sier noe om hvordan undervisningen av matematikk skal foregå.

2.3 Matematisk kompetanse

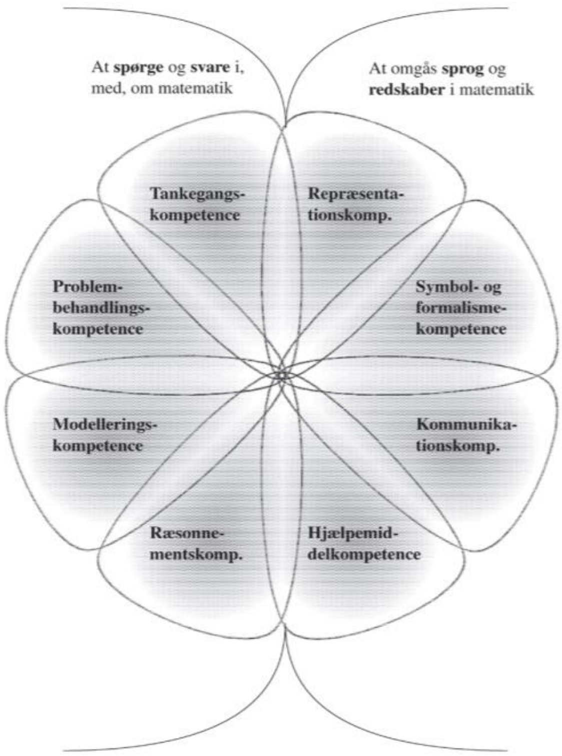
Modelleringsoppgavene jeg vil designe og som elevene skal jobbe med, bør egne seg som byggestene som skal støtte opp under den matematiske kompetansen. Spør du en voksen nordmann om hva matematikk er, vil de sannsynligvis svare at det er å kunne algoritmer, for å få et rett svar. Dette er en delkomponent i den totale matematiske kompetansen, men dersom en skal få en solid matematisk kompetanse er man avhengig av kompetanse innenfor flere aspekter i matematikken.

2.3.1 Kunnskapsløftet K06: Åtte matematiske delkompetanser

Kunnskapsløftet K06 brukte Niss og Højgaard Jensen (2002) sin modell med åtte delkompetanser, som grunnlag for planen i matematikk. Disse er delt i to grupper (figur 3):

1. Å kunne spørre og svare i, og med matematikk
    1. Tankegangskompetanse
    2. Problembehandlingskompetanse
    3. Modelleringskompetanse
    4. Ressoneringskompetanse
2. Å kunne mestre matematikkens språk og redskaper
    5. Representasjonskompetanse
    6. Symbol og formaliseringskompetanse
    7. Kommunikasjonskompetanse
    8. Hjelpemiddelkompetanse

(Niss & Højgaard Jensen, 2002)



Figur 3 Oversikt over de åtte delkompetansene til Niss og Højgaard Jensen (2002)

De åtte delkompetansene henger sammen i ett knutepunkt, den matematiske kompetansen. Den skal hjelpe å handle hensiktsmessig i situasjoner som har en matematisk utfordring. Denne modellen har også vært til inspirasjon når Ludvigsen utvalget har jobbet med sine kjerneelementer til den kommende fagfornyelsen (Kristensen, 2019). En annen teori, som har mange likheter til denne modellen, er trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001). Denne skal jeg beskrive nærmere i neste delkapittel.

2.3.2 Fagfornyelsen 2020: Trådmodellen og matematisk kompetanse

Som tidligere nevnt bygger kjerneelementene i fagfornyelsen på Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell om matematisk kompetanse. Denne modellen vil jeg utdype i dette delkapittelet.

Vår matematiske kompetanse utvikles kontinuerlig, både i og utenfor klasserommet. Utviklingen er mer intens og målrettet på skolen enn ellers, og derfor er det et ønske at den skal være så effektiv som mulig. På skolen og i klasserommet skjer mye av læringen gjennom å jobbe med oppgaver, derfor er det av stor betydning hvordan oppgavene arter seg, hvordan de er utformet og hva som er målet med dem. Jeg vil se på modelleringsoppgaver som tar utgangspunkt i autentiske broer i nærmiljøet som stimulerer en best mulig utvikling av den matematiske kompetansen, og kjennetegn på denne utviklingen vil jeg se i forhold til Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell gjennom hvilke matematiske kompetanser elevene bruker i oppgaveløsingen.

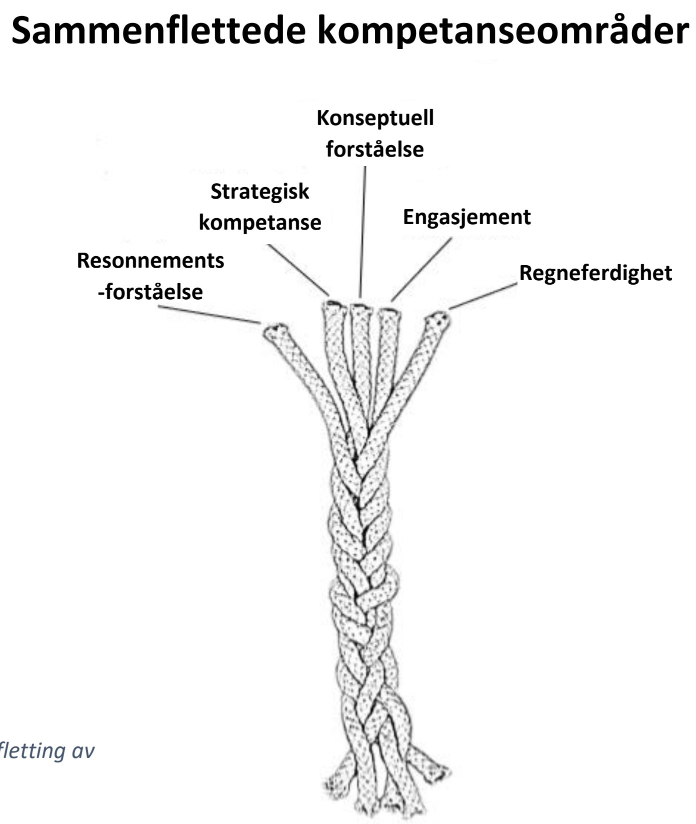
I denne teorien blir det beskrevet noen kognitive endringer de ønsker å fremme hos elever slik at de kan lykkes i å lære matematikk (Kilpatrick et al., 2001). De bruker begrepet "*mathematical proficiency*", matematisk ferdighet, til å fange opp det de mener er essensielt for å lære matematikk på en vellykket måte. Den matematiske ferdigheten består av følgende fem komponenter, eller tråder:

- Conseptual understanding – Konseptuell forståelse
  Forståelse av matematiske konsepter, operasjoner og relasjoner.
- Procedural fluency – Regneferdighet
  Det å kunne utføre prosedyrer presist, fleksibelt, effektivt og hensiktsmessig.
- Strategic competence – Strategisk kompetanse
  Evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer.
- Adaptive reasoning – Resonnementsforståelse
  Kapasitet for logisk tankegang, refleksjoner, forklaringer og rettferdiggjøring.

- Productive disposition – Engasjement
  Å være tilbøyelig til å se matematikken som fornuftig, nyttig og verdifull, kombinert med en tro på at det betaler seg å være flid.

Det essensielle i denne teorien er at disse fem ferdighetene representerer hver sin del av en kompleks helhet (figur 4).

> *"the five strands are interwoven and interdependent in the development of proficiency in mathematics"(Kilpatrick et al., 2001, s. 116)*



Figur 4 Sammenfletting av de fem trådene

De samlede ferdighetene skal hjelpe elevene i møte med matematiske utfordringer i dagliglivet, samtidig som det skal gjøre de i stand til å utforske matematikk ytterligere. Disse fem trådene danner et rammeverk for hvordan vi kan forstå den matematiske utviklingen, men overordnet ligger det et slør av hvordan man mentalt representerer og kobler sammen bitene av kunnskap man hele tiden tilegner seg i en læringssituasjon. Dette er en nøkkelfaktor for å ha mulighet til å forstå matematikken i dybden og kunne anvende hele den matematiske kunnskapen i problemløsning. Ny kunnskap skal ikke bare læres, det skal også organiseres, kobles og struktureres i forhold til eksisterende kunnskap. Det å oppnå forståelse av et emne er mer verdifullt enn å memorere et emne ettersom det da er lettere å organisere mentalt, og organiseringen skaper større lagringskapasitet, fremmer flyt og forenkler relatert kunnskap. Det å ha en dyp forståelse krever at stoffet er organisert på en strukturert og effektiv måte mentalt slik at en bruker den mest hensiktsmessige kunnskapen man innehar når man møter et problem.

2.3.2.1 Konseptuell forståelse

Dette begrepet omtaler evnen til å få en dypere forståelse av matematiske ideer og konsepter. Det omfatter også det å organisere de matematiske ideene i sammenheng med hverandre og skape et sammenhengende overblikk i matematikken som helhet slik at ny kunnskap kan kobles til eksisterende kunnskap. Da blir man i stand til å forstå og bruke matematiske begreper på tvers av emner eller situasjoner. Elevenes kunnskap om de matematiske elementene er sammensatt og nyansert, og elevene kan skape ny forståelse ved å kombinere eksisterende erfaringer med den nye kunnskapen.

> "*A significant indicator of conceptual understanding is being able to represent mathematical situations in different ways and knowing how different representations can be useful for different purposes*."(Kilpatrick et al., 2001, s. 119).

Det å ha en velutviklet konseptuell forståelse innebærer å kunne bruke forskjellige matematiske representasjoner slik at kunnskapen blir anvendt på en best mulig måte ut ifra situasjonen. Det å skulle gjenkjenne konseptuell forståelse hos elever gjennom samtale med elevene, kan være utfordrende ettersom elevenes evne til å sette ord på forståelsen sin ofte ikke sammenfaller med selve forståelsen. Hvordan elever klarer å sette ord på sin forståelse ligger ofte langt bak selve forståelsen. Eleven viser en god konseptuell forståelse hvis eleven er i stand til å fremstille matematiske problemer på flere måter og vet hvilke representasjoner som er nyttige i ulike situasjoner. Med en godt utviklet konseptuell forståelse vil elevene ha mindre å lære ettersom de kan "låne" ideer fra andre, lignende temaer. Ved å oppnå konseptuell forståelse innenfor et matematisk område, blir det mer nærliggende å se sammenhenger på tvers av temaer og prosedyrer, og man vil også ha muligheten til å argumentere og forklare hvorfor noe kan ses på som en direkte konsekvens av noe annet. Med en slik bred forståelse for et område, utvikles det selvtillit som igjen ligger som en nødvendig base for å komme til neste nivå av forståelsen.

2.3.2.2 Regneferdigheter

Regneferdigheter dekker kunnskap om matematiske prosedyrer og evnen til å anvende dem korrekt på relevante oppgaver. Elevene skal kunne velge hvilke fremgangsmåter som er hensiktsmessige og nyttige for den spesifikke oppgaven. Spesielt gir det engelske uttrykket “Procedural fluency” en god beskrivelse av hva ferdighetene dekker, da elevene må være flytende i deres bruk av en prosedyre for å løse oppgaver. Regneferdigheter og konseptuell forståelse blir ofte sett på som to separate ferdigheter hvor man enten fokuserer på det ene eller det andre. For å oppnå gode, fleksible regneferdigheter, er man avhengig av å ha en overordnet forståelse slik at man kan se sammenhenger mellom forskjellige prosedyrer, for igjen å klare å bruke prosedyrene om hverandre etter behov. Motsatt er avhengigheten like stor da vi er tjent med å ha gode regneferdigheter når vi skal oppnå en bedre konseptuell forståelse. Ved at vi innehar presise, effektive og fleksible regneferdigheter, kan vi bruke større del av kapasiteten til å forstå konseptene vi jobber med. Da slipper vi å bruke masse energi på det regnetekniske og kan fokusere fullt på forståelse. Det å lære en strategi uten å fokusere på forståelse, kan også bli et hinder i videre utvikling ettersom man kan ha problemer med å motivere elevene til å dykke bak prosedyrene. Det er lettere å bli oppmerksom på, og rette opp en regnefeil om man innehar en større forståelse rundt den prosedyren det gjelder.

Hvis innlæringen kun fokuserer på strategier og prosedyrer, vil elevene oppfatte hver strategi og hver prosedyre som isolerte bokser som løser ett spesifikt problem som er utformet på én spesiell måte. Ved innlæring av prosedyrer, framfor forståelse, som har klare likhetstrekk, vil det da bli utfordrende for elevene å se sammenhengen og bygge den nye kunnskapen på eksisterende kunnskap. Prosedyrene kan i ytterste konsekvens bli situasjonsbestemte slik at eleven kun kan anvende spesielle teknikker i spesielle situasjoner eller lokasjoner. Viktigheten av at kunnskapen skal kunne brukes mer fleksibelt er følgelig høy.

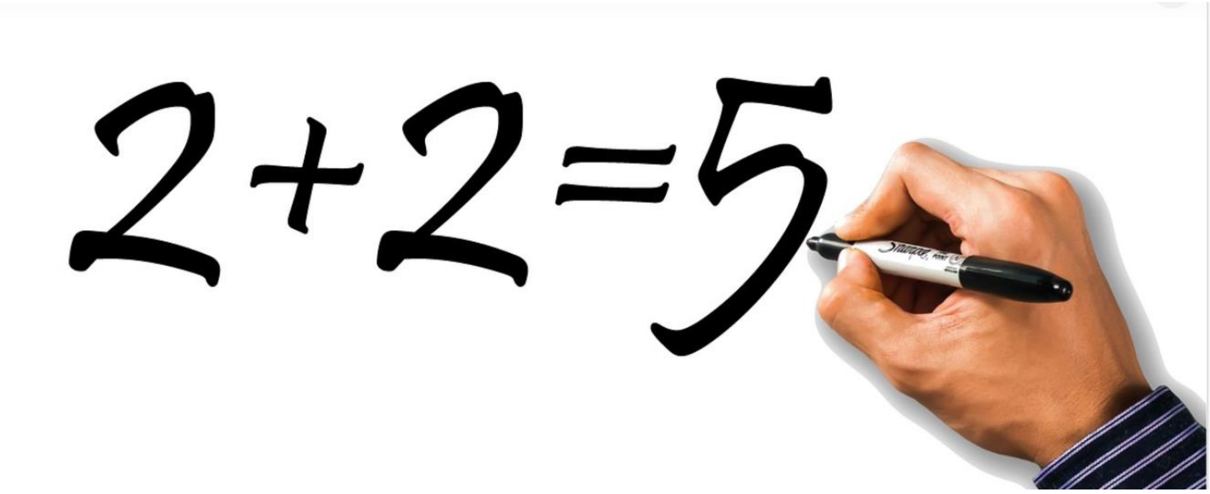
Denne ferdigheten understreker at elevene ikke bare kjenner forskjellige strategier, men at de også kan bruke dem nøyaktig, effektivt og fleksibelt.

2.3.2.3 Strategisk kompetanse

Strategisk kompetanse er knyttet til forståelsen av en matematisk problemstilling, det å gjenkjenne sammenhenger. Hvordan å angripe et matematisk problem og strategien som brukes for å løse dette deles ofte inn i tre hoveddeler: Formulere, presentere og løse problemet. Dette blir ofte omtalt som problemløsning i litteraturen.

Når eleven får gitt en oppgave, skal eleven i den første fasen kunne forstå hva oppgaven spør etter og formulere problemet ved å hente ut viktig informasjon fra teksten. På grunnlag av dette, må eleven mentalt formulere problemet som skal løses. I neste fase skal eleven kunne presentere problemet. Det betyr at de kan formulere og formidle selve problemet slik en forstår det, samt hvilke løsningsstrategier en ser som fornuftig å bruke for å løse problemet. I den siste fasen skal eleven kunne løse problemet, som er basert på forståelsen av problemet, valg av strategi og valg av prosedyre for å bruke hensiktsmessige metoder og framgangsmåter.

> *"A fundamental characteristic needed throughout the problem-solving process is flexibility. Flexibility develops through the broadening of knowledge required for solving non-routine problems rather than just routine problems." (Kilpatrick et al., 2001, s. 126)*



Figur 5 Eksempel på en rutineoppgave

Rutineoppgaver (figur 5) er oppgaver eleven ved hjelp av eksisterende erfaringer enkelt kan løse, og det stilles ingen andre krav enn at eleven skal kunne reprodusere og anvende allerede tillærte prosedyrer eller allerede kjent kunnskap. Selv om elevene ofte blir bedt om å løse matematiske problemer i undervisningen, er det sjelden at elevene møter egentlige problemløsningsoppgaver. Normalt sett er oppgavene i form av problemer som allerede er definert og med klare retningslinjer for hvilken løsningsstrategi, eller ikke minst hvilket matematisk område som forventes brukt. Hvis problemet blir gitt som en udefinert matematisk oppgave, tvinger det elevene til å utfordre sin strategiske kompetanse. Eleven bør derfor ha evnen til å gjennomgå problemet og finne kjerneproblemet, for så å løse problemet ved å velge relevante prosedyrer. En elev med godt utviklet strategisk kompetanse vil kunne ha flere forskjellige innfallsvinkler på en rik oppgave, og benytte den strategien som er mest hensiktsmessig i den gitte situasjonen. Det å være strategisk kompetent innebærer ikke å bruke en fremgangsmåte hvor du henter ut data eller tall for så å utføre aritmetiske operasjoner. Det er da forventet at en bruker metoder hvor man konstruerer mentale modeller av variablene og relasjonene som er presentert i problemet og løser problemet ved hjelp av disse.

2.3.2.4 Resonneringsferdigheter

Resonneringsferdigheter brukes til å navigere mellom faktaene, prosedyrene, konseptene og løsningsmetodene slik at det til slutt gir mening. Det omfatter elevenes evne til å tenke logisk om forholdet mellom situasjoner og konsepter. Elevenes resonnementsforståelse er basert på nøye argumentasjon for et resultat eller en løsningsstrategi. I dette ligger også evnen til å evaluere alternative strategier og vite hvilke som er relevante. En annen del av resonnementsforståelsen er hvordan eleven bestemmer om et resultat er riktig eller ikke. Eleven må vurdere om løsninger, forklaringer eller svar er korrekte, og om de kan følges av logiske skritt basert på grunnleggende forutsetninger. Selv om mange av disse antagelsene har vært grunnsteiner for vår matematikk, kan de også være premisser i problemløsningen. Forutsetningene kan derfor variere i henhold til hvilken informasjon den enkelte elev opplever som viktig i en problemløsningsoppgave. Elever som har en høyt utviklet resonnementsforståelse, og som er i tvil om gyldigheten av sine resultater, trenger ikke å bli bekreftet av en lærer, andre studenter eller på annen måte. De trenger bare å sjekke om deres argument bygger på logiske slutninger eller ikke.

2.3.2.5 Engasjement

Engasjement er den siste av de fem trådene og omhandler elevenes evne til å se mening med matematikken. Dette innebærer å se matematikk som et nyttig fag og verktøy og samtidig ha en oppfatning om at en stabil innsats i matematikkundervisningen har en verdi. Eleven har evnen til å se nytteverdien av matematikk mens de jobber for å forbedre forståelsen.

> *"If students are to develop conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, and adaptive reasoning abilities, they must believe that mathematics is understandable, not arbitrary; that, with diligent effort, it can be learned and used; and that they are capable of figuring it out." (Kilpatrick et al., 2001, s. 131)*

Denne ferdigheten utvikler seg kontinuerlig og samtidig som de andre ferdighetene, og den er også en sterk bidragsyter til utviklingen av de andre trådene. Vi kan også trekke inn holdninger til matematikken i engasjement-ferdigheten. Elevene sin holdning til matematikken har en tendens til å forme elevenes engasjement på en tydelig måte. Hvis man har en ide om at "enten så har man en matte-hjerne eller så har man det ikke", vil dette prege læringen av matematikk i negativ retning om man tenker at man ikke har en "matte-hjerne". Det er normalt de lavt presterende som bruker dette som en type forsvarsmekanisme for å rettferdiggjøre at man ikke forstår så mye matematikk, og for å overbevise seg selv og andre om at det ikke er noe poeng å legge ned en innsats for å lære det fordi man ikke innehar en slik "matte-hjerne". Når eleven allerede har en slik holdning til matematikk, er det utfordrende å utvikle de andre ferdighetene, så dette kan ses på som drivkraften i utviklingen av de resterende ferdighetene. For å legge ned innsats og tid for å lære seg matematikk, er man helt avhengig av engasjement.

Jeg tenker man kan dele opp den matematiske selvtilliten i to, den grunnleggende matematiske selvtilliten og den spontane matematiske selvtilliten. Den grunnleggende matematiske selvtilliten er veldig krevende å få tak på under en times observasjon. Den preges av holdninger og forestillinger rundt matematikken samtidig som den hele tiden vil bygges gjennom matematiske erfaringer. Den spontane matematiske selvtilliten er mer merkbar og den stikker ikke like dypt som den grunnleggende. Elevene kan få en merkbar "boost" når de mestrer noe eller når man føler seg overlegen oppgaven som ligger foran en.

2.3.2.6 Fletting av de fem trådene og hvordan de utvikles

Kilpatrick et al. (2001) poengterer at elevenes matematiske ferdighet ikke er kvantifiserbar, men at den er flytende. De legger vekt på at eleven ikke vil ha en fullverdig matematisk ferdighet hvis en eller flere av ferdighetene er underutviklet. Det er derfor viktig at utviklingen av de fem trådene foregår jevnt og sammenhengende for en best mulig utvikling.

Ferdigheter i matematikk er noe som blir tilegnet over tid. Elevene trenger tilstrekkelig med tid for å fordype seg i de spesifikke matematiske emnene hvis de skal oppnå gode ferdigheter. Hvis elevene bare blir presentert for en kort gjennomgang av en strategi for å løse et problem, for så å møte oppgaver som krever bruk av denne strategien på egen hånd, risikerer man at de mislykkes, og elevene vil da ha problemer med å oppnå den forståelsen vi ønsker at de skal få.

> *"To become proficient, they need to spend sustained periods of time doing mathematics — solving problems, reasoning, developing understanding, practicing skills — and building connections between their previous knowledge and new knowledge."* (Kilpatrick et al., 2001, s. 135)

Når eleven tilegner seg konseptuell forståelse ved å regne, vil dette bli husket bedre, og eleven vil være i stand til å løse nye problemer ved å bruke disse regneprosedyrene flytende, effektivt og nøyaktig. Dette påvirker utviklingen av den konseptuelle forståelsen og vil dermed også øke denne ferdigheten. Dette skjer også når elevenes regneprosedyre i større grad blir rutine, fordi eleven vil være i stand til å vurdere andre sider av problemet, og være i stand til å takle nye utfordringer som da vil føre til ny forståelse og ny kunnskap. Samtidig vil elevenes bruk av regneferdigheter tillate de å reflektere over hvorfor denne prosedyren fungerer eller er riktig for oppgaven, noe som igjen vil styrke elevenes forståelse av begrepene. Utviklingen av disse to trådene og samspillet mellom de fører til at det ikke alltid er mulig å skille konseptuell forståelse fra regneferdighet.

Resonnementsforståelsen er spesielt fremtredende i samspill med de andre trådene i forbindelse med problemløsing. Hvis elevene kan anvende den strategiske kompetansen for å formulere og presentere et problem, vil de også være i stand til å bruke en heuristisk tilnærming for å finne en løsningsstrategi. Da må elevenes resonnementsforståelse overta slik at de kan være kritiske til å vurdere om deres egne løsningsstrategier er legitime eller ikke. Samtidig vil forståelsen av konsepter gi elevene mentale bilder og representasjoner som danner grunnlag for deres resonnement. På denne måten blir elevene bedre til å vurdere når en løsningsmetode er riktig og når det er relevant å bruke den.

Når elevene oppnår et høyt utviklet engasjement, blir de i stand til å lære ny kunnskap og løse nye problemer. Elevene utvikler sine strategiske ferdigheter ved å løse ikke-standardiserte problemløsende oppgaver. I denne typen arbeid vil elevers holdning til, og tro på seg selv når de jobber med matematikk bli mer positive, øke elevenes engasjement og det vil skape større motivasjon til å jobbe med nye og mer utfordrende oppgaver. Samtidig vil det skje at jo flere begreper elevene forstår og kan bruke, jo mer fornuftig vil matematikken være for elevene. Motsetningen til dette vil være elever som møter utfordrende oppgaver som er av den oppfatning at de må søke en spesifikk løsningsstrategi og lære den spesifikke løsningsstrategien utenat, framfor å forstå den underliggende teorien. Dette vil føre til at elevene mister matematisk selvtillit, og deres utvikling av de andre trådene vil påvirkes negativt.

2.4 Matematikkundervisning

I fornyelsen av fag og kompetanser i matematikk beskrives matematisk kompetanse ved hjelp av trådmodellen (Regjeringen.no, 2015), og dette ligger til grunn for de nye læreplanmålene, og dermed også til grunn for den undervisningen elevene skal bli utsatt for. Dette passer med tanke på mine modelleringsoppgaver med utgangspunkt i autentiske broer. I Umeå forskes det på matematikkundervisning i et prosjekt, som startet i 2009 og pågår til 2025. Prosjektansvarlig er Johan Lithner, han vil se på hvilke typer matematikkundervisning som fungerer best. De identifiserer fire måter å undervise på, og disse fire kan deles inn i to hovedgrupper: "Imitativa och kreativa resonemang" (Lithner, 2019, 1.april). Forskningen har til nå blant annet vist at elever profiterer best på en kreativ undervisning (figur 6), hvor det ikke legges vekt på fakta og prosedyrer. Det som er oppsiktsvekkende, er at de som profitere aller best på denne type undervisning, er de svakeste elevene (Norqvist, Lithner, Jonsson & Liljekvist, 2015). Tradisjonell matematikkundervisning, hvor en legger mest vekt på fakta og prosedyre, har vært vanskelig å endre selv om en har sett at dette fører til "både till ett ineffektivt lärande och at matematikken uppfattas som tråkig och meningsløs" (Lithner, 2019, 1.april). Gjennom "lærerløftet", hvor lærere får etterutdanning, og ny læreplan hvor dybdelæring fremheves, legges det opp til at lærerne skal endre undervisningen sin og legge mer vekt på utforsking og kreativitet i matematikktimen.

Figur 6 Kreativ undervisning

Jeg vil nå se nærmere på to aspekt ved matematikkundervisningen som bygger opp under en kreativ og utforskende matematikkundervisning; gruppearbeid og oppgavenes utforming.

2.4.1 Gruppearbeid

Ut fra denne oppfatningen av hvordan man tilegner seg kunnskap og læring, skal vi se på teorien om gruppearbeid og mulighetene elevene har til å utvikle sine kunnskaper gjennom å samarbeide med andre (Säljö & Moen, 2001).

Ettersom Kilpatrick et al. (2001) ikke omtaler samarbeid i sin teori så bruker jeg Webb (1982) sin teori om gruppearbeid på dette området. I min studie så bruker jeg grupper ettersom jeg mener at samarbeid fremmer læring. Jeg bruker derfor denne teorien som en supplement for å få inn dette aspektet.

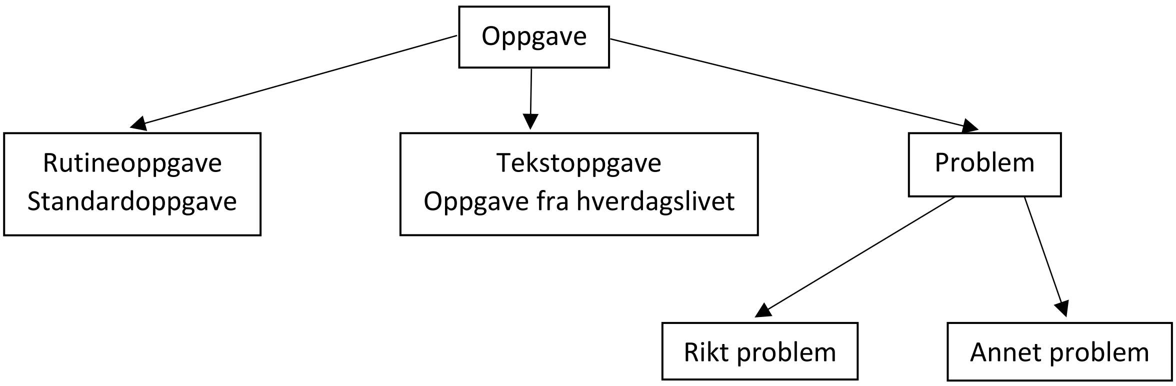
Gruppearbeid støtter muligheten for at elevene kan forklare hverandre aspekter av oppgaveløsningen. Det har vist seg å være gunstig for den som blir forklart, men også den som forklarer. Dette vil utvikle elevenes forståelse på en sunn måte. Når en elev skal forklare eller utdype for resten av gruppen, er det viktig at eleven forklarer sitt resonnement og ikke bare gir svaret til de andre i gruppen. Spesielt heldig for utviklingen til "hjelpe-eleven" sin forståelse, er når forklaringen ikke blir forstått av gruppemedlemmene umiddelbart, og hjelperen blir tvunget til å reprodusere sin logiske tankerekke og omformulere sine argumenter. Dette kan innebære å bruke et annet språk, for eksempel ved å bruke mer eller mindre matematiske uttrykk og forklaringer, for så å bruke mer hverdagsspråk eller lignende. Når hjelperen blir tvunget inn i dette, vil det kunne styrke og utvikle forståelsen. Et viktig prinsipp i denne teorien om gruppearbeid, er også at den hjelpen som elevene mottar, må være på nivå med den hjelpen de trenger. Hvis de mottar hjelp på et for lavt nivå, vil de ha problemer med å nyttiggjøre seg hjelpen (Webb, 1982).

2.4.2 Oppgavene

Den tradisjonelle undervisningen i norske skoler legger stor vekt på lærerbøker og prosedyrer og teknikker som er beskrevet i bøkene. Dette stimulerer i hovedsak én ferdighet, regneferdigheten. Ofte finnes det oppgaver i bøkene som er utforskende og kreative, men disse kommer oftest til slutt i kapittelet, og blir bare løst av de flinkeste elevene. Dette er et paradoks da det viser seg at de svakeste elevene er de som profitterer mest på kreative oppgaver (Norqvist et al., 2015). Vi trenger å utfordre elevene til å utforske og utvikle de andre ferdighetene som trengs for å øke de matematiske ferdighetene som helhet. Dette betyr eksempelvis å utfordre den strategiske kompetansen ved at elevene selv må søke en fremgangsmåte de tenker er hensiktsmessig. Dette vil igjen bevege seg i retning av den konseptuelle kompetansen hvor man må søke gjennom hvilke verktøy man har tilgjengelig for å løse oppgavene. Her vil man profitere på å ha forståelse for ulike temaer, og at kunnskapen er organisert på en slik måte at man ser sammenhenger mellom tema, og at man kan bruke verktøyene på en fleksibel måte. Den siste biten belager seg på gode regneferdigheter hos eleven. Videre i prosessen vil man komme innom alle de matematiske ferdighetene som Kilpatrick et al. (2001) beskriver, samtidig som vi må se på det som skjer i samspillet mellom elevene og hvordan de fremmer hverandres læring gjennom samarbeid. Derfor skal vi se litt nærmere på rike oppgaver da de utfordrer kreativiteten på en god måte.

2.4.2.1 Rike oppgaver

Før vi går inn i de rike oppgavene, må vi få en oversikt over hvor rike oppgaver befinner seg i forhold til andre typer oppgaver (figur 7). Hagland, Hedrén og Taflin (2005) beskriver forskjellige oppgavetyper i sin bok, *"Rika matematiska problem",* og den overordnede enheten er oppgaver generelt.



Figur 7 Illustrasjon av oppgavetyper

Rutine- eller standardoppgaver er en oppgave hvor eleven ikke møter noen utfordringer i oppgaveløsingen. Eleven kjenner løsningsstrategien og oppgaveformen er kjent for eleven. Tekstoppgaver eller oppgaver fra hverdagslivet blir gitt som en tekst med matematiske komponenter. Denne teksten skal oppfordre til å bruke matematikk eller føre til en matematisk modell. En slik oppgave kan være et problem om den har de nødvendige egenskapene til et problem. Et problem er en spesiell oppgave som oppfyller visse kriterier.

- Det er en oppgave en person vil eller trenger å løse.
- Det er en oppgave som ikke skal løses med en spesiell prosedyre som er gitt på forhånd.
- Det er en oppgave som man må anstrenge seg for å løse.

En oppgave kan altså være en rutineoppgave for en mens den er et problem for en annen. Et rikt problem skal gi muligheter for en givende matematisk diskusjon om matematiske begreper og prosedyrer. Utdanningsdirektoratet har syv kriterier for det de omtaler som rike oppgaver generelt, altså ikke spesifisert kun til matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2015). Hagland et al. (2005) har syv sammenfallende kriterier som må være oppfylt for at det skal regnes som et rikt problem i deres definisjon.

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller visse løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå og alle skal ha en mulighet til å jobbe med det.
3. Problemet skal oppleves som utfordrende og kreve anstrengelse.
4. Problemet skal kunne løses på flere forskjellig måter, med ulike strategier og representasjoner.
5. Problemet skal initiere en matematisk diskusjon ut fra elevenes ulike løsninger, en diskusjon som viser ulike strategier, representasjoner og matematiske ideer.
6. Problemet skal kunne fungere som brobygger mellom ulike matematiske områder.
7. Problemet skal kunne lede til at elever og lærere formulerer nye, interessante problemer.

Dette kan ses på som en definisjon av hva et rikt problem skal ha av egenskaper. Foreløpig er det ikke en felles definisjon som alle enes om, men det man kan se er at det er mange felles tanker rundt hvordan en rik oppgave skal være. Andre ord og begreper som kan beskrive rike oppgaver er: utforskende, problemløsing, situasjoner fra virkeligheten, prosjekt, oppgaver uten spørsmål, og problemvariasjoner, for å nevne noen (Pehkonen, 1997). Samlet kan dette gi oss en formening om hva som ligger i uttrykket og hvilke krav som stilles til denne typen oppgaver.

I min forskning vil jeg se til ulike definisjoner av rike oppgaver og utnytte de egenskapene som er viktige for at jeg skal nå mitt mål. Jeg skal designe matematiske modelleringsoppgaver med utgangspunkt i autentiske broer fra nærmiljøet. For å sjekke om oppgavene er gode, skal jeg ikke gå inn i hvert kriteria for å sjekke om det oppfylles. Jeg skal observere elever som gjør oppgavene i praksis og gjennom å se seansen i lys av Kilpatrick et al. (2001) og Webb (1982) sine teorier, vil jeg vurdere om elevene bruker hele sin matematiske kompetanse i arbeidet med oppgavene. De syv kriteriene til Hagland et al. (2005) og utdanningsdirektoratet (2015) vil blir brukt som inspirasjon der jeg ser det tjenlig. Kort oppsummert så vil punkt 1, 6 og 7 bli tillagt mindre vekt mens punkt 2, 3, 4 og 5 vil være sentrale med tanke på ønsket effekt av mine oppgaver.

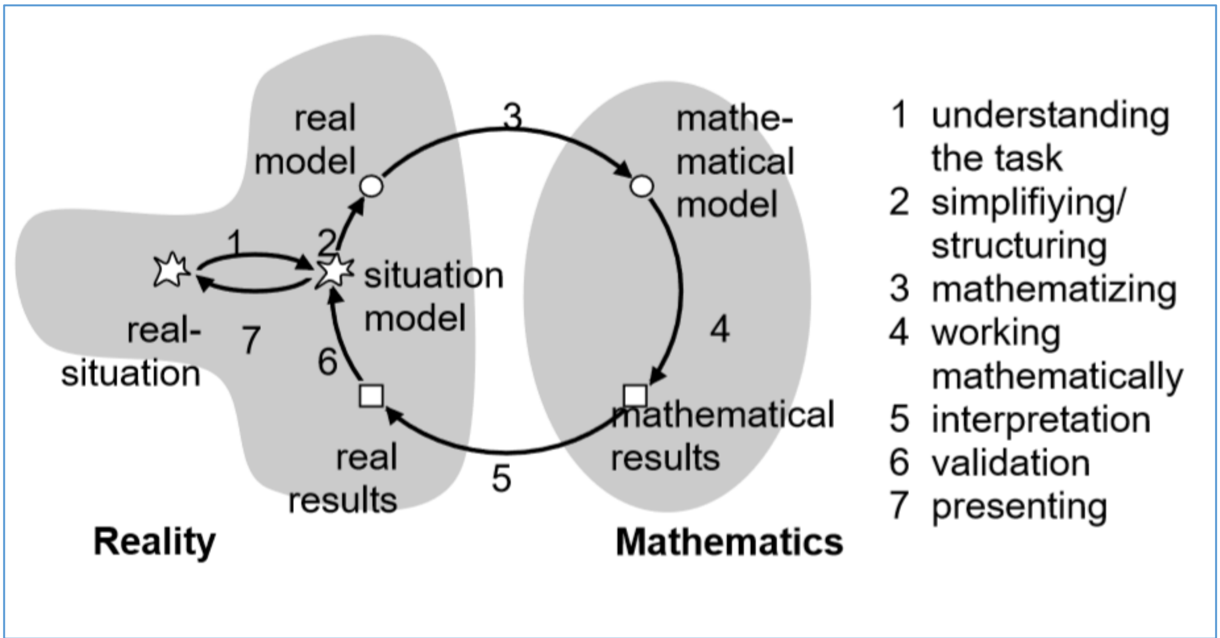
I Norge har rike oppgaver blitt mer vektlagt i undervisningen i senere tid. Problemet for lærerne, er at det er vanskelig å finne gode oppgaver da de ikke finnes i lærebøkene. På Kristiansand Katedralskole Gimle har matematikklærerne utviklet egne hefter i 1T og 2P som skal ha flere rike oppgaver enn matematikkbøkene som er tilgjengelig. Matematikksenteret åpnet en ny nettside "Mattelist" (Matematikksenteret) i starten av dette året, dette er en lærerressurs hvor man finner åpne oppgaver og aktiviteter tilgjengelig for lærere. I min studie ønsker jeg å lage rike oppgaver som tar utgangspunkt i autentiske broer, disse oppgavene kan defineres som «modelleringsoppgaver». I neste delkapittel vil jeg gå nærmere inn på denne typen oppgaver.

2.4.2.2 Modelleringsoppgaver

I løpet av de femti siste årene har matematisk modellering blitt et veletablert forskningsområde innen matematikkutdanning. Gjennom alle disse årene har det vært en debatt om hva matematisk modellering er. Forskjellige syn på utdanning og læring gjør det utfordrende å enes om en definisjon. Likevel er det en sterk konsensus om at matematisk modellering kan beskrives som aktiviteter der man hele tiden beveger seg mellom matematikken og virkeligheten, hvor disse overgangene kjennetegner matematisk modellering. Matematisk modellering utfordrer elever på mange nivåer siden oppgavene krever en fleksibel kunnskap hvor man må sjonglere mellom forskjellige matematiske ferdigheter (Borromeo Ferri, 2018). Dette er grunnen til at jeg har valgt å bruke nettopp modelleringsoppgaver. Jeg tar utgangspunkt i en bro, for så å stille et spørsmål som krever at man bruker matematiske ferdigheter for å løse. Jeg vil at elevene skal koble matematikken opp mot virkeligheten for så å skape ny kunnskap gjennom samarbeid og utforskning.

Det nevnes forskjellig klassifikasjoner av modellering. Jeg skal kun fokusere på modellering brukt i undervisning, såkalt pedagogisk modellering. Borromeo Ferri (2011) beskriver en modelleringsmodell (figur 8) som har seks faser; reell situasjon, mental representasjon av situasjonen, reell modell, matematisk modell, matematisk resultat og virkelige resultater. For å mestre slike oppgaver, kreves det mye av eleven i form av bred matematisk kunnskap. Det som gjør det spesielt utfordrende, er at modelleringsoppgaver stiller høye kognitive krav. Modellering innebærer det å oversette situasjoner mellom matematikk og virkelighet, og man må beherske og gjøre dette begge veier og ofte gjentatte ganger. For at disse prosessene skal gå sømløst, må man ha den konseptuelle forståelsen som omfatter de matematiske ideene, samt at man må ha den nødvendige uformelle matematiske kompetansen som kobler matematikken opp mot virkeligheten.

Vel så viktig som de faktiske fasene er overgangene mellom disse; forstå oppgaven, forenkle/strukturere oppgaven, matematisere oppgaven, arbeide matematisk, tolke og validere. Overgangene mellom fasene er prosesser. For å komme seg fra en fase til en annen, skjer det en kognitiv prosess som vil hjelpe oss videre i oppgaven. Fasene blir en tydeliggjøring for å vise hvilke prosesser som trengs for å løse problemet. Det er i prosessene at læring skjer og at ny kunnskap blir satt i sammenheng med eksisterende kunnskap, og det er slike prosesser som fremmer forståelse og evnen til å se helheten i matematikken.



Figur 8 The modelling cycle (Ferri, 2006), "real situation" i denne sammenheng er broen, som det stilles spørsmål om.

2.4.2.3 FERMI problemer

Fermi-oppgaver har sin opprinnelse fra en nobelprisvinner i fysikk (1938) som het Enrico Fermi. Han var en høyt ansett lærer som hadde en forkjærlighet for oppgaver som var åpne og som ikke hadde noen eksakte svar. Eksempler på oppgaver kunne være: "*How many piano tuners are there in New York?"* Eller *"How many railroad cars are there in the US?" (Bergman Ärlebäck, 2009).* Disse spørsmålene er på jakt etter en mengde, det være seg antall, lengde, høyde eller en annen form for mengdebegrep, og har ikke eksakte svar. Det fordrer at den som skal løse oppgaven klarer å legge veloverveide premisser og estimater for så å komme fram til en løsning som blir rimelig nær virkeligheten. Han mente også at enhver har mulighet til å kunne estimere mengder og størrelser ved å bygge på realistiske resonnementer som vil føre til et svar ved hjelp av relativt enkle kalkuleringer. Oppgavene stammet fra virkelige situasjoner og hadde gjerne bakgrunn i ting han opplevde eller så. Det er ikke kjent om Fermi selv definerte noen karakteristikker som må oppfylles for å være et slikt problem.

I senere tid er det gjort flere forsøk på å definere hva et Fermi-oppgaver er. Chandler (1990) beskriver det slik: Fermi problemer er ment å ende opp i estimater til nærmeste potens av ti uten å referere til hverken bøker eller kalkulatorer. Carlson (1997) på sin side definerer det som en metode for å skaffe seg et kjapt overslag til et formodentlig komplisert problem gjennom å gjennomføre serier av kvalifiserte gjetninger og overslagsregning. Ross and Ross (1986) skriver at essensen i et FERMI problem er at en velinformert person skal ha muligheten å gi et estimert svar gjennom en serie av estimater (Bergman Ärlebäck, 2009).

Bergman Ärlebäck (2009) har samlet disse tankene og definert realistiske Fermi-problemer på sin egen måte .

- Oppgavens tilgjengelighet; beror på hvem oppgaven er ment for og hvem som kan løse oppgaven. Alle skal ha mulighet til å løse oppgaven uavhengig av hvilket matematisk ferdighetsnivå man befinner seg på.
- Oppgavene bør ha tydelige assosiasjoner til virkeligheten og være realistiske, da både med tanke på settingen så vel som spørsmålet. Slike oppgaver vil oppfattes som mer meningsfulle og vil by på flere pedagogiske muligheter.
- Det skal stimuleres til spesifisering og strukturering av relevant informasjon og relasjoner som trengs for å takle problemet. Denne egenskapen fordrer at problemformuleringen skal være åpen, ikke umiddelbart forbundet med en kjent løsningsmetode eller -prosedyre for å løse problemet, for så å utfordre elevene til å bruke eksisterende konstruerte ferdigheter, oppfatninger, erfaringer, strategier og andre kognitive ferdigheter for å nærme seg problemet.
- Det er et ønske at oppgaven skal utfordre elevene til å foreta estimater, og da bør ikke oppgaven være konstruert slik at mengder og lengder er gitt i detalj, men at det er opp til eleven å foreta kalkulerte gjetninger. For at dette skal kunne skje så bør problemets sammenheng være kjent, relevant og interessant for eleven.
- Når brukt som gruppeoppgave, bør oppgavene legge til rette for diskusjon med tanke på hva som er essensen i oppgaven og hvilke estimater og strategier som gir et best mulig resultat.

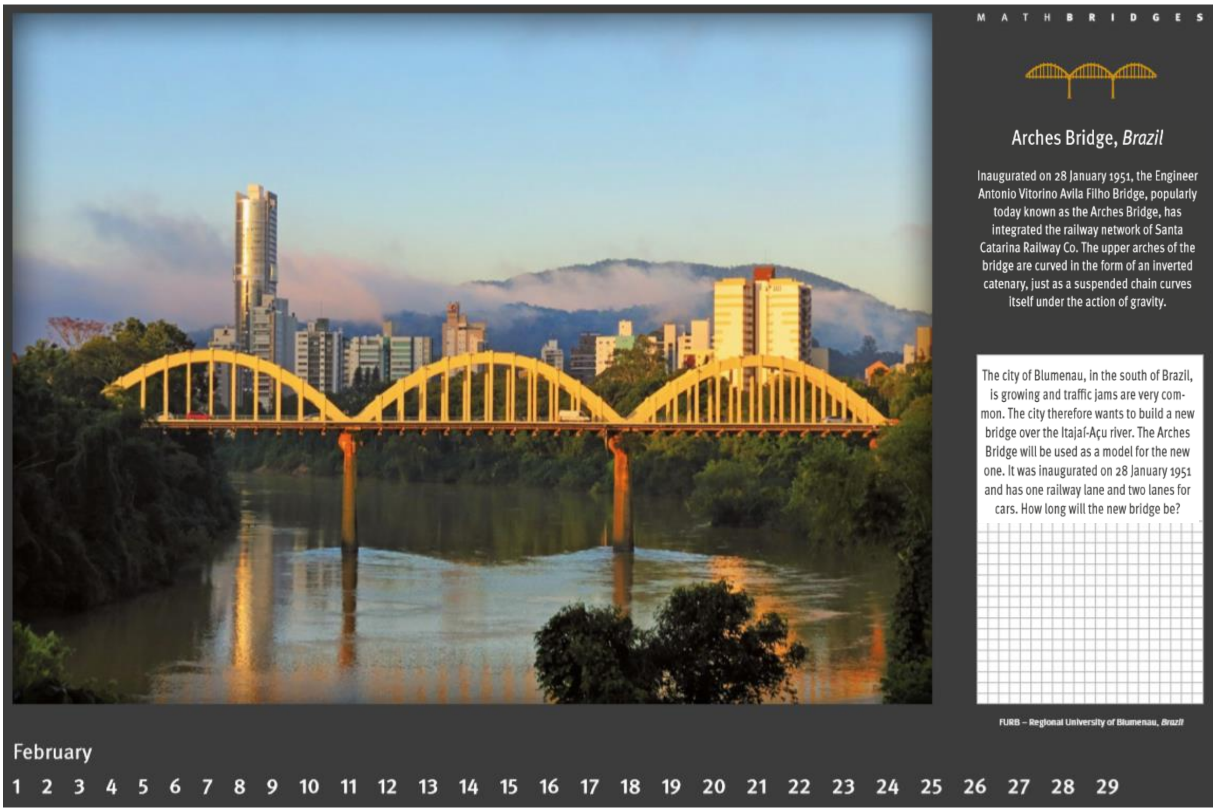
Disse fem punktene som kjennetegner Fermi-oppgaver sammenfaller godt med mine tanker for hvordan mine modelleringsoppgaver, med utgangspunkt i autentiske broer skal fungere. Jeg ønsker at oppgavene jeg designer og utvikler skal utfordre og stimulere alle de forskjellige matematiske kompetansene som Kilpatrick et al. (2001) og Webb (1982) omtaler i sine teorier.

Bergman Ärlebäck (2009) siterer Ross and Ross hvor de belyser bruken av Fermi-oppgaver på en god måte når de omtaler den doble effekten oppgavene har. På den ene siden øver man på å hente ut viktig informasjon og bruke den på en hensiktsmessig måte. De viser til at det ofte gis nok informasjon til å løse problemene, men at elevene ikke nødvendigvis klarer å anvende den informasjonen som er gitt på best mulig måte. På den annen side viser man elevene en annen side ved matematikken hvor man ikke er interessert i eksakte fasitsvar, men at man er på jakt etter estimater. Fermi-oppgaver kan også brukes som bro over til andre skolefag, samtidig som elevene får trening i å anvende den teoretiske matematikken i autentiske situasjoner. Diskusjonen om hva som defineres som autentisk eller ikke kommer jeg tilbake til i neste delkapittel.

Bergman Ärlebäck (2009) refererer til flere bøker og artikler som omtaler Fermi-oppgaver og deres egenskap til å motivere så vel som å utvikle den kritiske tenkningen hos oppgaveløseren. Det blir også diskutert hvordan en Fermi-oppgave differensierer seg selv slik at den kan brukes på forskjellige nivåer ved at man selv kan velge hvilke, og hvor mange aspekt, man skal ta inn i hvert estimat (figur 9). Peter-Koop og Sriraman and Lesh, er ifølge Bergman Ärlebäck (2009), av den oppfatning at Fermi-oppgaver bør bygge på virkelighetsbasert informasjon fra hverdagen slik at det ikke kun baserer seg på formell kunnskap.

Fermi-oppgaver har en slik utforming at de har en del fellestrekk med modellering. Derfor kan jeg flette sammen ideene fra disse forskjellige oppgavetypene slik at oppgavene mine om autentiske broer blir så gode som mulig.

2.4.2.4 Oppgaver med autentiske aspekter



Figur 9 En av oppgavene fra kalenderen, Mathbridges.

Begrepet «autentisk» oppgave er ikke klart definert. Fagmiljøet har ulike syn på hva som må til for at en oppgave skal være autentisk. På den ene siden er ideen at man kan skape en autentisk oppgave om man har en situasjon fra virkeligheten og tar den inn i klasserommet hvor man løser utfordringene eller problemene som måtte være. Da vil det være mange aspekter som stemmer overens med livet utenfor skolen og kan i så måte defineres som en autentisk oppgave. På den andre siden kan man hevde at det er umulig å ta en autentisk oppgave fra det virkelige liv inn i klasserommet for så å kalle den autentisk. Dette er fordi oppgaven mister en del aspekter i selve overføringen.

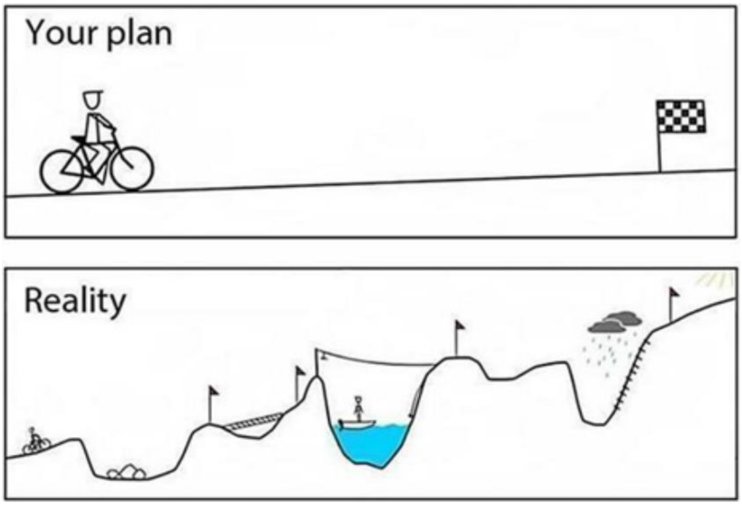
I skolesammenheng er det vanlig å ta utgangspunkt i autentiske situasjoner, for så å stille et spørsmål som ikke er autentisk. Spørsmålet bærer ofte preg av at det er noe spesifikt som skal læres eller sjekkes, og for å komme dit fraviker man gjerne autentisiteten. Jeg har valgt å designe oppgaver med utgangspunkt i autentiske broer, på denne måten tilfører jeg et aspekt fra virkeligheten. Spørsmålet som blir stilt har til hensikt å være et åpent spørsmål som resulterer i at elevene utfordres i alle de forskjellige matematiske ferdighetene i arbeidet med oppgaven. Sett i lys av at jeg designer oppgaver som skal brukes i skolesammenheng, er det viktigere for meg at spørsmålet fungerer etter hensikten enn at det er autentisk. Autentiske oppgaver kan med fordel ha en opprinnelse utenfor skolen med flest mulig aspekter som gjør oppgaven mer virkelighetsnær, eksempelvis et bilde, en video, et artefakt eller en som forteller om førstehåndskunnskap (Vos, 2018). I mine oppgaver tar jeg utgangspunkt i autentiske broer som finnes i nærmiljøet, og dette gir oppgaven et aspekt som kan skape ekstra nysgjerrighet hos elevene.

Det varierer hvor autentisk en oppgave er. Settingen kan være autentisk, selve spørsmålet kan være autentisk, eller så kan oppgaven danne en helhet som oppleves autentisk. Grunnen til at vi stiller oss dette spørsmålet er at det viser seg å være en motiverende faktor når man klarer å koble faget til reelle situasjoner og stille reelle spørsmål. Det er da lettere å se en mening med jobben man gjør. Samtidig erfarer man at matematikken har forskjellige bruksområder. Det autentiske aspektet kan også kobles til Fermi-oppgaver, som ønsker en kobling til virkeligheten og virkelige situasjoner.

3 Metodologi

3.1 Innledning

Den opprinnelige betydningen av ordet metode, er "veien til målet" (figur 10). Veien til målet kan i denne sammenheng ses på som *hvordan* man skal komme fram til målet, men for å finne ut av det, må man først vite hva målet er. Ved å stille seg spørsmålene *hva* vi skal forske på og *hvorfor* vi skal gjennomføre dette forskningsprosjektet, så kan man deretter finne ut *hvordan* det skal gjennomføres. Derfor vil jeg innlede dette kapittelet med å besvare min *hva* og min *hvorfor (Kvale, Brinkmann, Anderssen & Rygge, 2015)*.



Figur 10 Illustrasjon metode

Ved å gjennomføre dette prosjektet så ønsker jeg å finne ut hvordan jeg kan lage gode oppgaver som jeg kan bruke i min matematikkundervisning. Grunnen til at jeg ønsker denne kompetansen er at jeg bedre kan hjelpe mine elever med å få en solid matematisk kompetanse gjennom undervisningen. For å få til det, er jeg overbevist om at gode oppgaver, kombinert med veloverveide undervisningsprinsipper, kan utgjøre en stor forskjell hos elevene.

Mitt syn på hva matematikk er og hvordan det læres vil prege hvilke resultater jeg får ut av min forskning på området. Jeg har en overbevisning om at kunnskap i stor grad formes av aktørene som er med. Mitt ontologiske standpunkt heller derfor kraftig mot konstruksjonismen og det som kjennetegner den. Det ligger mye kunnskap i mellommenneskelige relasjoner som har sitt utspring i enkeltmennesket. Gjennom samarbeid og situasjoner der en utforsker ting sammen med andre, vil øke det totale utviklingspotensialet som eksisterer for hver enkelt. Med tanke på epistemologi, har jeg valgt en metode som blir sterkt preget av et interpretivistisk tankesett hvor mine tanker og holdninger kommer til å farge resultatet uansett hvor mange forhåndsregler jeg tar. Det er mine tolkninger som vil påvirke forskningen i størst grad og derfor stilles det høye krav til meg som forsker ved at jeg er åpen og bevisst på dette. En annen forsker kan få et annet resultat ved å reprodusere mitt forskningsprosjekt. Da min forskning skal se på design av oppgaver og hvordan elevenes matematiske ferdigheter utvikles, har jeg ikke mulighet til å skaffe målbare resultater over en så kort periode. Min oppgave blir å observere, tolke og vurdere virkningen av de forskjellige grepene jeg tar (Bryman, 2016).

Ved å se forskningsspørsmålet opp mot det teoretiske fundamentet beskrevet i kapittel to, vil jeg se hvordan elevene bruker sine ferdigheter i møte med rike oppgaver.

> "I hvilken grad kan jeg designe matematikkoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer i Agder, som utfordrer elevenes ferdigheter innenfor gruppearbeid (Webb, 1982) og hver av de fem komponentene i Kilpatrick et al (2001) sin definisjon av matematisk kompetanse (konseptuell forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse, resonnementsforståelse og engasjement)?"

For å øke motivasjonen og engasjementet hos elevene så tar jeg utgangspunkt i en lokal, autentisk bro. Da kan elevene lettere koble ny kunnskap til egne erfaringer. I arbeidet med en godt designet oppgave vil elevene bruke sin strategiske kompetanse gjennom å tolke oppgaven og trekke ut informasjon som er nødvendig og hensiktsmessig for å løse oppgaven. Når de skal regne seg fram til et svar som bygger på fornuftig argumentasjon, har de behov for regneferdigheter. Ved å være kritisk til eget svar og gjennom å holde styr på forskjellige fakta, metoder og strategier, er det behov for resonnementsforståelse. Hele prosessen i oppgaveløsningen drives av et engasjement og et indre ønske om å få det til. Den konseptuelle forståelsen vil hele tiden se etter større sammenhenger i oppgaveløsingen og bidra til valg av strategier og det å se oppgaven i en større kontekst. Til slutt vil en godt designet modelleringsoppgave være utformet slik at gode matematiske diskusjoner blir en naturlig del av løsningsstrategien. Gjennom samarbeid så får de tips og ideer av hverandre og kan se nye måter å tenke på. På denne måten utvikler de gjensidig kunnskap. Jeg vil se på hvordan denne prosessen er, og deretter skal jeg analysere hvert utsagn opp mot teorien.

3.2 En kvalitativ metode

Forskjellige metoder for å samle inn data kan deles inn i to hovedkategorier, kvalitative og kvantitative metoder. Forskjellen mellom disse defineres primært ut fra hvilke data de produserer. Hvis metoden produserer store mengder data som er kvantifiserbare, regnes metoden som kvantitativ. Dersom det ikke kommer ut kvantifiserbare data, regnes metoden som kvalitativ. I denne sammenheng beror studien på feltobservasjoner, og derfor er denne studien å regne som en kvalitativ studie. Kvalitative metoder er ofte utforskende metoder hvor forskeren ikke kjenner til alle faktorene som vil påvirke studien før den starter. Det vil ikke være hensiktsmessig å benytte seg av standardiserte fremgangsmåter som er lite fleksible overfor nyanser og individuelle situasjoner. I slike tilfeller benytter en seg av en metode som har mulighet til å ta hensyn til ny informasjon, og som kan la denne nye informasjonen være med å styre studien til en viss grad. I kvalitative metoder er teori og praksis gjensidig avhengig av hverandre. Studien tar utgangspunkt i en teori, og resultatet av den samme studien kan være med å utvikle den opprinnelige teorien (Harboe, 2006).

Kvalitative metoder har som regel et relativt begrenset antall mennesker med i studien, og vil foregå i et avgrenset empirisk felt hvor forskeren ønsker å gå i dybden. Målet er ikke å komme fram til et generaliserende resultat som vil gjelde for store befolkningsgrupper. Hovedmålet er å samle inn data og forske på livsnære situasjoner og tolke disse i den gitte konteksten (Harboe, 2006).

I denne oppgaven skal jeg bruke "designforskning" som metode. Dette er en relativt ny forskningsmetode, og jeg vil derfor "låne" noen elementer fra "aksjonsforskning" ved behov, ettersom denne metoden er mer kjent og har lenger tradisjon.

3.3 Aksjonsforskning

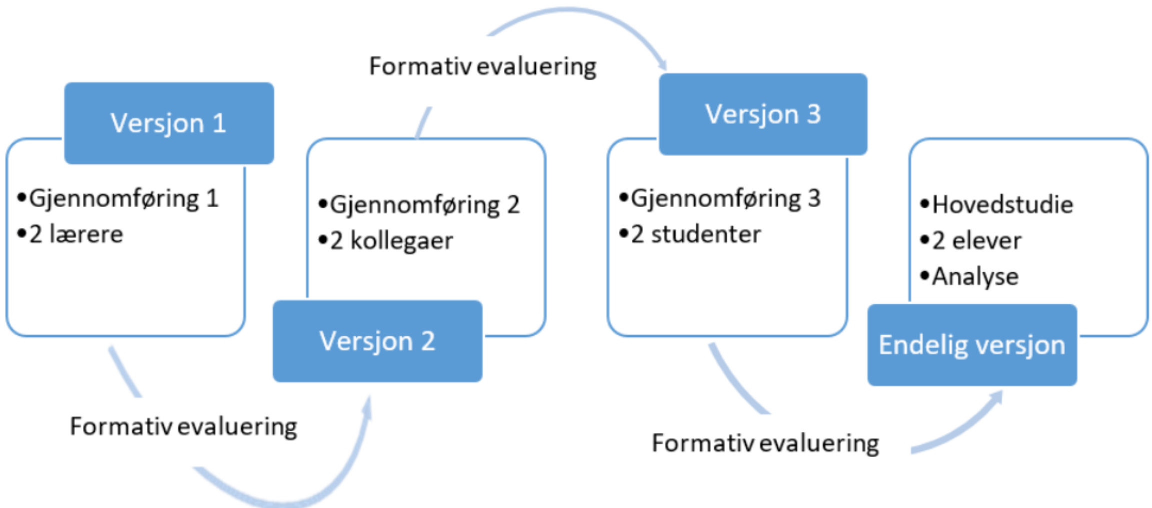
Aksjonsforskning er et begrep som ble innført av sosialpsykolog Kurt Lewin på 1940-tallet. Lewin beskrev aksjonsforskning som en spiral bestående av fire faser: planlegge, gjennomføre, observere og reflektere. Aksjonsforskning utføres vanligvis av en person som er både forsker og utøver / bruker. For eksempel kan lærere forske på hvordan og på hvilke måter visse aspekter av deres undervisning er effektive. Denne forskningen kan så belyse og forbedre egen, nåværende praksis. Carr og Kemmis hevdet at aksjonsforskning har de viktigste elementene til å forbedre og å involvere utøvere i alle faser, planlegging, gjennomføring, observasjon og refleksjon. Det er et ønske om å øke forståelsen hos forskeren, forbedre egen praksis, og praksis som helhet (Wellington, 2015).

Det å reflektere over og lære av egen praksis, er noe som ligger medfødt i oss, og det er på den måten vi utvikler våre egenskaper og ferdigheter. Uten å tenke over det, gjør vi ting, for så å reflektere og evaluere hvordan det gikk. Om det er å gå, synge, sykle eller regne matteoppgaver, er dette stort sett noe vi gjør uten å tenke over at vi reflekterer og evaluerer våre egne prosesser. Hvis det gikk bra, gjør vi det på samme måten neste gang, men mest sannsynlig så er det et forbedringspotensial slik at vi ved neste forsøk gjør en liten justering, og på denne måten perfeksjonerer vi ferdigheten. I denne oppgaven skal jeg bruke mange av disse naturlige elementene for å utvikle min egen ferdighet og kunnskap innenfor dette området. Stegene som gjøres i prosessen skal komme tydeligere fram og jeg skal være mer bevisst på hva som skjer og hva som gjøres i hvert steg. Måten jeg skal utføre min forskning på vil ha elementer fra aksjonsforskning. Som et vidt begrep kan det defineres som en måte å angripe et problem på, som blir løst gjennom et samarbeid utført av forskeren og, i mitt tilfelle, elevene ved å utforske et problem, for så å finne en løsning på problemet på bakgrunn av erfaringene gjort i utforskningen (Bryman, 2016).

For å vise bredden i hvordan aksjonsforskning tolkes, skal vi se på noen korte forklaringer på hva det er. Det grunnleggende målet med aksjonsforskning er å forbedre praksis. Slik oppsummerer Elliott hva som er målet med aksjonsforskning, og det er meget beskrivende. Det er et godt utgangspunkt ved at det umiddelbart gir en klar og eksplisitt link til praksis, og understreker at vi her snakker om en lærer i trening, en lærer eller lærerassistent i klasserommet, en skoleleder eller en annen utøver som ønsker å utvikle seg (McAteer, 2013). Aksjonsforskning, som navnet antyder, handler om å skape kunnskap fra, og å analysere egen praksis, og å forbedre praksis ved hjelp av den kunnskapen (Erbilgin, 2019). Aksjonsforskning er en systematisk undersøkelse av forskere innen utdanning, som samler informasjon om hvor godt elevene lærer når det settes nye rammer, eller det testes ut nye ideer (Mostofo & Zambo, 2015).

3.4 Designforskning

Designforskning er et relativt nytt fenomen innen forskning og er derfor utelatt av mange når det oppsummeres hvilke forskjellige metoder vi kan bruke i forskning. Denne måten å forske på er best egnet til å se på komplekse situasjoner hvor det skjer jevnlige vurderinger for å tilpasse forskningen til situasjonen. I mitt tilfelle gjelder dette når jeg vurderer gjennomføringen av en oppgaveløsning, for så å justere oppgavene før neste gjennomføring.



Figur 11 Illustrasjon av min designforskning

Designforskning har mange likhetstrekk med aksjonsforskning som beskrevet over. Hovedforskjellen på designforskning og aksjonsforskning er at sistnevnte ikke tar sikte på å lage prinsipper som fremmer design. Designforskning har en spesiell nisje hos profesjonelle som ønsker å bruke forskning for å forbedre egen praksis (Akker, 2006).

Jeg skal nå gå litt dypere inn i kriteriene, fordelene og ulempene med designforsking. Designforskning er forskning som har til hensikt å designe og utvikle tiltak til spesifikke utfordringer innenfor opplæringen. Jeg ønsker å øke min kompetanse på hva som kjennetegner tiltakene, og hva som inngår i design- og utviklingsprosessen. Alternativt kan metoden brukes til å designe og utvikle læringstiltak med den hensikt å utvikle og validere aktuelle teorier.

Designforskning er ikke så unik at den kan fravike retningslinjene for forskning på en mer generell basis. Shavelson og Towne lister opp en rekke veiledende prinsipper som bør være tilstede ved alle typer forskning.

- Stille meningsfulle spørsmål som kan bli undersøkt.
- Vise sammenheng mellom forskning og teori.
- Bruke metoder som gir mulighet for å undersøke spørsmålet direkte.
- Gi sammenhengende og eksplisitt resonnement.
- Gjenskape og generalisere på tvers av studier.
- Oppgi forskning for å oppmuntre til faglig gransking og kritikk.
  (Akker, 2006, s. 15)

Designforskning kan deles i to hovedkategorier. Valideringsstudier, som omhandler utvikling og validering av teorier, og utviklingsstudier.

Hensikten med pedagogisk designforskning er å designe forskningsbaserte løsninger i undervisningsøyemed. Denne typen designforskning er definert som systematisk analyse, design og evaluering av pedagogiske tiltak med en dobbel agenda. Det å generere forskningsbaserte løsninger for komplekse problemer i pedagogisk praksis på den ene siden, og det å fremme vår kunnskap om karakteristikkene til disse tiltakene og prosessene for å designe og utvikle dem på den andre siden.

Ifølge Akker et al. (2006) kan en tenke at designforskning, og i denne sammenheng, utviklingsstudier, består av følgende tre faser. Denne metoden har jeg tilpasset mitt prosjekt og beskrevet hva som inngår i de forskjellige fasene for min del.

- *Foreløpig forskning:* Utforske litteraturen i feltet, utvikling av konseptuelle og teoretiske rammer for studien. Utforske broer i nærmiljøet.
- *Utviklingsfase:* en designfase bestående av gjentakelser, hvor hver og en av syklusene kan ses på som en mikrosyklus av forskning med formativ evaluering som den viktigste forskningsaktiviteten rettet mot å forbedre og spisse tiltaket. Jeg vil observere tre grupper og gjøre formative evalueringer på bakgrunn av deres gjennomføringer.
- *Evalueringsfase:* summativ evaluering for å konkludere om løsningen eller vår inngripen oppfyller de forhåndsbestemte spesifikasjonene. Studien evalueres i den siste gjennomføringen ved hjelp av en grundig analyse.

Disse tre punktene sammen med den systematiske refleksjonen innad i hver fase forsikrer at tiltaket er utviklet på et forskningsbasert materiale med god dokumentasjon. Dette kaller vi forskningsdesign.

Jeg skal i min oppgave gjøre et utviklingsstudium hvor jeg skal designe oppgaver med mål om å gi eleven en relevant matematisk kompetanse. Hensikten med å bruke denne metoden er å ende opp med et gjennomarbeidet produkt som har gjennomgått flere runder med testing, refleksjon og revisjon (figur 11). I tillegg vil jeg utvikle min egen kunnskap rundt det å designe oppgaver slik at jeg ved en senere anledning kjenner igjen de designprinsippene, egenskapene og karakteristikkene som bør være tilstede i en åpen, utfordrende oppgave. Kunnskapen man sitter igjen med etter et slikt prosjekt vil avhenge av om det er sementert i teoretiske argumenter som har ført prosjektet i riktig retning og støtter de empiriske funnene som gir bakgrunn for karakteristikkene. På bakgrunn av dette sier Akker et al. (2006) at den siste fasen i ethvert forskningsdesignprosjekt bør bestå av systematisk refleksjon og dokumentasjon slik at begrunnelsen for å lage designprinsipper blir så god som mulig.

Hver gjentakelse eller syklus kan ses på som et lite forskningsprosjekt som sammen danner en total, og den inkluderer alle de små prosjektene som utfyller hverandre og viser utviklingen i prosjektet på en god og beskrivende måte. På denne måten vil empirien og refleksjoner rundt den kunne skape et grunnlag for å utvikle prinsipper for hvordan designet av en oppgave kan se ut.

Hver syklus begynner med noen få evalueringsspørsmål som reflekterer de kvalitetskriteriene som vil bli lagt vekt på i den syklusen, som da bidrar til utforming og utvikling av forskningen.

Det finnes mange forskjellige metoder for formativ evaluering en kan velge mellom.

- Ekspertvurdering og / eller fokusgrupper, viktig å vurdere "eksperter i hva".
- Selvevaluering eller screening, bruk sjekkliste over viktige egenskaper eller design spesifikasjoner.
- En-til-en-vurdering eller gjennomgang, med en representant for målgruppen.
- Liten gruppe eller mikroevaluering.
- Feltprøve eller utprøving.

Det foreslås at i de tidlige stadier av designforskning bør fokus være på designprosessen med aktiv involvering av utøvere involvert i, eller kjent med, visjonen og ideene som er underliggende i tiltaket.

Etter en rekke repetisjoner, med små justeringer på bakgrunn av erfaringene, kan forskeren konkludere med at, basert på analysen av evalueringsdataene, "realiserte resultater" er nær nok til de "forventede resultatene", for så å konkludere med at designprinsippene ser ut til å være effektive.

I designforskning, som i case-studier og eksperimentelle studier, kan ikke funnene generaliseres altfor mye ettersom det er så mange ukjente faktorer som spiller inn. Likevel er det ønskelig at en strekker seg mot å generalisere der det er mulig, om man ser noen prinsipper innenfor design av oppgaver eller om det er spesielle faktorer som ser ut til å fremme læring hos eleven.

3.4.1 Designforskning og validitet

Ifølge Wellington (2015), handler validiteten til en studie om i hvilken grad en metode måler det metoden har til hensikt å måle. Validiteten kan ses på som en måling av troverdighet, pålitelighet, eller plausibilitet i en forskning. I mitt tilfelle innenfor utdanning, vil det alltid være begrenset validitet i forskning som blir gjort. Det vil alltid være et spørsmål om hvilke faktorer som spilte inn i akkurat den seansen, gjennomføringen eller situasjonen. Det jeg har fått målt er elevenes evne til å løse tre spesifikke oppgaver på den aktuelle dagen, på det aktuelle tidspunktet og i den aktuelle settingen som jeg valgte. Resultatene kunne blitt annerledes om jeg hadde valgt en annen dag, et annet sted, eller en annen form på gjennomføringen. Dette er viktig å kjenne til, og ha reflektert over, før man konkluderer med noe. Det jeg likevel håper å få fram er at det er flere aspekter og momenter som vil gå igjen om man hadde endret premissene for gjennomføringen.

Forskeren innehar flere roller i utviklingen av modelleringsoppgaver, forskeren både designer, evaluerer og implementerer. Dette kan by på flere utfordringer ettersom det da kan være vanskelig å se resultatet fra flere sider. Det er naturlig å tro at andre vil forstå oppgaven annerledes enn slik en selv forstår den. I et klasserom vil det være like mange tolkninger av en rik oppgave som det er elever i rommet. En del vil naturligvis ha sterke likhetstrekk, men man må ta høyde for, og vise forståelse for, de som tenker annerledes.

Ifølge Van den Akker (2006), stilles det høye krav til en forsker når det er snakk om tilpassingsevne. For å maksimere utbyttet av forskningen, bør forskeren utnytte samspillet mellom forskning og praksis gjennom å vise tilpasningsevne når det oppstår situasjoner som med fordel kan utnyttes. Det være seg å møte forberedt og sjonglere mellom rollene som designer, veileder og tilrettelegger, samtidig som en klarer å se helheten som forsker. En må til enhver tid være åpen for endringer i forskningsdesign hvis prosessen krever det og i tillegg må man la deltakerne ha mulighet til å være med på å forme prosessen ettersom de er med på å utvikle designet ved å vurdere oppgavene fra et annet ståsted, og da gjerne med en åpenhet det er vanskelig for meg som forsker å ha.

Basert på tidligere arbeid, kan det nevnes en rekke generiske kriterier for tiltak av høy kvalitet, nemlig validitet, effektivitet og i tillegg skal det være praktisk.
- Tiltaket skal møte et behov, og komponentene skal baseres på enestående, ikke utdaterte kunnskaper (relevans) og alle komponenter skal være knyttet til hverandre (konsistens). Hvis tiltaket oppfyller disse kravene, anses det å være gyldig.
-En annen karakteristikk for tiltak av høy kvalitet er at lærere anser tiltaket som et godt arbeidsverktøy, og at det er enkelt for dem å bruke det på en måte som i stor grad er forenlig med utvikleres intensjoner. ... Hvis disse betingelsene er oppfylt, definerer vi tiltakene som praktiske.
-En tredje egenskap ved tiltak av høy kvalitet, er at de resulterer i ønsket utfall, og da kan vi si at tiltaket er effektivt.
(Akker, 2006)

En annen utfordring er hvordan jeg som forsker påvirker min egen forskning. Jeg kjenner virkeligheten gjennom å observere den, men hvordan kan jeg være sikker på at min måling og oppfatning samsvarer med virkeligheten? Hva eller hvem bestemmer graden av validitet? Det finnes ingen fasit på dette. Vi står sammen om å definere hva validitet er. Denne oppgaven krever mye av meg som forsker, blant annet at jeg klarer å ta den nødvendige avstanden fra arbeidet slik at min analyse, mine refleksjoner og mine drøftinger er godt begrunnede og velfundamenterte i teori og empiri. Desto bedre jeg klarer å gjennomføre forskningen i henhold til dette, jo bedre intern validitet vil den ha (Wellington, 2015).

Den eksterne validiteten har mange av de samme utfordringene som den interne. For å gjennomføre en studie med høy ekstern kvalitet, vil dette være studier av en viss størrelse. Akker et al. (2006) siterer Lee Cronbach, en av 1900-tallets mest innflytelsesrike forskere innen utdanning: *"When we give proper weight to local conditions, any generalization is a working hypothesis, not a conclusion"* (Akker, 2006, s. 34).

3.4.2 Designforskning og etikk

Det etiske aspektet innenfor designforskning er ikke spesielt godt utforsket eller dokumentert. Jeg velger derfor å se på etiske aspekt ved aksjonsforskning og se etter sammenhenger som er aktuelle for min forskning. Etiske spørsmål har ikke noen absolutter hva gjelder rett og galt. Vi befinner oss i et landskap hvor vi må vurdere hver situasjon for seg, for så å ta kloke, gjennomtenkte valg. I mitt tilfelle skal jeg forske på min egen praksis, og i den sammenhengen kollapser mange av de tradisjonelle retningslinjene for de etiske utfordringene. Jeg tar utgangspunkt i en guide (Zeni, 1998) som er tilpasset aksjonsforskning. Den består i hovedsak av kritiske spørsmål en bør stille seg, og aktuelle problemstillinger man bør reflektere over.

Jeg jobber som lærer, og jeg skal observere en gruppe elever som jobber med et sett modelleringsoppgaver. Jeg underviser ikke de aktuelle elevene til vanlig, men jeg jobber som lærer på samme skole, og derfor må jeg ta hensyn til at det er et skjevt maktforhold. For at dette skal påvirke minst mulig, har jeg omtalt dette i infoskrivet, som vi kommer tilbake til senere, slik at denne forskningen ikke skal påvirke vårt forhold, eller deres forhold til skolen på noen som helst måte. De aktuelle elevene, samt mine lærerkollegaer, kan oppnå en fordel gjennom denne forskningen ettersom jeg skal presentere mine resultater og ideer for mine kollegaer, altså deres lærere. Da kan de bli inspirert til en mer variert undervisning med nye tanker og innspill som strekker seg fram mot målene i den nye læreplanen. Forskningen vil også publiseres, slik at enhver som ønsker økt innsikt innenfor feltet har mulighet til å bygge på resultater og erfaringer fra denne forskningen.

Det er veldig viktig for meg at deltakerne i min forskning skal være beskyttet under og etter studien. Jeg har informert alle deltakerne muntlig om studiens omfang og hvordan den skal bli gjennomført. De har også fått er dokument (vedlegg 1), som de har skrevet under på. Dette dokumentet informerer om alle rettigheter de har som deltakere, og at de til enhver tid, og uten ulempe, kan trekke seg som deltaker, og at alt arbeidet de da har bidratt med ikke vil bli brukt i studien. Alle deltakere vil være anonymisert i studien og i arbeidet underveis. Lydopptak og notater vil bli slettet og destruert etter at studien er fullført, og mens studien pågår, lagres all data i låst skap og på passordbasert skylagring.

Før man starter en slik studie har man allerede en tanke om hvilke resultater som vil komme av den, men som all annen forskning, må jeg la resultatene mine hvile på empiriske data sammen med mine vurderinger. Om resultatene skulle utebli eller ikke skulle samsvare med mine forventninger, må jeg ikke, under noen omstendigheter, trekke slutninger det ikke er belegg for.

3.5 Foreløpig forskning og utviklingsfasen

3.5.1 Foreløpig forskning

Prosessen med denne oppgaven og utviklingen av disse oppgavene startet allerede i september 2018. Da jeg valgte å delta på dette prosjektet, gikk det bare noen få dager før jeg fikk en idé om en bro som tidligere hadde fascinert meg da jeg var der et par år tidligere. På skolen der jeg jobber spurte jeg rundt om de kjente til noen interessante broer som enten er spesielt vakre, eller har noe annet litt spesielt ved seg. I starten var jeg veldig opptatt av at broen skulle være så spektakulær som mulig, både at den skulle være estetisk vakker med mulighet for et pent bilde som man kan ha i en kalender og at den skulle være "one of a kind". I løpet av den første måneden hadde jeg fått inn tips fra kollegaer og gjort research på egenhånd, og totalt sto jeg nå med ni mulige broer som jeg skulle utforske videre. Jeg hadde allerede noen ideer til mulige oppgaver til noen av broene, men manglet også oppgaveideer til flere. Etter å ha kjørt rundt og sett på og tatt bilder av alle broene ble tre av broene forkastet umiddelbart da de ikke sto til forventningene. Jeg ble inspirert av å se broene på nært hold, og dette ga meg mange ideer med tanke på nye vinklinger på flere oppgaver. I utgangen av november så hadde jeg seks broer som var aktuelle, jeg fikk også tips og innspill til mulige oppgaver til de forskjellige broene av en kamerat og av veileder. Parallelt med dette søkte jeg etter aktuell litteratur på området og gikk tilbake i en del av kursene jeg har gjennomført som ledd i utdanningen. Dette var en sonderingsprosess hvor jeg fant og leste litteratur som var aktuell for min studie. Denne researchen har hjulpet meg i arbeidet og resultert i både oversikt og trygghet i det faglige landskapet.

3.5.2 Utviklingsfasen

Målet med studien er å designe modelleringsoppgaver som tar utgangspunkt i autentiske broer, som krever at elevene blir utfordret på hele sin matematiske kompetanse i arbeidet med oppgavene. For å kvalitetssikre dette har jeg observert tre gjennomføringer i utviklingsfasen hvor forskjellige grupper jobbet med oppgavene. I etterkant av hver gjennomføring har jeg gjort en formativ evaluering av seansen og gjort endringer på oppgavene der jeg så det tjenlig. I hovedstudien testet jeg oppgavene ut på elever i videregående skole. Jeg vil i dette delkapittelet beskrive hvordan utviklingen av oppgavene foregikk (figur 12). De tre gruppene jeg observerte i utviklingsfasen, hver bestående av to stykker, var lærere eller lærerstudenter. De samarbeidet i oppgaveløsningen og jeg tok feltnotater (vedlegg 10) underveis i gjennomføringen samtidig som jeg tok lydopptak av seansene. Jeg brukte et observasjonsark for å få mer ut av feltnotatene når jeg observerte gruppe 1 (vedlegg 2). Dette observasjonsarket ble revidert til runde to slik at det passet bedre til situasjonen (vedlegg 3). Jeg brukte det reviderte observasjonsarket i de to siste gjennomføringene i utviklingsfasen og i hovedstudien. Gruppen jeg observerte i hovedstudien besto av to elever som går på videregående skole. Min rolle som forsker er hovedsakelig observatør, men jeg vil besvare spørsmål fra elevene som har med forståelsen av oppgaven å gjøre, eller om det er andre spørsmål rundt gjennomføringen. Jeg ønsker å ha en så tilbaketrukket rolle som mulig, slik at jeg påvirker gruppen i minst mulig grad.

Gjennom føring	Dato	Fase	Antall deltakere	Deltakere	Formativ evaluering (refleksjoner og endringer)	Dybdeanalyse på Kilpatrick et el.
1	04.12.2018	Utviklingsfase	2	Lærere	Ja	Nei
2	11.02.2019	Utviklingsfase	2	Lærere	Ja	Nei
3	15.02.2019	Utviklingsfase	2	Studenter	Ja	Nei
4	26.02.2019	Evalueringsfase	2	Elever, hovedstudie	Nei	Ja

Figur 12 Oversikt over utviklingsfasen

Jeg vil i dette delkapittelet ta for meg de tre gjennomføringene hvor modelleringsoppgavene, med utgangspunkt i autentiske broer, ble utviklet. I de neste delkapitlene skal jeg gi en formativ evaluering av elevenes arbeid med oppgavene slik at oppgavene er best mulig gjennomarbeidet til hovedstudien.

3.5.3 Første gjennomføring i utviklingsfasen

Målet med første gjennomføring var å se hvordan det første utkastet av mine modelleringsoppgaver ble løst av en gruppe. I etterkant av gjennomføringen foretok jeg en formativ evaluering.

3.5.3.1 Organisering

Første gjennomføring var med en kamerat, som for øyeblikket tar videreutdanning i matematikk. Han hadde med seg en kollega, som også tar videreutdanning i matematikk, og de er begge lærere på barnetrinnet. Oppgavene var organisert i rangert rekkefølge slik at de oppgavene jeg likte best kom først (vedlegg 4), og jeg antok at de ville bruke i underkant av en time på oppgavene. Jeg informerte om at jeg observerer, men at det er mulig å stille spørsmål hvis de lurer på noe underveis. Jeg oppfordret dem til å tenke høyt slik at jeg kunne få mest mulig informasjon ut av seansen. Jeg har laget et observasjonsark hvor jeg noterte ned hvilke strategier og hvilke kompetanseområder de brukte i arbeidet med oppgavene.

3.5.3.2 Oppsummering av første gjennomføring

Gruppen var ferdig med oppgave 4 etter cirka en time, og da ga de uttrykk for at de begynte å bli lei. Derfor sa jeg at det var én oppgave igjen slik at de hadde fått regnet fem av de planlagte seks oppgavene. På oppgave 2 spurte de om å bruke hjelpemidler i form av Google, og dette sa jeg var greit. Etter dette endret de strategi og forsøkte å finne svar og informasjon på Google hver gang de sto fast. De samarbeidet godt og begge fant sin rolle i gruppen, de var likeverdige. Det var stor variasjon i tidsbruken på de forskjellige oppgavene og de kom fram til en løsning hver gang.

3.5.3.3 Evaluering av første gjennomføring

Etter første gjennomføring så jeg at observasjonsarket mitt ikke ga meg den informasjonen og oversikten jeg søkte. Etter å ha lest både teori og metode lagde jeg et nytt observasjonsskjema som ville synliggjøre hvilke matematiske ferdigheter som ble brukt, sett i lys av Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder supplert med Webb (1982) sin teori rundt gruppearbeid. Jeg tenkte å endre dette slik at jeg kunne se på de forskjellige kompetanseområdene som omfattes av teorien min, og om elevene brukte disse kompetansene i møte med oppgavene.

Gjennomføringen bar preg av at jeg ikke hadde tenkt på alle aspekter rundt oppgaveløsingen og spørsmål som kom opp underveis. Jeg fikk tidlig spørsmål om bruk av hjelpemidler, noe jeg tillot, og dette preget seansen i stor grad. Ved ethvert hinder brukte gruppen Google før de egentlig tok seg tid til å diskutere, resonnere eller utforske problemet. Bakgrunnen for at jeg tillot bruk av hjelpemidler er min tanke om at disse oppgavene skal være en del av en kalender, og i en slik situasjon vil alle hjelpemidler være tilgjengelig. Jeg ville derfor forsøke å endre spørsmålsformuleringen slik at behovet for Google skulle bli mindre. Det var foreløpig usikkert hvordan jeg kunne gjøre dette.

I utgangspunktet var det tenkt at de skulle gjøre seks oppgaver, men etter en vurdering etter oppgave 4, avsluttet de etter den femte oppgaven. Dette var på grunn av at jeg var veldig i tvil om jeg skulle ha med den siste oppgaven om Knuden bro (vedlegg 4) i det hele tatt. Dette, sammen med at oppgavene tok mye lenger tid enn antatt, resulterte i at den ble sløyfet.

Første gjennomføring var veldig oppløftende og jeg gjorde, stort sett, kun små justeringer på oppgavene før neste gjennomføring. Det ble tydelig hvilke begreper jeg burde unngå og at jeg burde endre formuleringen på noen av oppgavene. Jeg hadde, parallelt med utviklingen av oppgavene, lest teori om modelleringsoppgaver og hvilke aspekter som gjør en oppgave mest mulig autentisk. Dette fikk meg til å revurdere spørsmålsstillingen spesielt, hvordan spørsmålene ble stilt, og i hvilken setting spørsmålene burde bli stilt.

3.5.4 Andre gjennomføring i utviklingsfasen

Det hadde blitt gjort noen endringer i oppgaveformuleringen i noen av oppgavene (vedlegg 5), men det var fortsatt de samme broene som var med i oppgaveheftet. Jeg hadde designet en ekstra oppgave til Hornesund bro, så der var det nå to oppgaver.

3.5.4.1 Organisering

I andre gjennomføring var det to kollegaer fra min Fylkeskommunale skole som deltok, og de underviser begge matematikk på videregående skole. Gjennomføringen foregikk i februar, og oppgavesettet besto av fem oppgaver. Jeg hadde laget et nytt observasjonsark slik at jeg lettere skulle få oversikten over hvilke matematiske ferdigheter som ble brukt i de forskjellige oppgavene. Gjennom å operasjonalisere ferdighetene fra Kilpatrick et al. (2001) og Webb (1982), ville jeg identifisere hvor og når de brukte de forskjellige ferdighetene. Jeg endret rekkefølgen på oppgaven. Denne gangen forsøkte jeg å fordele de tunge oppgavene slik at det skulle være lettere å bearbeide og motivere seg gjennom oppgaveheftet.

3.5.4.2 Oppsummering av andre gjennomføring

Deltakerne i gruppen har høyere utdanning i matematikk, og seansen ble preget av det. De hadde en akademisk tilnærming til problemene og forsøkte å bruke avansert matematikk til å løse oppgavene. Gruppen samarbeidet godt, og begge deltakerne bidro i samtlige oppgaver. De brukte en time og et kvarter på oppgaveheftet og kommuniserte at de var slitne på slutten.

3.5.4.3 Evaluering av andre gjennomføring

Det nye observasjonsarket ga en bedre oversikt over hvilke matematiske ferdigheter som ble brukt i arbeidet med hver av oppgavene. Dette var nyttig for meg slik at jeg ved hjelp av en overfladisk analyse kunne se om oppgavene utfordret de matematiske kompetansene de var tiltenkt. Det var vanskelig å forutse hvor tiden skulle bli brukt ettersom det varierte på de to gruppene (figur 14). De brukte omtrent like lang tid på oppgavesettet, men tiden de brukte på hvilke oppgaver, samsvarte ikke. Endringen i rekkefølge gjorde at de lettere oppgavene kom mot slutten, og jeg så det som en fordel, ettersom seansen varte i over en time. Jeg fikk noen svar som hjalp meg videre, og jeg tok bort Slettene bru da den ikke fungerte tilfredsstillende. Den nye oppgaven til Hornesund bro gikk ikke som planlagt samtidig som den opprinnelige oppgaven fungerte bedre enn ved forrige gjennomføring. Dette førte til at jeg skrinla den nye oppgaven og beholdt den opprinnelige.

3.5.5 Tredje gjennomføring i utviklingsfasen

Figur 13 Justøya bro, foto: Øyvind Bjerkholt

Dette var siste gjennomføring i utviklingsfasen før jeg skulle i gang med hovedstudien og prøve oppgavene på en gruppe elever som går på videregående skole. Jeg ville forsøke en ny oppgaveide til Justøya bro siden jeg kom over et stilig bilde av broa (figur 13), men jeg ville ikke skrinlegge den opprinnelige oppgaven tilhørende Justøya bro. Etter å ha rekognosert Justøya bro, ble jeg inspirert til å designe en oppgave hvor man må se på forholdet mellom fart, avstand og tid. Det ble veldig spennende å se om den utspilte seg i den retningen som jeg hadde hatt til hensikt da jeg lagde oppgaven (vedlegg 6).

3.5.5.1 Organisering

Den tredje gjennomføringen foregikk med to medstudenter i et grupperom på UiA, de er begge siste års masterstudenter i matematikk. Oppgavesettet besto igjen av fem oppgaver, hvor to av oppgavene var om Justøya bro. Jeg brukte samme observasjonsark som sist, ettersom dette fungerte utmerket og ga en god oversikt over hvilke matematiske kompetanser som ble brukt i oppgaveløsingen. Jeg hadde allerede fått en god pekepinn på hva som fungerte bra og ikke. Det var gjort noen forandringer i ordlyden til et par av oppgavene, mens andre var uforandret.

3.5.5.2 Oppsummering av tredje gjennomføring

Denne tredje gruppen samarbeidet på en annen måte enn de to første gruppene. I starten av hver oppgave gjorde de egne notater og forsøkte å løse oppgaven på egen hånd, for så å dele sine fremgangsmåter og resultater. De var veldig omstendelige i arbeidet og inkluderte mange aspekter i hver av oppgavene. Ettersom de regnet hver for seg og ingen av de to var opptatt av å kjempe for sitt svar, ble løsningen på oppgaven levert i form av et intervall. Det var tidvis veldig store intervaller, sett opp mot svarets størrelse.

3.5.5.3 Evaluering av tredje gjennomføring

Denne siste gruppen jeg observerte, jobbet på en annen måte enn de to foregående gruppene. Etter de hadde blitt enige om premissene for oppgaven, jobbet de individuelt før de så presenterte tankene sine for hverandre. Når gruppen valgte en slik samarbeidsstruktur, var det utfordrende å følge tankegangen til deltakerne underveis i prosessene og gruppen så ut til å miste mange av fordelene ved å jobbe i par. Jeg fikk likevel noe ut av dette, det viste seg at oppgavene også kunne jobbes med individuelt og at oppgavene fortsatt utfordret ferdighetene som beskrevet av Kilpatrick et al. (2001). Denne gjennomføringen ble en bekreftelse på hva jeg tidligere har sett.

3.5.6 Resultat av utviklingsfasen

Etter den siste gjennomføringen i utviklingsfasen ble det, i veiledning, stilt spørsmål ved mitt fokus med disse oppgavene. Utgangspunktet for denne studien var at jeg meldte meg på et prosjekt. Jeg skulle utvikle oppgaver til tre broer med intensjon om å være med i en kalender. Jeg lot dette styre prosessen i for stor grad da jeg tillot alle hjelpemidler til enhver tid. Mitt fokus burde vært mer på elevene, og hvordan jeg kunne designe gode matematiske oppgaver som gir de muligheten til å få en bred matematisk kompetanse i en skolesammenheng. Det er det som er hovedstudien. På bakgrunn av dette tok jeg mindre hensyn til Google, hva som finnes der, og hvordan det påvirker oppgavene. I en klasseromssituasjon vil jeg styre bruken av hjelpemidler som elevene kan bruke til enhver tid. Dette påvirket også mitt valg av oppgaver til hovedstudien. En av oppgavene hadde jeg forkastet siden det var for enkelt å finne svaret i Google. I og med at jeg nå, før evalueringsfasen, hadde fått nye tanker om hvordan oppgavene skulle fungere, ønsket jeg å hente tilbake den første oppgaven om Justøya bro da jeg synes den hadde mange gode egenskaper. I utviklingsfasene hadde jeg justert oppgavene slik at de skulle være enkle å forstå, samtidig som de utfordret de matematiske ferdighetene slik at den totale matematiske kompetansen kunne utvikle seg på en adekvat måte.

Ved å ha observert tre gjennomføringer så jeg både muligheter og utfordringer i oppgavene. Spesielle ord og uttrykk kunne med fordel sløyfes, og oppgaveteksten burde unngå ord og begreper som ikke er allment kjent. Siden samarbeidsstrategier og samarbeidsevner varierte i stor grad, ble det stilt spesielt høye krav til oppgavene. Mitt mål var å designe modelleringsoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer, hvor den matematiske kompetansen ble utfordret. Dette inkluderte også samarbeid og hvordan man kunne dra nytte av andres kunnskap, samtidig som man utviklet strategier sammen. Alle de tre oppgavene jeg hadde med videre til hovedstudien hadde vært med i samtlige gjennomføringer (figur 14). De nye tankene og ideene som kom inn midt i prosessen, hadde ikke høy nok kvalitet, og derfor ble de forkastet. De forkastede oppgavene var likevel viktige for å belyse styrker i de andre oppgavene, slik at utviklingen av dem ble best mulig.

	Gruppe	1	2	3	Hovedstudien
Tømmerrenna	Oppgavenr	1	5	2	3
	Tidsbruk	10min	18min	23min	52min
Slettene Bro	Oppgavenr	2	2	-	-
	Tidsbruk	18min	15min	-	-
Justøya bro, høyde	Oppgavenr	3	4	5	1
	Tidsbruk	6min	8min	12min	21min
Kiledalskleiva Bru	Oppgavenr	4	1	4	-
	Tidsbruk	24min	6min	15min	-
Hornesund Bro, omvei	Oppgavenr	5	3	3	2
	Tidsbruk	15min	15min	22min	34min
Knuden Bro	Oppgavenr	-	-	-	-
Hornesund Bro, sirkel	Oppgavenr	-	3	-	-
	Tidsbruk	-	12min	-	-
Justøya bro. Lysregulering	Oppgavenr	-	-	1	-
	Tidsbruk	-	-	12min	-
	Total	73min	74min	84min	107min

Figur 14 Oversikt over gjennomførte oppgaver. Den viser hvilket oppgavenummer oppgaven var i oppgavesettet og tiden som ble brukt på å løse hver enkelt oppgave

3.6 Metode til hovedstudien

3.6.1 Oppgavene – resultatet fra utviklingsfasen

Helt fra starten av denne studien har målet vært å designe tre modelleringsoppgaver som tar utgangspunkt i tre forskjellige, autentiske broer i Agder som utfordrer den matematiske kompetansen i arbeidet med oppgavene. Gjennom utviklingsfasen har jeg observert, evaluert og revidert forskjellige oppgaver, og de tre oppgavene jeg synes har fungert best skal brukes i hovedstudien. Jeg har også utarbeidet et løsningsforslag (vedlegg 8) som viser en mulighet til å løse oppgavene.

3.6.2 Deltakerne i hovedstudien

Etter tre gjennomganger av oppgavene, var neste steg å prøve ut oppgavene på elever. Det var ønskelig å gjennomføre med tre elever men det viste seg at det bare var to av de aktuelle som var tilgjengelig på gjennomføringstidspunktet. Gruppen besto derfor av to elever ved videregående skole. De er vant til å jobbe sammen og samarbeider til daglig i opplæringen. Jeg er lærer på samme skole der de går, men på en annen avdeling. Likevel var det noe som kunne påvirke gjennomføringen. Jeg tror det var positivt at elevene kjenner meg, og de ga aldri uttrykk for at de følte noe stress, press eller annet ubehag. I denne seansen tok jeg lydopptak og feltnotater, samtidig brukte jeg det samme observasjonsarket som tidligere. Arbeidsøkten foregikk på skolen i kjente omgivelser for alle parter, og jeg beregnet at gjennomføringen skulle ta en time.

Jeg skal gi en dypere analyse av kommunikasjonen mellom elevene, og forsøke å belyse i hvilke sammenhenger de bruker de forskjellige matematiske kompetansene, inklusive samarbeidskompetansen som er beskrevet av Kilpatrick et al. (2001) og Webb (1982), i kapittel 4.

3.6.3 Transkripsjon

Det er kun den siste gjennomføringen, min hovedstudie, jeg har analysert. De tre første gruppene var med i utviklingsprosessen og ikke evalueringsprosessen. Derfor er kun lydopptaket fra denne gruppen som har blitt transkribert. Det å gjenskape en arbeidsseanse gjennom et lydopptak, er ikke mulig. Det er mye informasjon det ikke er mulig å legge i et lydspor, være seg håndbevegelser, stemning, ansiktsuttrykk og andre kroppslige bevegelser som utgjør en stor del av den totale kommunikasjonen. Derfor tar jeg feltnotater slik at jeg kan supplere lydsporet med viktig informasjon som ikke er verbal. Videre skal lydsporet gjøres om til tekst, og da blir det tolket på en subjektiv måte av den som transkriberer gjennom hva som blir tatt med, med tanke på hvor nøyaktig og ordrett en skriver. Ved å sette komma på forskjellige plasser, kan en setning endre karakter. Transkripsjonen kan ses på som første del av analysen ettersom mine tolkninger allerede her påvirker materialet. Transkripsjon er en tolkning av det som blir sagt, ikke en eksakt gjengivelse av det som ble kommunisert (Kvale et al., 2015). Kvale et al. (2015) presiserer at det ikke er mulig å si hva som er rett transkripsjon. Dette fordi man allerede her begynner tolkningen av hva som har blitt sagt. Det er ikke mulig å være helt objektiv og materialet vil endre seg når man overfører det fra tale til skrift. I min oppgave har jeg valgt å bruke sitater som er oversatt til litterær form og hvis jeg har sett det hensiktsmessig, har jeg skrevet sitatene grammatisk korrekt så lenge det ikke påvirker innholdet i det som er sagt. Dette gjøres for å skape mer flyt, og at det kan føles bedre for intervjupersonene om de ønsker å lese oppgaven på et senere tidspunkt.

3.6.4 Koding og analyseverktøy

For å få en bedre oversikt og lettere kunne analysere hovedstudien, har jeg kodet datamaterialet. Dette er gjort ved å vurdere hvert utsagn og plassere det innenfor den eller de trådene hvor det passer. Jeg benytter deduktiv koding ettersom jeg, før kodingen, har valgt seks kategorier jeg vil kode etter, basert på teorien. I tilfeller hvor et utsagn ikke kan plasseres, har jeg ikke gitt det noen kode. Var det derimot flere tråder som var synlige, har det fått flere koder. Den visuelle oversikten over kodingen gir et overblikk over hvordan gruppens samtale har beveget seg mellom de forskjellige trådene.

Vi har nå fått et teoretisk bakteppe for hvilket blikk jeg har når jeg skal observere arbeidsøktene med mine egne, designede modelleringsoppgaver. Dette er en framoverrettet måte å se hvordan læring oppstår og utvikler seg. Ideene sammenfaller med hva Utdanningsdirektoratet sier er viktig for å øke realfagskompetansen hos norske elever i sin nasjonale strategi for realfag i barnehagen og grunnskoleopplæringen (Kunnskapsdepartementet, 2015).

Jeg skal nå operasjonalisere denne teorien slik at jeg kan bruke den som et analyseverktøy opp mot arbeidsøktene jeg skal observere og evaluere (figur 15). Gjennom å se på interaksjonen mellom oppgavene og elevenes aktivitet, skal jeg se etter aktivitet som viser bruk av forskjellige ferdigheter slik det er beskrevet av Kilpatrick. For å analysere datamaterialet ved hjelp av trådmodellen, har jeg tolket teorien og gjort den om til et analyseverktøy som jeg kan bruke i denne oppgaven. Jeg har operasjonalisert de fem hovedbegrepene hver for seg og hvordan jeg gjenkjenner de. Dette blir beskrevet i tabellen nedenfor. I teoriens natur vil det være mye større grad av flytende overganger mellom de ulike trådene i, men for å kunne anvende teorien som et analyseverktøy, har jeg likevel forsøkt å trekke noen linjer slik at jeg kan skille dem.

Konseptuell forståelse	• Elevene viser forståelse for konseptene de bruker. • Elevene kan se større sammenhenger mellom oppgavens kontekst, løsningsstrategi og endelig resultat.
Regneferdigheter	• Elevene utfører utregningene nøyaktig og korrekt. • Elevene utfører utregningene effektivt. • Elevene bruker hensiktsmessige metoder i utregningen.
Strategisk kompetanse	• Elevene jobber med å forstå hva det blir spurt om. • Elevene henter ut viktig informasjon som trengs for å løse oppgaven. • Elevene utvikler strategier som er hensiktsmessige for å løse oppgaven. • Elevene gjenkjenner problemstillingene og forsøker å konkretisere dem. • Elevene formulerer problemene på sin egen måte.
Resonnements-forståelse	• Elevene evaluerer egne strategier. • Elevene argumenterer for valg av strategi. • Elevene argumenterer for løsningene. • Elevene vurderer om egne løsninger, forklaringer og svar er korrekte.
Engasjement	• Elevene viser vilje til å løse oppgaven. • Elevene viser at de har tro på at de kan løse oppgaven (matematisk selvtillit). • Elevene viser engasjement.
Gruppearbeid	• Elevene forklarer sitt resonnement for gruppen. • Elevene reproduserer sin tankerekke med en ny vinkling. • Elevene endrer språket i forklaringen (hverdagsspråk/matematisk språk)

Figur 15 Analyseverktøy

For å undersøke hvilke matematiske ferdigheter som er blitt brukt av elevene når de jobbet med mine modelleringsoppgaver, med utgangspunkt i autentiske broer, har jeg transkribert det auditive materialet fra observasjonen i et Excel ark for å få en oversikt (vedlegg 7) over samtalen. Der har jeg kategorisert hvert utsagn innenfor de kompetanseområdene jeg mener de representerer eller indikerer (figur 15). Dette har gitt meg en visuell oversikt som har vært uvurderlig, og ved hjelp av denne skal jeg senere i oppgaven presentere konklusjonen.

4 Resultater

Jeg vil nå ta for meg hver av de tre modelleringsoppgavene (vedlegg 7), som tar utgangspunkt i autentiske broer, og se etter kjennetegn som antyder bruken av de forskjellige ferdighetene. Jeg vil analysere utsagnene til elevene opp mot de seks forskjellige ferdighetene.

4.1 Justøya bro

Justøybrua

Figur 16 Oppgave 1 i hovedstudien

Oppgaven til denne broen (figur 16) har hatt noen få justeringer med tanke på ordlyd og utforming, men essensen i oppgaven har vært den samme hele veien. Det handler om å estimere høyden av broen ved hjelp av informasjonen i bildet. Jeg skal nå analysere denne oppgaven og se om det synliggjør at den tilfredsstiller kravene jeg har satt for å være en godt designet oppgave.

De forteller hverandre hva det spørres om slik at eventuelle uttrykk, i dette tilfellet "ruver", blir snakket om, de har da en felles forståelse av hva det egentlig spørres etter. Ved å omformulere problemet skaper de eierskap til det, og dette er en del av den *strategiske kompetansen*.

Utdrag 1-7:

A Er det oppgaven det som står her?

B 16 meter over vannlinja. Så det er det vi trenger linjalen til. Hva hvis man vet hvor høy Justøybroen er? Bare utenat.

A Ruver, vil det bare si at den er så og så mye høyere enn vannet?

B Ja egentlig, så mange meter over vannet.

A Hva hvis vi måler han mannen som sykler over her da?

B Skal vi satse på at han er sånn 1?

B Er det noe på bildet vi kan høyden til? Vet vi hvor høye disse her er?

Det er snakk om å evaluere, argumentere og vurdere når vi beveger oss mot *resonnementsforståelse*. Elev A foreslår en strategi hvor de bruker en referanse i bildet, for så å finne høyden av broen.

Utdrag 16-19:

B Problemet der er jo at mannen er ganske mye nærmere enn broen.

A Men egentlig så skal jo ikke det ha noe å si om de er nærme eller lenger vekk, det er bare noe synsbedrag.

B Men på bildet, hvis vi prøver å måle det. Så er den 4 og han er 1, så det vil si at broen er 4 ganger så stor som han.

A Ja.

Referansen befinner seg mye nærmere kameraet enn broen. B ser på forslaget og evaluerer strategien med et grovt overslag for så å evaluere svaret opp mot hans egen intuisjon av hva høyden kan være. Elev B vurderer forslaget til A før han gir argumenter for at det ikke kan stemme. Når A hører resonnementet til B, kan det oppleves som en stille enighet siden han umiddelbart ser etter nye strategier. Dette er en fruktbar og god prosess som begge elevene profitterer på og hvor de profitterer på ferdighetene de har innenfor dette feltet. Dette er også et utdrag som belyser fordelen med *gruppearbeid*. Ved å forklare sine resonnementer, argumenterer elev B for at elev A sin strategi ikke vil bli matematisk korrekt ettersom den ikke tar høyde for at de to objektene han sammenligner har samme avstand fra kameraet. Dette fører til at elev B endrer oppfatning og betydningen til perspektivet og perspektivets rolle.

Det å ha en *konseptuell forståelse* rundt perspektiver og hva det gjør med størrelser og forhold er avgjørende i denne oppgaven. I denne gruppen kan elev A se ut til å ha en forståelse av at perspektivet ikke er noe man trenger å ta hensyn til når det er snakk om størrelser og at det er å regne som et synsbedrag. Elev B har en større forståelse for perspektiver og perspektivets betydning på opplevde størrelser, og dette forsøker han å forklare til elev A både i oppgaven om Justøya bro og i oppgaven om Hornesund bro. Perspektiver og forhold er en av flere konseptuelle ferdigheter man trenger for å løse denne oppgaven.

Etter å ha omformulert problemet, som inngår i *strategisk kompetanse*, leter de etter en mulig strategi for å finne høyden gjennom å finne en referanse i bildet som de kan bruke som målestokk.

Utdrag 16-24:

B Problemet der er jo at mannen er ganske mye nærmere enn broen.

A Men egentlig så skal jo ikke det ha noe å si om de er nærme eller lenger vekk, det er bare noe synsbedrag.

B Men på bildet, hvis vi prøver å måle det. Så er den 4 og han er 1, så det vil si at broen er 4 ganger så stor som han.

A Ja.

B Jeg tror ikke den broen bare er 8 meter høy.

A Hva med den bilen her da?

B	Bil? Skal vi begynne med den og nå?

A	Ja, det er kanskje litt lettere, siden den bilen er rett ved broen.

B	Nja.

Ved å bruke sin *strategiske kompetanse* henter de ut viktig informasjon fra bildet som de kan bruke videre i sin løsning av oppgaven.

Utdrag 38-42:

A	Den broen går litt sånn, gjør den ikke det? Den er ikke helt rett.

B	Det er jo ganske enkelt å se da, vi har jo en linjal.

A	Den er ikke helt rett.

B	Nei, ikke i det hele tatt.

B	Den buer seg litt ja.

Nå er elev B inne på et område hvor han har kontroll og han utviser høy spontan matematisk selvtillit. Oppgaven han her løser er å regne som en selvfølgelighet for eleven og han kan derfor svare med stor trygghet. Transkripsjonen av utdraget over oppleves kanskje ikke som et tydelig eksempel på *engasjement*. Jeg supplerer derfor transkripsjonen med feltnotater og min opplevelse i klasserommet. For i dette utdraget viser elev B masse energi og iver, så min tolkning av situasjonens natur tilsier at gruppen viser et ønske om å løse oppgaven og et sterkt engasjement. Det er sjelden elevene selv sier at de er motiverte og at de ønsker å løse oppgaven, så dette blir et tolkningsspørsmål for meg. Jeg må lytte til samtalen og vurdere stemningen, for så å samle trådene. Ved å legge så mye arbeid i en oppgave, har de også på den måten vist et indirekte ønske om å løse den, og stemningen forteller at de har engasjement ved at man snakker ivrig eller oppglødd når man forklarer og diskuterer.

Sett i forhold til hvilke *regneferdigheter* man forventer elever har på videregående skole, blir ikke den kompetansen utfordret så mye i denne oppgaven. De bruker en enkel regnestrategi hvor de teller to og to for hver femte millimeter. Dette kan ses på som en primitiv strategi framfor det å multiplisere, men det er en metode de er trygge på og det fungerer i henhold til intensjonen.

Utdrag 56-62:

B	Ok.

A	Nå datt jeg helt ut.

A	2 meter, 4 meter, 6 meter, 8 meter, 10 meter, 12 meter, 14meter er det til her hvert fall. Så vi trenger hvert fall et par meter til for at den skal komme gjennom.

A	Så opp til der er det 14 meter.

A	Så går vi litt bort her og gjør litt sånn.

A	Jeg tror ikke bilen er eksakt 2 meter, den er vel…

B	Ja, den er vel mer 195.

Det kunne vært interessant å sett om de ville brukt den samme strategien om det de målte var mye lenger. Hvis de da hadde endret regnemetode, ville det vist en godt utviklet ferdighet på dette området. For det er vanskelig å kritisere en strategi som fungerer utmerket bare fordi den er primitiv, så lenge den er hensiktsmessig. Denne oppgaven utfordrer elevene til å bruke alle de seks kompetansene jeg ser etter.

4.2 Hornesund bro

Figur 17 Oppgave 2 i hovedstudien

Oppgaven om Hornesund bro (figur 17) har vært uendret siden starten. Jeg introduserte en alternativ oppgave i andre gjennomføring i tillegg til den opprinnelige, men den ble forkastet etter én observasjon. Oppgaven går ut på å finne et forhold mellom en rett linje mellom to punkt og en bue som går mellom de to samme punktene.

I oppgave to leser de først oppgaven hver for seg, og første skritt i oppgaveløsingen er å representere problemet på sin egen måte. I dette tilfellet representerer elev B oppgaven verbalt, for så å begynne å tenke høyt.

Utdrag 1-6

B Hvor stor omvei er det å gå oppe på broen enn å gå på veien?

B Hvilken vei? Jeg ser ingen vei.

B Så de tenker å gå oppe på broen i stedet for å gå over broen som en helt normal person. Ja, ok.

B Så da skal vi altså finne ut hvor mye lenger det er å gå der enn å gå der.

B Den der er hvert fall enkel, vi gjør bare sånn. Da har vi lengden.

A Ja.

På denne måten så har elev B omformulert spørsmålet med sine egne ord allerede i utsagn fire. Det å omformulere spørsmålet og bruke egne ord og uttrykk tar bort eventuelle problemer med misforståelser, og man har da omfavnet problemet gjennom egne ord. Hvordan å angripe et matematisk problem og strategien som brukes for å løse dette deles ofte inn i tre hoveddeler: Formulere, presentere og løse problemet. Det første elevene må gjøre er å få klarhet i hva det spørres om, dette gjør de i alle oppgavene. Den *strategiske kompetansen* er en av de ferdighetene det stilles høye krav til når man skal løse modelleringsoppgaver. Det utgjør en stor del av hvordan man skal kunne drive fram i oppgaveløsingen. Det bestemmer strukturen i selve prosessen. Elevene skal hente ut informasjon, de skal utvikle strategier for hver oppgave, de skal konkretisere problemene og de skal formulere problemene på sin egen måte. Alle disse prosessene er nødvendige for å løse oppgavene.

Kreativiteten blomstrer i oppgave to når de finner en strategi som er av praktisk art. De velger her å bøye linjalen for å finne lengden av buen. Denne praktiske tilnærmingen er en god strategi og gir gode muligheter til å komme fram til et rimelig svar.

Utdrag 11-17:

A	Har du noen forslag?

B	Jeg kan jo måle sånn her da, men det blir jo litt.

A	Det hadde jo gått, hvis vi finner den avstanden her. Også tar du bare litt og litt.

B	Hva med å bare bøye den?

A	Ja, hadde ikke det gått da?

B	Jo så lenge den ikke knekker.

A	Det går akkurat. Det er på nippet.

Framfor å starte med kompliserte utregninger så bøyer de linjalen over buen for å finne lengden på denne måten, og så ser de på forholdet mellom sine to mål. Strategien i seg selv er original og er preget av kreative elever som har fleksible kunnskaper, som også klarer å hente gode ideer og inspirasjon fra disse.

Det å ha gode *regneferdigheter* innebærer å utføre utregningene nøyaktig og korrekt. I denne oppgaven ser vi et eksempel på hvilke følger det kan få om man er litt unøyaktig i utregningene i starten av oppgaven.

Utdrag 18-22:

B	Det går ca fra 7 til 30 så vi sier 27.

A	Nå er den perfekt, nå må du måle.

B	Ja, det er 7,5 til 29,5 så det er fortsatt 27.

A	27?

B	Ja.

Elev B sier at 30-7=27 og at 29.5-7.5=27, elev A godtar dette uten å stille spørsmål. De er usikre på hvordan utregningene skal utføres videre i denne oppgaven når de skal regne forholdet mellom to tall. Strategien de velger tvinger dem til å regne på en måte som de ikke er helt komfortable med og usikkerheten deres preger svaret de ender opp med. Denne unøyaktigheten viser seg å skulle påvirke gruppens endelige resultat, selv etter at de oppdager feilen.

Noen ordvekslinger senere utfører de presis subtraksjon som resulterer i de nevnte 5.5cm, så man kan ikke konkludere med at de ikke har forståelse rundt begrepet subtraksjon.

Utdrag 27-33:

A Hvor stor omvei?

B Er det ikke 27 minus 21,5?

A 6?

B Det blir 5,5.

A 5,5.

A Ja, la oss si… Hvor stor omvei?

B Ja, det blir 5,5 meter da eller cm.

Det at de er unøyaktige i utregningene, viser at de har et utviklingspotensial, og at dette er å regne som en del av regneferdighetene til elevene.

Også i denne oppgaven blir blant annet den *konseptuelle forståelsen* rundt perspektiv utfordret, men dette har vi allerede sett på. Jeg vil derfor trekke fram benevning og ulike representasjonsformer. Gjennom observasjonen gir elevene inntrykk av at benevning er noe man setter på til slutt uten spesielt mye tanke rundt hva den representerer.

Utdrag 41-44:

B Hvis vi måler noe herfra, hvis det treet er så og så høyt, så stemmer jo ikke det på andre siden. Det er jo langt i bakgrunnen og mye mer sammentrukket.

A Bare se om det…

A Da sier vi det er 5,5 % lenger.

B Det blir ikke prosent, det blir mye mer regning.

Når de har funnet differansen i lengden til å bli 5,5cm, så har de litt vanskeligheter med å regne seg fram til det endelige svaret. Dermed velger elev A å endre benevningen til %, Jeg antar at dette skjer på bakgrunn av at han er interessert i et svar i % og da velger han å se bort fra benevningens betydning. Elev B er ikke enig, uten å argumentere veldig grundig for hvorfor, og elev A forkaster ideen sin.

En del av *resonnementsforståelsen* er hvordan eleven bestemmer om et resultat er riktig eller ikke. Eleven må vurdere om løsninger, forklaringer eller svar er korrekte, og om de kan følges av logiske skritt basert på korrekte forutsetninger. Forutsetningene kan variere i henhold til hvilken informasjon den enkelte elev opplever som viktig i en problemløsningsoppgave. Elever som har en høyt utviklet resonnementsforståelse, og som er i tvil om gyldigheten av sine resultater, trenger ikke å bli bekreftet av en lærer, andre studenter eller på annen måte. De trenger bare å sjekke om deres argument bygger på logiske slutninger eller ikke.

Ved å vurdere delsvarene sine, øker sannsynligheten for at de skal få så presist sluttsvar som mulig.

Utdrag 69-75:

A Det må jo bli mye mer enn bare 1,08%

B Ja, man skulle jo egentlig tro det.

B Man skulle hvert fall tro at det skulle bli mer enn …. Nei, det trenger det jo ikke å være.

B Det er et eller annet vi gjør feil her nå.

A Mhm.

B Jeg er ganske sikker på at 0,215 ikke er riktig tall altså.

A Ja

Det varierer litt hvor kritiske de er til egne delsvar. Når regneferdighetene ikke strekker til med tanke på hva de har tenkt å gjøre, ser de ut til å bli mindre kritisk enn hvis de tekniske utregningene flyter bedre. Elevene evaluerer sin egen strategi og er usikre hva de egentlig har mulighet til å komme fram til ved hjelp av denne strategien. Dette henger tett sammen med strategisk kompetanse og hvordan man forsøker å finne en strategi som er hensiktsmessig for å løse problemet.

Det at elevene samarbeider gir gode muligheter for læring. Ved å jobbe med *gruppearbeid* er det naturlig at vi argumenterer for våre tanker og våre ideer. Ved å gjøre dette, må vi ta et steg tilbake og få et overblikk over resonnementet for så å verbalisere det. Dette innebærer noen ganger å endre på argumentasjonsrekken slik at budskapet skal nå fram.

Utdrag 92-100:

B Hvordan kom du fram til det?

A Hvis du ser her så har du lengden.

B Ja.

A Og den var 5,5 lenger.

B Ja.

A Så hvis du tar halvparten av den og halvparten av den så blir det sånn …

B Ja.

A Så da blir det sånn ca 25% lenger.

B Ja.

Vi ser at elev A reproduserer hele sin tankerekke for å få elev B til bedre å forstå hva han har tenkt. Tidligere har han vist bruddstykker av forklaringen sin, men her er den samlet, og da får også elev B en bedre forståelse av hva elev A tenker.

Det kommende utdraget er etter at de har jobbet med oppgaven i femten minutter. De har forsøkt flere forskjellige strategier og fremgangsmåter underveis.

Utdrag 143-146:

A Vi sier det.

A 4,83% lenger?

B Er det vårt endelige svar?

A 4,83.

Svaret de enes om har de tidligere vært kritiske til, og tallene som ligger til grunn for utregningene er de også usikre på. Troen på å løse oppgaven har sakte, men sikkert, blitt svekket og *engasjementet* ser ut til å ha forduftet. Den siste ordvekslingen bærer preg av resignasjon og elevene faller ned på det svaret.

4.3 Tømmerrenna

Figur 18 Oppgave 3 i hovedstudien

I oppgave tre (figur 18) trenger elevene å kombinere formen av renna med lengden av renna. I *konseptuell forståelse* ligger evnen til å se større sammenhenger mellom oppgavens kontekst, løsningsstrategi og endelig resultat. Ved å knytte tidligere erfaringer og kunnskap til en ny kontekst, forsøker elevene å visualisere problemet mentalt.

Utdrag 13-24:

A Vannet i seg selv veier jo ganske mye hvis vi skal fylle hele denne, og i tillegg så er det lange rader med tømmer.

B Jeg tror at denne her bare med vann ville veid ganske mye.

A Ja.

B Hvis du fjerner vekten av selve konstruksjonen.

B For du kan jo tenke deg hvor mange liter det er plass til i denne her.

A Godt poeng.

B Se, vi får ikke vite det engang.

B Jeg har ikke peiling på hvor høy en sånn type unge er.

B Jeg kan jo ikke høyde på unger så jeg vet ikke hvilken alder jeg skal gjette heller.

A Jeg tenker bare på tømmerrenna i Sørlandsparken

B Jeg tenkte bare på tømmerrenna i Dyreparken.

A Det var jo den jeg sa.

Elevene sin kjennskap om tømmerrenner og tidligere erfaringer med attraksjonen "Tømmerrenna" i Dyreparken, hjelper dem fram i arbeidet med problemet. Elevene ser oppgavens kontekst opp mot tidligere erfaringer, noe som krever at elevene ser sammenhenger mellom oppgaven og virkeligheten.

Der hvor elev B veiledet elev A med tanke på perspektiver og perspektivets effekt, er nå rollene byttet om hva gjelder den *konseptuelle forståelsen* av volum. Elev A viser i den kommende sekvensen, gjennom sitt resonnement, at han har oversikt over forholdet mellom vann, volum og vekt.

Utdrag 26-44:

A Hvor mye vann skal den tåle?

A Ok, kubikkmeter vann er like mye som en kilo, eller hvor mye var det nå igjen?

B 1 kubikk er 1…..

A 1 kubikk… Hva var nå det igjen?

A Jeg tror ikke det er en meter, jeg tror det er litt mye.

B Joda, 1 kubikkmeter er et tonn.

A Hva med en kubikk desiliter, nei…

B Nei, det er vel at…

A Vi hadde jo det her i fjor.

B Det er det at en kubikkmeter med vann er 1000 liter.

A Ja.

B Og at 1000 liter var et tonn?

A Så en kubikk desiliter er like mye som en kilo?

B Det var kanskje noe sånt.

B Blir det ikke kubikkcentimeter?

A En kubikkcentimeter er litt for lite for en kilo.

B Ja, tonn er jo 10 kilo, nei, det er mil som en 10 km.

A 1 liter er jo 10 desiliter.

B Ja.

Elev B sier rett ut at han blander konseptene avstand og mengde og er usikker på hva som gjelder hvor. Det er interessant at de på slutten av denne seansen ikke enes om noe konkret etter at de har snakket om hvor mye vann veier. Samtalen glir videre uten noen konklusjon.

Det å konkludere med at en strategi er hensiktsmessig, krever noen ganger at man tester den ut først. I det påfølgende utdraget fra oppgave tre, er de igjen kreative i valg av strategi, men den kan se ut til å oppstå som et resultat av manglende konseptuell forståelse rundt arealet til enkle geometriske figurer som trekant og firkant.

Utdrag 67-78:

A Hvis vi hadde satt en renne over, sånn at den hadde blitt lukka, så ville det sett ut som en firkant.

B Problemet er at du faktisk får en sekskant.

A Sånn ca.

B Sånn ca en firkant?

A Den er jo liksom sånn, så hvis vi hadde satt en over her så hadde det sett ut som en firkant.

B Ja.

A Så hvis vi liksom hadde regnet den kubikken for hele greia, også delt på 2 til slutt.

A For det er mye lettere å regne i en firkant.

A Så la oss si de her hadde vært en …

B Ja, det er vanskelig å vite hvilken form dette er.

A Det er jo sånn.

B Ja, litt sånn flat i bunnen.

A Ja, men man kan aldri vite sånn 100%, vi må jo bare ta litt sånn ca.

Algoritmene for å regne arealet av trekanter og firkanter er tett beslektede og det skal være mulig å se tydelige sammenhenger mellom disse. Når de bruker denne strategien, kan det tolkes som om formlene for utregning av arealet til de to figurene ligger i hver sin "mentale boks" uten koblinger til hverandre.

De bruker sin *strategiske kompetanse* for å vurdere om de skal endre oppgaven midlertidig for at det skal bli lettere å regne underveis. Å gjøre om oppgaven til noe de føler de behersker bedre, vil gjøre det mer sannsynlig at de klarer å løse problemet. Det ligger naturlig i mennesket å trekke koblinger mellom det "nye" og det "kjente", og derfor forsøker vi hele tiden å koble nye situasjoner mot eksisterende kunnskap og tidligere erfaringer. Slik vil den nye kunnskapen og de nye erfaringene bygges på den eksisterende kunnskapen og utvikle våre matematiske ferdigheter. I denne seansen kan vi også trekke litt i tråden *konseptuell forståelse* da de ikke ser ut til å se koblingen til formelen for arealet av en trekant. For det er egentlig dette de gjør i praksis. Her kan det muligens være at deres konseptuelle forståelse ligger lenger framme enn hva jeg oppfatter ved å observere dem. Man må regne med at den egentlige konseptuelle forståelsen er mer utviklet enn det som blir kommunisert ettersom det krever ytterligere ferdigheter å klare å kommunisere egen kunnskap.

En av ferdigheten som krever mye tolkning fra meg som forsker, er det som omhandler *engasjement*. Analyseverktøyet mitt beskriver det som "et ønske om å løse en oppgave", og derfor må jeg blant annet se etter tegn og utsagn som kan støtte opp under det.

Utdrag 96-102:

A Skal vi si 1,6 da eller?

B Da vil jeg beregne litt bedre faktisk.

B Hvis jeg har 1,3 m delt på 3 cm så blir det ca 43 cm per cm så da blir det ca 1,6 m da.

A Skal vi si det?

B Ja.

A 1,60 bred?

B Ja.

Elev B uttrykker et ønske om at han vil sjekke på nytt for å være helt sikker på at utregningene de legger til grunn er korrekte. Jeg tolker dette som at han er engasjert i oppgaven og har et ønske om å ville løse oppgaven best mulig. Han vil ikke slå seg til ro med et svar som han ikke kan gjøre rede for, og gjennom noen ekstra utregninger, får han dobbeltsjekket svaret sitt og går videre.

Når vi så kommer til utdrag 139-146, blir tråden om vann, volum og vekt tatt opp igjen.

A Men en kubikkmeter vann, hvor mye veier det?

B En kubikkmeter er jo et tonn.

A Det er et tonn.

B Er det 100kg et tonn er?

A Nei, det er 1000 kilo i et tonn.

B Er det det?

A Ja, er det ikke det? Jo, selvfølgelig er det det.

B Ok, jeg blander mil og tonn.

De blir da veldig fort enige om at en kubikkmeter vann veier ett tonn. Så det kan virke som om de kom fram til en stille enighet tidligere i samtalen uten at jeg oppfattet det.

Gjennom hele seansen sjekker de hverandres argumenter og må svare for egne forslag og ideer, og dette tar oss videre til neste egenskap, *gruppearbeid.*

Utdrag 163-167:

B Men det skal den nok egentlig ikke være. Forresten, det er en ting. Nå gjorde vi det til en firkant, men det er bare halvparten vi trenger.

A Jaja, men når vi får svaret så deler vi det bare på 2.

B Eller dele på to først? For det blir jo det samme.

A Kanskje lettere å regne med hele tall først også når du får svaret så deler du på to da.

B Nja.

Elevene samarbeider godt og er til stor hjelp for hverandre. Gjennom diskusjon blir de tvunget til å sette ord på sine tanker og ideer, og dette fører til at de blir mer bevisst på hva de egentlig tenker og mener i prosessen. De blir også oppmerksomme på mangler i egen argumentasjon når de oppsummerer for medeleven.

Elevenes *resonnementsforståelse* er basert på nøye argumentasjon for et resultat eller en løsningsstrategi. I dette ligger også evnen til å evaluere alternative strategier og vite hvilke som er relevante. En annen del av resonnementsforståelsen er hvordan eleven avgjør om et resultat er riktig eller ikke. Eleven må vurdere om løsninger, forklaringer eller svar er korrekte.

Utdrag 205-221:

B Vi kan si 20,5 ca, så legger vi inn litt feilmargin.

A Ja.

B Men jeg har ikke peiling hvordan man gjør dette her.

A Må vi ta den og dele på den?

B Det var det jeg også tenkte, men hva forteller dette meg?

A Hmm.

A Hva er avstanden fra disse? De er kanskje like lange hele veien bort.

B Det vil jeg jo inderlig håpe.

A Jeg tror kanskje vi overkompliserer det.

L Hva var det du så på for noe nå?

A At det var lik lengde mellom disse her.

L Hvor langt tror du det er mellom de?

B Hvem vet? Der er det 1,5 og der er det ca 2

B Ifølge mine bergninger så skal det være ca 3m mellom de.

A Mellom de to?

B Ja.

A Ja, men da sier vi det.

Elevene evaluerer sin egen strategi og er usikre hva de egentlig har mulighet til å komme fram til ved hjelp av denne strategien. Dette henger tett sammen med strategisk kompetanse og hvordan man forsøker å finne en strategi som er hensiktsmessig for å løse problemet.

Det å skulle blande regnearter og benevninger om hverandre kan være utfordrende. Hvilke benevninger hører til hvor? Hvorfor blir noen benevninger plutselig borte? Det å ha kontroll på både benevninger og regnearter krever flere ferdigheter, hvis man har problemer med dette, kan man ikke isolere det til *regneferdighetene*. Det kan man heller ikke gjøre med andre vansker ettersom ferdighetene lever i et samspill og avhenger av hverandre.

Utdrag 253-265:

A Ja, da blir det 80m.

B Sånn cirka.

A For hver meter så skal den holde 1300kg med vann.

B For hver andre meter så legger vi til en … Hmmm… Hvor mye vil en 2m lang tømmerstokk veie?

A Skal vi se … 1,3*80 … Det blir store tall.

B Hva har du gjort nå?

A Bare ganga 1300*80, det ble litt rart.

B Det blir jo 104 000 tonn.

A Jeg har sånn superkalkulator jeg har lastet ned.

B 104 000 tonn, det skal kanskje så mye til.

B Men husket du å dele på 2 forresten?

A Ja, det skal vi.

B Da blir det plutselig bare 52 000 tonn.

Når gruppen i oppgave tre får problemer med å holde kontroll på antall nuller, er det kanskje mer sammensatt enn når vi regner konkrete subtraksjonsstykker. I sitt svar regner de i kilo og benevner svaret med tonn. De har lenge vært usikre på tallene de har valgt å bruke, samtidig som de viser utrygghet rundt metodene de bruker for å regne ut svaret. Kombinasjonen av dette gjør at elevene får et svar som er tusen ganger større enn hva de egentlig mener.

I neste kapittel skal jeg undersøke hvordan mine funn kan tolkes ut fra et teoretisk perspektiv.

5 Diskusjon

I dette kapittelet skal jeg ta for meg det empiriske materialet og diskutere det opp mot forskningslitteraturen. Jeg vil ta for meg hvordan mine modelleringsoppgaver utfordrer elevene kognitivt i forhold Kilpatrick et al. (2001) sin teori om matematisk kompetanse og Webb (1982) sin teori om gruppearbeid.

Diagrammene i diskusjonsdelen (figur 19, 20 og 21) er ment å gi en visuell beskrivelse av hvordan samtalen og fokuset har artet seg i arbeidet med den enkelte oppgaven. Diagrammet følger en kronologisk rekkefølge ovenfra og ned. Det første utsagnet er øverst, mens det siste utsagnet er nederst. Målet med mine modelleringsoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer, er at alle kompetanseområdene er representert i arbeidet med hver enkelt oppgave. Det vil indikere at oppgaven oppfyller egenskapene jeg ønsker den skal ha, nemlig at den utfordrer alle de matematiske ferdighetene.

De tre trådene konseptuell forståelse, engasjement og samarbeid ligger ofte litt dypere og vil ikke være så fremtredende i samtalen. De er mer utfordrende å definere i en observasjon. Engasjement innebærer blant annet holdninger, og i en jobbe økt som denne, er det vanskelig å trekke slutninger om elevenes holdninger til matematikken kun ved å observere dem i oppgaveløsingen. Ferdigheten å samarbeide kan kanskje ses på som noe de gjør konstant når de snakker sammen og hjelper hverandre fram i arbeidet. Likevel har jeg valgt å fokusere på når samarbeidsevnen utfordres ved at de må omformulere og argumentere for egne tanker. Dette er kanskje en litt streng tolkning. Det som er viktig for denne oppgaven er at alle de forskjellige trådene utfordres og får mulighet til å utvikle seg når elevene jobber med den.

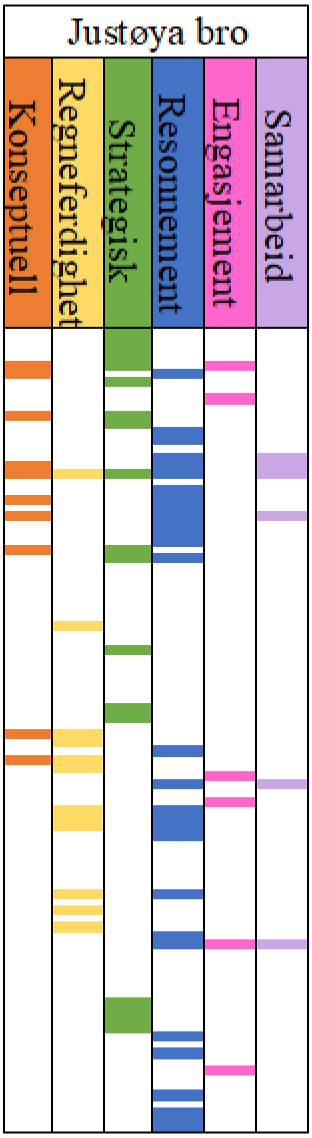
5.1 Oppgavene opp mot teorien

En del av teorien sier at rike oppgaver skal inneha visse egenskaper, mens andre teoretikere kun legger vage anbefalinger om hvordan utformingen av en utforskende oppgave kan se ut. Jeg ønsker å se framover, i 2020 kommer fagfornyelsen som har nye føringer for hvordan undervisning skal foregå. Vi kan håpe det blir en vridning i fokuset på både undervisningsform og hvilke typer oppgaver og arbeidsformer som anbefales. Jeg har forsøkt å utvikle rike oppgaver, og derfor vil det være naturlig å evaluere oppgavene opp mot Hagland et al. (2005) sine kriterier for rike problemer

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller visse løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå og alle skal ha en mulighet til å jobbe med det.
3. Problemet skal oppleves som utfordrende og kreve anstrengelse.
4. Problemet skal kunne løses på flere forskjellig måter, med ulike strategier og representasjoner.
5. Problemet skal initiere en matematisk diskusjon ut fra elevenes ulike løsninger, en diskusjon som viser ulike strategier, representasjoner og matematiske ideer.
6. Problemet skal kunne fungere som brobygger mellom ulike matematiske områder.
7. Problemet skal kunne lede til at elever og lærere formulerer nye, interessante problemer.

5.1.2 Justøya bro

Oppgaven lyder som følger; *Masta på seilbåten din ruver 16m over vannlinja. Kan du trygt passere under broen, og hvor mye klaring vil du eventuelt ha til broen når du passerer?* Jeg har analysert hvert utsagn fra elevene og tolket hvilken eller hvilke kompetanser det aktuelle utsagnet kan kobles til. Ved å studere den visuelle oversikten (figur 19) så ser vi at elevene bruker alle de seks forskjellige kompetansen, dog i varierende grad. Det noe overvekt på strategisk kompetanse og resonnementsforståelse. Det gjenspeiler i dette tilfellet at de valgte en strategi som ikke krevde mye og avansert regning, denne variasjonen må medregnes.

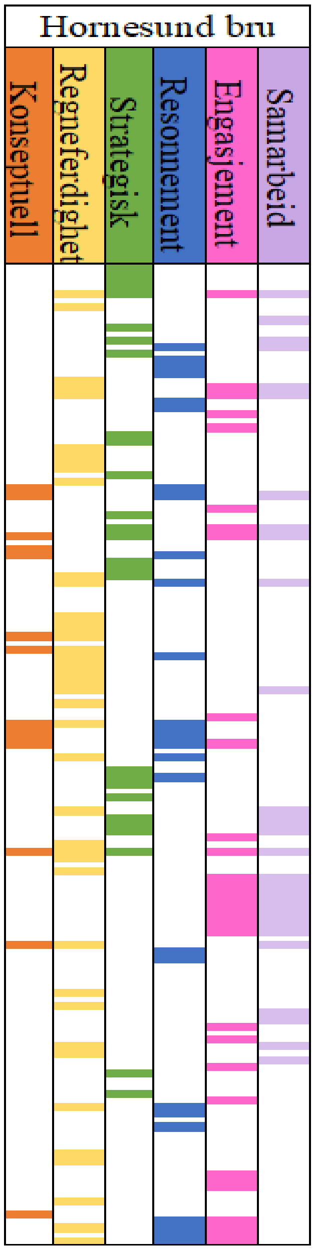


Figur 19 Visuell oversikt over elevenes arbeid med oppgaven om Justøya bro.

For å forstå oppgaven, må man ha kjennskap til noen begreper. Man må vite hva *masta* på en seilbåt er, man må vite hva en *vannlinje* er og man må kjenne begrepet *"å ruve".* Dette er begreper jeg var trygg på at elevene kjente til, men dette var bare tilfelle hos den ene eleven. Hvis jeg ønsker at det skal være lettere å forstå, kan jeg omformulere spørsmålet og slippe unna begrepene *vannlinje* og *ruver.* En av elevene i hovedstudien kjente ikke til begrepet *"ruver",* og uten kjennskap til det begrepet, kan det være unødvendig vanskelig å forstå helheten i problemet. Problemet vil oppleves utfordrende for alle da ens egen kunnskap vil differensiere spørsmålet. Jo mer kunnskap en har, dess mer nøyaktig vil man være i beregningene sine, og det er også naturlig å bruke flere og mer avanserte strategier om man har det tilgjengelig. Oppgaven legger opp til at man skal bruke referanser i bildet, og da er man avhengige av å kjenne til konsekvenser av ulike perspektiver. Det viste seg å være en større utfordring enn antatt. Det viktige er at elevene blir utfordret på dette, og eleven som hadde en misoppfatning rundt dette fikk en korrigering av medeleven. I en klassesituasjon ville denne oppgaven vært et godt utgangspunkt for å få en større diskusjon rundt dette konseptet. Det er mange muligheter til matematiske diskusjoner som tar utgangspunkt i denne oppgaven, både med tanke på mulige strategier og hvilke argumenter som ligger til grunn for de forskjellige løsningene. Modelleringsoppgavens natur vil framprovosere bruk av ulike ideer og strategier, og på denne måten vil elevene oppleve koblinger hvor forskjellige tanker støtter hverandre. Dette vil hjelpe den kognitive organiseringen hvor man ser sammenhenger mellom ulike matematiske områder. Her bruker elevene perspektiver, forhold, uformell matematisk kompetanse, ulike regnearter og måling for å nevne noen. Fordelen med at det er tatt utgangspunkt i en autentisk bro, gjør at det senere er mer naturlig å se på omgivelsene og tenke matematisk rundt helt vanlige ting. Det å forstå at det er matematikk i alle våre omgivelser kan skape en større forståelse av hvordan virkeligheten rundt oss fungerer. En annen grunn til å utvikle oppgaver som baserer seg på autentiske aspekt, er at elevene lettere kan se mening med å løse oppgaven og at motivasjonen øker ved å sette seg inn i et reelt problem. Dette gjelder ikke alle elever, den enkelte elev vil oppfatte oppgavene på forskjellig vis, og noen vil kanskje ikke legge vekt på at det er en autentisk bro, men kun se det matematiske i oppgaven.

5.1.3 Hornesund bro

Oppgaven lyder som følger: *Hvor stor omvei er det å gå oppe på buen istedenfor å gå på veien?* Vi ser på den visuelle oversikten (figur 20) at alle trådene er relativt jevnt representert bortsett fra konseptuell kompetanse. Som tidligere nevnt, ligger det mye skjult kunnskap hos elevene som ikke er synlig for meg som observatør. Elevene valgte en strategi som egentlig ikke legger opp til så avansert matematikk som skulle tilsi at så stor del av fokuset i oppgaveløsingen skulle være på regneferdigheter. Grunnen til at regneferdighetene brukes mye i denne oppgaven, er at elevene i gruppen mangler en større forståelse av forhold, som strategien deres krever. De forsøker å finne forholdet mellom to forskjellige størrelser, men er usikre på hvordan de finner det. Om de hadde hatt de nødvendige regneferdighetene som kreves for å regne ut forholdet mellom to tall, samt gjennomføre presis subtraksjon, så ville de trolig løst denne oppgaven uten veldig store problemer. Denne oppgaven er i utgangspunket litt mer avansert enn oppgaven om Justøya bro, da vi skal finne forholdet mellom 2 lengder framfor å bare finne en høyde. Elevene viser i denne seansen at de har behov for alle trådene for å komme til en løsning. Om den opprinnelige strategien hadde fungert, er det ikke sikkert at vi hadde fått en like balansert visuell oversikt. Det er også et godt eksempel på hvordan trådene avhenger av hverandre når hele arbeidet preges av nivået på en av ferdighetene, i dette tilfellet regneferdighetene.

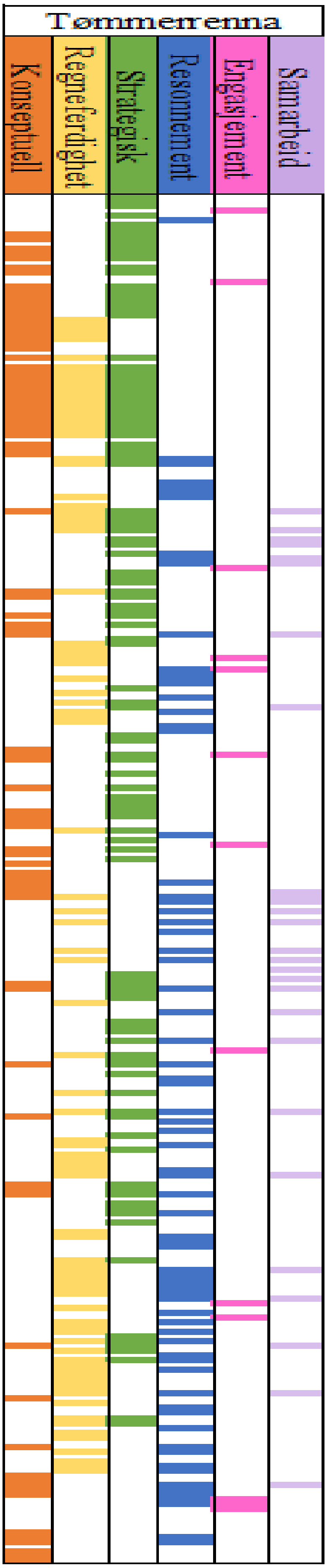


Figur 20 Visuell oversikt over elevenes arbeid med oppgaven om Hornesund

Vi skal også ta for oss oppgavens utforming. Gjennom alle mine fire observasjoner så har ordlyden i denne oppgaven vært identisk og hver gang har deltakerene forstått oppgaven umiddelbart og de har løst oppgaven ved hjelp av hensiktsmessige strategier. Spørsmålet i seg selv krever at elevene ser på forholdet mellom to tall. Tallene må de estimere selv, og på denne måten unngår man at det blir en rutineoppgave. Det finnes utallige strategier for å komme fram til et mulig svar. Det finnes meget avanserte matematiske metoder, samtidig som den letteste strategien fordrer at man tenker "utenfor boksen" gjennom å bøye linjalen eller måle buen ved hjelp av andre metoder. Det var synd at elevene i testgruppen manglet den konseptuelle oversikten over "forhold". Hvis ikke, ville denne kreative strategien vært en kjapp og grei løsning på problemet. Ingen av gruppene i utviklingsfasen har hatt denne tilnærmingen, noe som overrasket meg. Det er også mulig å måle ved hjelp av et buet ark eller en tråd eller lignende. Når elevene selv skal elstimere størrelser så vil det skape rom for diskusjoner siden man legger forskjellige ting til grunn når man estimerer. I tillegg er det ikke definert hvordan svaret skal presenteres. I en klassesituasjon gir dette oss muligheten til å sammenligne forskjellige måter å representere et forhold på for så å se på fordeler og ulemper ved de forskjellige representasjonene. Elevene viser at de har en tanke om hvilken form svaret skal ha når de gir det en benevning. De kjenner til forventningene, men har problemer med forståelsen på den tekniske matematikken om hva prosent symbolet betyr. Oppgaven krever at de ser på et forhold mellom to størrelser, og det er også naturlig å ta inn flere aspekter innen måling og aritmetikk. De må gjentatte ganger argumentere for egne svar og tanker, og i argumentasjonen møter de ulik grad av motstand. Dette kan gjenspeile trygghaten medeleven har innenfor feltet han blir forklart. I noen tilfeller kan slik diskusjon og argumentasjon spre misoppfatninger i gruppen hvis begge er usikre, men at de likevel trekker konklusjoner uten tilstrekkelig matematisk grunnlag. Derfor vil det være hensiktsmessig å diskutere løsninger i plenum, slik at eventuelle misoppfatninger kan oppklares og utbedres.

5.1.4 Tømmerrenna

Oppgaven lyder som følger: *Kraftstasjonen på Steinsfossen ble satt i drift i 1958 og dette resulterte i at elven Otra ble bortimot tørrlagt over et område på omlag 4km. Otra har blitt brukt til fløting av tømmer helt siden 1830-tallet. Denne konstruksjonen ble bygget på 1950-tallet for å kunne fortsette med fløting av tømmer i Otra på tross av at kraftstasjonen ble bygget. Utbyggerne av tømmerrenna måtte beregne hvor mye vekt denne broen må tåle. Hva tror du de kom fram til?* For å løse oppgaven bør elevene kjenne til volumbegrepet. Dette begrepet blir innført på slutten av småskolen, derfor kan man forvente at barn på mellomtrinnet og oppover kan løse denne oppgaven. Min testgruppe brukte flere forskjellige strategier i forskjellige ledd av utregningen. Det krever mye av elevene når de både må ha en overordnet strategi og så må de løse flere deloppgaver hvor man bruker andre strategier. Alle trådene ble utfordret i prosessen (figur 21), og ved å kommentere at de har manglende informasjon, gir de uttrykk for at de ikke er vant til denne typen rike oppgaver hvor informasjonen ikke står i klartekst, men at bildet må tolkes og at de selv må estimere informasjonen de trenger for å løse oppgaven matematisk. I et bilde, får de utrolig mye mer informasjon enn om det kun sto som tekst, men de må selv vurdere hvilken informasjon som er hensiktsmessig å bruke. Oppgaven adresserer flere forskjellige tema, spesielt innenfor måling og geometri. Gjennom mine observasjoner ser spørsmålsformuleringen ut til å fungere bra, og alle de involverte gruppene har forstått oppgaven med det samme. Dette er på ingen måte en oppgave hvor man kan lempe ut et svar umiddelbart, det kreves at man jobber med estimater og utregninger. Jeg har fortsatt til gode å se forskjellige strategier bli brukt. Samtlige grupper forsøker å finne volumet av renna for så å regne om til kilogram. Dette kan på sin side være et tegn på at oppgaven ikke er så åpen som først antatt. Fremgangsmåten er muligens noe låst, og på den måten får de ikke øvd på den ferdigheten i så stor grad som jeg skulle ønske. Det kan se ut til at å estimere arealet av tverrsnittet for så å multiplisere det med lengden av broen, er den mest naturlige og hensiktsmessige strategien å bruke, så det er mulig at oppgaven kan oppleves som litt førende i dette henseende. Det å trekke inn egne erfaringer kan være til god hjelp i løsningen av denne typen oppgaver. De sammenligner denne tømmerrenna med attraksjonen "Tømmerrenna" i Dyreparken for å få et mentalt bilde av hvordan tverrsnittet kan se ut. Både testgruppen og to av pilotgruppene mente de måtte ta høyde for at fugler kan sette



Figur 21 Visuell oversikt over elevenes arbeid med oppgaven om Tømmerrenna.

seg på renna og skape ekstra vekt. I en klassesituasjon så ville jeg tatt opp dette som tema og sett på forholdet mellom den mulige ekstra vekten fra fuglene kontra antatt totalvekt. Hvis vi tenker at det er en svakhet ved oppgaven at strategien kan føles litt tvungen, kan elevene få diskutere andre mulige strategier og se om de kommer på nye ideer. Det kan da være de kombinerer andre matematiske områder for å estimere svaret enn det å kombinere geometri og vekt. Elevene forsøker å endre oppgaven slik at de skal regne på et område hvor de er trygge. Når de gjør dette, blir det en ekstra ting å huske på ettersom de må konvertere oppgaven tilbake til normalen. Tankegangen ved å sette problemet inn i en mer kjent og trygg kontekst er god, og det vil ofte fungere bra. Fordelen er at man kommer inn på en trygg vei framfor å jobbe innenfor et område hvor man er usikker. Utfordringen er når oppgaven blir for kompleks og med så mange faktorer at man fort kan miste oversikten, og da makter man ikke å se hele bildet. I oppgaven om Tømmerrenna krever strategien som blir valgt en høyere matematisk kompetanse enn elevene har og det er flere små vanskeligheter som sammen gir gruppen utfordringer når de skal oppsummere på slutten. Om ikke tømmerfløting er høyaktuelt for dagens samfunn, kan likevel elevene få øynene opp for vekta til vann og hvor fort det blir høy vekt når det er snakk om vann og volum.

6 Avslutning

Helt til slutt ønsker jeg å samle mine funn og prøve å trekke en konklusjon fra dette forskningsarbeidet. Så vil jeg presentere noen pedagogiske implikasjoner og refleksjoner jeg har rundt arbeidet med denne oppgaven.

6.1 Konklusjon

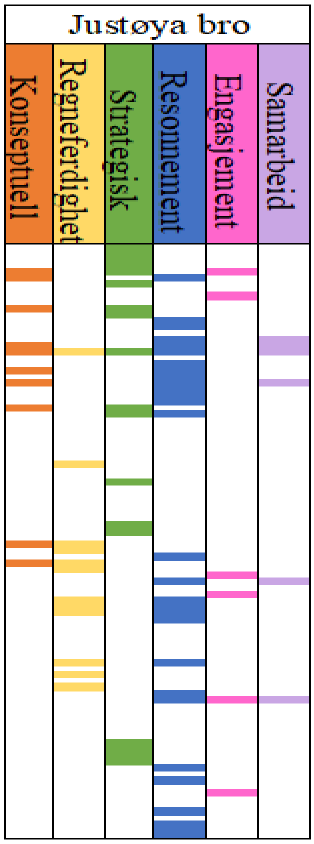
For å konkludere må jeg trekke fram forskningsspørsmålet til oppgaven, og det er som følger:

> "I hvilken grad kan jeg designe matematikkoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer i Agder, som utfordrer elevenes ferdigheter innenfor gruppearbeid (Webb, 1982) og hver av de fem komponentene i Kilpatrick et al (2001) sin definisjon av matematisk kompetanse (konseptuell forståelse, regneferdigheter, strategisk kompetanse, resonnementsforståelse og engasjement)?"

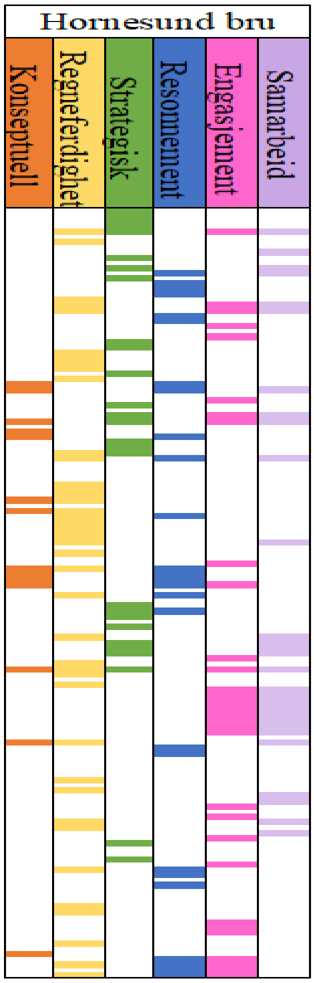
Når jeg i ettertid ser forskningsspørsmålet mitt opp mot erfaringene og resultatene fra denne studien, er det tydelig at det lar seg gjøre å designe matematikkoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer i Agder, som krever at alle de seks matematiske ferdighetene blir u tfordret. Jeg har også sett hvor mye jobb det er å utvikle slike oppgaver, og blitt bevisst på hvor mye lærdom som ligger i denne prosessen, både for lærer og elev. Det å designe veldefinerte oppgaver er en tidkrevende og vanskelig prosess som man må trene på. Jeg fikk god hjelp ved å ta utgangspunkt i Fermi oppgaver da disse har mange av de egenskapene jeg ser etter i rike oppgaver. Samtidig la prosjektet føringer om at jeg skulle ta utgangspunkt i en autentisk gjenstand. Det å jobbe med oppgaver rundt autentiske broer har gitt meg et nytt aspekt som oppgavedesigner og gjennom å bruke autentiske situasjoner eller gjenstander så får oppgavene enda et aspekt som kan engasjere elevene.

I denne oppgaven har mine overordnede mål vært å utvikle min eksisterende kunnskap om det å produsere og designe rike matematiske oppgaver. Jeg har vært nødt til å dykke ned i teorien for å sementere mine tanker, om hva som gjør en oppgave god, i tidligere forskning. Jeg har så tatt dette med meg inn i min egen forskning for å få førstehåndserfaring med utvikling av oppgaver og hvordan elevene jobber med dem.

Ideen om å samle analysen av transkriberingen i tabeller som visualiserer hvilken ferdighet som blir brukt i et utsagn er det tydeligste beviset jeg har på at mine oppgaver har utfordret de aktuelle elevene på en ønsket måte. I tabellene (figur 22, 23 og 24) ser vi oversikten som viser hvilke ferdigheter elevene viser gjennom kommunikasjonen i arbeidet med oppgavene. Tabellen viser kronologisk analyse av utsagnene til elevene med det første utsagnet på toppen (vedlegg 9). Det er en god spredning på hvilke ferdigheter som brukes i hver enkelt oppgave og det at de brukes om hverandre underbygger tankegangen i Kilpatrick et al. (2001) sin



Figur 22 Visuell oversikt over elevenes arbeid med oppgaven om Justøya bro.



Figur 23 Visuell oversikt over elevenes arbeid med oppgaven om Hornesund bru.

teori som sier at trådene flettes sammen og danner et tau. Hvilke ferdigheter som brukes i hvor stor grad vil naturligvis variere fra gruppe til gruppe, og fra oppgave til oppgave. Jeg vil konkludere med at mine modelleringsoppgaver, som tar utgangspunkt i autentiske broer, legger til rette for at elevene utfordres innenfor hver av de seks matematiske ferdighetene i arbeidet med dem.

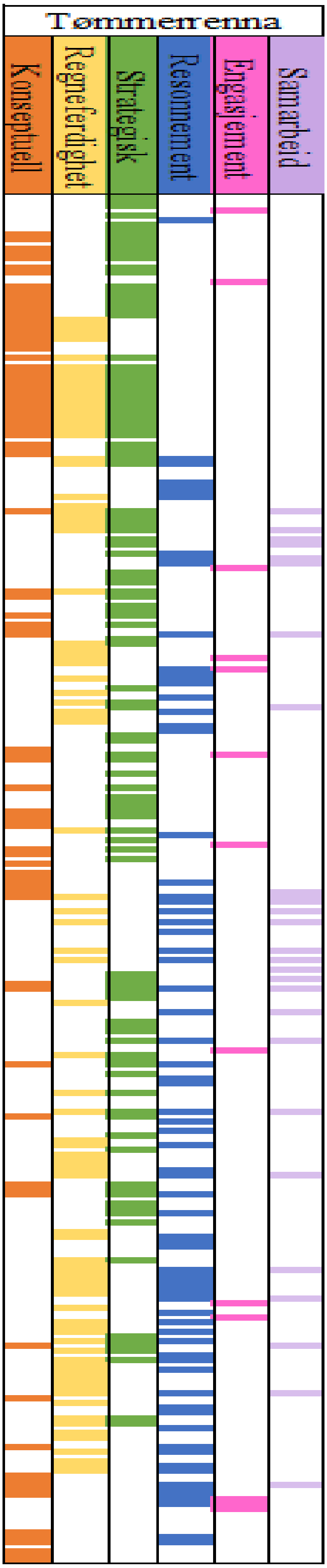
Jeg har sett at mine tanker, rundt oppgaver som fungerer slik jeg ønsker, deler mange synspunkter med det teorien omtaler som "rike oppgaver". I teorien finner vi mange definisjoner og tanker rundt rike oppgaver. I mitt arbeid med analyse og diskusjon kan jeg konkludere med at oppgavene jeg har utviklet tilfredsstiller betegnelsen "Rike oppgaver" i henhold til definisjonen Hagland et al. (2005). Noe av utfordringen med å produsere og utvikle oppgaver er å bruke et språk som alle forstår slik at elevene forstår hva det spørres om i oppgaven. I hovedstudien brukte elevene forskjellige strategier, regneferdigheter og metoder på oppgavene. Også innad i en oppgave så fikk de vist et mangfold av ferdigheter, og det er et kvalitetstegn i seg selv. Ferdighetene de brukte sammenfaller med de seks kjerneelementene som er utviklet i arbeidet med fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2018a)

Jeg vil likevel samle mine erfaringer i noen få punkt som jeg tenker er essensielt å tenke på når jeg skal designe rike oppgaver senere. Dette innebærer også modelleringsoppgaver, som kan fungere godt i en klassesituasjon og utfordre den matematiske kompetansen til elevene.

- Oppgaven bør ha som mål å vekke nysgjerrighet hos eleven.
- Oppgaven bør være godt egnet for samarbeid og diskusjon.
- Oppgaven bør kunne løses på forskjellige måter.
- Oppgaven skal være forståelig, og mulig å løse, for alle elever.
- Oppgaven kan med fordel løses uten hjelpemidler.

Ved å ha tydelige autentiske trekk ser det ut til å være naturlig å tenke på rammene for spørsmålet og hvordan det skal påvirke resultatet. Elevene trekker inn informasjon, som ikke er gitt i oppgaven eller i bildet, som har utspring i tidligere erfaringer ved flere anledninger. Dette er positivt med tanke på det å konstruere og organisere ny kunnskap og relatere den til eksisterende kunnskap. Når elevene trekker inn egne erfaringer og eksisterende kunnskap, er det lettere å uttrykke problemet med egne ord, noe som igjen skaper et eierforhold til problemet.

Denne typen oppgaver er levende. Med det så mener jeg at de aldri blir ferdig designet. Om jeg skal bruke mine oppgaver om autentiske broer med elever, vil jeg gjøre en formativ evaluering etter hver gang for å se om noe kan forbedres til neste gang. På



Figur 24 Visuell oversikt over elevenes arbeid med oppgaven om Tømmerrenna.

denne måten unngår jeg at oppgavene blir statiske. Normer og holdninger utvikler seg over tid, og da kan det være fordelaktig om oppgavene de jobber med kan følge deres utvikling for å ikke bli utdaterte.

Jeg har i flere år jobbet med rike oppgaver og brukt de i undervisningen. Dette forskningsprosjektet underbygger mine tanker og ideer om hvordan elever kan profittere på variasjon i oppgavene og oppgaver hvor elevenes vurderingsevne blir utfordret.

6.2 Pedagogiske implikasjoner

Gjennom egen arbeidspraksis er jeg overbevist om at det å jobbe med rike oppgaver krever at elevene må veiledes i hvordan man angriper slike problemer. Tankegangen om hvordan man løser problemer må i de fleste tilfeller justeres inn mot det å søke etter strategier og informasjon som hjelper å løse problemet. Hvis elevene i hovedsak har jobbet med imitative metoder, har elevene behov for en overgangsfase der de øver på å komme i gang med en oppgave der framgangsmåten ikke er gitt, og der det er uklart hvilken informasjon som er hensiktsmessig å bruke. Alt handler om vaner og hva man opplever som normalt. Der elevene tidligere bare sjekket svaret med medeleven, kan de nå jobbe mer aktivt i små grupper og diskutere strategier og argumentere for både fremgangsmåter og løsninger. Da er det trolig at elevene opplever økt utbytte i faget og opplever faget som mer relevant i eget liv.

Det å arbeide i små grupper med rike oppgaver, da gjerne med autentiske aspekter, har vist seg spesielt tjenlig for elever med lavere utviklede matematiske ferdigheter (Norqvist et al., 2015). Denne økte effekten går ikke på bekostning av de andre elevene, men en mulig bivirkning er at alle elevene blir mer bevisst hva som ligger til grunn for de ulike resonnementene ettersom stegene i fremgangsmåten må begrunnes. I et slikt samspill vil alle elever oppleve å være "hjelper", noe som i sin tur vil være positivt når det gjelder eget selvbilde innenfor matematikken.

Det finnes gode muligheter for å implementere rike oppgaver i skolen og i min praksis som lærer. I denne studien har jeg gått meget nøye til verks med en dyp analyse, men dette vil det ikke være rom for i hverdagen. Da må man gjennomføre mindre omfattende analyser og gjøre formative evalueringer for å utvikle oppgavene. Når en rik oppgave designes så bør det alltid gjøres en evaluering i etterkant av gjennomføringen for å se på hva som kan forbedres. Utviklingen av rike oppgaver er en prosess som vedvarer så lenge oppgaven brukes, en rik oppgave skal være dynamisk. I et fagmiljø på en skole finnes det gode muligheter til å ha et felles mål og bruke felles tid for å utvikle rike oppgaver. Det å designe rike oppgaver er en kompetanse en som lærer må øve på og utvikle, en måte å gjøre dette på er gjennom erfaring og samarbeid. På denne måten kan man opparbeide seg en oppgavebank som utvikles i fellesskap hvor alle kan bidra med sin unike kunnskap.

Det var interessant å se det visuelle bilde av elevenes arbeid med oppgavene. Det ble tydelig at elevene var innom alle de seks trådene i løpet av oppgaveløsningen. Det ble et samspill mellom trådene, som kunne vært interessant å se videre på. Kunne en ha sett på et emne elevene synes er spesielt vanskelig og prøvd å identifisere om alle trådene var representert i arbeidet med emnet? Uansett tror jeg at ved å kjenne til, og å kunne teorien om trådmodellen, kan læreren være bedre rustet for å identifisere hva som muligens mangler i et emne elevene jobber med.

I denne studien forsøkte jeg å begrense min påvirkning på det empiriske datamateriale ved å observere gruppene med minst mulig innblanding. Hvis jeg skulle hatt en normal rolle som pedagog, ville jeg påvirket studien i enda større grad. Dette ville jeg unngå ettersom metoden jeg har brukt er sårbar med tanke på kredibilitet. I lys av dette, vil denne studien fravike noe fra en vanlig lærerhverdag. Tidsbruken som er lagt ned i både utvikling og analyse av oppgavene og gjennomføringene overgår hva man har mulighet til i en travel lærerhverdag, men noen avveininger må jeg ta. Ved bruk i praksis vil pedagogens rolle være en helt annen. Det å veilede elevene og å lese situasjoner hvor en eller flere grupper har bruk for veiledning og undervisning er en viktig del av det å undervise med rike matematiske oppgaver. Det vil også være gode muligheter for å introdusere nye tema ved at elevene først kjenner på behovet for et verktøy, ved å jobbe med rike oppgaver, for så å være med å utlede verktøyet i fellesskap i en pedagogisk ledet seanse.

Det å utvide aspektet på denne typen oppgaver fra autentiske broer til andre autentiske objekter i nærmiljøet bør la seg gjøre på utallige måter. Ved å designe oppgaver som tar utgangspunkt i objekter i nærmiljøet har man også mulighet til å ta undervisningen med ut og jobbe med konkrete matematikkoppgaver til situasjoner og objekter man kan ta og føle på. Det å bruke trær, dammer, kongler, trapper, stier eller bakker er bare noen av de mulighetene jeg kan tenke på i forbindelse med skogen som ligger rett ved min skole. Uten å ha gått grundig gjennom fagplanene, er jeg trygg på at man har mulighet til å dekke mange av kompetansemålene i faget ved å hjelp av rike oppgaver med autentiske trekk fra nærmiljøet, sammen med et bevisst pedagogisk arbeid som fokuserer på at elevene skal bruke og utvikle sin matematiske kompetanse jevnt i arbeidet med disse oppgavene.

6.3 Refleksjon over eget arbeid

Denne studien startet allerede høsten 2018 da jeg meldte meg på prosjektet til Pauline Vos. I ettertid er jeg meget fornøyd med at jeg ble med på dette prosjektet med å designe matematiske modelleringsoppgaver som tar utgangspunkt i autentiske broer. Det var en avgjørelse som jeg ikke helt skjønte omfanget og betydningen av før senere. For det å skulle jobbe med en oppgave hver dag i et halvt år, og vel så det, er krevende, og da er det veldig inspirerende å jobbe med noe man virkelig brenner for. Så å si alt jeg har lest og undersøkt faller inn og støtter, utfyller, supplerer og justerer mine eksisterende tanker om hvordan elever bør jobbe med matematikken for å skape seg en velutviklet matematisk kompetanse. Det at jeg skriver om noe jeg er veldig interessert i vil også prege studien, og jeg tror at dette vil påvirke oppgaven i positiv retning.

I starten av studien var jeg veldig opptatt av prosjektet "Mattebroer i Agder" og var opptatt at broene jeg valgte å lage oppgaver til var visuelt fine og gjerne litt "utenom det vanlige". Det at en oppgave skal være med i en kalender fører jo til at jeg ikke kan styre noe med tanke på bruk av hjelpemidler når oppgaven løses, og jeg var derfor opptatt av at svaret ikke skulle være mulig å finne ved et kjapt Google-søk. Fokuset på at jeg designet kalenderoppgaver i form av modelleringsoppgaver som tar utgangspunkt i autentiske broer hadde jeg helt fram til evalueringsfasen. Oppgaven om Justøya bro, som jeg hadde med i det siste oppgaveheftet, ble forkastet på grunn av at det var for enkelt å finne svaret på Google. Det var i en veiledning at det ble stilt spørsmål ved hvilket fokus som var viktigst, og dette ser jeg på som et vendepunkt i min studie når jeg gikk over til et elevfokus, og der jeg står fritt til å styre hvilke hjelpemidler som kan brukes og når de kan brukes. Dermed kom oppgaven om Justøya bro tilbake ettersom den fungerer i henhold til hensikten.

I utviklingsfasen av studien valgte jeg å bruke personer med høyere utdannelse enn elevene jeg brukte i evalueringsfasen. Dette spriket i kunnskapsnivå, som er mellom deltakerne i de to forskjellige fasene, kunne jeg vært mer bevisst når beslutningene ble tatt. Oppgavene kunne vært bedre utformet om en av gruppene i utviklingsfasen var på samme nivå som elevene i evalueringsfasen.

En kjent svakhet ved å bruke designforskning som metode, er at jeg som forsker innehar mange roller. Jeg designer oppgaver, jeg observerer, jeg evaluerer og jeg analyserer. Dette gjør det spesielt viktig å legge empirien til grunn når jeg trekker slutninger, og ikke la eget ønske om hvordan forskningen skal gå, prege resultatene. Et par av delferdighetene innebærer høy grad av tolkning, og da kan det være fristende for meg som forsker å tolke materialet slik at jeg får ønsket resultat. Dette har jeg hele tiden vært bevisst på, og jeg har hele veien forsøkt å begrunne mine refleksjoner i datamaterialet etter beste evne.

Det hadde vært interessant å forsøke denne tilnærmingen til matematikk over en lengre tidsperiode og sett hvilke resultater det hadde gitt sammenlignet med imitativ tilnærming. Vi har sett eksempler på lignende studier (Boaler, 2002) som ser på forskjellene på tradisjonell undervisning og utforskende matematikk, men vil resultatene bli annerledes om vi innlemmer rike oppgaver med autentiske trekk?

Gjennomføringen av denne studien og produksjonen av denne oppgaven har vært en overraskende fruktbar prosess. I starten hadde jeg en forestilling om at jeg bare skulle lese den nødvendige teorien, utføre de aktuelle intervjuene eller observasjonene og skrive de nødvendige kapitlene. Sett i ettertid, har jeg lest masse teori. Den ene artikkelen refererte til den neste boka som igjen refererte til en ny artikkel. På denne måten leste jeg mye mer teori enn antatt, og der hver artikkel og hver bok utgjør små tråder i noe som mot slutten ser ut til å danne et nett med en større forståelse over et felt. Jeg har hatt god tid til å jobbe fokusert med noen få oppgaver, hvilket har gitt gode resultater. Dette er jeg meget takknemlig for, og jeg ser nytten av å ha et større teoretisk fundament i min praksis som matematikklærer, og jeg vil utføre min gjerning med en større trygghet ettersom jeg vet at empirisk forskning støtter det jeg gjør. Min utfordring blir å fortsette et slikt arbeid i en travel lærerhverdag.

7 Referanser

Akker, J. J. H. v. d. (2006). *Educational design research*. London: Routledge.

Bergman Ärlebäck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducingmathematical modelling in school. *Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331-364.

Boaler, J. (2002). *Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches To Teaching and Their Impact on Student Learning, Revised and Expanded Edition*. London: Routledge.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Cham: Springer International Publishing.

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5. utg.). Oxford: Oxford University Press.

Erbilgin, E. (2019). Two mathematics teacher educators' efforts to improve teaching and learning processes: An action research study. *Teaching and Teacher Education*, 28-38. https://doi.org/10.1016/j.tate.2018.11.005

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem : inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Harboe, T. (2006). *Indføring i samfundsvidenskabelig metode* (4. utg.). Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Kaiser, G., Schwarz, B. & Buchholtz, N. (2011). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education. I *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14* (s. 591-601). Dordrecht: Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kristensen, T. E. (2019). *Fagfornyelsen - Hva bør vi forberede oss på. Presentasjon ved Sinus matematikkseminar 28/29 mars 2019.* Hentet fra https://www.cappelendammundervisning.no/cdu/cdtv/matematikk/article.action?contentId=162484

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Tett på realfag.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/869faa81d1d740d297776740e67e3e65/kd_realfagsstrategi.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Meld. St. 28 Fag – Fordypning – Forståelse - En fornyelse av Kunnskapsløftet* (Meld. St. 28). Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Lithner, J. (2019, 1.april). *Att lära matematik genom imitativa och kreativa resonemang.* Hentet fra https://www.umu.se/forskning/projekt/att-lara-matematik-genom-imitativa-och-kreativa-resonemang/

Matematikksenteret (u.å.). *LIST: Lav inngangsterskel, stor takhøyde.* Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling-i-skolen/elever-med-stort-l%C3%A6ringspotensial/om-list-oppgaver

McAteer, M. (2013). *Action Research in Education*. London: SAGE Publications Ltd.

Mostofo, J. & Zambo, R. (2015). *Improving instruction in the mathematics methods classroom through action research*. Educational Action Research, 23 (4), 497-513.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring : ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

Norqvist, M., Lithner, J., Jonsson, B. & Liljekvist, Y. (2015). Creative reasoning more beneficial for cognitively weaker students. I *Proceedings of CERME9* (s. 502-503). Check Republic, Prague: Charles University.
Pehkonen, E. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *The International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 63-67. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0001-z
Regjeringen.no. (2015). *NOU 2015: 8*

Fremtidens skole — Fornyelse av fag og kompetanser (NOU 2015: 8). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/sec2?q=fremtidens%20skole
Regjeringen.no. (2018). *Fornyer innholdet i skolen.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606064
Regjeringen.no. (2019). *Nye læreplaner for bedre læring i fremtidens skole* (Nr: 90 - 19). Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/nye-lareplaner-for-bedre-laring-i-fremtidens-skole/id2632829/
Säljö, R. & Moen, S. (2001). *Læring i praksis : et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk.
Utdanningsdirektoratet. (2015). *Vær bevisst i valg av oppgaver.* Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/regning/god-regneopplaring/2.-var-bevisst-i-valg-av-oppgaver/
Utdanningsdirektoratet. (2018a). *Matematikk - oppsummering av innspill.* Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/matematikk--oppsummering-av-innspill/
Utdanningsdirektoratet. (2018b). *Matematikk fellesfag, høringsdokument.* Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/286?notatId=573
Utdanningsdirektoratet. (2018c). *Overordnet del av læreplanverket.* Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/overordnet-del/
Vos, P. (2018). "How Real People Really Need Mathematics in the Real World"—Authenticity in Mathematics Education. *Education Sciences, 8*(4), 195. htttps://doi.org/10.3390/educsci8040195
Webb, N. M. (1982). Peer Interaction and Learning in Cooperative Small Groups. *Journal of Educational Psychology, 74*(5), 642-655. https://doi.org/10.1037/0022-0663.74.5.642
Wellington, J. (2015). *Educational research: contemporary issues and practical approaches* (2. utg.). London: Bloomsbury.
Zeni, J. (1998). A guide to ethical issues and action research 1. *Educational Action Research, 6*(1), 9-19. https://doi.org/10.1080/09650799800200053

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1, informasjonsskriv NSD

Vil du delta i forskningsprosjektet

Math Bridges

En design studie av rike, matematiske oppgaver basert på autentiske broer

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å utvikle modelleringsoppgaver. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Temabeskrivelse, mål og forskningsspørsmål:

Jeg har jobbet som lærer i 10 år og i løpet av denne tiden har jeg blitt mer og mer overbevist om at elever får en annen og mer fleksibel kunnskap gjennom å jobbe med rike oppgaver. Utdanningsdirektoratet sine tanker om ny fagplan i 2020 gir et tydelig økt fokus på modellering og problemløsning og da vil det være spesielt nyttig å gjøre seg kjent med hvordan man kan utvikle slike oppgaver hvor elevene opplever matematikkoppgavene som reelle og som er satt i en tydelig kontekst. Målet er å gjøre seg kjent med hvordan man på en god måte kan utvikle gode oppgaver som utfordrer elevenes uformelle matematiske kompetanse samtidig som vi utfordrer elevene på nye områder.

Mine foreløpige forskningsspørsmål:

1. Hvordan utvikle og presentere en modelleringsoppgave som har lavt innsteg og et høyt tak?
2. Hvordan jobber elever med Fermi problemer?
3. Hvordan kan jeg som lærer designe rike oppgaver som baserer seg på lokal og autentisk informasjon?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Uia v/Pauline Vos er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du bes om å delta ettersom din mattekompetanse hjelper meg å designe rike oppgaver.

Hva innebærer det for deg å delta?
Jeg vil observere arbeidsøkten og ta lydopptak samtidig som jeg tar notater underveis. Jeg vil kun lagre din alder og din matematiske biografi (i korthet). Jeg antar at seansen tar i underkant av en time. Oppgavene du skal løse er modelleringsoppgaver som tar utgangspunkt i autentiske data/bilde.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen eller meg som lærer.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Pauline Vos, veileder, vil ha tilgang til opptakene og dataene.
- Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Jeg vil lagre datamaterialet en minnepinne som vil være innelåst.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes juni 2019. Etter dette vil dataene slettes og minnepinnene som er brukt vil bli destruert.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Uia har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Universitetet i Agder ved Pauline Vos, tlf: 454 00 738.
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.
- Personverombudet på UiA, Ina Danielsen, tlf: +47 452 54 401.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig (Forsker/veileder) | Eventuelt student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Math Bridges, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i arbeid med modelleringsoppgaver i påsyn og veiledning av forskeren.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. juni 2019

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Obsevasjonsark

8.1.1 Vedlegg 2, observasjonsark 1

	A	B	C	D	E	F
1	Deltakere	2 Deltakere		Kamerat og kollega av kamerat. Skal disse stå med navn noe sted?????		
2	Forutsetninger	Lærere på barnetrinnet som tar etterutdanning i matematikk 1(tror det var det...)				
3	**Oversikt over strategier og kompetanseområder 29/11**					
4	**Strategier**	Slettene bru	Tømmerrenna	Justøya bru	Kiledalskleiva bru	Hornesund bru
8	Jobber med en eller flere operasjoner		1		1	
9	Tegne bilder	2	2	1	3	1
10	Leter etter mønster	1		1	2	1
11	Jobbe baklengst					
12	Lage en liste					
13	Skrive opp en ligning				1	
14	Dramatisere situasjonen					
15	Lage en tabell eller et diagram					
16	Prøv og gjett					
17	Løse et enklere problem, forenkle oppgaven	1		1	1	
18	Lage en modell	1	1	1	1	1
19	**Kompetanse-områder**					
20	Tall og algebra	1	1	1	1	1
21	Geometri	1	1	1	1	1
22	Måling	1	1	1	1	1
23	Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk					
24	Funksjoner			1	1	1
25	Generell del				1	
26	Å kunne uttrykke muntlig	1	1	1	1	1
27	Å kunne uttrykke skriftlig	1	1	1	1	1
28	Å kunne lese i matematikk	1	1	1	1	1
29	Å kunne regne i matematikk	1	1	1	1	1
30	Digitale verktøy i matematikk	1	1	1	1	1
31	Field notes/kommentarer etter å ha obervert oppgaveløsingen	Gruppe1	Gruppe 1	Guppe 1	Guppe 1	Guppe 1

8.1.2 Vedlegg 3, observasjonsark 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Ferdighet	Kjennetegn	Dette skal jeg se etter	Kiledal	Slettene	Hornesund		Justøya	Tømmerrenna
2			Oppgavesett 2						
3	Konseptuell forståelse Kommentarer:	• Elevene viser forståelse for konseptene de bruker.	Viser elevene en større forståelse ved å se sammenhengen mellom forskjellige konsepter/områder?						
4		• Elevene kan se større sammenhenger mellom oppgavens kontekst, løsningsstrategi og endelig resultat.	Viser elevene ekstramatematisk kunnskap?						
5	Regneferdigheter Kommentarer:	• Elevene utfører utregningene nøyaktig og korrekt.	Blir utregningene riktige?						
6		• Elevene utfører utregningene effektivt.	Er selve utregningen til hinder i oppgaveløsingen?						
7		• Elevene bruker hensiktsmessige metoder i utregningen.	Gir valg av regnemetoder mening?						
8	Strategisk kompetanse Kommentarer:	• Elevene jobber med å forstå hva det blir spurt om.	Klarer elevene å forstå problemet?						
9		• Elevene henter ut viktig informasjon som trengs for å løse oppgaven.	Klarer elevene å skille ut informasjonen det er behov for?						
10		• Elevene utvikler strategier som er hensiktsmessige for å løse oppgaven.	Viser strategiene seg å være hensiktsmessige?						
11		• Elevene gjenkjenner problemstillingene og forsøker å konkretisere dem.	Forsøker elevene å konkretisere problemet?						
12		• Elevene formulerer problemene på sin egen måte.	Blir problemet omformulert av elevene?						
13	Resonnements-forståelse	• Elevene evaluerer egne strategier.	Er elevene kritiske til valgt strategi?						
14	Kommentarer:	• Elevene argumenterer for valg av strategi.	Begrunner elevene valg av strategi?						
15		• Elevene argumenterer for løsningene.	Begrunner elevene løsningene?						
16		• Elevene vurderer om egne løsninger, forklaringer og svar er korrekte.	Er elevene kritiske til eget arbeid?						
17	Engasjement	• Elevene viser vilje til å løse oppgaven.	Viser elevene tegn til å ville løse oppgaven?						
18	Kommentarer:	• Elevene viser at de har tro på at de kan løse oppgaven (matematisk selvtillit).	Viser elevene tro på å kunne løse oppgaven?						
19		• Elevene viser engasjement.	Viser elevene engasjement rundt oppgaveløsingen?						
20	Gruppearbeid	• Elevene forklarer sitt resonnement for gruppen.	Forklarer de egne ressonnement for gruppa?						
21	Kommentarer:	• Elevene reproduserer sin tankerekke med en ny vinkling.	Må elevene forklare sine løsninger på flere måter?						
22		• Elevene endrer språket i forklaringen (hverdagsspråk/matematisk språk)	Forenkler/matematiserer de språket underveis?						

8.2 Oppgavesettene

8.2.1 Vedlegg 4, oppgavesett til første gjennomføring

Tømmerrenna på Steinsfossen

Denne brua er en del av tømmerrenna på Steinsfossen. Den ble bygget for å fløte tømmer etter at elva ble bortimot tørrlagt etter at kraftstasjonen kom i drift.

Hvor mange kilo må brua tåle?

Slettene bru er en "kjede bro" med et brospenn på 41,5m og "kjedet" er delt i 5 deler. Kan du identifisere de 5 delene og kalkulere lengden av "kjedet"?

Kiledalskleiva bru

Denne steinhvelvbrua fra 1840 ble bygd for hånd.

Hvor mange kilo stein måtte arbeiderne bære i løpet av byggeperioden?

Justøybrua

Hvor høye er bruas pillarer tilsammen?

Hornesund bru

Hvor stor omvei er det å gå oppe på buen istedenfor å gå på veien?

Knuten bru

Hvor langt må du kjøre fra du er under brua til du kjører over den?

8.2.2 Vedlegg 5, oppgavesett til andre gjennomføring

Justøybrua

Masta på seilbåten din ruver 12m over vannlinja. Kan du trygt passere under brua og hvor mye klaring vil du eventuelt ha til broa når du passerer?

Hornesund bru

I) Hvor stor omvei er det å gå oppe på buen istedenfor å gå på veien?

II) Hvor stor del av en sirkel utgjør buen på broa?

Tømmerrenna på Steinsfossen

Kraftstasjonen på Steinsfossen ble satt i drift i 1958 og dette resulterte i at elven Otra ble bortimot tørrlagt i et område på omlag 4km. Otra har blitt brukt til fløting av tømmer helt siden 1830-tallet. Denne konstruksjonen ble bygget på 1950-tallet for å kunne fortsette med fløting av tømmer i Otra på tross av at kraftstasjonen ble bygget.

Utbyggerne av tømmerrenna måtte beregne hvor mye vekt denne broa må tåle. Hva tror du de kom fram til?

8.2.3 Vedlegg 6, oppgavesett til tredje gjennomføring

Justøybrua

Tømmerrenna på Steinsfossen

Kraftstasjonen på Steinsfossen ble satt i drift i 1958 og dette resulterte i at elven Otra ble bortimot tørrlagt over et område på omlag 4km. Otra har blitt brukt til fløting av tømmer helt siden 1830-tallet. Denne konstruksjonen ble bygget på 1950-tallet for å kunne fortsette med fløting av tømmer i Otra på tross av at kraftstasjonen ble bygget.

Utbyggerne av tømmerrenna måtte beregne hvor mye vekt denne broa må tåle. Hva tror du de kom fram til?

8.2.4 Vedlegg 7, oppgavesett til fjerde gjennomføring

Justøybrua

Hvor stor omvei er det å gå oppe på buen istedenfor å gå på veien?

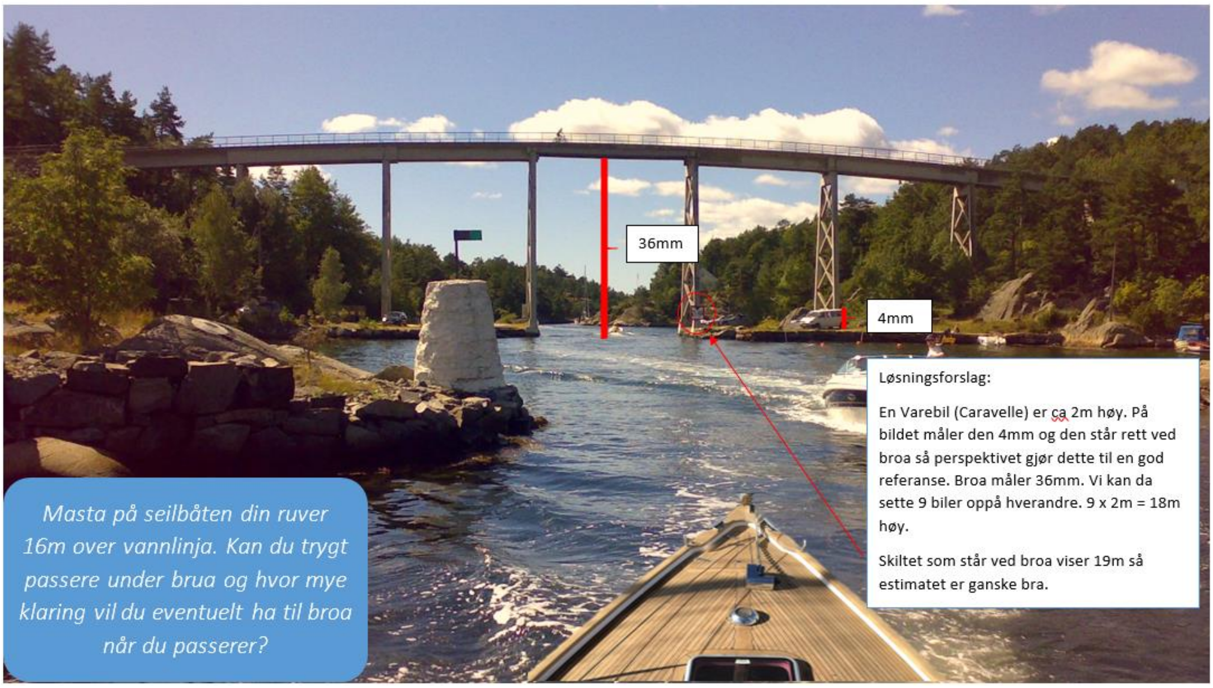
Tømmerrenna på Steinsfossen

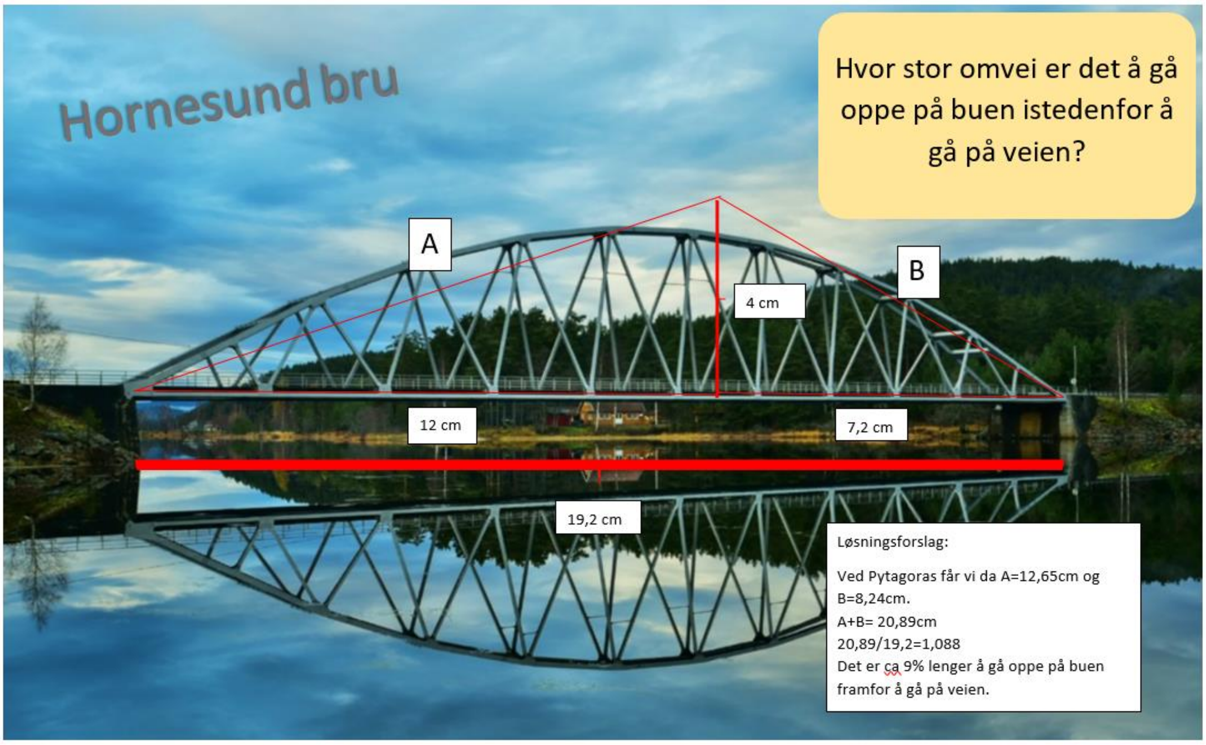
Kraftstasjonen på Steinsfossen ble satt i drift i 1958 og dette resulterte i at elven Otra ble bortimot tørrlagt over et område på omlag 4km. Otra har blitt brukt til fløting av tømmer helt siden 1830-tallet. Denne konstruksjonen ble bygget på 1950-tallet for å kunne fortsette med fløting av tømmer i Otra på tross av at kraftstasjonen ble bygget.

Utbyggerne av tømmerrenna måtte beregne hvor mye vekt denne broa må tåle. Hva tror du de kom fram til?

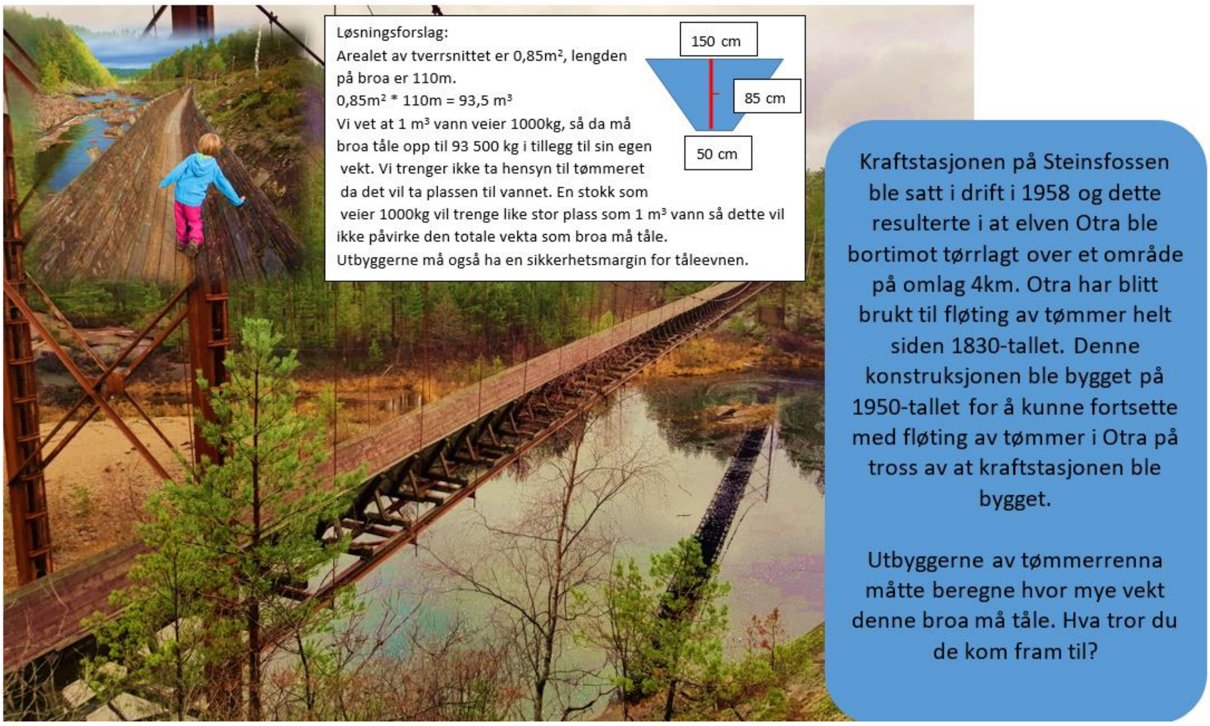
8.2.5 Vedlegg 8, løsningsforslag til fjerde oppgavesett

Justøybrua





Tømmerrenna på Steinsfossen



8.3 Vedlegg 9, transkripsjoner og analyse

Justøya bro

				Total					
	A	M	L	1	2	3	4	5	6
1	Er det oppgaven det som står her?					3			
2		16 meter over vannlinja. Så det er det vi trenger linjalen til. Hva hvis man vet hvor høy Justøybroa er? Bare utenat.				3			
3	Ruver, vil det bare si at den er så og så mye høyere enn vannet?					3			
4		Ja egentlig, så mange meter over vannet.				3			
5	Hva hvis vi måler han mannen som sykler over her da?			1		3		5	
6		Skal vi satse på at han er sånn 1…		1			4		
7		Er det noe på bildet vi kan høyden til? Vet vi hvor høye disse her er?				3			
8	Nei								

9		Nei, såklart ikke. Hvem vet det?						5	
10	Hmm								
11	Hva er gjennomsnittshøyden på en voksen mann?			1		3			
12	Det er vel 180 ca					3			
13		Det er vel 180 og noe kanskje.					4		
14	Skal vi si 180 da?						4		
15		Jaja, hvis du tenker for eksempel.							
16		Problemet der er jo at mannen er ganske mye nærmere enn broa.					4		6
17	Men egentlig så skal jo ikke det ha noe å si om de er nærme eller lenger vekk, det er bare noe synsbedrag			1			4		6
18		Men på bildet, hvis vi prøver å måle det. Så er den 4 og han er 1, så det vil si at broa er 4 ganger så stor som han.		1	2	3	4		6
19	Ja								
20		Jeg tror ikke den broa bare er 8 meter høy					4		
21	Hva med den bilen her da?			1			4		
22		Bil? Skal vi begynne med den og nå?					4		
23	Ja, det er kanskje litt lettere, siden den bilen er rett ved broa.			1			4		6
24		Nja					4		
25	Hvordan bil er det?						4		
26	Ford? Caravelle?						4		
27		Alle biler er vel rundt en meter høy.		1		3			
28	Jeg tror disse to bilene er to gode utgangspunkt til å finne ut hvor høyt det er.					3	4		
29		Ok, den ene bilen er litt mindre.							
30	Hvor høy kan den være?								
31		Det ser jo ut som en van så den er kanskje litt høyere.							
32	Skal vi si 2 meter?								
33		Ja, den er vel nærmest det.							

34		Og hvis den er sånn ca en halv cm på bildet							
35		Og broa er 4							
36	Vanen fra hjulet og opp er 4cm, så hvis vi sier at 4cm er rett under 2 meter.				2				
37		Ja							
38	Den broa går litt sånn, gjør den ikke det? Den er ikke helt rett.								
39		Det er jo ganske enkelt å se da, vi har jo en linjal.				3			
40	Den er ikke helt rett.								
41		Nei, ikke i det hele tatt.							
42		Den buer seg litt ja.							
43	Så dette er høyden på broa.								
44		Nei, det er lengden.							
45	Ja, lengden ja.								
46		Vi bare tar opp mobilen og søker på hvor høy broa er.				3			
47	Ja, bare søk på Justøy bro.					3			
48	Ok, vi sier den er 2 meter høy. Den bilen der.								
49	Det er 4cm.			1	2				
50	Nei, nå ble den plutselig 5cm. Ok, vi sier 5cm.				2				
51		Det er lettere å regne med					4		
52	Så da blir målestokken 5 er lik 2 meter.			1	2				
53	Det blir 2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 meter.				2				
54		Men du må måle herifra.						5	
55	Jaja, men vi begynner først her, så går vi bort sånn og så går vi fra her og oppover.						4		6
56		Ok							
57	Nå datt jeg helt ut.							5	
58	2 meter, 4 meter, 6 meter, 8 meter, 10 meter, 12 meter, 14meter er det til her hvertfall. Så vi trenger hvertfall et par meter til for at den skal komme gjennom.				2		4		
59	Så opp til der er det 14 meter.				2		4		

60	Så går vi litt bort her og gjør litt sånn.				2		4		
61	Jeg tror ikke bilen er eksakt 2 meter, den er vel sannsynligvis litt lavere.						4		
62		Ja , den er vel mer 195							
63	Jeg husker vi hadde en Caravelle når jeg var mindre								
64		Ja							
65	De nyere bilene er litt lavere nå, de er ikke så høye. Hvis du ikke har en svær varebil da.								
66	Men utifra det her så ser det ut som en Ford.								
67	14 meter opp til her.								
68		Det blir vel 3 her for du skal jo ikke treffe selve broa.			2		4		
69	Så la oss si for hver av disse 14 meterne								
70		Ja, det blir jo 14 også pluss 1,5 meter kanskje			2				
71	Mhm								
72		Så kanskje 15,5 meter.			2				
73	Også har vi litt å gå på igjen, for vi målte jo ikke 2 meter eksakt.						4		
74		Ja, da blir jo feilmarginen det som avgjør om vi kommer under eller ikke. Så vi har fortsatt ikke noe svar.					4	5	6
75	mhm								
76	Jeg tror nok den kommer under, siden den er på vei den veien. Siden han sikkert har litt erfaring på området.								
77		Han har sikkert litt peiling.							
78	Han går ikke den veien uten å vite det								
79		Det var akkurat sånn som faren min holdt på når jeg var liten, han visste alltid hvilke broer han kom under eller ikke. Hvis han kom til en bro han ikke							

		visste, så var det helt panikk.							
80	Jeg tror han kommer gjennom, men det er på nippet.								
81		Problemet er jo at vi skal finne ut hvor mye klaring det er. Så da må vi ha en ganske nøyaktig måling.				3			
82		For det er eller annet juks her, det er et eller annet vi skal vite som vi ikke vet.				3			
83			Nei, det er ikke det. Vi skal bare ha et ca svar på hvor mye klaring det er.			3			
84		Hvorfor ikke bare ta ned masta?				3			
85	Er ikke det litt arbeid?						4		
86		Men da slipper du å tenke på det.							
87	Hva hvis han bruker masta til å komme seg bortover?						4		
88		Synd for han, da burde han tatt en annen vei.							
89	Skal vi si at han kommer gjennom med 1-2 meters margin?							5	
90		1-2 meter?							
91	1 meter har han ca å gå på.								
92		Jeg tenker han har fint lite å gå på hvis vi beregner at broa er 16 meter høy, og det var sånn veldig ca måling.					4		
93	Maks 1 meter								
94		Men det er nesten en halvmeter han treffer med eller en halvmeter han bommer med.					4		
95	Håper det ikke er noen bølger da, det ville jo vært lit kjipt.						4		

96		Det blir flo akkurat i det han kommer der.					4		
97	Skal vi si det da?								
98		Ja							
99	Den kommer gjennom med ca 0,5-1m klaring.								

Hornesund bro

				Total					
	A	M	L	1	2	3	4	5	6
1		Hvor stor omvei er det å gå oppe på broen enn å gå på veien?				3			
2		Hvilken vei? Jeg ser ingen vei.				3			
3		Så de tenker å gå oppe på broa i stedet for å gå over broa som en helt normal person. Ja, ok.				3			
4		Så da skal vi altså finne ut hvor mye lenger det er å gå der enn å gå der.				3			
5		Den der er hvertfall enkel, vi gjør bare sånn. Da har vi lengden.			2	3		5	6
6	Ja								
7		Ca 21,5 cm.			2				
8	Ifra hvor?								
9		Fra ende til ende. Det blir jo ikke helt riktig da siden den går den veien.							6
10	Vi må bare se det fra den vinkelen her.					3			
11	Har du noen forslag?								
12		Jeg kan jo måle sånn her da, men det blir jo litt vanskelig i og med at den bøyer seg.				3			6
13	Det hadde jo gått, hvis vi finner den avstandden her. Også tar du bare litt og litt.						4		6
14		Hva med å bare bøye den (linjalen)?				3			
15	Ja, hadde ikke det gått da?						4		
16		Jo så lenge den ikke knekker.					4		

17	Det går akkurat. Det er på nippet.						4		
18		Det går ca fra 7 til 30 så vi sier 27			2				
19	Nå er den perfekt, nå må du måle.				2			5	6
20		Ja, det er 7,5 til 29,5 så det er fortsatt 27			2			5	6
21	27?						4		
22		Ja					4		
23	Juksa vi nå?							5	
24			Det er absolutt ikke juks						
25		Vi kom bare på en ide han aldri tenkte på.						5	
26		Så da er det 27 mot 21,5. Da er det…				3			
27	Hvor stor omvei?					3			
28		Er det ikke 27 minus 21,5?			2				
29	6?				2				
30		Det blir 5,5.			2				
31	5,5				2				
32	Ja, la oss si… Hvor stor omvei?					3			
33		Ja, det blir 5,5 meter da eller cm.			2				
34	Hvordan vet vi at målestokken er akkurat lik her? Hvordan vet vi at 1 cm er 1 meter?			1			4		
35		Nei, det vet vi så klart ikke. Men omveien blir på 5,5 cm på bildet.		1			4		6
36	Ja								
37		Og hva enn det blir i meter vil jeg ikke prøve på å regne ut engang.						5	
38		Det er ingenting på dette bildet jeg vet høyden på.		1		3			
39	Hmm								
40		Og broa er ikke tatt rett, den er på skrå. Så uansett hva vi finner ut av så blir det feil.				3		5	6

41		Hvis vi måler noe herfra, hvis det treet er så og så høyt så stemmer jo ikke det på andre siden. Det er jo langt i bakgrunnen og mye mer sammentrukket.		1		3		5	6
42	Bare se om det…								
43	Da sier vi det er 5,5 % lenger			1					
44		Det blir ikke prosent, det blir mye mer regning		1			4		
45	27, også hvor lang var den?					3			
46		Den var 21,5 og bua var 27				3			
47	Så hvis 21,5 er 100 så øker det me 5,5				2	3			
48		Nei, for det blir 5,5 i cm og ikke i prosent.			2		4		6
49	Kan vi bruke kalkulator?								
50			Ja						
51		Skal jeg regne det ut da?							
52	Du skal få lov.								
53		Da blir det 21,5 gange.. Nei, ikke gange.			2				
54	Blir det ikke delt på 100				2				
55		Delt på 100			2				
56		Det er 1%		1	2				
57	Ja								
58		Også blir det vel 5,5 gange 0,2015 blir det ikke?		1	2				
59	Nei, blir det ikke 0,dette her og gange det med 5,5.				2		4		
60		Var det ikke det jeg gjorde?			2				
61	Du gjorde motsatt				2				
62		Delte jeg det?			2				
63	Prøv å ta dette og gang det med det.				2				
64		Det blir jo det samme uansett hvilken vei jeg gjør det.			2				6
65	Jaaa								
66		Du vil at jeg skal ta 0,215 først også….			2				
67	mhm								
68		Nei, nå tror jeg at du skal gjøre det, for jeg er så trøtt.						5	

69	Det må jo bli mye mer enn bare 1,08%			1	2		4		
70		Ja, man skulle jo egentlig tro det.		1			4		
71		Man skulle hvertfall tro at det skulle bli mer enn…. Nei, det trenger det jo ikke å være.		1			4		
72		Det er et eller annet vi gjør feil her nå.		1			4	5	
73	mhm								
74		Jeg er ganske sikker på at 0,215 ikke er riktig tall altså.			2		4		
75	Ja								
76	Lengden var 21,5					3			
77		Hvordan var det vi fant forskjellen på ting?				3	4		
78	21,5					3			
79		Hva?							
80	Lengden var 21,5					3			
81		Ja							
82	Så halvparten av dette her er altså…				2				6
83		Skal du prøve å finne 5,5% nå eller?				3			6
84		Det ville tatt ganske lang tid.				3			6
85	Ja					3			6
86		Nå har jeg helt glemt hvordan matte fungerer.						5	
87		Så 2, 1.5, nei ikke ganger, 1 2 delt på 100.			2				
88		Jeg skjønner ikke hvorfor jeg må dele på 100, dette bør jeg jo kunne utenat.		1	2	3		5	6
89	Da har det økt med ca 25% lengde.				2				
90		Ehhh, ja.							
91	Må ta 21				2				
92		Hvordan kom du fram til det?						5	6
93	Hvis du ser her så har du lengden							5	6
94		Ja						5	6
95	Og den var 5,5 lenger.							5	6
96		Ja						5	6

97	Så hvis du tar halvparten av den og halvparten av den så blir det sånn…							5	6
98		Ja						5	6
99	Så da blir det sånn ca 25% lenger							5	6
100		Ja						5	6
101		Jeg gir opp på kalkulatoren							
102	Skal vi se. 21,5*1,25=26, Jeg veit a søren.			1	2				6
103	Da sier vi 25% lenger						4		
104		Tror du det er greit å gi %?					4		
105			Hvilke to mål tok dere utgangspunkt i?						
106	Det var lengden her og lengden over her.								
107			Og hva var det? Kan dere måle det en gang til?						
108			Er dere sikker på at den er 27?						
109		Nei, den er 23			2				
110			Hvorfor er den 23?						
111		Fordi jeg plutselig glemte hva 30 minus var for noe, og gjorde det til 27 av en eller annen grunn.			2				
112	Hvorfor gjorde du det?								6
113		Jeg veit ikke, jeg er trøtt likssom							6
114	Så hva blir det for noe da?							5	
115		Det er jo da…							
116	Vi får jo ikke vite 100% så vi må bare ta sånn ca.							5	
117		Men da er det jo… 21,5/100*1,5 tror jeg. Det hjalp meg ingenting.			2				6
118		Vent, Jeg vet ikke hvordan % fungerer lenger.			2				
119	23cm målte vi så 23 mot 21 så 2cm lenger å gå over sånn.								6
120		Var det ikke 21,5?						5	

121	Hvis vi måler fra her til her, er det ikke her broa starter?					3			
122		Vet ikke helt.							
123			Så det er 23 og 21 dere har å jobbe med?						
124	Ja					3			
125		Nå kommer vi sikkert fram til riktig svar håper jeg.						5	
126	4,8% mer. Nei.				2		4		
127	Det var litt lite						4		
128			Var det for lite?						
129	Ja, 4,8 % lenger er litt lite						4		
130			Hvor mye er 10% da?						
131	Av 21?								
132			Ja						
133	10% av 21, det må jo være…				2				
134		2,1			2				
135			Ja						
136		Ahhh						5	
137	Gikk det opp noe for deg nå?							5	
138		Nei						5	
139			Hve er 21+2,1?						
140	23,1				2				
141			Det er ikke så langt unna da.						
142		Det er for mye.		1					
143	Vi sier det.						4	5	
144	4,83% lenger				2		4	5	
145		Er det vårt endelige svar?					4	5	
146	4,83				2		4	5	

Tømmerrenna

				Total					
	A	M	L	1	2	3	4	5	6
1		Det spørs jo litt hvor mye de frakter				3			
2	Det blir jo egentlig det samme					3			

3		For tømmerrenna må jo tåle at alt sammen er der samtidig, alt tømmeret. Ikke at jeg vet hvor mye det er				3			
4		Jeg synes det er litt dårlig at vi skal beregne det samme som de, men at vi har mindre informasjon.						5	
5		Vi vet ikke engang hvor lang den er.				3			
6	Den må jo tåle en del da.						4		
7	Det står jo en unge der					3			
8		Vi vet at det kommer en unge som veier 40kg som kan gå på den.				3			
9	Den må jo holde alt vannet og hvis det skal flyte tømmer på den så må den være ganske full med vann.			1		3			
10		Den er nok nærmest full med vann.		1		3			
11	Ja					3			
12		Men det må ikke bli sånn at tømmeret skvulper over.		1		3			
13	Vannet i seg selv veier jo ganske mye hvis vi skal fylle hele denne, og i tillegg så er det lange rader med tømmer.			1		3			
14		Jeg tror at denne her bare med vann ville veid ganske mye.		1		3			
15	Ja								
16		Hvis du fjerner vekten av selve konstruksjonen.		1		3			
17		For du kan jo tenke deg hvor mange liter det er plass til i denne her.		1		3			
18	Godt poeng								
19		Se, vi får ikke vite det engang.						5	
20		Jeg har ikke peiling på hvor høy en sånn type unge er.		1		3			
21		Jeg kan jo ikke høyde på unger så jeg vet ikke hvilken alder jeg skal gjette heller.		1		3			

22	Jeg tenker bare på tømmerrenna i Sørlandsparken			1		3			
23		Jeg tenkte bare på tømmerrenna i Dyreparken.		1		3			
24	Det var jo den jeg sa.			1		3			
25		Sånn ja		1		3			
26	Hvor mye vann skal den tåle?			1		3			
27	Ok, kubikkmeter vann er like mye som en kilo, eller hvor mye var det nå igjen?			1	2				
28		1 kubikk er 1…..		1	2				
29	1 kubikk… Hva var nå det igjen?			1	2				
30	Jeg tror ikke det er en meter, jeg tror det er litt mye.			1	2				6
31		Joda, 1 kubikkmeter er et tonn.		1	2				6
32	Hva med en kubikk desiliter, nei…			1					6
33		Nei, det er vel at…		1					6
34	Vi haddo jo det her i fjor.								6
35		Det er det at en kubikkmeter med vann er 1000 liter.		1	2	3			6
36	Ja								6
37		Og at 1000 liter var et tonn?		1	2	3			6
38	Så en kubikk desiliter er like mye som en kilo?			1	2	3			6
39		Det var kanskje noe sånt.		1	2	3			6
40		Blir det ikke kubikkcentimeter?		1	2	3			6
41	En kubikkcentimeter er litt for lite for en kilo			1	2	3			6
42		Ja, tonn er jo 10 kilo, nei, det er mil som en 10 km		1	2	3			6
43	1 liter er jo 10 desiliter			1	2	3			6
44		Ja		1	2	3			
45	Hvor mye er det i denne colaboksen her?			1	2	3			
46		0,33L		1	2	3			
47	Så hvis du hadde hatt en halvliter, to av de blir jo en liter, så hvis du hadde satt			1	2	3			

	de i en firkant så ville det blitt noe sånn.								
48		Hva tenker du på?		1	2	3			
49	På kubikken, på vannet.			1	2	3			
50	1 kilo, 1 liter			1	2	3			
51		Hvis du har 2 brusflasker så har du en liter.		1	2	3			
52	Ja								
53	Men den ungen her da, la oss si den er en meter høy, han er sikkert i andre klasse eller noe sånn.			1		3			
54		Det er så vanskelig å si nå til dags.		1		3			
55		Jeg har liksom sett 14-åringer og sånn.		1		3			
56	Vi kan si han er en meter høy				2	3	4		
57	Er det mye det for en unge? En meter?				2	3	4		
58	En meter høy, hvor gamle er de da ca?								
59			Da er de 2-3 år.						
60	Når de er en meter?								
61		Da bomma vi littegrann kanskje.					4		
62	Ja, da bomma vi litt.						4		
63	Den er litt eldre enn det.						4		
64		1,3m eller 1,2 m kanskje			2		4		
65			Det er sikkert ikke så dumt tenkt det.						
66		Den er 2cm, eller kanskje nærmere 3cm. Eller kanskje 2,7.			2				
67	Hvis vi hadde satt en renne over også sånn at den hadde blitt lukka, så ville det sett ut som en firkant.			1	2	3			6
68		Problemet er at du faktisk får en sekskant.			2	3			
69	Sånn ca				2	3			
70		Sånn ca en firkant?			2	3			
71	Den er jo likssom sånn (tegner en V-form), så hvis vi hadde satt en over her				2	3			6

	så hadde det sett ut som en firkant.								
		Ja							
72	Så hvis vi likssom hadde regnet den kubikken for hele greia, også delt på 2 til slutt.					3			6
73	For det er mye lettere å regne i en firkant.					3			6
74	Så la oss si de her hadde vært en...								
75		Ja, det er vanskelig å vite hvilken form dette er.				3	4		
76	Det er jo sånn. (formen til en V)						4		6
77		Ja, litt sånn flat i bunnen.					4		6
78	Ja, men man kan aldri vite sånn 100%, vi må jo bare ta litt sånn ca.							5	
79		Vi kan jo intervjue det barnet og spørre hvordan den egentlig så ut.				3			
80		Den er litt sånn bua.				3			
81		Vi kunne like enkelt gjort det som en trekant også.				3			
82	mhm								
83		Tror jeg, hvis man husker hvordan man beregner det.		1	2	3			
84		Eller arealet i og med at vi lager en 2D versjon.		1		3			
85	Vi vet jo ikke eksakt hvor gammel den ungen er, om den er 2 eller 3 år.								
86		Skal vi prøve å se på skostørelsen?				3			
87		Det er ikke så lett å se.				3			
88	Hvor mye skal den tåle? De har helt sikkert beregna at den skal tåle mye mer enn det den skal bli brukt for. Bare for sikkerhets skyld, de har sikkert en margin å gå på.			1		3			
89		Ja							
90	Så de har sikkert mange kilo å gå på.			1		3			

91		Ja, for plutselig kommer det 10 store kubber.		1					
92		De har sikkert beregnet med flere kilo i feilmargin, for å være helt sikker. Det er hvertfall det jeg ville gjort.		1			4		6
93	Hvor lang tror du den er da? Fra her til her?					3			
94		Jeg vil kanskje si samme høyden som denne tingen.			2	3			
95		Hvis vi måler her så får vi 4 cm og hvis gutten er 1,3 så kanskje 1,7 eller noe.			2				
96	Skal vi si 1,6 da eller?				2				
97		Da vil jeg beregne litt bedre faktisk.			2			5	
98		Hvis jeg har 1,3m delt på 3 cm så blir det ca 43 cm per cm så da blir det ca 1,6m da			2				
99	Skal vi si det?						4	5	
100		Ja					4		
101	1,60 bred?				2		4		
102		Ja					4		
103	Og høyden da?					3			
104		Ungen er jo litt høyere enn renna.			2				
105	Ja						4		
106		Så kanskje 1 et eller annet			2	3			
107	Hvis vi tar fra den lengden da?					3			6
108		Ja, det er hvertfall ikke langt unna…			2		4		
109		Her er det kanskje 2,1 hvertfall			2				
110	Så kanksje 1,10 da eller?				2				
111		Ja, kanskje noe sånt.					4		
112		Men den er jo på skrå da.					4		
113		Skal vi se hva lengden er for noe?				3			
114	Ja					3			
115	Hvor bred var den sa du?								
116		1,60 eller noe, også er høyden 1,10 kanskje.		1					
117		Det er noe perspektiv som gjør det vanskelig her. (Måler skrått ut fra bildet.)		1		3		5	

118	På et område på om lag 4km, er det omkrets eller?			1		3			
119		Nei, hvis det står et område så betyr vel det…							
120			Det er lengden på hele renna, broa er en del av renna.						
121		Men et spørsmål, skal vi regne delen eller hele renna?				3			
122			Det er bare den broa.						
123		Fanken							
124	Ja, for den går sikkert mye lenger enn det der.			1		3			
125			Det vi ser på bildet er bare en liten del av hele renna.						
126		Ja, for det ser ikke ut som den er 1 km engang.				3			
127	Skal vi beregne hvor mye vann den kan tåle og hvis den er stapp full av tømmerstokker.					3			
128		Hvis det er sånn langt etter starten.				3			
129	Ja, de veier jo gangske mye de.			1		3			
130		Det er noe vi ikke kan sitte her å regne på. Tettheten på tre er liksom så mye.		1		3			
131	Litt vann inni treet i tillegg.			1					
132		Ja, det er litt luft i også.		1					
133	Skal vi si en meter høyde, at den er ca 1 m?				2	3			
134		Ja, det kan vi godt.					4		
135	Da vet vi høyden hvertfall.					3			
136		Det blir jo aldri 100% riktig uansett.						5	
137		Vi vet jo heller ikke hva lengden på alle tømmerne er så vi vet jo ikke hvor mange som kan være på broa samtidig.		1		3			
138		Men de pleier å være ca 2m lange, det vet jeg.		1					

139	Men en kubikkmeter vann, hvor mye veier det?					3			
140		1 kubikkmeter er jo et tonn		1					
141	Det er et tonn								
142		Er det 100kg et tonn er?		1					
143	Nei, det er 1000kg i et tonn.			1					
144		Er det det?		1			4		
145	Jo, er det ikke det? Jo selvfølgelig er det det.			1					
146		Ok, jeg blander mil og tonn.		1					6
147	Også øker vi med 60, så det blir jo å øke med halvparten igjen. 1 tonn blir sånn ca 1600kg for hver sånn der.			1	2		4		6
148		Det jeg tror man kan gjøre, nå må du rette på meg lærer, er at hvis man har 60cm, kan du ikke bare dra det i en firkant?					4		6
149			Nå skjønte jeg ikke hva du mente.						
150		Hvis du skal ha arealet på noe som helst sett, nå har vi 160cm og 1m og lager en firkant. Hvis vi bare fjerner de 60cm og bare lager på 1mx1m, så blir jo det en kubikkmeter for vi har bare… Kan vi ikke bare ta de 60 i stedet å lage en firkant av det? Hva er 60/4?			2		4		6
151			Det er 15.						
152		Ja, og lage er 15x15 firkant for å lage det resterende arealet.			2		4		6
153			Jeg er ikke sikker på om jeg ville gjort det.						
154		Søren. Det var derfor jeg måtte spørre.					4		
155			Hva er det dere har funnet med de 1600kg?						

156		Nei, vi har ikke funnet noen kilo.							
157	Nei, 1300kg cirka.								
158	Vi tenkte 1m som høyden og bredden er 160cm også tenker vi på et kvadrat med 1m begge veier så hadde det vært et tonn for hver meter bortover.				2		4		6
159			Så for hver meter bortover så er det et tonn?						
160	Ja, et tonn med vann. Men i og med at den ene siden er litt lenger, 60cm, så må vi øke med ca 300kg.				2		4		6
161			Ok						
162	Hvis den skal være full helt opp til toppen da.								6
163		Men det skal den nok egentlig ikke være. Forresten, det er en ting. Nå gjorde vi det til en firkant, men det er bare halvparten vi trenger.				3			6
164	Jaja, men når vi får svaret så deler vi det bare på 2.					3			6
165		Eller dele på to først? For det blir jo det samme.		1		3			6
166	Kanskje lettere å regne med hele tall først også når du får svaret så deler du på to da.			1		3	4		6
167		Nja				3			
168	Regn det da!					3			
169		Vi trenger jo ikke regne hvis det er 1300 delt på 2, for det er 500+150, og det blir 650.			2				
170	Hæ?								
171		Det blir det ikke, hva er det jeg snakker om? Jo det blir det! Jeg hadde så riktig at jeg trodde jeg tok feil.					4		6
172	Ja, 650 med vann for hver meter.								
173		Og den skal jo ikke være helt full.				3			

174	Vi vet jo ikke hvilken avstand dette er, så det må vi bare beregne.					3			
175		Ja, for det er jo ikke noen unge som står i den dessverre.				3			
176	Ja								
177		Men vi har noe annet da, vi vet jo ca høyden den veien. Vi vet ca høyden her.				3	4		6
178	300kg								
179		Oh, vinkler… Det liker jeg ikke.						5	
180		Jeg tror 1,5 og her er det ca 2,5 så det er ca en cm mindre her. Men det har jo ikke noe å si. For det er jo ca 1m etter vår beregning.			2	3			
181	Men hvor langt er det fra her til her tror du?					3			
182		Hvis vi ikke regner med perspektiver så regner vi vel sånn 19,5x1,5 som er 29,25. Jeg tror ikke det er riktig når vi ikke regner med perspektivet.		1		3	4		
183	mhm								
184	Hva er lettest å regne da? Det her eller refleksjonen i vannet?					3			
185	Det blir jo helt ander mål.						4		
186		Ja, i refleksjonen så ser du jo ikke hele broa engang. Så det blir jo allerede et problem.					4		
187	mhm								
188		Men noe vi kan si er at den er mellom 29 og 37.			2	3			
189	Meter?								
190		Ja							
191	Hvordan fikk du det?								
192		Lengden her er 19, vi har funnet høyden her til å være ca 1m som er 1,5cm. Så tok jeg lenden på den ganget med 1,5 som er ca… Også ganget jeg med litt lenger for å få med			2	3	4		6

		lengden på perspektivet også.							
193	Hva hvis vi finner forskjellen mellom den og den og finne hvor mye mindre den er. Da finner vi målestokken.			1		3			
194		Ja, det går jo.					4		
195	Fra disse to så…								
196		Da blir det mye beregning i mellom her da.					4		
197	Bare for å finne sånn ca.					3			
198		Her ser du ikke toppen.			2				
199		Dette er den siden så den går kanskje ca opp hit. Ca 20.			2		4		
200	Den der borte da?					3			
201		Den er 1,7 ca			2				
202	1,7?				2				
203		Ja og den ander var ca 20-21			2				
204	Skal vi si 20				2		4		
205		Vi kan si 20,5 ca så legge vi inn litt feilmargin.			2		4		6
206	Ja								
207		Men jeg har ikke peiling hvordan man gjør dette her.		1		3			
208	Må vi ta den og dele på den?			1		3			
209		Det var det jeg også tenkte, men hva forteller dette meg?		1		3	4		
210	Hmm						4		
211	Hva er avstanden fra disse. De er kanskje like kange hele veien bort.					3	4		
212		Det vil jeg jo inderlig håpe.				3	4		
213	Jeg tror kanskje vi overkompliserer det.					3	4		
214			Hva var det du så på for noe nå?						

215	At det var lik lengde mellom disse her.					3			
216			Hvor langt tror du det er mellom de?						
217		Hvem vet? Der er det 1,5 og der er det ca 2			2				
218		Ifølge mine bergninger så skal det være ca 3m mellom de.			2		4		
219	Mellom de 2?						4		
220		Ja					4		
221	Ja, men da sier vi det.								
222			Hvor lang blir broa da?						
223	3 meter, så da blir det…				2	3			
224		Det ser ut til å være en der, en der og en der.			2				
225	Ja, er ikke den på baksiden?				2		4		6
226		Jo, det kan den være.			2		4		
227	Men de her, de fester jo der.				2		4		
228		Men den går opp.			2		4		
229	Hvis det er disse her så må det bli denne.				2		4		
230	Vi sier bare 3m, 3m…				2		4		
231		Jeg tror vi bare tar fra den til den, så er vi kvitt den lille usikkerheten.					4		6
232	Ja, vi tar bare sånn ca.							5	
233		Det blir sånn 3,6,9,12,13			2				
234	Hæ?						4		
235		12,13… Haha						5	
236		Det blir heller 3,6,9,12,15,18,21,24… Nå har jeg gjort noe feil.			2		4		
237	27				2				
238		Ja, jeg har gjort det riktig. 27,30 til ca der			2		4		
239	Vi tar bare halvparten.					3			
240		Det var det jeg tenkte på, men er det halvparten? Det ser ikke helt ut som det der er midt på.			2	3	4		
241	Jeg tror det er et synsbedrag, for hvis det er			1		3			6

	en bro så må det være symmetrisk.								
242		Det vi si at den er 39 eller 42.			2	3			
243	Til midten?						4		
244		Ja, det er vanskelig å si hvem av de som er i midten, siden de er så langt ifra.			2	3	4		
245	Vi sier midt imellom da, 35?				2				
246		Nei, det er midt på.			2		4		
247	32 og 39?				2				
248		Nei, 39 og 42.			2				
249	Åja				2				
250		40 da?			2				
251	Ja, vi sier 40m fram til der også 40 der så blir det 80m. Så vi sier den er 80m.				2		4		6
252		Jo, ja. Hva var det jeg kasta bort tida mi på å telle 3,6,9. Jeg kunne jo bare telt antallet og ganga det med tre.		1					
253	Ja, da blir det 80m				2				
254		Sånn ca					4		
255	For hver meter så skal den holde 1300kg med vann.						4		
256		For hver andre meter så legger vi til en… Hmmm… Hvor mye vil en 2m lang tømmerstokk veie?			2	3			
257	Skal vi se… 1,3*80… Det blir store tall.				2	3			
258		Hva har du gjort nå?					4		
259	Bare ganga 1300*80, det ble litt rart.				2				
260		Det blir jo 104 000 tonn			2				
261	Jeg har sånn superkalkulator jeg har lastet ned.								
262		104 000 tonn, det skal kanskje så mye til.		1			4		
263		Men husket du å dele på 2 forresten?			2		4		
264	Ja, det skal vi								

265		Da blir det plutselig bare 52 000 tonn.			2				
266	52 000 tonn, da tenker vi at det er vann helt opp til toppen.				2		4		
267		Ja, det er hvis det er helt fullt.			2		4		
268	Og det er det jo mest sannsynlig ikke.			1					
269		Nei, jeg kan tenke meg kanskje 2/3, maks 3/4		1					
270	Muligens så kan vi bare si at vi tar den vekta også kan vi si at vi da har tatt med tømmeret som er i den også. Når den er stappfull med tømmer.			1			4		6
271		Det vil jeg si er ganske nærme.		1			4		
272	Ja, skal vi si det?			1			4		
273		Ja, vi kan gjerne stoppe på 52 000 tonn					4	5	
274	Ja, vi tar den.						4	5	
275		Det var det vi skulle fram til?						5	
276			Ja.						
277			Jeg er litt usikker på om dere mener 52 000 kg eller 52 000 tonn.						
278		Jeg husker ikke.							
279			For her regner dere med 1300kg også ender dere op med tonn.						
280	Men 1300 kg er jo 1,3 tonn			1					
281		Vi beregnet jo dette i kilo og ender opp med tonn her. Men da er det jo bare å ta bort noen nuller.		1			4		
282	Skal hele broa bare ta 52 tonn? Er ikke det litt lite?			1			4		
283			Hvor mye er 52 tonn hvis dere tenker mot noe annet?						
284		Ganske mange lastebiler		1					

285	Det er 5200kg, nei det blir 50200kg.			1					
286		Jeg vil nok si at en tømmerbil kunne kjørt på den broa.		1					

8.4 Vedlegg 10, feltnotater

Første gjennomføring

Tømmerrenna

Spørsmål	Denne broen er en del av tømmerrenna på Steinfossen. Den ble bygget for å fløte tømmer etter at elva ble bortimot tørrlagt etter at kraftstasjonen kom i drift. Hvor mange kilo må broen tåle?
Hensikt	Mål • Eleven skal se på tverrsnittet av renna og arealet av dette. • Eleven skal estimere bredde og høyde på renna, samt brospennet. • Eleven bør ha kjennskap til vekten av vann. • Eleven skal, ved å trekke paralleller til virkeligheten, legge inn en sikkerhetsmargin i sin utregning.
Observasjon	Det første jeg legger merke til er at bildet oppe til venstre ikke blir lagt merke til i det hele tatt. De legger også lite vekt på bildet der et barn går i renna, noe som kunne vært brukt som en referanse på høyde og bredde på renna. De forsøker først å finne lengden på broen og ser på det som essensielt for å kunne løse oppgaven. De forsøker en teknikk de halvveis husker med forsvinningspunkt og avstand, dette fungerer ikke da de ikke har noen kjent referanse. De ender på med å beregne lengden på renna ved å anta at avstanden mellom vaierne er 3m. De konkluderer med at broa er ca 70m lang. Deretter prøver de å finne arealet av tverrsnittet til renna for så å skulle beregne hvor mye vann renna kan romme og teller hvor mange bord som ligger i bunnen og oppover veggene for å estimere dette. De ender opp med at det kan være 70 000 liter vann i renna på en gang. De er ikke hel fornøyd med svaret og prøver å relatere det til noe kjent, i dette tilfellet en jacuzzi. Etter å ha funnet volumet av et boblebad blir de enige om at svaret kan være riktig. Til slutt foreslår de å legge på litt ettersom det må tåle litt ekstra. Av nysgjerrighet så stiller den ene et spørsmål; "Blir vekta mer eller mindre hvis det er tømmer oppi?" De klarer ikke å besvare spørsmålet.
Mine kommentarer	De er nødt til å estimere lengden og arealet til tverrsnittet til broa, så denne oppgaven gikk nesten som planlagt. Hjelpebildene jeg hadde limt inn så ut til å være overflødige, bør de tas bort eller erstattes? Oppgaven er tydelig og de forsto hva det ble spurt etter.
Refleksjon og endringer	Jeg synes oppgaven fungerte bra, jeg endrer oppgaveteksten noe og for å gjøre oppgaven mer autentisk så stiller jeg et mer virkelighetsnært spørsmål som må ha blitt stilt i forløpet til byggingen av broa. Jeg tar vekk bildet som viser en full tømmerrenne da dette ikke så ut til å bli viet noe oppmerksomhet.

Slettene bru

Spørsmål	Slettene bru er en "kjede bro" med et brospenn på 41,5m og "kjedet" er delt i 5 deler. Kan du identifisere de 5 delene og kalkulere lengden av "kjedet"?
Hensikt	Mål

	• Elevene skal se sammenhengen mellom brospennet, lengden av hver del av kjedet og finne en strategi for å finne høyden av broa. • Eleven skal begrunne sine antakelser om det de ikke ser i bildet.
Observasjon	De starter med å prøve å forstå begrepet "kjede-bro". De tenker å dele brospennet i fem ettersom de ikke ser noen andre muligheter. De finner ut av begrepet "brospenn" ved hjelp av Google. De går så tilbake for å forsøke å identifisere de fem delene, noe de ikke lykkes med. De irriterer seg over at de ikke forstår begrepene som er brukt i oppgaven, de sliter med å forstå hva det spørres etter. For at gruppen skal komme videre så tipser jeg om at de må fokusere på de kraftige vaierne. De skisserer så broa fra siden som to pyramider med litt mellomrom. De jobber så en del for å avgjøre om de kan dele broa i tre deler. De konkluderer etter hvert med at de kan det ettersom de bare skal estimere en lengde og at det da ikke er så farlig om det blir helt nøyaktig. De teller gjerdestolper for å finne ut av lengden på delene. De identifiserer de fem delene og gjør det nå litt mer omtrentlig. De prøver også å forstå begrepet "kjede" igjen uten større hell, på tross av manglende forståelse så presenterer de likevel et svar.
Mine kommentare r	Oppgaven er uforståelig for gruppen og uten hjelp ville de aldri regnet på det som var intensjonen og dit oppgaven førte elevene var i en lite hensiktsmessig retning. Det er noen begreper som må oppklares om oppgaven skal presenteres på denne måten med denne intensjonen.
Refleksjon og endringer	Begrepet "kjede bro" er for ukjent til at det er hensiktsmessig å ha med i en oppgave som skal kunne utfordre flest mulig. Kanskje prøve en av de andre oppgavene på denne broa? Kanskje spørre om hvor mye stål og treverk som ble brukt under restaureringa? Da vil de også regne ut "kjedet" som jeg nå spurte om. Jeg liker likevel hvordan de forsøker forskjellige strategier i løsningen. Jeg går derfor igjennom mine tidligere tanker om oppgaver og tenker å prøve en helt annen type oppgave som handler om å skissere broa. Selv om de skal skissere så skal det noteres mål på de forskjellige lengdene så det må estimeres en del lengder uansett. Dette er i hovedsak for å omgå problemet med ukjente begreper.

Justøya bru

Spørsmål	Hvor høye er broens pilarer til sammen?
Hensikt	Mål: • Eleven skal finne kjente objekter i bildet som de skal som referanse til å finne høyden av broa. • Eleven skal reflektere over at pilarene muligens har ulik høyde og ta hensyn til dette. • Eleven skal kunne bruke det de vet om geometriske former i en hjelp til å finne høyden av broa.

Observasjon	De prøver å finne lengden på broa for å finne et referansepunkt i bildet, ved hjelp av Google så finner de ut at broa er 116m lang. De ser etter andre bilder på nett som viser broa fra andre vinkler som viser pilarene tydeligere. De ser et mulig kvadrat i midten av broa som de ønsker å finne bredden av. Derfor ser de for seg at broa er delt i 7 like deler ettersom høyden da vil være det samme som bredden av hver del. De skisserer broa og noterer lengdene de får etter utregningene, så notatene gir et godt bilde av hvordan de har tenkt. De kommenterer at dette var en grei oppgave som var lett og angripe ettersom de forsto hva de ble spurt om.
Mine kommentarer	De tar ikke hensyn til om beina på siden kan være kortere, men antar at alle er like høye. De bruker heller ikke noe av det andre som er på bildet som referanse, f.eks varebil/syklist/gjerde e.l.
Refleksjon og endringer	Oppgaven er lett å forstå, de skjønner hva det blir spurt om og elevene blir utfordret på de ønskede kompetanseområdene. Etter å ha lest teori om autentiske problemer så må jeg se på spørsmålsformuleringen min. Hvem vil stille seg spørsmålet: Hvor høye er broas pilarer til sammen? Jeg omformulerer spørsmålet mot en mer realistisk setting som fortsatt vil kreve at elevene gjør mange av de samme beregningene ved å estimere høyden av broa.

Kiledalskleiva bru

Spørsmål	Denne steinhvelvbroen fra 1840 ble bygd for hånd. Hvor mange kilo stein måtte arbeiderne bære i løpet av byggeperioden?
Hensikt	Mål: • Elevene skal beregne volumet av broa, for å få til dette så må de bruke sin kunnskap om geometriske figurer. • Elevene skal se at broa kan deles opp i forskjellige kjente figurer for så å regne volumet av hver enkelt. • For å beregne volumet må de også estimere diverse lengder uten eksakte referanser.

Observasjon	Det første de gjør etter at de har forstått spørsmålet er å Google broa. De finner d bredde og lengde, samt mål på lysåpninga. De stiller ingen spørsmål med dataene de finner ved å se de opp mot bildet. De er ikke helt sikre på hva "ljusåpninga" er, om der er bredden på halvsirkelen eller hvor langt det er gjennom broa. De ser tidlig på at de må regne volumet av hullet for å finne et estimat. Det er volumet av broa som er fokuset. De prater litt rundt hverandre om lengder og bredder på åpningen og kommuniserer litt forbi hverandre så de har ikke samme oppfatning av hvilke lengder som hører til hvor. De googler etter flere bilder og ser andre bilder som gir de ny innsikt. De får en formening om forholdet. Han ene begynner bare å regne, mens han andre fortsetter å google. De deler opp broa i 2 trekanter og et rektangel hvor de skal trekke fra halvsirkelen. De forstår oppgaven, men synes det er vanskelig å komme fram til noe. De regner så ut venstre trekant med grunnlinje gange høyde og deler på 2. Så denne kunnskapen er grei å ha. Han ene begynner så å telle antall steiner på et område, dette går de senere fort ifra. De går tilbake til å finne volum for så å google hvor mange stein det går på en m3 til slutt. De finner så ut volumet på trekanten til venstre og lurer på om det er ca likt på begge sider, men konkluderer med at trekanten til høyre er noe større så de runder størrelsen på den litt opp. Så regner de volumet av halvsirkelen og har da bruk for å kunne formelen til dette. De finner da greit fram til volumet. De får et svar som overrasker dem litt og det korresponderer ikke med hva de ser på bildet. Lengdene de bruker er litt tilfeldige, noen kommer fra Google mens andre estimerer de selv ut fra bildet. De er fortsatt usikre på hvilke avstander som hører til hvor… De møter seg selv litt i døra og forstår at lengdene de bruker ikke stemmer helt. De jobber likevel videre selv om de vet at det blir litt feil. De er veldig usikre på svarene de får så de prøver å relatere det til noe kjent som har de samme formene, de går så videre med en tanke om at det kan stemme at midtpartiet kan ha større volum enn hver av trekantene på siden. De føler det er mer volum i hullet enn det er over hullet. De konkluderer med at de tar av litt på slutten ettersom de føler de får litt høye tall. De runder ned med ca 20% pga dette. De skal nå ta fatt på hvor mange stein som går på 1 m3. Det er litt vrient ettersom det er forskjellige størrelser på steinene, dette påpeker de. Etter hvert så kommer de fram til at de bare må estimere videre og de forstår veldig greit at dette blir utrolig omtrentlig. De bestemmer seg for at det går 8 stein på m3. De tenker over at dette er lenge siden og at arbeiderne må jo klare å bære steinene også så de trekker inn uformell kunnskap. De går nå over til å telle stein på ene trekanten og sier det gjelder på den andre også. Så skal de multiplisere dette med antall stein de kan få i dybden. På 5,7m går det da 10 stein, et bildet de har funnet på nett er tatt fra en annen vinkel så de kan telle hvor mange stein som går i bredden.
Mine kommentarer	De belager veldig mye av utregningen på google-info. De går veldig matematisk til verks og det er tydelig at de setter seg litt fast på grunn av dette. Sånn som de velger å løse det blir det veldig mye geometri i oppgaven, med forskjellige former og regning av volumet til disse. De er også avhengige av å ha en formening om hvor mange stein som normalt går på 1m3 steinbro.
Refleksjon og endringer	Det er ikke riktig at enhver skal vite hvor mye en kubikkmeter med stein veier, derfor må spørsmålet justeres noe. Likte godt alt snakket og regningen på de geometriske figurene.

Hornesund bru

Spørsmål	Hvor stor omvei er det å gå oppe på buen istedenfor å gå på veien?

Hensikt	Denne oppgaven kan løses på flere forskjellige måter hvor forskjellig matematikk kommer inn. Enten om det er Pytagoras eller egenskapene til en sirkel så er dette en spennende oppgave. Den enkleste måten er vel strengt tatt å måle med tråd, ark e.l for så å sammenligne.
Observasjon	Det første de tenker på er at de gjerne skulle brukt Thales setning om buen hadde vært annerledes. De tenker så at de kan dele broa i to rettvinklede trekanter og regne Pythagoras, men de føler det ikke blir nøyaktig nok ettersom hypotenusen ikke er buet. De går så over til å se på stigningen. De går så til Google og ser på broa fra en annen vinkel og ser at broa er ganske høy. De finner, ved hjelp av Google, lengden på broa til å være 106m. Ved å telle stålbjelkene så deler de broa inn i 11 like deler. De finner ut at hver del er 10m. De tenker da en rettvinklet trekant på den første delen og tenker at høyden er ca halvparten av lengden. De tenker at det funker et stykke men at det byr på problemer på toppen da broa flater ut mot toppen. De går bare ut ifra at det er likt. Han ene kalkulerer mens han andre tyr til Google igjen for å se om han kan finne noen lignende eksempler. De fokuserer fortsatt på stigningen og kommer ikke så mye videre enn det. Den første trekanten gir de en lengde på hypotenusen som er 11,2 så omveien de første ti meterne er 1,2m. De multipliserer så 11,2 med 11 for så å trekke fra lengden av broa. De kommer så fram til 17m omvei. Jeg spør de hva de tenker høyden på broa er. Ut fra dem sin regning så sier de at broa er ca 25m høy, men har ingen bestemt formening om det stemmer.
Mine kommentarer	Jeg er overrasket over at de ikke bruker bildet mer og ser på forholdene innad i bildet og bruker dette i utregningen. De var også tidlig på sporet av å kunne gjort dette ganske enkelt ved å dele broa på midten og sett for seg to rettvinklede trekanter. Videre så tenker jeg at dette er en artig oppgave hvor man blir bevisst på at omveien ikke nødvendigvis er så stor selv om man fraviker den korteste linja ganske mye.
Refleksjon og endringer	Denne oppgaven vil jeg bygge videre på. Det eneste som mangler er at det skulle vært bygd for å gå på broa, sånn som Sidney Harbour bridge, for da hadde det vært mer autentisk.

Andre gjennomføring

Kiledalskleiva bru

Spørsmål	Denne steinhvelvbroen fra 1840 ble bygd for hånd. Hvor mange stein består broa av?
Kommentar	På denne formen så slipper man å vite hvor mange kilo stein veier, likevel så vil de dra fordel av å kunne regne volum og å generalisere hvor mange stein som går på en kubikkmeter.
Observasjon	De definerer hvor broa starter og slutter. De definerer at broa starter og slutter en meter fra åpningen på begge sider. De teller steiner på hver sin side av åpningen og kommer fram til at det er ca 80 i et lag. De undersøker så dybden av åpningen. Tenker det er 7 stein i bredden. Multipliserer og kommer fram til at broa består av ca 560 stein.

Mine kommentarer	Gruppen løste den på en primitiv måte som ikke krevde bruk av mange regneferdigheter. De gjorde det enkelt for seg selv når de definerte starten og slutten av broa som de gjorde. De viser ikke spesielt stort engasjement rundt oppgaven, og de virker ikke overbevist om at deres eget svar når de evaluerer det. Den eneste utfordringen de ser ut til å ha er å definere broa, bortsett fra det så gir de uttrykk for at oppgaven relativt enkel og meningsløs.
Refleksjon og endringer	Dette var to helt forskjellige framgangsmåter i hvordan de angrep oppgaven. Oppgaven går ut på å finne volumet til forskjellige geometriske figurer og beregne disse. Men hvor autentiske er egentlig oppgavene? Var dette et spørsmål jeg ville stilt meg når jeg ser broa?

Slettene Bru

Spørsmål	Slettene bru har et brospenn på 41,5m og er symmetrisk. Tegn en skisse av broen med mål.
Hensikt	Jeg ønsker at gruppen skal tegne en grovskisse med brospenn og annen hoved konstruksjon samtidig som de beregner mål på de forskjellige lengdene. De vil måtte bruke ulike strategier for å finne de ulike lengdene, og så må de sile ut hva som er viktig å få med og ikke.
Observasjon	De starter med å telle gjerdestolper inn mot midten av broa. Dette for å skape seg en referanse på avstand i bildet. De lager seg en målestokk på 1:200, så begynner de å se på høyden av broa. De estimerer høyden på gjerdet for å finne høyden av broa. De kommer fram til at høyden er 15-16m og reflekterer over eget svar og tenker at det ikke stemmer. De tar så inn ekstramatematiske kunnskaper om at gjerdet ikke er 1,5m men bare 1m. Da får de at høyden på broa er 7m. Videre forsøker de å finne ut hvordan kablene skal gå og hvor de er festet. De skriver ikke på mål selv om de tegner med linjal og målestokk. Til slutt ønsker de å finne toppvinkelen ved stolpen og klarer dette ved hjelp av tan x.
Mine kommentarer	Den nye oppgaveteksten var enkel å forstå. Utfordringen er hvordan de tolker skisse og hvor nøyaktig det skal være. Min tanke var å skissere hoved konstruksjonen, men de startet umiddelbart med små detaljer som gjerdestolper. Her bør det eventuelt presiseres. Jeg har fortsatt vansker med å komme på en oppgave til denne broa som jeg er skikkelig fornøyd med.
Refleksjon og endringer	På bakgrunn av observasjonene jeg har gjort med denne oppgaven så velger jeg den bort. Jeg klarer ikke formulere et godt spørsmål som tilfredsstiller kravene om å være autentisk og samtidig være en rik oppgave. Dette er den av de fem oppgavene som fungerer dårligst og har fått færrest gode tilbakemeldinger fra testpersonene som har vært med så langt.
Refleksjon og endringer	Veiledeer kom med et nytt oppgaveforslag jeg kunne ha i forbindelse med denne broa. Det handler om å anslå høyden over vannet. Den er så å si lik som Justøybroa men at man må ta utgangspunkt i andre referanser. Jeg velger å bruke Justøybroa da man i den sammenhengen kan se for seg å stille det spørsmålet, jeg ser ikke det som like sannsynlig i tilfellet med Slettene bru.

Hornesund bru

Spørsmål	I) Hvor stor omvei er det å gå oppe på buen istedenfor å gå på veien? II) Hvor stor del av en sirkel utgjør buen på broa?

Kommentar	Jeg lager en dobbeloppgave for å teste videre på den jeg synes fungerte bra samtidig som jeg ønsker å teste en ny variant også. Jeg har ikke klart å gjøre det mer autentisk i denne runden.
Observasjon	I) De vet ikke helt hvordan de skal angripe oppgaven. Konstaterer at de ikke kjenner lengden av broa og tenker at de må finne et prosentvis forhold. Deler broa i to trekanter for å forenkle problemet, men er da innforstått med at det ikke blir helt nøyaktig. De teller seg fram til midten ved å telle stolper. De bruker en enhet å regne med som ikke samsvarer med et mål fra virkeligheten. De måler så høyden og finner den i samme enhet som lengden. De er innforstått med at perspektivtegningen påvirker avstandene i bildet. De tenker så å bruke målebånd for å finne løsningen, men slår det fra seg og blir enige om å sjekke svaret til slutt ved hjelp av målebåndet. De kommer fram til 7% lenger, så vurderer de sitt eget svar og sjekker over målene på tegningen og justerer litt slik at det blir 9% i stedet. Til slutt sjekker de med målebåndet og kommer fram til omtrent det samme.
	II) De ser symmetrien i broa. De bruker tegningen fra forrige oppgave og kommenterer selv at den bare er sånn ca så de må tegne opp på nytt. De lager en ny tegning som er mer presis, men fortsatt med sin egen enhet. De bruker så et målebånd for å prøve å følge buen, de bruker prøve og feile prinsippet. De finner at radien er ca 10cm enheter. Så knoter de litt med å regne omkretsen men finner ut at radien er 20 enheter. De finner så radien til å være ca 120 enheter og buen deres var 30 så sier de ¼. Så går de over svaret sitt og den ene mener det ikke er ¼ ettersom han tenker på arealet. De snakker så litt forbi hverandre før han andre minner han på det er snakk om omkrets og bro buen. De sjekker igjen hva det blir spurt om før de enes om at det er buen det er snakk om og at den utgjør ca ¼ sirkel.
Mine kommentarer	Begge oppgavene er egentlig ganske gode og gruppen kommenterer at det var en morsom oppgave. Oppgave 1 har adskillig lavere inngang i forhold til oppgave 2, da denne krever en del geometriske kunnskaper. Jeg er veldig i tvil om hvilken av oppgavene som er best. Denne må testes igjen. De opplever oppgavene som gøy, men oppgave 2 må formuleres på en annen måte om det skal være et snev av realitet i det.
Refleksjon og endringer	Jeg må prioritere lav inngang i oppgaven så jeg fortsetter med den opprinnelige oppgaven. Det blir veldig mange gode matematiske samtaler rundt denne oppgaven samtidig som de trekker inn perspektiv og hvilken innvirkning det har på bildet. Jeg gjør ingen endringer og ser om neste gruppe også opplever samme dynamikken i oppgaven.

Justøybroen

Spørsmål	Masta på seilbåten din ruver 12m over vannlinja. Kan du trygt passere under broen og hvor mye klaring vil du eventuelt ha til broa når du passerer?
Kommentar	Ved å bruke et mer autentisk spørsmål så må de ikke ta høyde for ulik høyde på pilarene og drøftingen rundt dette.

Observasjon	De lurer på om Google er lov, noe det er, og begynner å Google. De ser for seg at broa skal være mer enn høy nok. Så trekker de bilen inn som referanse og gjør et kjapt overslag på 16m høyde. A forklarer B at han har regnet seg fram til 16m, og forklarer at han har brukt varebilen som referanse på 2m i bildet. A målte bilen til 5mm mens B målte bilen til 4mm. B kommenterer at det utgjør en stor forskjell. Da kommer de fram til at broa er 20m høy. Samtidig har A funnet ut at broa er 19m høy ved hjelp av et sjøkart. De tar så inn at det ser ut til å være litt lavvann og kommenterer at 19m er ved maksimalt høyvann så de kan passere trygt under.
Mine kommentarer	Er oppgaven vel enkel? Den er hvert fall forståelig og det kan være et reelt problem om man kommer med båten. Det er en svakhet at man kan google seg fram til svaret. Jeg har ikke vært å sett denne broa i levende live så det bør jeg kanskje gjøre for å få litt nye tanker om hvilke oppgaver som kan stilles.
Refleksjon og endringer	Etter at jeg har vært å observert broa så jobber jeg for å finne nye oppgaver. Oppgaven med å lysregulere broa har mye autentisk i seg hvor man blir tvunget til å ta hensikt til praktiske variabler kombinert med matematikk.

Tømmerrenna

Spørsmål	Kraftstasjonen på Steinsfossen ble satt i drift i 1958 og dette resulterte i at elven Otra ble bortimot tørrlagt i et område på omlag 4km. Otra har blitt brukt til fløting av tømmer helt siden 1830-tallet. Denne konstruksjonen ble bygget på 1950-tallet for å kunne fortsette med fløting av tømmer i Otra på tross av at kraftstasjonen ble bygget. Utbyggerne av tømmerrenna måtte beregne hvor mye vekt denne broa må tåle. Hva tror du de kom fram til?
Kommentar	Etter å ha fordypet meg i teori om autentiske oppgaver så endrer jeg litt i spørsmålsformuleringen i et håp om å skape en mer autentisk opplevelse.
Observasjon	B kommenterer at det er mye tekst, samtidig sier A at de må finne en profil. De teller antall bord i bredden og høyden for å finne volumet av hele renna, også ser de hvor mye vann den kan romme. De forsøker å google lengden av broen, men finner ikke noe så da bruker de heller høyden av gutten som en høydereferanse i bildet og bruker dette til å finne høyden av renna. Bredden finner de ved å telle bord i bunnen og anta hvilken størrelse materialene har samt at A har erfart at det er trangt å møtes i renna ettersom han har vært der. For å estimere lengden av broa så antar de lengden mellom de vertikale kablene og multipliserer med antall kabler. Etter at de estimerer avstanden mellom vaierne så kommer de fra til at lengden på broa er 50m noe A mener er for lite, derfor justerer de estimatet av mellomrommet mellom kablene. De kommer fram til at broa er 100m lang. For å finne arealet av tverrsnittet så bruker de formelen for areal av et trapes og har ingen problemer med å anvende den. Videre diskuterer de vannstanden i renna for å se mulig belastning, men broa må hvert fall tåle at den er full. Renna rommer 94,5 kubikk som gir 94,5 tonn. De snakker om at vekten reduseres fort om vannstanden synker. B sier at det gjør enorme utslag om man bommer litt på estimatet i tverrsnittet. De konkluderer med at renna bør tåle 100 tonn.
Mine kommentarer	Jeg synes oppgaven fungerer bra. De viser at de bruker mange av ferdighetene og det går ikke å finne svarene på nett. Det eneste jeg lurer på er om jeg skal ha med informasjonen om broa eller ikke da det ikke gir noe direkte informasjon det er behov for. Teksten gir likevel en ramme for at man skal skjønne hva broa brukes til.

Refleksjon og endringer	Ut fra mine observasjoner så utfordrer denne oppgaven alle av de matematiske ferdighetene jeg fokuserer på, selvfølgelig i noe varierende grad, men samtlige er representert. Det er en solid oppgave hvor svaret ikke finnes på nett så man er avhengig av å bruke et utvalg av egne ferdigheter og antakelser for å komme fram til et svar som bygger på fornuftig argumentasjon. Jeg lar oppgaven stå som nå og bruker den tredje gjennomgangen som en siste sjekk på at oppgaven fungerer som tenkt.

Tredje gjennomføring

Justøya bro med lysregulering

Spørsmål	Justøya sin eneste veiforbindelse med fastlandet er Justøybroa og den har kun ett kjørefelt. Det er få fastboende på øya så det er ikke mye trafikk, men siden det ikke er mulig å se motsatt side av broa så er det likevel ønskelig med lysregulering. Hva må man tenke på når man skal sette opp lysreguleringen og hvordan vil det fungere i praksis?
Kommentar	Dette er en friere oppgave enn de andre jeg har forsøkt, den beveger seg litt bort fra FERMI oppgavene og mer over i en drøftingsoppgave. Jeg ønsker de skal estimere broas lengde for så bruke kunnskap om fart, strekning og tid for å komme fram til intervallene lysreguleringen må ha. Mulig jeg burde bruke opprinnelig bilde av broa da den gjør det lettere å estimere lengden enn dette flotte bildet.
Observasjon	De klarerer den usikkerheten de har rundt oppgaveteksten. Sitter så hver for seg og tenker før de oppsummerer sine tanker. Lysene på hver side må snakke sammen. B forklarer at det må være snakk om et tidsintevall slik at bilene kommer seg over. A foreslår at det bør brukes noen sensorer her, men også at man må ha tid til at bilene kommer over. Hva hvis det er litt kø? Trenger ekstra tid ved vanskelige kjøreforhold. B nevner også plasseringen av lyskryssene, være sikker på at de må kunne passere. B sier at hoved essensen er at bilene kommer seg over. Jeg spør om hva de tenker det faktiske intervallet må være. Da begynner de å estimere lengden av broa som et steg for å finne lengden av broa. De regner så ut hva 50km/t er i m/s og kommer fram til ca 15m/s og da faller de ned på at 20 sek er et greit intervall. Kanskje 30 sek er bedre for å være sikker sier A.
Mine kommentarer	Det blir mye snakk om praktisk gjennomføring i starten og ikke så mye matematikk. Det å se på praktiske løsninger vil jo også trigge bruk av diverse ferdigheter. Så hvis man kunne stilt spørsmålet på en slik måte at de først så på det praktiske for så å se på intervallene etterpå så kunne det blitt bra. Hvordan kan jeg formulere spørsmålet slik at de skal gå inn i matematikken uten at jeg kommer med spørsmålet?
Refleksjon og endringer	Ved å innlemme utfordringen med tidsintervaller i spørsmålet så bør dette også mer naturlig komme opp når gruppen jobber. De må legge mange ukjente premisser og må tenke gjennom og argumentere for disse for hverandre. Det gir grobunn for en god diskusjon som vil være preget av matematikk. Dette er en gøy og annerledes oppgave.
Refleksjon og endringer	Etter innspill så ser jeg at denne oppgaven er stor og at den har en høy terskel. Det blir for omfattende i forhold til hva jeg har tenkt så oppgaven blir tatt ut.

Tømmerrenna

Spørsmål	Kraftstasjonen på Steinsfossen ble satt i drift i 1958 og dette resulterte i at elven Otra ble bortimot tørrlagt i et område på omlag 4km. Otra har blitt brukt til fløting av tømmer helt siden 1830-tallet. Denne konstruksjonen ble bygget på 1950-tallet for å kunne fortsette med fløting av tømmer i Otra på tross av at kraftstasjonen ble bygget. Utbyggerne av tømmerrenna måtte beregne hvor mye vekt denne broa må tåle. Hva tror du de kom fram til?
Observasjon	Elevene diskuterer "hva er broa?" og hva spørres det om når man snakker om broa sin børeevne. Er det pilarene sin bæreevne? De enes om at det spørres om brospennet og at de må finne vekta av vannet og tømmeret som skal være i renna. De bruker barnet som referanse når de skal finne størrelser i tverrsnittet av broa. De nevner at fugler kan gi ekstra vekt, så man må beregne ekstra vekt pga muligens 50 fugler. De anslår barnet til å være 5 år og litt under en meter, de bruker seg selv som referanse for å forestille seg hvor høyt et slikt barn kan være. Høyden på renna estimeres til 50cm, bredden estimeres til 2m på toppen og 50cm i bunnen på bakgrunn av barnet i bildet. Når de skal finne lengden av broa så tar de utgangspunkt i bredden av renna (på toppen) som igjen har tatt utgangspunkt i barnet. De teller 15 loddrette vaiere til midten og estimerer så avstanden mellom hver vaier til å bli det samme som bredden av renna. Da blir lengden av broa 60m. De blir fort enige om hvordan man regner arealet av trapeset (tverrsnittet) og regner i brøk. Det går ikke helt opp så de runder av brøken for å få et penere svar. Dette gir de 40 kubikkmeter som blir 40 000 kg. B foreslår 40kg først og lar den ligge litt før A sier at 1kg ikke er det samme som 1 kubikkmeter med vann. Sammen finner de ut at det blir 40 tonn. Så forsøker de å trekke inn tømmer i regnestykket. De vet at tømmer er lettere enn vann ettersom det flyter. A forklarer B at de nå har estimert max vekt. B legger ikke helt fra seg tømmeret og snakker om hvilket trykk dette påfører broa. De mangler kunnskapen rundt dette med tømmer, vann og vekt. Konklusjonen er at broa må tåle minst 40tonn.
Mine kommentarer	Dette er fortsatt en god oppgave som får fram mye matematikk. Det kreves noe grunnleggende ferdigheter for å løse oppgaven. Hva brukes en tømmerrenne til? Hvor mye veier 1L vann? Hvor høy er en 4-5 åring? Kan det være lurt å få inn at det renner vann og tømmer i renna?
Refleksjon og endringer	

Hornesund Bru

Spørsmål	Hvor stor omvei er det å gå oppe på buen istedenfor å gå på veien?
Kommentar	

Observasjon	De ser at dette er et tenkt problem da det ikke er lov å gå oppe på broa. De dykker rett ned i avansert matematikk hvor de ser på broa som en del av en sirkel og at kjørebanen er en korde. B sier at omveien er mer enn 8m, A har ikke brukt meter i sin utregning. B har brukt treet som en referanse for lengder i bildet og multiplisert ut fra målinger. Han har brukt korde og Pytagoras, viser og forklarer sine tanker for A. Det antas kongruens og forsøker å finne radien. Veldig mye antakelsene legger grunnlag i en lite nøyaktig figur. A har sett på forholdet for hvor mye lenger tid man bruker over. Har sett på forholdet mellom bredde og høyde av broen. Han har litt problemer med utregningene underveis. Kommer fram til dobbelt så langt og synes det ikke ser ut til å stemme. Brukes så Pytagoras for å få et nærmere anslag. Dette gir et anslag på 120% så svaret til A blir mellom 120% og 200%.
Mine kommentarer	I denne oppgaven kommer det tydelig fram at man gjør det så komplisert som dine matematiske ferdigheter lar deg. Hvis du kjenner til sirkler og korder så brukes dette gjerne. Hvordan vil man angripe dette med mindre utviklede matematikkferdigheter? Pytagoras er også de fleste innom, det er ingen som måler buen med linjal som de har tilgjengelig. Oppgaveteksten er tydelig og får fram gode diskusjoner mellom deltakerne.
Refleksjon og endringer	Denne oppgaven fungerer veldig godt synes jeg så her vil jeg ikke gjøre noen endringer selv om den er noe mindre autentisk enn hva jeg ønsker meg. De gode matematiske samtalene innad i gruppene synes jeg overvinner det manglende autentiske aspektet.

Kiledalskleiva Bru

Spørsmål	Denne steinhvelvbroen fra 1840 ble bygd for hånd. Hva er volumet til broa?
Kommentar	Jeg gir det et forsøk til for å se hvordan de jobber med problemet. Jeg har endret ordlyden noe, med det er fortsatt volumet av broa som er utfordringen.
Observasjon	De regner først litt hver for seg. A begrenser det til noen former, trekant, halvsirkel og rektangel. Estimerer så forskjellige lengder og kommer fram til ca 5 kubikk. Forklarer sin tankegang for B. B har brukt de samme geometriske figurene og tillagt litt større lengder og har kommer fram til 87 kubikk. De diskuterer ikke så mye om hvilket svar som er mest riktig. A kan si seg enig i at han har tatt litt små estimater men de faller ikke ned på om det ene svaret er mer riktig enn det andre. Ingen kjemper for sitt svar.
Mine kommentarer	Alle gruppene har vært innom de geometriske figurene og beregnet ut i fra de, det kan jeg like. Kan det vise en svakhet i oppgaven at alle bruker samme strategi? Hvordan kan en trene opp forståelsen om volum og skape en "feeling" på størrelser av volum??
Refleksjon og endringer	Jeg synes at oppgaven bærer for mye preg av å være "skolsk". Selve spørsmålet er lite autentisk og oppgaven vil derfor ikke bli med videre i prosessen.

Justøya Bru med seilbåt

Spørsmål	Masta på seilbåten din ruver 16m over vannlinja. Kan du trygt passere under broen og hvor mye klaring vil du eventuelt ha til broa når du passerer?
Kommentar	Jeg forsøker denne oppgaven en gang til for å se om utfallet blir noe annerledes.

Observasjon	De spør seg om 16m er høyt for en seilbåt. B tenker umiddelbart at det bær gå greit, A stiller spørsmål ved hans utsagn. Det blir ikke begrunnet med noen argumenter. B starter så å se etter referansepunkter i bildet og lurer på hvor høy en vanlig personbil er. De lander rundt 1,5m, får støtte på det etter å ha Googlet litt. A gjetter plutselig at broa etter å ha sett på syklisten og tatt han flere ganger nedover. Med bilen så kommer de fram til 20,5m så de konkluderer med at det vil være en klaring på ca 4m. De sjekker så hvor mange varebiler det går og kommer fram til samme svar igjen, så da har de brukt 3 forskjellige metoder for å komme fram til svaret. De er da godt fornøyd.
Mine kommentarer	De bruker referansepunkter og måler opp i bildet. Det er fortsatt et minus at det kan finnes på gulesider sine sjøkart.
Refleksjon og endringer	Oppgaven fungerer etter intensjonen, men det blir en deal breaker for meg når jeg vet at svaret ganske enkelt kan Googles. Oppgaven vil ikke bli med i det siste oppgavesettet.
Refleksjon og endringer	Etter å ha hatt veiledning så har jeg endret litt syn på ting. Mine oppgaver handler om elever i en skolesituasjon og da har man muligheten til å styre tilgangen til hjelpemidler. Det er ikke veldig enkelt å google svaret da bare en av tre grupper har klart det. Etter disse nye innspillene så har jeg hele tiden vært fornøyd med både bilde, ide og oppgavetekst så jeg har denne med i siste oppgavesett.