«Minus og minus blir pluss, det er bare sånn»

En kasusstudie av elever på 8. trinn og deres forklaringer og arbeid med oppgaver om negative tall.

HANNE MARIT LØVÅS SKOGSEID

VEILEDER
Martin Carlsen

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

I arbeidet med denne masteroppgaven har det vært forskjellige bidragsytere. De mest sentrale er naturligvis de velvillige elevene på 8. trinn som stilte seg positive til å være informanter i min kasusstudie og jobbe med matematikkoppgavene jeg ga dem. Uten ungdomsskoleelevenes anstrengelser for å forklare meg hvordan de løste oppgavene og ikke minst hva som rørte seg i tankene deres i forbindelse med dette arbeidet, hadde det ikke være mulig å gjennomføre studien. Jeg vet det til tider var krevende å beskrive hvordan de tenkte. Takk også til foresatte, skolen og faglærer som lot meg disponere elevene disse timene.

Videre vil jeg rette en takk til min veileder professor Martin Carlsen ved fakultetet for teknologi og realfag ved Universitetet i Agder. Han har bidratt med nyttige tips og konstruktive tilbakemelding, i tillegg til å utfordre meg i forhold til vinklinger og tenkemåter i skriveprosessen.

Takk også til familiemedlemmer og venner som har holdt ut med meg, støttet og hjulpet meg gjennom hele prosessen. Takk for oppmuntrende ord når frustrasjonen og fortvilelsen har meldt seg. Jeg vil spesielt nevne mamma som har vært en uvurderlig hjelp da hun har diskutert oppgaven med meg, hjulpet med korrekturlesing og hatt meg som fast middagsgjest i sluttspurten. Arild, mannen min, vil jeg også takke for å ha holdt ut med en fraværende kone i lang tid. Det har vært til god hjelp at mine nærmeste har båret over med meg, slik at jeg i lengre perioder har hatt tid til å konsentrere meg mest mulig om arbeidet med masteroppgaven og lite tid til andre aktiviteter og gjøremål.

Kristiansand, mai 2019
Hanne Marit Løvås Skogseid

Sammendrag
Temaet for denne masteroppgaven er negative tall og hvordan elever forklarer sine tenkemåter og fremgangsmåter i arbeidet med disse tallene. Gjennom litteraturstudier og en kasusstudie av ungdomsskoleelever på 8. trinn, er målet å gi svar på følgende forskningsspørsmål:

- Hva karakteriserer fire elever på 8. trinn og deres arbeid med oppgaver om negative tall?
- På hvilke måter forklarer fire elever på 8. trinn sin fremgangsmåte i arbeid med oppgaver om negative tall?

Studiens teoretiske perspektiv tar utgangspunkt i et sosiokulturelt læringsperspektiv og de aspekter for læring som dette synet legger til grunn. Bruk av artefakter, mediering og språkets funksjon i læringen vektlegges. Videre trekkes betydningen av gestikulering frem. Et nøkkelbegrep i denne studien er forklaring. Litteraturen viser hva en god forklaring er rent generelt, og hvordan man på ulike måter kan kategorisere forklaringer innenfor matematikk spesielt. Negative tall gjennom matematikkhistorien og utfordringer elever ofte møter i arbeid med negative tall, legges også til grunn for diskusjonen.

For å innhente data ble det utført en observasjon av fire elever på 8. trinn. Disse fire hadde alle høy måloppnåelse i matematikk. I hver av de tre observasjonsøktene jobbet elevene med oppgaver om negative tall og forklarte valg av fremgangsmåte.

Funnene i studien viser at ungdomsskoleelevenes arbeid med negative tall karakteriseres av at de unngikk negative tall der det var mulig. Elevene hadde til tider utfordringer med å skille mellom minustegnets betydning og ble fort forvirret da de fikk oppgaver med mange regneoperasjoner. Bruk av gjeld som eksempel, gestikulering av bevegelsene på ei tallinje og fortegnsregler som begrunnelse karakteriserte arbeidet og forklaringene deres. Forklaringene elevene benyttet seg av var hverken veldig avanserte eller forenklede.

Abstract

This thesis studies negative numbers and how students explain their ways of thinking and methods in working with these numbers. Through literature studies and a case study of secondary school students in the 8th grade, the aim is to provide answers to the following research questions:

- What characterizes four students in 8th grade and their work on negative numbers?
- In what ways do four 8th grade students explain their approach to working on negative numbers?

The theoretical framework of this thesis is based on a sociocultural learning theory and the aspects for learning that this view is based on. The use of artifacts, mediation and the function of the language in learning is emphasized. Furthermore, the significance of gesticulation is drawn. A key term in this study is explanation. The theory shows what a good explanation is in general, and how one can categorize explanations in mathematics in different ways. Negative numbers through the history of mathematics and the challenges students often encounter when working with negative numbers are also used as the basis for the discussion.

To collect data, an observation was made of four students in the 8th grade. These four all had high achievement in math. In each of the three observation sessions, the students worked with different task on negative numbers and explained the choice of procedure.

The findings in the study show that lower secondary school students' work on negative numbers is characterized by the fact that they avoided negative numbers wherever possible. The students sometimes had challenges to distinguish between the significance of the minus sign and were quickly confused when they received tasks with many computational operations. The use of debt as an example, gesturing the movements on a number line and «sign rules» such as justification characterized their work and their explanations. The explanations the students made use of were neither very advanced nor simplified.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

I denne studien vil jeg undersøke hvordan ungdomsskoleelever arbeider sammen med oppgaver om negative tall, samt hvordan de forklarer fremgangsmåtene deres i forbindelse med disse oppgavene. Til å begynne med gis en redegjørelse av bakgrunnen for studien (kapittel 1.1) og hvorfor jeg valgte akkurat dette temaet. Videre presenterer jeg formålet med studien og formulerer forskningsspørsmålene som blir undersøkt (kapittel 1.2). Til slutt i dette kapittelet vil jeg presentere oppgavens oppbygning (kapittel 1.4).

1.1 Bakgrunn for studien

Min egen motivasjon for å utføre en studie om negative tall er basert på mine egne erfaringer i arbeid med og undervisning av elever i nettopp dette. Etter at arbeidet med masteroppgaven er ferdig, håper jeg å sitte igjen med mer innsikt i hvordan elevene ser på negative tall gjennom å ha observert hvordan de jobber sammen og forklarer hverandre. Forhåpentligvis vil det også gi meg bedre forutsetninger for å planlegge og utføre undervisning om negative tall enn det jeg har nå.

«Det er bare sånn» eller «Dette er bare noe du må pugge». Dette er utsagn som jeg ikke liker hverken å høre eller å si til elever. Dessverre har jeg hørt dette mange ganger, spesielt når det gjelder negative tall. Andre utsagn er «Minus ganger minus blir pluss» og «Det er bare en regel». I denne studien ble «det er bare sånn» nevnt av ungdomsskoleelevene hele 16 ganger i arbeidet med oppgaver om negative tall. Men hvorfor blir det egentlig slik, og hvordan kan man lære elevene dette uten å si at dette bare må godtas og pugges? Dette er tanker og spørsmål jeg har stilt meg selv før jeg valgte negative tall som tema for masteroppgaven. I tillegg har jeg ved flere anledninger, både i praksis gjennom studiet og som vikar i grunnskolen, opplevd at mange elever sliter i varierende grad når de skal regne med negative tall. Jeg synes også selv at det kan være krevende å undervise om negative tall enkelte ganger, og nettopp derfor vil jeg forske på elevers arbeid med negative tall og deres forklaringer.

Negative tall er en del av den grunnleggende tallforståelsen og er derfor en forutsetning for å kunne jobbe med ulike matematiske emner. Det er for eksempel nødvendig med en forståelse av negative tall og hvordan man regner med dem i algebra, noe som er et emne elevene for første gang får undervisning i på ungdomsskoletrinnet. Det er også relevant kunnskap i emner som funksjonslære og målinger. I læreplanen Kunnskapsløftet står negative tall spesifikt nevnt i læreplanmål for flere årstrinn i matematikkfaget. Likevel er det ikke ofte vi bruker de negative tallene i dagliglivet, da situasjonene i mange tilfeller kan løses ved positive tall istedenfor.

Som vi skal se senere, viser tidligere forskning at tilstedeværelsen av negative tall gjør utregning av blant annet likninger utfordrende for mange elever (Vlassis, 2002, 2004, 2008). Mange av vanskene elevene møter på i arbeid med negative tall er kjente utfordringer i den historiske utviklingen av negative tall (Kilhamn, 2011). Dette vil jeg utdype i kapittel 2.6.

1.2 Formålet med studien og forskningsspørsmål

Formålet med denne studien er å få større innsikt i elevers arbeid med negative tall. Fokuset ligger på elevenes forklaringer av fremgangsmåtene deres og hvordan de arbeider med oppgaver om negative tall. Studiens forskningsspørsmål er derfor som følger:

1. Hva karakteriserer fire elever på 8. trinn og deres arbeid med oppgaver om negative tall?
2. På hvilke måter forklarer fire elever på 8. trinn sin fremgangsmåte i arbeid med oppgaver om negative tall?

Det som karakteriserer arbeidet til elever på 8. trinn vil si hva som er gjentagende i arbeidet deres gjennom studien. Dette kan være utfordringer de støter på eller fremgangsmåter de flere ganger benytter seg av. Studiens andre forskningsspørsmål etterspør hvordan elevene forklarer sin fremgangsmåte. Forskningsspørsmålene henger sammen med hverandre, fordi det første spørsmålet ser på hva elevene gjør, mens det andre ser på begrunnelsene deres for hvorfor de gjør som de gjør. I tillegg kan måtene elevene forklarer på også være med å karakterisere arbeidet deres ettersom det også er en del av arbeidet til elevene. På samme tid er forskningsspørsmålene forskjellige ettersom de har ulikt søkelys på arbeidet til elevene. Det første fokuserer hovedsakelig på hva elevene gjør, mens det andre ser på hva de sier. Ved å sammenholde disse forskningsspørsmålene vil jeg kunne få større innsikt i elevenes arbeid. Denne innsikten stammer direkte fra kilden, nemlig elevene. Dette gjelder gjennom utførelse av oppgaver, men også via forklaring på hvorfor elevene brukte fremgangsmåten de valgte.

Håpet er at jeg gjennom arbeidet med denne studien, i tillegg til å ha gitt et best mulig svar på forskningsspørsmålene, sitter jeg igjen med en større forståelse av negative tall. Da vil jeg også være bedre rustet som lærer til å undervise om dette emnet.

1.3 Studiens oppbygning

Studien består av åtte kapitler; Innledning, teori, metode, oppgavene, resultater og analyse, diskusjon, pedagogiske implikasjoner og egen vurdering av studien. Dette første kapittelet har som formål å gi leseren et innblikk i det som kommer gjennom en orientering om bakgrunnen for studien, formålet og oppbygningen av den.

Teorien i kapittel 2 tar utgangspunkt i et sosiokulturelt læringsperspektiv og de aspekter for læring som dette synet legger til grunn. Bruk av artefakter, mediering og språkets funksjon i læringen og gestikulering trekkes frem. To nøkkelbegrep i denne studien er forklaring og negative tall. Kapittelet viser hva en god forklaring er og hvordan man kan kategorisere forklaringer innenfor matematikk. Negative tall har en annen og vanskeligere historie enn positive tall og tallet null. Dette gjøres det rede for. Teorikapittelet orienterer om tre utfordringer med negative tall. Videre inneholder det en beskrivelse av negative tall som pensum i grunnskolen. Deretter følger tidligere forskning knyttet til elevers arbeid med negative tall og forskning på elevers forklaringer i arbeidet med matematiske emner.

Kapittel 3 tar for seg det metodiske ved studien. Her gjøres det rede for valg av forskningsstrategi og forskningsdesign, samt en begrunnelse for dette. Observasjon som metode, selve datainnsamlingen og analysen av det innsamlede materialet følger deretter, i tillegg til drøfting av validitet, reliabilitet og etikk i forbindelse med studien.

I kapittel 4 presenteres oppgavene ungdomsskoleelevene fikk å jobbe med. Jeg kommer også med en orientering og begrunnelse for hvorfor nettopp disse oppgavene ble valgt med tanke på å kunne få frem det studien ønsker og er ute etter å belyse.

Det påfølgende kapittelet om resultater og analyse er todelt. Første del retter fokuset på det første forskningsspørsmålet "Hva karakteriserer fire elever på 8. trinn og deres arbeid med oppgaver om negative tall?". Den siste delen av kapittel 5 tar for seg resultater og analyse i forhold til det siste forskningsspørsmålet "På hvilke måter forklarer fire elever på 8. trinn sin fremgangsmåte i arbeidet med oppgaver om negative tall?". Kapittelet inneholder også utdrag av transkriberingene for de situasjonene som trekkes frem.

Kapittel 6 har som mål å gi svar på forskningsspørsmålene. Her sammenholdes teorien fra kapittel 2 med resultatene og analysen. Studien diskuterer hva som karakteriserer ungdomsskoleelevenes arbeid med negative tall, de forklaringstypene elevene brukte og betydningen av dette i forhold til forskningsspørsmålene.

Mennesket har hele tiden mulighet til å ta til seg ny kunnskap. Det er også viktig å anvende denne på relevante områder. I kapittel 7 trekker jeg linjene fra dette studiet til det pedagogiske arbeidet det innebærer å undervise i matematikk, og da først og fremst om negative tall. Til slutt følger et kapittel om mine erfaringer i arbeidet med studiet og en vurdering av dette.

Referanseliste følger deretter. Vedlagt i studien finnes godkjenning fra NSD, informasjonsskriv, fullstendige oppgaveark til feltarbeidet og transkripsjon av observasjonene.

2 Teori

Dette kapittelet tar for seg teorigrunnlaget for denne studien. Kapittel 2.1 starter med en presentasjon av det sosiokulturelle læringsperspektivet. Innenfor dette læringsperspektivet vil jeg trekke frem artefakter og mediering i kapittel 2.1.1 og gjøre rede for hva dette er. Videre følger en beskrivelse av språkets funksjon i sosiokulturelt perspektiv (kapittel 2.1.2), da dette hovedsakelig er det redskapet elevene benytter seg mest av i denne studien. Gestikulering er tema i påfølgende kapittel (2.2), før ulike forklaringstyper blir redegjort for i kapittel 2.3. Her vil jeg utdype hva en forklaring innebærer, hva en matematisk forklaring er (kapittel 2.3.1) og legge frem ulike kategorier av matematiske forklaringer (kapittel 2.3.2). Kapittel 2.4 inneholder en definisjon av begrepet negative tall, en kort introduksjon av negative tall i historien (kapittel 2.4.1) og utfordringer elever kan støte på i arbeidet med negative tall (kapittel 2.4.2). Jeg vil også presentere hva læreplanen sier om negative tall, og gjengi læremålene om negative tall i kapittel 2.5. Avslutningsvis vises det til tidligere forskning på elevers arbeid med negative tall (kapittel 2.6) og tidligere forskning på elevers forklaringer (2.7).

2.1 Sosiokulturelt læringsperspektiv

I dette kapittelet vil jeg først gjøre rede for hva sosiokulturelt læringsperspektiv er. Videre følger en forklaring av hva artefakter og mediering er og hvilken betydning disse har i læringsperspektivet (kapittel 2.1.1). Til slutt, i kapittel 2.1.2, vil jeg presentere språkets funksjon i det sosiokulturelle læringsperspektivet.

Hva kunnskap er, og hvordan vi mennesker tilegner oss ny kunnskap, er det flere ulike syn på. Denne studien vil ta utgangspunkt i det sosiokulturelle læringsperspektivet som legger vekt på læring som deltakelse i sosiale sammenhenger (Dysthe, 2003). Av natur er mennesket lærende. Fra hver interaksjon vi opplever kan vi ta med oss kunnskap og gjøre bruk av denne i senere sammenhenger. Gjennom hele livet tilegner dermed vi mennesker oss ny kunnskap. Hovedtanken i sosiokulturelt læringsperspektiv er at «læring handler om samspillet mellom mennesker og ulike ressurser» (Säljö, 2003, s. 254)

Dysthe har satt sammen seks sentrale aspekt som tar for seg synet på læring i et sosiokulturelt perspektiv:

1. Læring er situert i spesifikke sosiale og fysiske kontekster
2. Læring er grunnleggende sosial
3. Læring er distribuert mellom personer
4. Læring er mediert
5. Språket er sentralt i læringsprosesser
6. Læring er deltaking i praksisfellesskap

(Dysthe, 2003, s. 43)

Det første punktet innebærer at de sosiale og fysiske kontekstene hvor kognisjon skjer, er en del av aktiviteten. Dette er igjen er en del av læringen som finner sted. Det betyr at både hvordan man lærer, og den situasjonen man lærer i, er en avgjørende del av læringen (Dysthe, 2003). Begrepet kontekst blir brukt på mange forskjellige måter. «Karakteristisk for sosiokulturell forståing av kontekst er at alle deler er integrerte, vevde saman, og læringa inngår i denne veven» (Dysthe, 2003, s. 43). Konteksten kan dermed bestå av de fysiske omgivelsene, som for eksempel rommet man befinner seg i, og ulike redskap som er tilgjengelige. Det kan være utstyr som datamaskiner og skrivesaker. I tillegg kan konteksten inkludere de forskjellige menneskene som deltar i det samspillet som læringen finner sted i (Dysthe, 2003).

Kunnskap og ferdigheter har ikke sin direkte opprinnelse fra hjernen. Hjernen er en del av prosessen som gjør det mulig for oss å tilegne oss nye kunnskaper og ferdigheter, men er ikke selve kilden til dette. Tilgangen til denne kilden skjer gjennom interaksjon (Dysthe, 2003; Säljö, 2003). Det er dette punkt 2 av Dysthes aspekt om synet på læring i et sosiokulturelt perspektiv handler om, nemlig at læring er noe grunnleggende sosialt. Lærere, medelever, foreldre og venners rolle i læringsprosessene innebærer mer enn å stimulere og oppmuntre til konstruksjon av kunnskap. Interaksjonene med deltakerne i læringsmiljøet er avgjørende for hva som læres, og hvordan det blir lært. Klasserommet er bare ett av mange diskurssamfunn man tar del i, og det er her man gjør ulike teorier, ideer og begrep om til sine egne ved å prøve å gi mening til det man erfarer. Denne prosessen kalles å appropriere (Dysthe, 2003).

Det tredje punktet sier at læringen er distribuert mellom personer. Kunnskapen er fordelt på forskjellige personer i et fellesskap (Dysthe, 2003). Er det en feil med en bil på et verksted, og mekanikeren som jobber med denne bilen støter på et problem i forhold til hvordan dette skal løses, finner han/hun ikke frem manualer og bøker for å finne ut av utfordringen. Mekanikeren kontakter sannsynligvis andre mekanikere på verkstedet for å høre om noen av dem har erfaring med et slikt tilfelle. Ved å kombinere de ulike mekanikernes kunnskap vil problemet som oftest bli løst og bilen fikset (Dysthe, 2003). I et matematikklasserom er elevene hverandres «kollegaer». Ved å rådføre seg med hverandre for eksempel i grupper, vil de ha større forutsetning til å gjennomføre oppgaven eller utfordringen de står ovenfor. I denne studien har ungdomsskoleelevene mulighet til å få hjelp fra hverandre ettersom de sitter i ei gruppe.

Punkt 4 sier at læring er mediert. Mediering er et sentralt begrep innen sosiokulturell læringsteori og vil bli utdypet i kapittel 2.1.1. Mediering handler om ulike former for hjelp og støtte som gis i formidlingen av kunnskap i en læringsprosess. Det kan være fra individer, ulike redskap og verktøy eller en kombinasjon av disse (Dysthe, 2003).

Språket er sentralt i læringsprosesser (punkt 5). Gjennom de ulike diskurssamfunnene vi deltar i spiller språket en svært sentral rolle. Vi lærer etterhvert å bruke det til å påvirke hverandre, og vi utvikler oss selv og andre gjennom kommunikasjonen (Dysthe, 2003). Betydningen av språket i et sosiokulturelt læringsperspektiv vil utdypes mer i detalj i kapittel 2.1.2. Det siste aspektet i synet på læring i et sosiokulturelt perspektiv, sier at læring som deltaking i praksisfellesskap innebærer at læring skjer over alt, alltid og er et sosialt fenomen. Her understrekes det at fokuset i et læringsfellesskap må være på hva slags type deltakelse og sosiale aktiviteter som gir den beste konteksten for at læring skal skje (Dysthe, 2003). På skolen lærer ikke elever bare i timene, men også i alle pauser og på skoleveien. I undervisningen bør fokuset ligge på aktiviteter som legger best mulig til rette for læring. I matematikkundervisningen kan dette blant annet gjøres ved å la elevene jobbe sammen om oppgaver og prøve å forklare deres tankegang og fremgangsmåte til hverandre, slik som elevene i denne studien.

2.1.1 Artefakter og mediering

Begrepet mediering stammer fra det tyske ordet «Vermittlung». Det betyr formidling og «antyder at mennesker ikke står i direkte, umiddelbar og ufortolket kontakt med omverdenen» (Säljö, 2003, s. 83). Mennesker bruker ulike intellektuelle og fysiske redskaper til å behandle denne kontakten som danner deler av vår sosiale praksis. Det har ingen hensikt å analysere selve tenkingen i læring og redskapene som blir brukt for å lære for seg selv. Ser man kun på tenkingen er mennesket fratatt sine sosiokulturelle ressurser, hvilket er bindeleddet i læringssituasjonen (Säljö, 2003). Mediering vil med andre ord si at «vår tenking og våre forestillingsverdener er vokst frem av, og dermed farget av, vår kultur og dens intellektuelle og fysiske redskaper» (Säljö, 2003, s. 83). Redskaper som mennesker har laget selv kalles artefakter. Det kan for eksempel være linjal, kalkulator, datamaskin og skrivesaker. Dette er eksempler på fysiske redskap mennesker tar i bruk for å tilegne seg kunnskap i en læringssituasjon. Vi bruker imidlertid også flere intellektuelle redskaper. Den viktigste av disse er språket. Det matematiske begrepet negative tall kan også brukes som et intellektuelt redskap for å løse problemer blant annet i forbindelse med gjeld og temperatur. Felles for disse redskapene er at de alle fungerer som medierende redskaper i ulike læringssituasjoner. De hjelper vedkommende til å oppfatte og appropriere kunnskap i samspill med andre (Dysthe, 2003; Säljö, 2003).

2.1.2 Språkets funksjon

«Det er gjennom kommunikasjon at sosiokulturelle ressurser blir skapt, men det er også gjennom kommunikasjon de blir ført videre» (Säljö, 2003, s. 22). Ifølge Säljö er dette en av det sosiokulturelle perspektivets grunntanker. Ved å lære oss å bruke språket og kommunisere har vi muligheten til å utveksle tanker, ideer og kunnskap som hver enkelt person har, og gjøre dem til felleseie. På denne måten har kunnskap utviklet seg gjennom generasjoner, og som samfunn har vi mye mer kunnskap enn et menneske kan klare å forstå og ivareta individuelt. Funksjonen til språket som medierende redskap kan deles inn i tre deler: Språkets utpekende funksjon, språkets semiotiske funksjon og språkets retoriske funksjon (Dysthe, 2003; Säljö, 2003).

Før barn lærer å snakke, bruker de gjerne andre midler til å uttrykke seg, for eksempel ved å peke. De kan peke på maten de har lyst på eller leketøyet de helst vil leke med. Likevel har kommunikasjonen store begrensninger før språket er helt på plass. Ved å kunne uttrykke seg med ord, kan man spesifikt si hva man tenker på eller ønsker. Hvis barnet ser to hunder, og sier «hund», er man ikke i tvil om hva barnet tenker på. Ved hjelp av språket kan han/hun også si hvilken hund som menes ved å beskrive hunden, for eksempel «den brune hunden». Språket hjelper oss å klargjøre hvilken gjenstand eller ting vi snakker om ved at vi kan utpeke med navn og/eller egenskaper. Mennesker er heller ikke avhengige av at den man kommuniserer med befinner seg på samme sted og ser det samme som man selv. Språket gir oss også muligheten til å kommunisere om abstrakte ting som følelser, meninger, hendelser og lignende. Vi kan til og med bruke språket til å analysere og forstå dikt, politiske synspunkter, oppskrifter, fenomener og teorier (Säljö, 2003). I matematikken kan vi ved hjelp av språkets utpekende funksjon jobbe med emner som man ikke alltid kan knytte opp mot dagligdagse eksempler, for eksempel multiplikasjon av to negative tall.

«Det finnes alltid to sider av samme sak» er et kjent uttrykk. Det samme kan vi si om betydningen av ulike ord. Språket er ikke endimensjonalt, og i ord og uttrykk ligger det ofte flere tolkninger og assosiasjoner. Ved middagsbordet til et par kan for eksempel den ene beskrive middagsmåltidet som «Helt greit» og mene at dette er en positiv tilbakemelding på at maten smakte godt. For den andre derimot, kan dette bety at maten var spisende, men ikke noe mer. Med andre ord er det en negativ tilbakemelding. I dette tilfelle legger disse to forskjellig betydning i ordene «Helt greit». Uten videre utdyping kan dette ende i konflikt, men ved å kommunisere videre vil begge lære seg de ulike betydningene disse ordene kan ha. Det er her snakk om språkets semantiske muligheter.

Vi kan også skille mellom «sense» og «meaning» av et ord eller et uttrykk. Der «sense» er betydningen av et ord lokalt, og «meaning» er betydningen vi finner i ordbøker (Säljö, 2003). For eksempel sier mange på Sørlandet i dagligtale gjerne «Øy» og «Ja vel» når man hilser på hverandre. Ordene «Konge» og «Fet» brukes for å uttrykke når noe er bra. I ordboka derimot, betyr det henholdsvis «landområde omgitt av vann», «samtykke» eller «godt», «mannlig monark» og «tjukk» (snl.no). I disse eksemplene avviker definisjonen til ordbøker ganske tydelig fra bruken ordene kan ha i dagligtale. Det er dermed mye mer å lære om bruken av språk enn det som er den offisielle bruken. Ironi, metaforer, spøk og lignelser kommer også i tillegg (Säljö, 2003).

Språket kan også hjelpe oss til å overbevise andre om noe eller å få dem til å utføre en bestemt handling. Dette er fordi språket har en retorisk funksjon i den forstand at vi bruker det til mer enn å beskrive noe eller utpeke noe (Säljö, 2003). Denne er ikke like relevant for min studie da elevene ikke brukte språket som en retorisk funksjon i arbeidet med oppgavene.

2.2 Gestikulering

I tillegg til det verbale språket finnes det også andre måter å gjøre seg forstått på. En av dem er kroppsspråk, nærmere bestemt gestikulering. Mennesker bruker dette i ulik grad for å holde på tilhørerens oppmerksomhet og til å tydeliggjøre og understreke ordene de bruker, i tillegg til å få frem meningsinnholdet i det de ønsker å formidle (Radford, 2002). Gestikulering er også en måte å vise innlevelse i det man prøver å uttrykke, samtidig som man utfyller meningsinnholdet i ordene (Radford, 2003). Dette kan i matematikk for eksempel gjøres ved å demonstrere tallverdiens endring på ei tallinje ved å hoppe vannrett bortover i lufta med handa, eller ved å telle på fingrene etter hvert som man regner.

Positive tall kan man både eksemplifisere med ting og praktiske eksempler. Negative tall er det derimot ikke mulig å vise fysisk. De er mer abstrakte og vanskelige å forestille seg. Vlassis (2002) fant i en av sine studier ut at elevenes problemer med å løse likninger ikke først og fremst skyldtes den ukjente variabelen eller oppsettet av likningene, men det faktum at negative tall utfordrer tankegangen ved å være så abstrakte. Elevene hadde vansker med å konkretisere, noe som førte til at likninger der negative tall forekom var mer utfordrende å løse.

2.3 Forklaring

Mennesker er nysgjerrige av natur og søker forklaringer på ulike fenomener. Ikke lenge etter at barn har lært å snakke, blir ordene «Hvorfor det?» stadig brukt. Vi stiller naturlig spørsmål når vi undrer oss over ulike hendelser, sammenhenger eller begrep. Dermed er det å avgi forklaringer en sentral del av hvordan vi mennesker uttrykker oss (Wragg, 2005). I dette kapittelet vil jeg først gjøre rede for hva en forklaring er, før jeg går spesifikt inn hva en matematisk forklaring er (kapittel 2.3.1). Til slutt presenteres ulike kategorier av forklaringer som forskjellige forskere har benyttet seg av i sine studier (kapittel 2.3.2).

Ordet forklaring defineres på forskjellige måter. Wragg (2005) har definert det som å gi en forståelse til en annen. Ved å bruke denne definisjonen innebærer begrepet mer enn en direkte formidling av informasjon. Det inkluderer også å stille spørsmål som oppmuntrer den andre til å komme frem til egne konklusjoner, gi en demonstrasjon eller å ta del i praktisk arbeid. Forklaringer svarer ofte på spørsmål bygget opp av vanlig spørreord som hva, hvorfor, hvem, hvordan, hvor og når (Wragg, 2005). Ei anerkjent engelsk ordbok definerer «explanation» som en uttalelse, en situasjon eller et faktum som forteller deg hvorfor noe skjedde. Det er en begrunnelse som blir gitt for noe (Oxford Advanced Learner's Dictionary).

Når vi ser på forklaringer, kan det også være nyttig å redegjøre for hva en god forklaring er. Cornwell (2004) har presentert tre trekk ved forklaring som kan brukes til å teste forståelsen. Disse trekkene er:

- Gapet mellom kunnskap og forståelse
- «Hvorfor det?»
- Selvbevisende forklaringer

(Cornwell, 2004, s. 2-3, min oversettelse)

I det første trekket ved forklaringer, gapet mellom kunnskap og forståelse, understreker Cornwell at selv om man vet at noe er tilfelle, vil ikke det si at man forstår hvorfor det er tilfelle. En elev får for eksempel vite at for å finne arealet av en firkant brukes formelen lengde · bredde, uten å vite hvorfor. Da er ikke forståelsen for areal på plass hos denne eleven riktig ennå. Det andre trekket, «hvorfor det», går ut på at man ved en forklaring til et «hvorfor-spørsmål» alltid kan spørre hvorfor forklaringen er akkurat slik. Det er dermed en potensiell regress av forklaringer, det vil si at man alltid kan stille nye «hvorfor-spørsmål». Cornwell poengterer likevel at svaret på et «hvorfor-spørsmål» kan være forklarende og gi forståelse, selv om vi ikke har noe svar på «hvorfor-spørsmål» som følger.

Det siste trekket, selvbevisende forklaringer, er når det som blir forklart er en viktig del av vår grunn til å tro at forklaringen selv er riktig. A forklarer B mens B rettferdiggjør A.

2.3.1 Matematisk forklaring

I matematikken blir ofte forklaringer sett på som bevis. Men forklaringer i matematikk kan også være løsningen av et problem eller en oppgave. Elevene forteller om sitt arbeid ved å si hvilken løsning de kom frem til eller ved å snakke seg gjennom løsningsprosessen sin. I tillegg er et mulig kjennetegn ved forklaringer at de referere til funksjoner og former som det skal gjøres rede for (Levenson, 2013). Forklaringer kan også brukes i argumentasjon ved å bruke språkets retoriske funksjon (Säljö, 2003). Man prøver å overtale seg selv eller andre til å godta en påstand. Levenson (2013) beskriver forklaringer som argumentasjonens byggesteiner. Når det søkes etter en forklaring i matematikken, er ikke fokuset på å bevise noe, men heller å finne en begrunnelse for valget av definisjoner, aksiom og metoder for konstruksjon av en teori (Sierpinska, 1994).

2.3.2 Kategorier av matematiske forklaringer

Sierpinska (1994) skiller mellom to forklaringstyper når det gjelder matematikk, nemlig vitenskapelig og didaktisk forklaring. Tanken bak denne inndelingen er at forklaringer kan klassifiseres etter hvilke krav som stilles til det nye grunnlaget for forståelse. Vitenskapelige forklaringer og didaktiske forklaringer er motsetninger til hverandre. Vitenskapelige forklaringer vil gi mottakeren et grunnlag som er basert på en begrepsbasert forståelse. Didaktiske forklaringer på sin side ønsker å bygge på mottakerens tidligere erfaringer eller kunnskap (Sierpinska, 1994). Denne forklaringsmåten er også den som blir mest brukt i undervisningssammenheng, for eksempel ved å knytte kunnskap opp til dagligdagse forhold som elevene allerede kjenner til.

Det finnes flere liknede inndelinger av forklaringstyper som den Sierpinska bruker. Tsamir og Sheffer (2000) skiller mellom konkrete og formelle forklaringer i sin studie, som blant ser på hva elever opplever som en akseptabel matematisk forklaring. Konkrete forklaringer bruker eksempler fra virkeligheten for å gi mening til matematiske uttrykk. At $-2 + 2 = 0$, kan med et konkret eksempel forklares ved at det en morgen er -2 grader ute. Neste morgen viser gradestokken 2 grader mer. Da viser gradestokken 0 grader. Et formelt eksempel bruker kun matematiske teoremer og definisjoner (Tsamir & Sheffer, 2000). $-2 + 2 = 0$ kan dermed forklares ved at -2 er inversen til 2, slik at svaret må være 0.

Fuchs et al. (1996) står for en annen inndeling der de skiller mellom prosedyriske forklaringer og begrepsforklaringer. Forskerne bruker en tredeling:

- Primær prosedyriske forklaringer: Foreslå å telle og bruke konkreter
- En kombinasjon av prosedyriske- og begrepsforklaringer: Omformulering av spørsmålet for å understreke det som mangler, knytte opp til eksempler fra virkeligheten, foreslå å sjekke svaret og introdusere estimering
- Primære begrepsforklaringer: Forklare det underliggende begrepet

(Fuchs et al., 1996, s. 646)

Nok en todeling av forklaringstyper er skillet mellom matematisk baserte (MB) og praktisk baserte (PB) forklaringer (Levenson, 2010, 2013). Begrepsforklaringene til Fuchs et al. (1996), Sierpinskas (1994) vitenskapelig forklaringer og Tsamir og Sheffers (2000) formelle forklaringer ligner alle den matematisk baserte forklaringstypen, i den forstand at man ikke finner den direkte linken til dagliglivet i slike forklaringstyper. MB-forklaringer er basert på matematiske definisjoner eller tidligere lærte matematiske egenskaper og bruker ofte matematiske resonnement (Levenson, 2010, 2013). Denne typen er ikke like streng som formelle og vitenskapelige forklaringer, men inneholder likevel mye av det samme når det gjelder det rent matematiske. MB er en forklaringstype som elever får kjennskap til etter noen år i grunnskolen, men Levenson mener elever har forutsetninger til å kunne forholde seg til slike forklaringer tidligere enn det de gjør i mange skoler i dag (Levenson, 2013).

Mange lærere bruker heller mer PB-forklaringer i undervisningen. Dette vil si forklaringer som bruker daglige sammenhenger og/eller konkreter til å «gi mening» til matematiske uttrykk (Levenson, 2013). Tabellen under illustrerer hvordan de ulike forklaringstypene som har blitt presentert henger sammen med hverandre.

Tabell 1: Sammenhengen mellom de ulike forklaringstypene

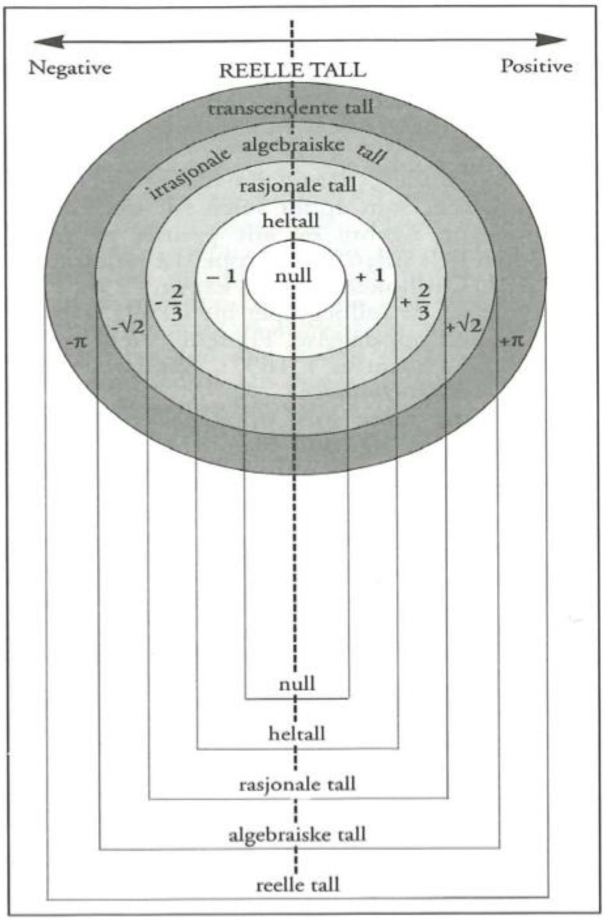
Sierpinska	**Tsamir og Sheffer**	**Fuchs et al.**	**Levenson**
Vitenskapelige	Formelle	Primære begrepsforklaringer	Matematisk basert (MB)
Didaktiske	Konkrete	Kombinasjon	
		Primær prosedyrisk	Praktisk basert (PB)

PB-forklaringer baserer seg ikke utelukkende på matematiske begrep (Levenson, 2010). På bakgrunn av dette kan konkrete forklaringer og prosedyriske forklaringer passe inn under den praktisk baserte forklaringstypen. Den didaktiske forklaringstypen som Sierpinska (1994) bruker og den konkrete forklaringstypen til Tsamir og Sheffer (2000), kan passe inn under både MB og PB. Begge disse typene bygger på tidligere kunnskap elevene har, men kan samtidig komme med dagligdagse eksempler.

2.4 Negative tall

Ifølge Kunnskapsforlagets matematikkleksikon er et negativt tall en tallstørrelse som er mindre enn null. Disse tallstørrelsene ligger på motsatt side av de positive tallene på tallinja. Negative tall er også en tallstørrelse som er inversen til en positiv tallstørrelse når disse adderes, slik at x + (-x) = 0 (Thompson & Martinsson, 1997). Figuren til høyre (figur 1) viser hvordan de ulike reelle tallene på ei tallinje er kategorisert. Denne viser at de negative tallene er tall som ligger til venstre for null, og som består av heltall, rasjonale tall, irrasjonale/algebraiske tall og transcendente tall.

Videre i dette kapittelet vil jeg gjøre rede for hvordan bruken av negative tall har utviklet seg i det historiske løp, og når bruken av dem ble godtatt som en sentral del av matematikken (kapittel 2.4.1). Deretter vil jeg presentere tre utfordringer knyttet til negative tall. Disse utfordringene innebærer minustegnets ulike bruksmåter, betydningen av aritmetiske operasjoner og mengde og retning på tall (2.4.2).



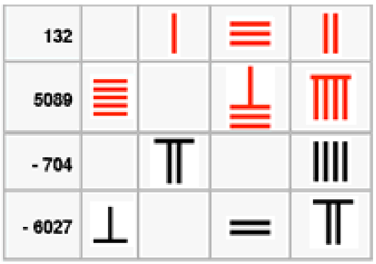
Figur 1: Oversikt over reelle tall

(Ifrah, 1997b, s. 267)

2.4.1 Negative tall i historien

Ulike måter å telle på, og det å bestemme størrelse, har mennesket gjort i årtusener. Det finnes enkelte funn av grafiske fremstillinger datert til ca. 20 000 år f.Kr. som tolkes til å vise behovet for et tallbegrep (Ifrah, 1997a). En større mengde ulike typer materialer om begreper for telling og bruk av matematikk fra før år 1500 f.Kr., er bevart fra ulike deler av verden (Cooke, 2005; Holme, 2001; Ifrah, 1997a). Mellom år 3000-2000 f.Kr. grunnla den sumerske sivilisasjonen i området Mesopotamia babylonsk matematikk. Alt da hadde de et tallsystem der ideen om posisjonsverdier forekommer ved hjelp av to tegn plassert i ulike posisjoner. 60 var basis (slik vi fortsatt bruker for å angi vinkler og måle tid). Sumerne kunne skrive tall mindre enn en, men hadde ikke null og negative tall (Thompson & Martinsson, 1997). Babylonerne som videreførte denne matematikken (fra like etter vår tidsregning), behandlet imidlertid negative størrelser. Det viser en oppgave hentet fra ei leirtavle «En pengesum forrentes med ei rente på en femtedel årlig. Hvor lang tid tar det før gjelden er fordoblet?» (Holme, 2001, s. 62).

De tidligste referansene til både positive og negative tallstørrelser vi kjenner til stammer fra Kina. Kinesisk matematikk brukte regnebrett og pinnearitmetikk omkring 300 år f.Kr. Verket «Ni kapitler om matematikkens kunst» (originaltittel «Jiu zhang suan shu») (Holme, 2001; Ifrah, 1997a) ble samlet under Han-dynastiet omkring 200 f.Kr., men man antar at det har eksistert en del tidligere. Det er «en praktisk håndbok i matematikk for arkitekter, ingeniører, kjøpmenn og offentlige tjenestemenn» (Thompson & Martinsson, 1997, s. 224). Verket omhandler blant annet ligninger med negative størrelser. Et tallsystem i kolonner basert på det kinesiske pinnesystemet, opererer med ulike varianter av røde pinner/streker for «korrekte», altså positive tall, og sorte pinner/streker for «falske», altså negative tall (Cooke, 2005; Holme, 2001; Ifrah, 1997a; Rogers, 2011).



Figur 2: Eksempel fra kinesisk tallsystem basert på «Ni kapitler».

(Rogers, 2011)

Imidlertid er det de indiske vitenskapsmennene fra rundt år 500 e.Kr. mange historikere nå tilkjenner æren for forklaringen av negative tallstørrelser, null og regler for bruk av disse. Særlig oppdagelsen av en tallstørrelse/symbol for ingenting («kham»), som ble kalt «śūnya», altså null, som kunne brukes i matematikk på samme måte som andre tall, betraktes som banebrytende (Cooke, 2005; Holme, 2001; Ifrah, 1997a; Rogers, 2011). Det medførte også at inderne kunne presentere null som midtpunktet på en akse. Avhandlingen «Universets deler» (år 458 e.Kr.) inneholder viktig informasjon om det desimale posisjonssystemet de da hadde. Her brukes for eksempel både uttrykk for minus en og begrepet for null. Det var i indisk matematikk og astronomi på den tiden vanlig å forme tekstene som vers. En årsak var for å lettere huske og resitere. (Ifrah, 1997a)

Den indiske astronomen og matematikeren Brahmagupta utformet regler for null og positive og negative størrelser i verket Brâhamasphutasiddhânta (fra år 628 e.Kr.). Brahmagupta kalte positive størrelser for «dhana» (formue/eiendeler), negative for «ṛṇa» (gjeld/gjeldsbyrde). Flere forfattere gjengir disse, blant annet Katz (2004) og Rogers (2011). De elleve reglene er fremstilt med moderne matematiske symboler i tabell 2.

Tabell 2: Brahmaguptas elleve regler

Reglene	**Moderne matematiske symboler**	
En gjeldsbyrde minus null er en gjeldsbyrde.	$-X - 0 < 0$	
En eiendel minus null er en eiendel.	$X - 0 > 0$	
Null («śūnya») minus null er ingenting («kham»).	$0 - 0 = Ø$	
En gjeldsbyrde fratrukket null, er en eiendel.	$0 - (-X) > 0$	
Mens en eiendel fratrukket null, er en gjeldsbyrde.	$0 - X < 0$	
Produktet av null og en gjeldsbyrde eller en eiendel er null.	$0 \cdot (-X) = 0$	$0 \cdot X = 0$
Produktet av null ganger med seg selv, er ingenting.	$0 \cdot 0 = Ø$	
Produktet eller kvotienten av to eiendeler er en eiendel.	$X \cdot X > 0$	$X : X > 0$
Produktet eller kvotienten av to gjeldsbyrder er en eiendel.	$(-X) \cdot (-X) > 0$	$(-X) : (-X) > 0$
Produktet eller kvotienten av en gjeldsbyrde og en eiendel er en gjeldsbyrde.	$(-X) \cdot X < 0$	$(-X) : X < 0$
Produktet eller kvotienten av en eiendel og en gjeldsbyrde er en gjeldsbyrde.	$X \cdot (-X) < 0$	$X : (-X) < 0$
(Ifrah, 1997a, s. 667)		

Ut ifra dette kan man også tolke at matematikerne i dette området alt den gangen kjente til fortegnsregelen og de mest sentrale reglene for den matematiske disiplinen vi i dag betegner som algebra (Ifrah, 1997a). Man ser også at i Kina og India var negative størrelser i bruk før null ble oppfunnet (Cooke, 2005).

Tellemåter og tallsystem har endret seg gjennom historien. I dag bruker vi titallsystemet både i Norge og store deler av verden. Ifrah (1997a, 1997b) gir en grundig redegjørelse for tallenes historie. Han sammenstiller mange ulike kilder for å vise «at den indiske kulturen virkelig var den moderne tellingens vugge» (Ifrah, 1997a, s. 564). Både de ti talltegnene og posisjonssystemet sies å stamme derfra. 1-9 har lengst historie. Null som en liten sirkel er "bekreftet fra og med 600-tallet i indiske skrifter og innskrifter fra kulturer påvirket av India i Sørøst-Asia" (Ifrah 1997b, s. 127). Veien derfra til Europa gikk imidlertid via arabisk-muslimske lærde, men formen på tallene i Europa ble først standardisert med boktrykkerkunsten på 1400-tallet (Ifrah, 1997b).

Matematikeren Al-Khwarismi (ca. 780-850 e.Kr.) arbeidet i akademiet Visdommens hus i Bagdad. Han oversatte i sitt arbeid der både indisk matematikk og gresk matematikk til arabisk. Gresk matematikk, som var fundert på geometriske emner, befattet seg imidlertid bare med positive størrelser (Ifrah, 1997a). Al-Khwarismi bidro sterkt til å innføre det indiske tallsystemet man ser hos indere som Brahmagupta til den arabiske verden. Hans bok «Hisb al-jabr wa-l-al-muqabala» er historiens første bok som bare omhandler algebra. Det er en praktisk regnebok der også representasjonen av titallsystemet blir beskrevet (der «śūnya», null, på arabisk omtales som «sifr»). Al-Khwarismi er opphav til to av matematikkens fagbegrep, nemlig algebra (al-jabr –> «binde sammen») og algoritmer («Etter alkvarismi kan en gjøre det slik…»)(Holme, 2004, s. 70). Hans navn ble på latin endret i flere omganger fra «Alchoarismi» for til slutt å bli skrevet «Algorithme» (Ifrah, 1997b). Al-Jili levde like etter Al-Khwarismi og gir i sitt verk en mer detaljert analyse av dennes løsningsmetoder i algebra, blant annet produkter av to negative faktorer med angivelser av riktige fortegn(Holme, 2004).

Italieneren Leonadro av Pisa (kalt Fibonacci, ca. 1170-1250) ble introdusert for det indo-arabiske tallsystemet på den arabiske handelsskolen i Marokko og sine reiser i området. Han var en av de første som brakte arabernes algebra til Europa og bidro stekt til spredningen av denne (Holme, 2004; Ifrah, 1997b). De italienske regnemestrene i årene etterpå baserte sine regnemetoder på denne nye kunnskapen, men det tok flere århundrer før den ble allment akseptert. Null, og særlig negative tall, møtte mye motstand. Regnemestrenes bidrag besto også i etter hvert å bruke symboler i regneregler istedenfor ord, slik araberne og Fibonacci hadde gjort (Cooke, 2005; Holme, 2004).

Det var først på 1400-tallet at Al-Khwarismis og Brahmaguptas skrifter ble lest med interesse av Europas matematikere. Imidlertid måtte man vente til Descartes (1596-1650) lansering av koordinatsystemet for at negative tall skulle vinne mer innpass (Holme, 2004). Utover på 1700- og 1800-tallet ble negative tall bygget inn i matematiske modeller, både i den vitenskapelige verden, innenfor handel og samfunnet forøvrig (Manchester, 2011; Rogers, 2011).

2.4.2 Utfordringer ved negative tall

Negative tall kan være utfordrende både å lære bort og å forstå. Altiparmak og Özdoğan (2010) trekker frem tre utfordringer ved negative tall i sin studie. Den første av disse handler om retningen og mengden til et tall. Elever kan fort blande tallverdien med absoluttverdien. Jo lavere ned på tallinja man kommer under 0, jo høyre blir absoluttverdien til tross for at tallverdien er lavere. Med andre ord, -6 kan virke som er høyere tall enn -2, fordi absoluttverdien er henholdsvis 6 og 2 (Kilhamn, 2011). Å knytte tallene opp til konkrete dagligdagse tilfeller kan hjelpe elevene å skille mellom tallverdien og absoluttverdien. For eksempel ved å spørre hvilken temperatur er lavest/kaldest, -6 eller -2.

Den andre utfordringen med negative tall er betydningen av aritmetiske operasjoner (Altiparmak & Özdoğan, 2010). Regning med negative tall er ofte abstrakt hvilket gjør det vanskelig for mange elever (Vlassis, 2002). Regneregler eller fortegnsregler blir fort noe elevene bare må huske og følge:

- + og + blir +
- + og – blir –
- – og – blir +

Disse reglene gjelder i alle de fire aritmetiske regneoperasjonene. Vlassis (2004) skriver i en av hennes studier at elevene brukte oppfatningene de hadde fått gjennom å regne med naturlige tall også i regnestykker med negative tall. For eksempel ved at subtraksjon eller divisjon alltid gir et mindre tall og addisjon eller multiplikasjon gir et større. Dette stemmer for de naturlige tallene, men denne tankegangen gjør det fort forvirrende dersom elevene prøver å bruke dem også for negative tall.

Den siste utfordringen er knyttet til betydningen av minustegnet (Altiparmak & Özdoğan, 2010). Negative størrelser kan uttrykkes på ulike måter. Vi har sett at kineserne brukte pinner/steker med sort farge. Inderne og araberne uttrykte det med ord (retorisk). Det moderne symbolet for minus, minustegnet som en strek, kom på trykk første gang i Europa i 1489 i Mechantile Arithmetic av den tyske matematikeren Widman (Manchester, 2011). Imidlertid brukte den italienske matematikeren og regnemesteren Pacioli (1445-1517) dette noe før (Holme, 2004). Det hevdes også at «araberne hadde langt på vei etablert denne praksisen tidligere (Holme, 2004, s. 192). Uansett gjorde bruken av symboler og talltegn istedenfor ord det mindre omstendelig og mer effektivt og presist å uttrykke seg matematisk.

Flere forskere opererer med en tredeling av minustegnets betydning i dagens matematikk, blant annet Vlassis (2004), Vlassis (2008), Kilhamn (2011) og Lamb et al. (2012). Denne tredelingen fremgår av tabell 3:

Tabell 3: Minustegnets ulike betydninger

Minustegnets tre betydninger		
Ensartet	**Binær**	**Symmetrisk**
Strukturell signifikant	**Operativ signifikant**	**Operativ signifikant**
Subtrahend	Fullføre	Ta bort det motsatte eller å finne inversen
Relative tall	Ta bort	
Isolerte tall	Differansen mellom to tall	
Det formelle begrepet negativt tall	Bevegelse på tallinja	

(Vlassis, 2004, s. 472, min oversettelse)

Minustegnet i ensartet betydning vil si at minustegnet indikerer at et tall er negativt. Tegnet er med andre ord en del av tallet og er en strukturell signifikant (Kilhamn, 2011; Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004, 2008). Den binære betydningen er når minustegnet står for en regneoperasjon; subtraksjon. Eksemplet på slike tilfeller kan være når man skal finne differansen mellom to tall, en forflytning på tallinja eller at man skal fjerne en sum fra en annen sum (7 – 3 =). Her fungerer minustegnet som en operativ signifikant (Kilhamn, 2011; Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004, 2008). Den siste betydningen av minustegnet, symmetrisk, er også en operativ signifikant. Minustegnet står for en operasjon hvor man tar bort det motsatte eller hvor man skal finne inversen (Vlassis, 2004, 2008). For eksempel dersom det står - -4, vil det første minustegnet indikere at man skal ta det motsatte av -4. Et annet eksempel på symmetrisk betydning av minustegnet kan være (-x) + x = 0. Her finner vi inversen, og minustegnet indikerer at den er en negativ x. (Lamb et al., 2012).

2.5 Læreplanen om negative tall

Læreplanen Kunnskapsløftet deler matematikken inn i 6 hovedområder; tall og algebra, geometri, måling, statistikk sannsynlighet og kombinatorikk, funksjoner og økonomi (Utdanningsforbundet, 2013). Av disse er det tall og algebra, funksjoner og økonomi hvor negative tall spiller en sentral del. Læreplanmålene som eksplisitt nevner negative tall er:

- Etter 4. årstrinn skal eleven kunne beskrive og bruke plassverdisystemet for de hele tallene, bruke positive og negative hele tall, enkle brøker og desimaltall i praktiske sammenhenger og uttrykke tallstørrelser på varierte måter.
- Etter 7. årstrinn skal eleven beskrive og bruke plassverdisystemet for desimaltall, regne med positive og negative hele tall, desimaltall, brøker og prosent og plassere de ulike størrelsene på tallinja.

(Utdanningsforbundet, 2013)

Læremålet som tar for seg negative tall etter 4. årstrinn sier at elevene skal kunne beskrive og bruke plassverdisystemet for blant annet negative tall. Etter 7. årstrinn skal de også kunne regne med dem og plassere dem på tallinja. Begge læremålene er under hovedområdet tall og algebra. Etter 10. årstrinn er ikke negative tall nevnt i noen av læremålene lenger (Utdanningsforbundet, 2013). Likevel må evnen til å behandle negative tall ligge til grunn for at elevene skal kunne oppnå flere andre mål i for eksempel algebra, funksjoner og økonomi. Negative tall er med andre ord en del av den grunnleggende tallforståelsen som kreves i videre arbeid med matematikken.

2.6 Tidligere forskning på elevers arbeid med negative tall

Kilhamn (2011) forsket i forbindelse med sin doktorgradsavhandling på hvordan elever forsøker å skape mening av negative tall. Studien var longitudinell intervjustudie da hun fulgte en klasse i Sverige i en periode på tre år, fra elevene gikk i 6. trinn til 9. trinn. I løpet av denne perioden hadde klassen den samme læreren. For å hente inn empiriske data, utførte Kilhamn jevnlige intervjuer med elevene, var deltakende observatør og tok videoopptak (Kilhamn, 2011). I undervisningen ble det brukt ulike metaforer som Kilhamn kaller det. Det vil si de negative tallene blir knyttet til ulike dagligdagse eksempler som gjeld, temperatur og lignende. Bruken av disse kan hjelpe elevene å forstå det abstrakte bedre, men samtidig kan det være med å forvirre elevene ettersom en slik metafor ikke vil være gjeldene i alle tilfeller. Flere av utfordringene elevene i studien støtte på i arbeidet med negative tall, er de samme som har vært utfordrende i den historiske utviklingen av negative tall. Hun observerte også en forskjell mellom elever med høy og lav utviklet tallforståelse. Elever med høy utviklet tallforståelse hadde færre utfordringer enn de med lav utviklet tallforståelse. Kilhamn antyder dermed at man i skolen burde starte tidligere med negative tall for at disse tallene skal bli bedre innarbeidet i elevenes tallforståelse (Kilhamn, 2011).

I 2004 gjennomførte Vlassis en studie som forsket på hvilke begrepsmessige endringer elever gjør i møte med negative tall. Hun intervjuet tolv elever på 8. trinn. Disse plukket hun ut basert på resultatene til elevene på en tidligere test de hadde gjennomført hvor de skulle redusere polynomer. I intervjuet forklarte elevene også deres tolkninger av minustegnet (Vlassis, 2004). Flere av elevene som deltok i studien, prøvde å kombinere de aritmetiske forutsetningene de har lært for naturlige tall med regler i algebra, for å regne med negative tall. I tillegg var det svært få elever som forklarte at minustegnet kunne ha flere betydninger. Mesteparten av dem sa minustegnet bare sto for subtraksjon (Vlassis, 2004).

Vlassis (2008) utførte også en studie noen år senere som tar for seg minustegnet. Formålet med studien var å finne ut elevers utfordringer med minustegnet i arbeid med aritmetiske likninger. Dette for å få en innsikt i elevenes begrepsforståelse av negative tall. For å innhente empiriske data, intervjuet Vlassis 17 elever på 8. trinn fra to ulike skoler. Elevene ble trukket ut basert på resultatene fra en tidligere prøve om likninger. Resultatene i denne studien viser at elevene får utfordringer i arbeidet med negative tall, fordi de enten blander betydningene av minustegnet eller at de i tilfeller hvor minustegnet kan ha dobbel betydning, kun ser den ene av disse (Vlassis, 2008).

En studie av litt yngre barn ble utført av Manchester (2011) hvor hun så på hvordan barn forestiller seg forholdet mellom positive og negative tall og null knyttet til dagligdagse situasjoner. 24 barn i aldersgruppen 4-8 år ble intervjuet, filmet og leverte inn skriftlig arbeid. De ble oppmuntret til å bruke representasjoner som viser retningen tallet beveger seg i eller underskudd. Resultatene i studien viser at barna klarte å forestille seg forholdet mellom positive tall, positive tall og null og positive og negative tall når de er knyttet til dagligdagse situasjoner. De klarte ikke å forestille seg forholdet mellom to negative tall. Å komme med representasjoner for negative tall var det få av barna som fikk til. Barn helt ned til 4 årsalderen har ifølge denne studien en intuisjon og innsikt i negative tall. Også her dukker spørsmålet om en tidligere start med negative tall i skolen hadde vært å foretrekke (Manchester, 2011).

2.7 Tidligere forskning på elevers forklaringer

Tsamir og Sheffer utførte en studie i Israel i 2000 hvor de utforsket videregående elevers oppfatning av divisjon med null. De hadde tre mål med studien. Det første var å undersøke om elever i videregående skole identifiserer uttrykk som innebærer divisjon med null som udefinert, eller om de tilegnet dem numeriske verdier. Neste mål gikk på å studere deres argumenter, mens det siste var å studere reaksjonene deres på konkrete og formelle forklaringer. For å innhente data, fikk de 153 elever fra 9. – 11. trinn til å utføre en test på 90 minutter. I etterkant av denne ble 30 av elevene intervjuet for å utdype sine besvarelser. Funnene jeg vil trekke frem fra denne studien, er de som omhandler konkrete og formelle forklaringer. Jevnt over foretrakk elevene de konkrete forklaringene fremfor de formelle. Likevel var det enkelte oppgaver hvor formell forklaring ble foretrukket i like stor grad som den konkrete (Tsamir & Sheffer, 2000).

I 1996 gjennomførte Fuchs et al. en studie hvor de undersøkte kvaliteten og effektiviteten til elevenes matematiske forklaringer når elevene hadde rollen som veiledere. I forkant hadde elever som var faglig sterke eller middels sterke, fått opplæring i og øvd seg på å veilede medelever. I hver klasse studerte forskerne to elever, en faglig sterk og en middels sterk, som underviste samme elev som slet med faget. Resultatet de kom frem til var at de faglig sterke elevenes forklaringer varierte i større grad mellom ulike forklaringsstrategier og ga større læringsutbytte til eleven de veiledet. Forskerne så på prosedyriske forklaringer og begrepsforklaringer, hvor de faglig sterke elevene behersket disse bedre enn de middels sterke (Fuchs et al., 1996).

Elever på 5. trinns bruk av og preferanse for matematisk baserte (MB) og praktisk baserte (PB) forklaringer i to delemner om brøk, ble forsket på av Levenson i 2010. Hun observerte fire klasser i seks måneder, i tillegg til at elevene besvarte to spørreskjemaer. Funnene i studien viser at elevene ga flere MB-forklaringer enn PB-forklaringer når de selv skulle forklare noe. Når de ble spurt om hvilken type forklaringer som best forklarte de to delemnene, foretrakk elevene likevel PB-forklaringer for det ene av dem. Det var ingen tydelig preferanse for det andre emnet i forhold til hvilken type de mente var mest overbevisende (Levenson, 2010).

Noen år senere utførte Levenson en kasusstudie hvor hun fulgte en elev, Sharon, som var med i flere av hennes studier. Hun ble intervjuet i andre klasse om multiplikasjon, i femte klasse og sjette klasse om brøk og i tiende klasse om både multiplikasjon og brøk. Denne studien beskriver hvilke typer forklaringer Sharon foretrakk i ulike aldre. Funnene viser at den foretrukne forklaringstypen ikke endrer seg noe særlig. Hun brukte fortsatt PB-forklaringer ved multiplikasjon og MB-forklaringer ved brøk. I noen tilfeller hvor Sharon brukte MB-forklaring, supplerte hun med et dagligdags eksempel i tillegg, og benyttet dermed begge forklaringstypene (Levenson, 2013).

3 Metode

Målet med denne oppgaven er å undersøke hvordan elever forklarer fremgangsmåten sin i arbeid med oppgaver der negative tall blir behandlet. Studien tar også for seg hva som karakteriserer arbeidet deres med negative tall. For å få en nærmer forståelse av dette emnet, har jeg observert og intervjuet en gruppe elever på 8. trinn i grunnskolen mens de har arbeidet med negative tall. I dette kapittelet presenteres forskningsstrategien og forskningsdesignet for studien (kapittel 3.1). Deretter følger en beskrivelse av metoden jeg har brukt (kapittel 3.2). Videre vil jeg gjøre rede for hvordan jeg samlet inn datamaterialet til studien, hvordan jeg valgte ut ungdomsskoleelevene og hvilke avgjørelser jeg måtte ta i forbindelse med dette (kapittel 3.3). Jeg vil også kort beskrive hvordan gjennomføringen av datainnsamlingen gikk og eventuelle utfordringer som oppstod. I kapittel 3.4 introduseres metodene som ble brukt i analysen, før studiens reliabilitet og validitet drøftes i kapittel 3.5. Til slutt vil jeg legge frem de ulike etiske retningslinjer som jeg har forholdt meg til i studien min (kapittel 3.6).

3.1 Forskningsstrategi og forskningsdesign

For å kunne finne svar på forskningsspørsmålene i studien har jeg benyttet meg av kvalitativ forskning. Denne typen forskning har søkelys på å forstå forskningsdeltakernes perspektiv. I skolesammenheng kan dette for eksempel være elevenes, lærerens, hjemmets eller ledelsens perspektiv (Postholm, 2005). Jeg prøver å finne ut av hva elevenes perspektiv på negative tall er gjennom observasjon, og har som følge av dette valgt ut ei gruppe på fire elever. Forskning av typen som er gjennomført i denne studien forutsetter et godt samarbeid mellom forsker og deltakere. Derfor er det viktig at elevene føler seg trygge og er klar over hvordan hele prosessen skal foregå. Dette vil bli utdypet videre i kapittel 3.5 og 3.6.

Kvalitativ forskning ser på hverdagshandlinger til deltakerne i sin naturlige kontekst og leter gjerne etter svar på spørsmål som «Hva skjer, eller hvordan er det som skjer i en gitt setting?» (Postholm & Jacobsen, 2011). Jeg vil finne ut hvordan elevene forklarer fremgangsmåtene sine når de jobber med negative tall, hva som skjer når de støter på utfordringer og hvilke typer utfordringer som oppstår i deres arbeid med disse tallene. Ettersom datamaterialet i kvalitativ forskning legger vekt på å få frem det spesielle innenfor et emne, er slike studier ofte ressurskrevende. Det er derfor svært nødvendig å begrense tilfanget av datamateriale i tilknytning til emnet for ikke å miste oversikten i forskingsprosessen. Ofte holder forskere seg til et lite antall intervjuer eller observasjoner innen kvalitativ forskning (Postholm & Jacobsen, 2011). Det har også jeg valgt å gjøre i denne studien.

Når forskeren selv samler inn datamaterialet i kvalitativ forskning, kan forskningsfokuset og selve forskningen bli påvirket både av egne erfaringer og opplevelser, i tillegg til det teoretiske ståstedet til forskeren (Postholm, 2005). Dette er noe en kvalitativ forsker må være bevisst på. Av den grunn blir dette drøftet ytterligere i kapittel 3.4 og 3.5.

Oppgavens forskningsdesign er case study, eller kasusstudie som det kalles på norsk. Det er en studie som tar for seg en bestemt situasjon, et utvalg dokumenter, et enkelt subjekt eller en spesiell hendelse som blir utforsket og analysert i detalj (Bryman, 2016; Wellington, 2000). Denne typen forskning er opptatt av kompleksiteten til kasuset som blir studert, samt dets spesielle karakter. I dette tilfellet er det elevenes arbeid med oppgaver om negative tall som er dette kasuset og som blir undersøkt og analysert i detalj. Fokuset ligger på hva som karakteriserer elevenes arbeid med oppgaver som innebefatter negative tall, samt forklaringene deres. Med kasusstudie som forskningsdesign er forskeren opptatt av å avdekke de unike egenskapene til kasuset som blir studert. Nettopp dette er det som skiller kasusstudier fra andre forskningsdesign. Kasusstudier med kvalitativ forskningsstrategi har ofte en induktiv tilnærming til forholdet mellom teori og forskning (Bryman, 2016). Dette er også tilfelle i denne studien. En induktiv tilnærming vil si at forskningen finner sted først uten å ha en forutbestemt hypotese som skal testes. Teorien i studien blir dermed basert på resultatene i forskningen og kommer som oftest på plass underveis i arbeidet (Bryman, 2016).

3.2 Observasjon som metode

For å samle inn empirisk materiale til studien utførte jeg observasjoner av ungdomsskoleelevenes arbeid med tre ulike oppgaveark i tilsammen tre økter. Underveis tok jeg notater og stilte spørsmål. Spørsmålene var alt fra utdypingsspørsmål, oppfølgingsspørsmål og spørsmål for å bekrefte eller avkrefte min forståelse av deres utsagn. Alle disse spørsmålene ble til underveis i observasjonene og bygget videre på det elevene sa og gjorde. Jeg brukte også videokamera under observasjonene, slik at jeg i ettertid kunne se opptaket flere ganger. Dette medførte at jeg kunne registrere og notere mer enn jeg fikk med meg under selve observasjonene.

Å observere det som skjer rundt en er en del av hverdagen vår, både bevisst og ubevisst. Observasjon er også en av de vanligste datainnsamlingsstrategiene i kasusstudier (Postholm, 2005; Postholm & Jacobsen, 2011). Både kroppsspråk, atferd, samtaler, relasjoner og reaksjonsmønster er noe av det som er mulig å observere i forskning. Da jeg observerte i forbindelse med denne studien, fokuserte jeg mest på forklaringene til ungdomsskoleelevene, altså samtalene som oppsto mellom dem og med meg. På grunn av videoopptakene, kunne jeg se tilbake på klippene flere ganger. Dermed fikk jeg også observert det kroppsspråk som enkelte av elevene benyttet ved flere anledninger for å forklare og underbygge det de ville ha frem. Opptakene gjorde det i tillegg lettere for meg i etterarbeidet, da jeg kunne gå tilbake og spille av ulike situasjoner om igjen for å få en korrekt gjengivelse av øktene og det som ble sagt.

Som forsker er det viktig å være bevisst på sin rolle som observatør. Mange forskere skiller mellom fire ulike roller: «fullstendig deltaker», «deltaker som observatør», «observatør som deltaker» og «fullstendig observatør» (Bryman, 2016; Postholm, 2005; Postholm & Jacobsen, 2011). En observatør som deltaker er med i aktiviteten som observeres, for eksempel ved å være veileder, men ikke på lik linje som en fullverdig deltaker. Hovedoppgaven til forskeren med en slik rolle er primært å observere, men forskeren kan også gi respons og komme med spørsmål som utfordrer deltakerne under observasjonen. (Bryman, 2016; Postholm, 2005; Postholm & Jacobsen, 2011). I denne studien tok jeg rollen «observatør som deltaker». Hovedsakelig observerte jeg arbeidet til ungdomsskoleelevene med oppgavearkene og prøvde å la dem lede samtalene der det var mulig. Jeg kom med spørsmål underveis, både for å sjekke at jeg hadde oppfattet korrekt det de sa, og i noen tilfeller for å få dem til å utdype forklaringene deres.

En forbedring som kommer fordi man bli forsket på kalles «Hawthorne-effekten». Navnet stammer fra en av industrihistoriens mest kjente studier som startet i 1924 og ble gjort på fabrikken Hawthorne til Western Electric Company utenfor Chicago, Illinois. Forskerne utført en rekke eksperimentelle studier med to grupper fabrikkarbeidere. Den ene gruppen ble utsatt for ulike endringer i arbeidsmiljøet, den andre gruppen fortsatte som før. Endringene den første gruppen opplevde kunne være temperatur, hviletid, belysning og lignende. Det faktum at produksjonen økte jevnt for begge gruppene, uansett positivt, negative eller ingen endringer i arbeidsmiljøet, ble forklart med oppmerksomheten arbeiderne fikk gjennom studien og det at de i det hele tatt ble forsket på (Wellington, 2000).

Denne effekten må man kunne forvente vil inntreffe i andre studier også, men i hvilken grad det skjer er vanskeligere å avdekke da ikke alle studier har en kontrollgruppe. I kvalitative studier kan dermed Hawthorne-effekten innebærer at det oppstår endring i deltakernes adferd i forskningsprosjektet på grunn av at forskeren er tilstede. I denne studien av ungdomsskoleelever og deres arbeids med negative tall, er det altså en mulighet for at både min tilstedeværelse i rommet og bruken av videokamera kan ha påvirket elevene som deltok. Derfor er det viktig at forskeren har dette i bakhodet og er forsiktig med å trekke en generell konklusjon som bare er basert på resultatene fra en observasjon. Jeg vil utdype begrensningene til observasjon som metode generelt og i forbindelse med denne studien spesielt i kapittel 3.5.

3.3 Datainnsamling

Før jeg kunne gå i gang med datainnsamlingen måtte jeg utføre noe forarbeid. Jeg trengte deltakere som ønsket å bli med og et oppgaveark til hver av de tre observasjonsøktene. Videre vil jeg beskrive hvordan jeg valgte skole, klassetrinn, elever, hvordan jeg satt sammen oppgavearkene og til slutt hvordan gjennomføringen av datainnsamlingen foregikk.

3.3.1 Oppgavene

Etter å ha undersøkt mange forskjellige læreverk for ungdomsskolen, observerte jeg at oppgavene om negative tall ofte var knyttet til praktiske eksempler og at de omhandlet enten temperatur, meter over og under havet, gjeld eller tidsregning i forbindelse med årstall før og etter år 0. For at elevene skulle ha større forutsetning til å reflektere og forklare sin tankegang i løsningsprosessen, var det viktig for meg at ungdomsskoleelevene skulle være noenlunde vant til de oppgavetypene de fikk i løpet av øktene vi var sammen. Derfor tok jeg utgangspunkt i de samme kontekstene som lærebøkene brukte. Noen av oppgavene er direkte hentet fra ulike lærebøker, mens andre har jeg laget selv basert på oppgaver fra disse lærebøkene. I tillegg jobbet ungdomsskoleelevene med rene talloppgaver uten noen form for kontekst, som for eksempel:

- lange talluttrykk av typen $(-4)\ (-3) + \frac{-6}{2} - 8\ (4)\ (-2)$
- ulike bokstavuttrykk som $3x^2\ (x^2 + 3x + 5) - x^2 + 4x^2\ (x + 1)$
- ligninger med form som denne $-2\ (x + 1) = x + 4$.

Oppgavene som elevene i studien arbeidet med, og deres potensial, vil bli ytterligere presentert i neste kapittel (kapittel 4).

3.3.2 Utvalg av elever

Etter at jeg hadde besluttet å velge negative tall som tema for min studie, ville jeg ut i grunnskolen for å få større innsikt i hvordan elever forholder seg til dette emnet. Jeg ønsket at elevene skulle ha jobbet en del med negative tall før jeg observerte dem, slik at dette emnet ikke var noe helt nytt. Ved å ha arbeidet med negative tall tidligere, vil det være enklere for elevene å kunne forklare hvordan de løser de ulike oppgavene. Man kan da forvente at de gjerne har en allerede innarbeidet metode eller taktikk for dette arbeidet. Samtidig ville ungdomsskoleelevene ha større forutsetning for å kunne reflektere og diskutere rundt dette emnet, og dermed hjelpe meg til å kunne svare på mine forskningsspørsmål. I læreplanen Kunnskapsløftet står negative tall nevnt i læreplanmål for matematikkfaget etter 4. årstrinn. Da skal elevene kunne bruke negative tall. Etter 7. årstrinn skal de kunne regne med negative tall. Etter 10. årstrinn er negative tall ikke lenger nevnt eksplisitt med ord, men det kan argumenteres for at emnet implisitt er plassert under tall og tallforståelse. På bakgrunn av disse læreplanmålene valgte jeg å utføre datainnsamlingen min på ungdomsskolenivå, blant elever på 8.trinn.

I oppstarten av forskningsprosjektet fikk jeg kontakt med en erfaren matematikklærer ved en ungdomsskole. Ved tidligere anledninger har jeg som regel valgt å rette søkelyset mot elever som synes matematikk er utfordrende og som har lav måloppnåelse i faget. Denne gangen ønsket jeg et litt annet fokus. Derfor ba jeg denne læreren om hjelp til å velge ut noen elever som har høy måloppnåelse i faget og er vant til å løse utfordrende oppgaver. Årsaken til at jeg foretrakk dette var fordi spørsmålene til oppgavene krever at elevene må reflektere rundt fremgangsmåte og forklare hvorfor de velger denne fremgangsmåten. På bakgrunn av dette valgte matematikklæreren ut fem elever som jeg inviterte til å bli med i studien. Fire av dem ønsket å delta, og samtlige var med på hver av de tre øktene med oppgaveløsning og observasjon. Ungdomsskoleelevene som deltok var alle gutter. Jeg har valgt å gi dem pseudonymer for å ivareta deres anonymitet. I studien blir de derfor kalt Adrian, Henrik, Sondre og Oliver. Jeg har ikke noe spesielt kjønnsperspektiv i min studie. Det var utelukkende på grunn av lærerens innspill og valg av deltakere at de observerte elevene endte opp med å være fire gutter.

3.3.3 Gjennomføring

Jeg startet studien for fullt i januar 2019, men gjorde noe forarbeid høsten 2018. I januar kom avtalen med matematikklæreren på plass, samtidig som jeg også fikk klarsignal fra rektor ved den aktuelle grunnskolen til å innhente de dataene jeg trengte der. I februar informerte jeg ungdomsskoleelevene om prosjektet og sendte med dem et informasjonsskriv hjem. Dette inneholdt en orientering til de foresatte om studien og en forespørsel om å la deres ungdom delta. Skrivet ba også om underskriften til de foresatte som en tillatelse til deltakelse, noe alle elevene fikk (se Vedlegg 2). I tillegg måtte prosjektet meldes til «Norsk senter for forskningsdata» (NSD) og bli godkjent før jeg kunne starte datainnsamlingen. Jeg sendte meldeskjemaet 26. november 2018, og fikk godkjenningen 24. januar 2019 (se Vedlegg 1).

I utgangspunktet var planen å starte datainnsamlingen i uke 7 (11.-15. februar), slik at jeg fikk startet før grunnskolens vinterferie. På grunn av sykdom i elevgruppa måtte datainnsamlingen imidlertid utsettes. Datainnsamlingen ble dermed utført 27. februar, 6. mars og 20. mars. I forkant av denne prosessen støtte jeg blant annet på tekniske utfordringer da utstyret sviktet like før første økt med elevene. Dette løste seg heldigvis raskt med en reserveløsning og ble derfor ingen hindring likevel. I tillegg var det til tider vanskelig å finne et godt egnet rom å utføre de ulike øktene i. Til tross for at litt tid gikk med til dette, kom vi gjennom de oppgavene jeg hadde planlagt og hadde en reflektert samtale rundt disse på den tiden vi hadde til rådighet.

Etter at øktene var gjennomført, transkriberte jeg alle videoopptakene som var blitt gjort. I transkripsjonene skrev jeg ned alt det som ble sagt, og fordi jeg hadde brukt videokameraet og kunne gjennomgå opptakene, markerte jeg også kroppsspråket til elevene dersom de brukte dette som en del av forklaringene sine. Enkelte ganger i løpet av øktene sporet ungdomsskoleelevene litt av og snakket for eksempel om dagens fotballtrening og andre sosiale aktiviteter. Jeg valgte å utelate slike samtaler fra transkripsjonen, da jeg ikke ser disse som relevant for min analyse og dermed ikke for å kunne svare på forskningsspørsmålene. Ytringene er i transkripsjonen nummerert slik at leseren lettere kan få oversikt over hvor i øktene man befinner deg når enkelte ytringer trekkes frem i kapittel 5. (1.58) er et eksempel på denne nummereringsmåten. Det første tallet, 1, sier hvilken observasjonsøkt denne ytringen ble sagt. Det andre tallet, 58, er den 58. ytringen i økta.

3.4 Analysemetoder

Etter at videoopptakene var transkribert, startet jeg med å sortere det innsamlede datamaterialet. Jeg leste gjennom og analyserte transkripsjonene for deretter å lage ulike kategorier av hendelser. De to forskningsspørsmålene jeg tok for meg, behandlet jeg hver for seg. På det første forskningsspørsmålet om hva som karakteriserer elevene og deres arbeid med oppgaver om negative tall, endte jeg opp med tre kategorier. Disse kategoriene var:

- Elevene unngikk å bruke negative tall
- Minustegnets betydninger var ikke alltid like lett å skille mellom
- Flere regneoperasjoner i en oppgave gjorde elevene forvirret

Det andre forskningsspørsmålet, som tar for seg hvilke måter elevene forklarer fremgangsmåtene deres, resulterte i fire kategorier. Kategoriene var:

- Forklaringsmåter
- Gestikulering
- Gjeld som konkret eksempel
- Bruk av fortegnsregler

Selv om kategoriene for det andre forskningsspørsmålet dreier seg om forklaringene til ungdomsskoleelevene, er disse kategoriene også med på å karakterisere arbeidet deres. Gestikulering, bruk av gjeld som eksempel og bruk av fortegnsregler var gjentagende i observasjonsøktene med elevene. Likevel valgte jeg å plassere dem under forskningsspørsmålet som omhandler elevenes forklaringer, da de brukte disse aktivt i forklaringene sine.

I sorteringsprosessen laget jeg et fargekodesystem. Hver kategori fikk sin egen farge, slik at jeg enkelt kunne finne frem til de ulike kategoriene. Ettersom mengden på datamaterialet er stort, var det deler jeg valgte å ekskludere fra analysekapittelet. Årsaken til dette er at det enten allerede hadde blitt nevnt tidligere da jeg tok for meg en annen oppgave, eller fordi det ikke var like relevant for å kunne svare på studiens forskningsspørsmål.

Forklaringene som er tatt med i analysen, er forklaringer hvor elevene forteller om hvorfor den fremgangsmåten de har valgt når de løser de forskjellige oppgavene, fungerer. Det vil si at opplesinger av ulike regnestykker elevene regnet ut, uten noen ytterligere forklaring på hvorfor det ble gjort slik, ikke er inkludert. I tillegg valgte jeg også bort oppgave 4b på oppgaveark 2 og oppgave 2 og 3 på oppgaveark 3 da jeg analyserte forklaringstyper. Dette skyldes at ungdomsskoleelevene uttrykte at disse var vanskelige og til dels ukjente for dem. Samtalen gikk dermed ut på å jobbe sammen gjennom disse og diskutere litt rundt dem. Elevene forklarte ikke noe særlig i denne delen av observasjonen. Min rolle ble dermed også endret da jeg forklarte løsninger for dem og var mer aktiv i samtalen enn ellers.

3.5 Validitet og reliabilitet

Validitet og reliabilitet er de mest fremtredende kriteriene for å vurdere forskning. Validitet omhandler integriteten til de konklusjonene som utvikles i et forskningsarbeid. I denne studien er det målingsvaliditet og ekstern validitet som er mest relevante. Målingsvaliditet sier noe om i hvilken grad det som er ønsket målt faktisk blir målt, med andre ord om forskeren har foretatt riktig metodevalg. Ekstern validitet tar for seg spørsmålet om resultatene kan generaliseres utover det spesifikke datautvalget i studien (Bryman, 2016; Postholm & Jacobsen, 2011). Dette betyr med andre ord om resultatene vil bli de samme i lignende situasjoner med andre ungdomsskoleelever.

Den eksterne validiteten i denne studien er problematisk. En kasusstudie som denne tar kun for seg et enkelt tilfelle med begrensede forskingsdeltakere og kan av den grunn være vanskelig å generalisere. Dette er ikke uvanlig i kasusstudier (Bryman, 2016; Wellington, 2000). Det finnes med andre ord lite grunnlag for å konkludere med at funnene i denne studien vil gjelde for alle elever på 8. trinn. Man kan likevel ikke se bort fra at elementer i resultatene vil kunne gjenfinnes i andre ungdomsskoleelevers arbeids med negative tall, og gi oss en nærmere forståelse av deres tenkemåte i forhold til dette matematiske emnet.

Det krever en forsker med bakgrunnskunnskap og som vet hva man skal se etter, for å få svar på forskningsspørsmålene i denne studien. Ungdomsskoleelevene vil ikke kunne svare på spørsmål om hva som karakteriserer arbeidet deres eller hvordan de forklarer fremgangsmåtene sine for eksempel på et spørreskjema eller i et intervju. Ved å bruke observasjon som datainnsamlingsmetode kan elevene jobbe med oppgaver om negative tall, mens jeg som forskeren ser etter ulike elementer det er interessant å vektlegge i studien. På bakgrunn av dette valgte jeg observasjon, fordi jeg anså dette som den mest hensiktsmessig metoden til å få frem svarene på forskningsspørsmålene. Denne vurderingen vil også styrke studiens målingsvaliditet.

Reliabilitet er opptatt av spørsmålet om resultatene i studien er repeterbare, altså er konsistente slik at de vil gi gyldighet over tid (Bryman, 2016). Studien blir med andre ord sett på som pålitelig dersom den kan utføres igjen av noen andre som konkluderer med de samme funnene og tolkningene av disse. Denne påliteligheten er det ingen garanti for, men som forsker bør man reflektere over ulike problemer som kan forekomme i forskningen for å styrke påliteligheten (Postholm & Jacobsen, 2011). I kvalitativ forskning er det ofte umulig å gjenta et intervju eller en observasjon på nøyaktig samme måte og med de samme deltakerne. Det kan dermed være ungdomsskoleelevene ville oppført seg annerledes eller kommet med andre svar på grunn av innsikten de fikk første gangen de ble observert eller intervjuet. Det er i observasjonsstudier viktig at funnene ikke skal inkludere forutinntatte synspunkter og at fortolkninger som blir gjort må forsvares for at oppgavens reliabilitet ivaretas (Postholm, 2005).

I denne studien har jeg tatt flere valg for å styrke reliabiliteten, blant annet ved å redusere faktorene som kunne svekket undersøkelsens pålitelighet. Hawthorne-effekten er et godt eksempel på en slik faktor. Det er vanskelig å vite helt sikkert i hvor stor grad min og videokameraets fysiske tilstedeværelse påvirket deltakernes utsagn og oppførsel. Likevel kan det at elevene til tider pratet med hverandre om fritidsaktiviteter som fotballtreninger og lignende, argumentere for at mitt nærvær ikke påvirket dem i stor grad. Jeg gjorde også mitt beste for ikke å anta noe ut ifra det jeg observerte, men heller spørre ungdomsskoleelevene om jeg hadde forstått det de sa på riktig måte dersom jeg var usikker på det de formidlet.

Etter observasjonene har jeg transkribert etter beste evne så ordrett som mulig. Jeg har også prøvd å transkribere kroppsspråket til ungdomsskoleelevene. I løpet av arbeidet med denne studien har jeg prøvd å trekke et skille mellom tolkninger og antakelser. Dette er noe jeg som forsker har måttet være veldig forsiktig med ettersom det kun er meg som hatt tilgang til rådataene, og fordi en kasusstudie er et spesielt tilfelle der det er vanskelig å generalisere. Likevel kan resultatene styrkes ved hjelp av andre studier og teorier som tar for seg liknende problemstillinger og momenter som denne studien omhandler.

3.6 Etiske retningslinjer

Som forsker på ungdomsskoleelevers arbeid med og forklaringer omkring negative tall i en smågruppe, er det mange hensyn man må ta og flere etiske retningslinjer å følge. Dette gjelder spesielt når forskingsarbeidet baserer seg i svært stor grad på deltakelse fra enkeltmennesker. NESH (Den Nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsfag, jus og humaniora), har utformet noen forskningsetiske retningslinjer som jeg har fulgt i arbeidet med denne oppgaven:

1. Krav om å unngå skade og smerte
2. Krav om samtykke
3. Krav om å informere
4. Barns krav på beskyttelse
5. Krav om respekt for individets privatliv og nære relasjoner
6. Krav om konfidensialitet
7. Krav om respekt for menneskeverdet

(Postholm, 2005)

Den første av retningslinjene sier at deltakere i forskningen ikke skal bli utsatt for skade og smerte eller belastning på andre måter. Dette inkluderer også situasjoner som kan oppleves ubehagelige eller pinlige for deltakerne (Postholm, 2005). For å unngå dette jobbet jeg for at ungdomsskoleelevene i min studie ikke skulle føle på noe press i forbindelse med riktig og gale svar på oppgavene. Det ble gjort ved jevnlig å minne dem på at det er fremgangsmåten jeg ønsket å se på. I tillegg fokuserte jeg på å skape trygge rammer og en avslappende atmosfære rundt observasjonene.

Blant annet startet jeg øktene med å snakke om hverdagslige ting. En økt startet vi også opp med en kopp kakao hver før vi jobbet med oppgavene. Jeg plasserte i tillegg videokamera på et sted som ikke var så merkbart, for å unngå en stadig påminnelse om at elevene ble filmet.

Det andre og tredje punktet innebærer at deltakerne må delta av egen fri vilje og skal ha mulighet til å trekke seg når de måtte ønske. Deltakerne skal også være tilstrekkelig informert om prosjektet i den grad at de får en forståelse for prosjektet i seg selv og dets hensikt (Postholm, 2005). I forkant av selve datainnsamlingen informerte jeg ungdomsskoleelevene på skolen om hva forskningsprosjektet gikk ut på, hva det innebar for dem å delta og hva som ville skje med dataene som ble samlet inn. I tillegg presenterte jeg meg selv som student i matematikk, min interesse for og behov for informasjon om temaet og min rolle i studien og de kommende observasjonene. Det ble også gjort klart at deres deltakelse i forskningsprosjektet ikke ville bli gjenstand for skolens vurdering av dem, verken i faget matematikk eller ellers. Samtidig fikk elevene et informasjonsskriv til foresatte (se Vedlegg 2). Jeg var avhengig av både elevenes og de foresattes samtykke før jeg kunne utføre datainnsamlingen, og samtidig overholde punkt 4 om ungdommenes krav på beskyttelse. I samtalen med elevene, og i informasjonsskrivet, uttrykte jeg tydelig at deltakelse i prosjektet er frivillig og at de hadde mulighet til å trekke seg når som helst. I tillegg informerte jeg om at øktene med elevene ville bli tatt opp med videokamera dersom de samtykket til dette. Jeg poengterte også at disse klippene ville bli slettet og at deltakelsen ville bli anonymisert i skriftlige sammenhenger, slik at ingen kunne finne ut hvem som deltok. Til slutt oppga jeg kontaktinformasjonen til både veilederen min og meg selv, samt en oppfordring om å ta kontakt dersom det skulle være noe mer de lurte på angående forskningsprosjektet.

Det femte punktet sier at forskeren skal vise respekt for individets privatliv og nære relasjoner. Informantene har krav på å kontrollere om sensitiv informasjon om dem skal gjøres tilgjengelig for andre (Postholm, 2005). I denne studien er det lite sensitiv informasjon som blir behandlet da det kun er kjønn og alder av personopplysninger som er relevant. Informasjonen deltakerne kommer med i observasjonen, som tas med i transkripsjonen, handler om oppgavene med negative tall og elevenes fremgangsmåter i møte med disse. I løpet av observasjonene spurte jeg jevnlig om jeg hadde forstått det ungdomsskoleelevene sa ved å gjenta min forståelse av deres forklaring. På denne måten forsikret jeg meg om at deltakerne gikk god for det datamaterialet jeg tok med meg inn i analysen.

Elevenes anonymitet er ivaretatt i studien blant annet gjennom bruk av pseudonymer. Kravet om konfidensialitet (punkt seks), som forutsetter at all informasjon deltakerne i et forskningsprosjekt gir blir behandlet konfidensielt (Postholm, 2005), er på denne måten innfridd. Grunnskolen blir ikke nevnt ved navn eller identifisert på annen måte. I tillegg fikk elevene beskjed om at det kun var jeg som ville se på videoopptakene som ble tatt av dem, og at disse ville bli slettet senest ved forskningsprosjektets avslutningsfase. Oppgavearkene de skulle skrive på i løpet av øktene jeg observerte dem, ville også bli makulert ved avslutningen av prosjektet. Ved å utføre disse tiltakene vil ingen av deltakerne eller skolen bli assosiert med denne studien.

Det siste av punkene i de forskningsetiske retningslinjene omhandler nødvendigheten av respekt for menneskeverdet (punkt 7). Dette viktige kravet kan også fungere som et overordnet punkt for de etiske prinsippene som all forskning som involverer mennesker skal rettes etter. Ved å overholde alle de overnevnte punktene, er deltakerne blitt behandlet med respekt og kravet har blitt innfridd (Postholm, 2005).

4 Oppgavene

I dette kapittelet vil jeg presentere de forskjellige oppgavene ungdomsskoleelevene jobbet med i løpet av de tre observasjonsøktene jeg var sammen med dem. Til hver av øktene var det i utgangspunktet satt av den første skoletimen av en dobbelttime i matematikk. Vi hadde også mulighet til å bruke påfølgende pause ved behov. Et utkast til oppgavearkene ble laget før første observasjonsøkt. Etter hver økt foretok jeg en evaluering av oppgavearket til neste økt. Da gjorde jeg de endringer jeg fant hensiktsmessig på bakgrunn av det jeg hadde observert, samt det jeg ønsket å ta tak i den påfølgende økta.

Videre i dette kapittelet vil jeg gjøre rede for hvorfor nettopp disse oppgavene ble valgte. Samtidig følger også betraktninger i forhold til det jeg ønsket jeg kunne få mer kunnskap om når det gjaldt ungdomsskoleelevenes arbeid med hver av oppgavene.

Denne observasjonsstudien er bygget opp rundt arbeidet med totalt elleve oppgaver. Disse fordeler seg på tre ulike oppgaveark (se Vedlegg 3, 4 og 5). Oppgaveark 1 jobbet ungdomsskoleelevene med den første økten vi var sammen. Det andre oppgavearket jobbet de med den neste gangen og det tredje den siste gangen. Oppgavene er hentet fra ulike lærebøker, en masteroppgave og fra internett. De fleste er bruk med den form og ordlyd de hadde der, med noen få unntak. Dette er oppgaver jeg endret på for å få det til å passe bedre i forhold til hva man kan forvente elevene på 8. trinn har jobbet med tidligere.

4.1 Oppgaveark 1

Den første oppgaven på det første oppgavearket er inspirert av en tidligere masteroppgave skrevet av Sørmeland i 2014. Denne oppgaven ønsket jeg å starte med som en oppvarmingsoppgave, slik at elevene kom inn i tankegangen om negative tall.

1. Fyll inn tallet som mangler i den tomme ruten.
   a) $3 - 5 = \boxed{}$ b) $-9 + 4 = \boxed{}$

   c) $5 + \boxed{} = 3$ d) $5 - \boxed{} = 8$

(Sørmeland, 2014)

Dette er fire forholdsvis enkle regnestykker med lave tall, selv om de innebærer løsninger med negative tall. I oppgaven skal elevene fylle inn tallet som mangler i den tomme ruta. Det jeg ønsket å oppnå ved å starte med en slik oppgave, var å unngå at ungdomsskoleelevene skulle sitte igjen med en følelse av at: «Dette blir for vanskelig for meg.» En slik type oppgave, som er gitt i oppvarmingsoppgaven, har alle disse ungdomsskoleelevene forutsetninger for å klare. Ved å oppleve: «Dette får jeg til», håpet jeg at den enkelte av dem også ble tryggere på denne nye situasjonen. Da ville det i tillegg bli lettere å få i gang en konstruktiv samtale ungdomsskoleelevene imellom, og mellom dem og meg, både rundt oppvarmingsoppgaven og de kommende oppgavene. Samtidig burde det være enklere for ungdomsskoleelevene å forklare hvordan de tenker når det var snakk om små tall. Med andre ord ønsket jeg at ungdomsskoleelevene skulle begynne med nettopp en slik type oppvarmingsoppgave, slik at de skulle bli vant til å forklare tankegangen sin, i tillegg til å oppleve mestring og erfare at jeg ikke var ute etter å sette dem fast.

Oppgave 2 på det første oppgavearket er hentet fra Grunntall 8. Den er skrevet av Bakke og Nygjelten Bakke. Det er ei lærebok som er beregnet til bruk på 8. trinn.

> 2. Sokrates, Platon og Aristoteles er tre av historiens store filosofer.
>   a) Sokrates ble født i år 470 f Kr. Hvor mange år før deg ble han født?
>   b) Platon startet en filosofisk skole i Athen i år 387 f Kr. Denne skolen var i aktivitet fram til 529 e Kr. Hvor mange år var denne skolen i virksomhet?
>   c) Da Aristoteles døde i år 322 f Kr, var han 62 år. I hvilket år ble han født?

(Bakke & Bakke, 2002, s. 107)

Denne oppgaven består av tre deler. Der skal elevene regne ut hvor mange år det skiller mellom de oppgitte årstallene knyttet til livene til filosofene Sokrates, Platon og Arisoteles. Til tross for at Grunntall 8 begynner å bli litt gammel, er nettopp denne oppgaven representert i flere ulike lærebøker jeg har sett på. Noen har riktignok en noe annen ordlyd. Jeg ønsket blant annet å gi denne oppgaven til ungdomsskoleelevene, fordi det er en type oppgave som tar for seg regning med årstall, som er en av kontekstene negative tall ofte blir brukt i. I tillegg bygger den videre på den første oppgaven, ettersom man setter opp tilsvarende regnestykker. Forskjellen ligger i at man her opererer med tall som har en betydelig større avstand fra tallet 0. Oppgaven vil også kunne avsløre hvordan ungdomsskoleelevene forholder seg til 0, og hvordan de oversetter f.Kr. og e.Kr. til et regnestykke som utelukkende består av tall.

Den tredje oppgaven er hentet fra oppgaveboka Faktor 1, som er ei lærebok for 8. trinn. Læreverket Faktor har to bøker til hvert trinn, ei oppgavebok og ei grunnbok. Disse er skrevet av Hjardar og Pedersen. Dette er også det læreverket som ungdomsskoleelevene bruker på skolen.

> 3. Et seilfly ble sluppet fri 28 moh. Flyet steg 330 m, sank 75 m, steg 173 m, sank 25 m og sank 38 m.
>   Hvor høyt over havet befant flyet seg nå?

(Hjardar & Pedersen, 2006, s. 25)

Ungdomsskoleelevene må i denne oppgaven forholde seg til høydemeter, som er nok en kontekst hvor negative tall ofte blir brukt i kombinasjon med dybdemeter. Her står det ikke oppført noen negative tall, slik at elevene må oversette «steg» og «sank» til addisjon og subtraksjon. I tillegg er det mange tall å holde styr på. Denne oppgaven ble tatt med for å se om ungdomsskoleelevene kunne sortere informasjonen som blir gitt. Det var et ønske om å se hvordan de går frem når det skal adderes, så subtraheres og deretter adderes, og så videre.

Oppgave 4 er hentet fra sammen lærebok som oppgave 3, Faktor 1 oppgavebok. Oppgaven i seg selv er imidlertid litt annerledes enn de andre. Årsaken til dette er at elevene ikke skal regne ut noe her, men lage en passende tekst til regnestykkene.

> 4. Lag passende tekst til regnestykkene
>   a) -5°C – 7°C
>   b) 50 000 kr – 70 000 kr

(Hjardar & Pedersen, 2006, s. 25)

Løsningen på hvert av regnestykkene som elevene skal lage oppgavetekst til, er forventet å bli et negativt tall. Konteksten i begge regnestykkene er allerede bestemt, nemlig temperatur og penger. Jeg ønsket å ha en oppgave hvor ungdomsskoleelevene ble utfordret til å tenke litt annerledes. Her kreves det å kunne tenke motsatt i forhold til hva ungdomsskoleelevene er vant til i de fleste regneoppgaver. De må kunne knytte regnestykkene til et praktisk eksempel istedenfor bare å regne seg frem til en løsning. Dette ville gi meg en pekepinn på om ungdomsskoleelevene klarte å kombinere det rent matematiske med det dagligdagse.

4.2 Oppgaveark 2

Den første oppgaven på det andre oppgavearket er hentet fra læreboka Nummer 8 skrevet av Hole, Jensen, Kufaas Tellefsen og Wallace. Denne boka er også laget med tanke på bruk på 8. trinn.

1. Den laveste temperaturen som er blitt målt i Norge, er -51,4 grader C. Den ble målt i Karasjok. Den høyeste temperaturen er målt i Nesbyen og var 35,6 grader C. Hvor stor er forskjellen?

(Hole, Jensen, Tellefsen & Wallace, 2014, s. 42)

Dette er en oppgave om grader der elevene får oppgitt en maksimumstemperatur og en minimumstemperatur i Norge. Elevene skal finne ut hvor stor forskjell det er mellom disse målingene. Ettersom dette er den første oppgaven ungdomsskoleelevene fikk i den andre økta, ønsket jeg at de skulle starte med en oppgave som liknet noe på dem de jobbet med gangen før. Denne er ganske lik oppgave 2 på oppgaveark 1, men her brukes temperatur som kontekst istedenfor årstall. Ved å gi en slik nesten tilsvarende oppgave, kunne vi få mulighet til å plukke opp tråden fra forrige gang. Det ville også gi oss anledning til eventuelt å snakke mer utfyllende om momenter som dukket opp forrige gang, men som vi ikke hadde tilstrekkelig tid til da. Det var noe uklart om det ville være behov for en slik utdyping.

Det første oppgavearket hadde oppgaver som kun tok for seg addisjon og subtraksjon. I dette andre oppgavearket ønsket jeg at ungdomsskoleelevene også skulle jobbe med både multiplikasjon og divisjon, slik at vi hadde vært innom alle de fire regneartene. Dette er et viktig element i bakgrunnen for valget av oppgave 2 og 3 i dette oppgavearket.

Oppgave 2 er hentet fra Maximum 8 som er ei lærebok beregnet for 8. trinn. Den er skrevet av Normann Tofteberg, Tangen, Stedøy-Johansen og Alseth.

2. En dykker er på 4 meters dyp da han bestemmer seg for å dykke tre ganger så dypt.
   a) På hvilket dyp er dykkeren på nå? Bruk negative tall for antall meter under havoverflaten.
   b) Etter 15 minutter bestemmer dykkeren seg for å halvere dybden. På hvilket dyp er dykkeren nå?

(Tofteberg, Tangen, Stedøy-Johansen & Alseth, 2013, s. 42)

Denne oppgaven i dette andre oppgavearket dreier seg om dybdemeter, og den spesifiserer at elevene må bruke negative tall for meter under havet. Jeg hadde en mistanke om at ungdomsskoleelevene kanskje ville unngå å bruke negative tall dersom de så en anledning til det. Derfor ville jeg ha med en oppgave der elevene ikke sto like fritt i forhold til fremgangsmåtene de kunne velge.

Oppgave 3 er hentet fra samme læreboka som oppgave 2, Maximum 8.

3. Georg har gjeld. Han skylder banken penger. På kontoutskriften står det -51 000 kr. De tre barna hans bestemmer seg for å overta gjelden hans. Hvor stor gjeld får hvert av barna?

(Tofteberg et al., 2013, s. 42)

Mens den forrige oppgaven krever at elevene bruker multiplikasjon, forventer denne oppgaven at de benytter divisjon. Her står gjeld oppført som et negativt tall. Dermed kunne ungdomsskoleelevene heller ikke i denne oppgaven unngå å regne med negative tall. Konteksten gjeld var også noe jeg visste ungdomsskoleelevene kjente til fra før av, basert på den første observasjonsøkta. Dermed var ikke oppgaven helt ukjent for dem.

Den fjerde oppgaven består av to talluttrykk jeg for en stund tilbake fattet interesse for, og noterte ned for, i forbindelse med informasjonssøk på Internett. Dessverre var det ikke mulig å gjenfinne denne internettsida i ettertid, selv ved hjelp av ulike søkemetoder. Likevel bestemte jeg meg for å bruke disse oppgavene som elevoppgaver til studien, da regnestykkene kun inneholder rene tall og regnetegn.

4. Regn ut
   a) $(-5)\,(-5) + \frac{16}{(-4)} + 6\,(-3)\,(-2)$
   b) $-\frac{(-18)}{(-2)} + 15\,(-8) - (-7)\,(-12) - \frac{27}{(-3)}$

Mot slutten av den første observasjonsøkta ga ungdomsskoleelevene uttrykk for at de syntes oppgavene var lette, og at de i de ordinære timene tidligere hadde jobbet med uttrykk som involverte parenteser. Av den grunn ville jeg ta med et par oppgaver som ikke var knyttet til noen dagligdags kontekst og som inneholdt flere parenteser. Disse oppgavene måtte dermed kreve at elevene utfører mange utregninger for å komme frem til en løsning. Talluttrykkene i oppgave 4 ble derfor valgt ut for å se om elevene klarte å sortere informasjonen de trengte, og hvordan de behandlet de negative tallene i denne sammenhengen.

4.3 Oppgaveark 3

Oppgave 1 på oppgaveark 3 er hentet fra oppgaveboka til læreverket Faktor 2 som er beregnet til bruk på 9. trinn. Oppgavene ble endret noe på i det siste leddet der, fra $2(x^2 - x)$ til $(x^2 - x) -2$.

1. Regn ut:
   $-2\,(x^2 + x - 3) + (x - x^2 + 4)5 + (x^2 - x)\,-2$

(Hjardar & Pedersen, 2007, s. 39)

På samme måte som i den forrige oppgaven, må elevene her forholde seg til flere ledd og samtidig utføre mange regneoperasjoner. Forskjellen er at de nå også må forholde seg til en ukjent variabel. Ved å endre rekkefølgen i de ulike leddene, slik at tallet som skal multipliseres inn i en parentes står etter parentesen, blir oppgavene seende litt annerledes ut enn det ungdomsskoleelevene er vant til. Igjen ville elevenes evne til å kunne sortere informasjon, og regne gjennom oppgaver med mye innhold, være fokusområdet.

Denne oppgaven er også hentet fra oppgaveboka til læreverket Faktor 2. I likhet med forrige oppgave er også denne endret noe på. I utgangspunktet var dette en ulikhet. Ettersom disse ungdomsskoleelevene ikke hadde jobbet med ulikheter enda, byttet jeg ut ulikhetstegnet med et likhetstegn.

2. Regn ut $4 - 3 (x - 1) = -(3 - 2x)$

(Hjardar & Pedersen, 2007, s. 41)

I løpet av tiden jeg observerte ungdomsskoleelevene, arbeidet de med likninger i klassen. Derfor ville jeg gjerne også ha med en likning hvor de måtte behandle negative tall. Jeg ønsket blant annet å finne ut hva ungdomsskoleeleven ville gjøre når x ble negativ.

Den siste oppgaven hentet jeg, i likhet med de to andre, fra oppgaveboka Faktor 2.

3. Regn ut $8 + x^2 = 33$

(Hjardar & Pedersen, 2007, s. 35)

Jeg var usikker på om ungdomsskoleelevene hadde vært borti andregradslikninger før. Av den grunn ville jeg prøve å gi dem en forholdsvis enkel andregradslikning. Bakgrunnen for å velge en ikke så vanskelig likning, var at elevene da kunne komme frem til uttrykket $x^2 = 25$, uten å ha tilstrekkelig kunnskap om kvadratrot i andregradslikninger. Årsaken til at jeg inkluderte denne oppgaven, var fordi jeg gjerne ville ha en samtale med dem om kvadrattall, og om det er mulig å komme frem til et negativt kvadrattall.

5 Resultater og analyse

I dette kapittelet vil jeg legge frem resultatene fra analysen i studien. Kapittelet er todelt, slik at hver del analyserer data for å gi mulige svar på et forskningsspørsmål. Den første delen (kapittel 5.1) presenterer analysen for å svare på: «Hva karakteriserer fire elever på 8. trinn og deres arbeid med oppgaver om negative tall?» Den andre delen (kapittel 5.2) fremstiller analysen som kan svare på forskningsspørsmålet: «På hvilke måter forklarer fire elever på 8. trinn sin fremgangsmåte i arbeid med oppgaver om negative tall?» I utdragene fra transkriberingen er hver ytring nummerert med to nummer. Det første nummeret står for observasjonsøkta, og det andre nummeret er ytringsnummeret. For eksempel 1.83 er ytring nummer 83 gitt i observasjonsøkt 1.

5.1 Karakterisering av arbeid med negative tall

Her beskrives elementer som gikk igjen i ungdomsskoleelevenes arbeid med oppgavene om negative tall i denne studien. De tre mest fremtredende elementene er:

- Elevene unngikk å bruke negative tall (kapittel 5.1.1)
- Minustegnets betydninger var ikke alltid like lett å skille mellom (kapittel 5.1.2)
- Flere regneoperasjoner i en oppgave gjorde elevene forvirret (kapittel 5.1.3).

Disse vil bli utdypet og gitt eksempler på i sine respektive kapitler.

5.1.1 Elevene unngikk negative tall

I arbeidet med oppgavene kom det tydelig frem at ungdomsskoleelevene unngikk å bruke negative tall i utregninger dersom det var en mulighet for å bruke positive tall. Det første eksempelet jeg ønsker å trekke frem er et utdrag fra samtalen om hvordan de løste oppgave 2a på oppgaveark 1.

Utdrag 1 – Samtale om å gå veien om null

2. Sokrates, Platon og Aristoteles er tre av historiens store filosofer.
   a) Sokrates ble født i år 470 f Kr. Hvor mange år før deg ble han født?
   b) Platon startet en filosofisk skole i Athen i år 387 f Kr. Denne skolen var i aktivitet fram til 529 e Kr. Hvor mange år var denne skolen i virksomhet?
   c) Da Aristoteles døde i år 322 f Kr, var han 62 år. I hvilket år ble han født?

(Bakke & Bakke, 2002, s. 107)

I denne oppgaven skulle de finne ut hvor mange år før dem selv Sokrates (født 470 f.Kr.) ble født. Utdraget viser hvordan de forklarte bruken av addisjon for å finne differansen mellom et negativt og et positivt tall.

(1.70)	Adrian:	Du må ta 2005 + 470
(1.71)	Henrik:	Ja, det blir jo riktig det.
(1.72)	Observatør:	Hva får dere da?
(1.73)	Oliver:	2475.
(1.74)	Observatør:	Men du sa man måtte ta pluss?
(1.75)	Oliver:	Ja, det blir liksom først så er det 2005 ned til år 0, og så må du plusse på de som er liksom 470 år f.Kr. Så må du plusse de sammen.
(1.76)	Observatør:	Kunne man gjort det på en annen måte?
(1.77)	Henrik:	Ja, du kunne vel det. 470 – 2005, kanskje?
(1.78)	Oliver:	Det blir ikke helt.
(1.79)	Henrik:	Nei, det hadde ikke gått.
(1.80)	Oliver:	Jeg kommer ikke på noen annen måte.
(1.81)	Observatør:	En ganske lik måte, litt sånn som dere hadde her oppe (peker på 1 d). At man får to fortegn etter hverandre.

(1.82) Henrik: Ja, minus minus.

(1.83) Oliver: 2005 – (-470).

(1.84) Adrian: Så der står det jo -470, fordi år 0 er liksom 0 på tallinja. Og da er 470, -470. Så der kan du ta 2005 – (-470). (viser med hendene at man beveger seg på ei tallinje)

(1.85) Observatør: Men minus minus?

(1.86) Henrik: Ja, fordi man sier jo før Kristus. Men Kristus er jo år 0, så det er jo akkurat det samme som 0 på tallinja. Så hvis det er før 0 på tallinja, så er det jo før på tallinja, altså negativt.

(1.87) Observatør: Ja, men hvorfor gikk dere rett til pluss da?

(1.88) Henrik: Det er en metode som vi lærte tidligere. Så det er mer naturlig kanskje? Vi har gjort det lenger.

Adrian startet med en gang med å si at 2005 og 470 skulle adderes, og de andre sa seg enige i dette. I ytring (1.75) ser vi forklaringen til Oliver på hvorfor de kunne addere årstallene når de skulle finne differansen mellom dem. Vanligvis når det er snakk om differanse, er det subtraksjon som tas i bruk. Likevel blir det matematisk riktig å addere slik som ungdomsskoleelevene gjorde, fordi vi snakker om årstall før og etter år 0. Oliver forklarer at han først fant antall år fra år 0 til han selv ble født, 2005. Deretter adderte han med avstanden fra år 0 til 470 f.Kr. Dermed endte han opp med regnestykket: 2005 + 470. Da ungdomsskoleelevene fikk spørsmål om det var andre måter å løse oppgaven på, prøvde Henrik seg med et forslag med negative tall, men trakk dette ganske raskt tilbake igjen.

Selv om ungdomsskoleelevene ikke satte opp regnestykket som en subtraksjon i første omgang, var de med på tankegangen da de ble tipset om å sammenlikne denne oppgaven med en de jobbet med tidligere. I tillegg kunne elevene forklare hvorfor de kunne sette opp denne slik: 2005 – (-470). Både i ytring (1.84) og (1.86) ser vi hvordan Adrian og Henrik forklarte at årstall før år 0 kan skrives som negative tall. I forklaringen tok begge i bruk en artefakt, nemlig tallinja, ved å vise til tallenes plassering på denne.

2005 – (-470) er nok mer matematisk korrekt fordi uttrykket viser at man skal finne differansen mellom to tall, et positivt og et negativt. Likevel kan addisjon også brukes for å komme frem til riktig løsning. Det er kanskje også tidsbesparende da man slipper å gå veien innom to minustegn som igjen blir gjort om til et pluss. Denne fremgangsmåten, som ungdomsskoleelevene brukte opptil flere ganger i arbeid med andre oppgaver, var noe elevene så på som en vane, noe som de hadde tilegnet seg gjennom lenger tid, slik vi ser at Henrik uttrykte seg i ytring (1.88). Det er en fremgangsmåte som for ham tilkjennegir at nok er mer naturlig å bruke.

Utdrag 2 – Samtale om å unngå -x i likninger

I arbeidet med likninger kom det også frem at ungdomsskoleelevene prøvde å unngå negative tall om mulig. Dette gjaldt både tall og ukjente variabler som x. Dette viste seg tydelig i arbeidet med oppgave 2 på oppgaveark 3.

2. Regn ut
$4 - 3\,(x - 1) = -(3 - 2x)$

(Hjardar & Pedersen, 2007)

I dette tilfellet var det en negative ukjent ungdomsskoleelevene helst ville unngå å regne med. Samtalen, som er gjengitt under, oppsto etter at de hadde regnet ut likningen og snakket om at x = 2 og 2 = x blir det samme, og om det uttrykket er mer riktig enn den andre. Det kom frem at læreren deres ønsket at de skulle skrive på formen x = 2, noe som ungdomsskoleelevene selv synes ga mest mening. Videre snakket vi om hvorfor de fleste av dem valgte å regne med x på høyre siden, før de på slutten byttet om, slik at x sto på venstre og 2 på høyre siden. Jeg spurte dem hvordan det hadde blitt dersom x var plassert på venstre siden hele tiden. Samtalen videre gikk som følger:

(3.197)	Adrian:	Da hadde vi fått minus ... Da hadde det blitt -5x.
(3.198)	Observatør:	Mm, og på andre siden hadde du fått?
(3.199)	Oliver:	-10 vel?
(3.200)	Sondre:	Ja.
(3.201)	Observatør:	Og da er det vanskeligere?
(3.202)	Adrian:	Ja, for da må du gange det med -1.
(3.203)	Observatør:	Må du det?
(3.204)	Oliver:	Nei, du kan bare… Når du ser sånn som jeg har gjort, så er det -x der og -2 der. Da kan jeg bare bytte på begge to.
(3.205)	Observatør:	Ja, for du har… Ja, du har den på venstre.
(3.206)	Oliver:	Hvis man ganger det med -1 her nede, så blir det jo x = 2.

Oliver var den eneste av ungdomsskoleelevene som regnet med x på venstre side under hele utregningen. De andre regnet store deler av oppgaven med x på høyre side helt til slutten av utregningen. Da speilvendte de den siste linja som avgir svaret for den ukjente, slik at x sto på venstre side og tallet på høyre. På spørsmålet om hva de hadde fått som svar dersom de hadde holdt x på høyre side hele tiden, var Adrian raskt til å svare at man ville fått et negativt tall (ytring (3.197)). Videre sa han det var vanskeligere når det ble negative tall, fordi man da må multiplisere disse tallene med -1 for å få positive tall (ytring (3.202)). Ved å arbeide med x på høyre side først, for så å speilvende uttrykket til slutt (fra 2 = x til x = 2), kunne han unngå negative tall.

I ytring (3.204) ser vi at Oliver mente at man ikke trenger å multiplisere med -1, og finner forklaringen hans på hvordan han løste likningen mot slutten. Han hadde kommet frem til -x = -2, og byttet derfor fortegnet på begge sidene slik at han fikk en positiv x, altså x = 2. Etterpå endret Oliver svaret sitt i ytring (3.206), og sa at han multipliserte med -1 da han byttet fortegnene.

5.1.2 Minustegnets betydninger

Arbeidet til ungdomsskoleelevene ble blant annet karakterisert av minustegnets betydninger, fordi elevene ikke alltid klarte å finne meningen minustegnet har i ulike sammenhenger. Oppgave 4a på oppgaveark 1 er et eksempel på dette.

Utdrag 3 – Misforståelse av oppgaven

4. Lag passende tekst til regnestykkene
   a) -5°C – 7°C
   b) 50 000 kr – 70 000 kr

(Hjardar & Pedersen, 2006)

Elevene laget hver sin tekst til regnestykket og leste høyt for hverandre etterpå. Alle, bortsett fra Sondre, formulerte en løsning der det en morgen var -5° og hvor temperaturen neste morgen sank med 7°. Sondres tekst hadde en dag det var -5° og neste dag var det -7°. Den spurte hvor mye temperaturen da var sunket. Samtalen etter han hadde lest opp dette fortsatte slik:

(1.151)	Adrian:	Jeg tror han har misforstått oppgaven. Det der er et regnestykke, ikke to tall. (peker på arket til Sondre).
(1.152)	Sondre:	Å JA! Jeg trodde det sto minus fem og minus syv. (smiler)
(1.153)	Observatør:	Ja, men det er jo bra tekstoppgave til minus fem og minus syv. Hva gjorde at du tenkte det var to forskjellige tall?
(1.154)	Sondre:	Jeg så bare minus foran fem, og da trodde jeg det var minus for syv også.
(1.155)	Henrik:	Er det ikke det da?
(1.156)	Observatør:	Ja, det er kanskje ikke så lett å se. Men hvis dere ser på de to minustallene i den oppgaven?
(1.157)	Adrian:	Den ene ligger tett ved (viser ved å knipe fingrene sammen).
(1.158)	Sondre:	Ja, jeg så det nå.

Adrians første reaksjon på Sondres tekstoppgave var at Sondre måtte ha misforstått. Han prøvde derfor å forklare at det er et regnestykke som er oppført i oppgaven og ikke to tall hver for seg (ytring (1.151)). Etter forklaringen, og at Sondre ga uttrykk for at han skjønte hvorfor det ikke ble helt riktig, spurte Henrik om ikke det var sånn som Sondre tolket oppgaven i utgangspunktet (ytring (1.155)). På bakgrunn av at Henriks tekst til regnestykket indikerer at han har oppfattet tallene som et regnestykke og ikke to separate tall, kan det virke som han er litt usikker på hvilken betydning minustegnet har i denne oppgaven.

I ytring (1.157) ser vi Adrians forsøk på å forklare forskjellen på de to minustegnene i oppgaven. Han demonstrerte avstanden mellom minustegnene og tallet de sto foran ved å knipe fingrene sammen. Det ene minustegnet foran 5 står nærmere enn det som står foran 7. Videre i samtalen kom elevene fremt til at minustegnet kan være et regnetegn eller et fortegn.

Utdrag 4 – Samtale om fortegn og regnetegn

Problemet med å skille minustegnets betydning dukket også opp senere i studien. Oppgave 1 på oppgaveark 3 var en av disse tilfellene.

1. Regn ut:
$-2\ (x^2 + x - 3) + (x - x^2 + 4)5 + (x^2 - x)\ -2$

(Hjardar & Pedersen, 2007)

Denne oppgaven inneholder mange tegn hvor noen står for en regneoperasjon, mens andre indikerer om tallet er negativt eller ikke. Ungdomsskoleelevene hadde jobbet noe med bokstavuttrykk før, slik at det ikke var helt fremmed for dem. Likevel var det enkelte steder i utregningen de ble litt usikre på hvordan de skulle gå frem. Samtalen etter at elevene hadde jobbet med denne oppgaven hver for seg, begynte med at alle sa hvilken løsning de kom frem til, før Henrik forklarte steg for steg hvordan han hadde løst oppgaven.

(3.26)	Henrik:	Jeg tok -2 og ganget det med $x^{2,}$ så blir det $-2x^2$. -2 ganger x blir -2x. Og så ganget jeg med -3. Det blir 6. Siden det er minus og minus blir pluss, ja altså, når du ganger. Og så femtallet i neste parentes står på den andre siden, så du bare tar det over på venstre, fordi det er lettere. Så 5 gange x er 5x. 5 gange $-x^2$ er $-5x^2$. Og 5 gange 4 er 20, og så er det neste parentes. Da står -2 på høyresiden, så jeg tar den over på venstre. Og så -2 gange x^2 er $-2x^2$, og -2 gange -x er 2x.

(3.27)	Adrian:	Det var det jeg ikke gjorde. Jeg tok bare + x^2 -x og så – 2.
(3.28)	Observatør:	Ja, du glemte å gange ut den siste parentesen.
(3.29)	Adrian:	Nei, det er litt forvirrende når det står -2 for jeg er ikke helt sikker på om det er et fortegn eller ikke.
(3.30)	Observatør:	Ja, om det er et regnetegn eller fortegn?
(3.31)	Adrian:	Ja, men jeg ser hva som er forskjellen.
(3.32)	Observatør:	Men dere andre da, hva var det dere tenkte med den -2 her (peker på oppgaven).
(3.33)	Henrik:	Den siste, -2?
(3.34)	Observatør:	Ja.
(3.35)	Henrik:	Ehm, jeg tenkte at siden jeg hadde flyttet over femtallet på venstresiden av forrige parentes, så står det ikke ingenting der, så da kunne jeg like godt bare bytte ut den plassen med -2. Og ha -2 der.
(3.36)	Oliver:	Den bakerste -2 er minusen mye nærmere enn for eksempel – 2. (legger trykk på ordet minus.)
(3.37)	Adrian:	Mm, jeg så det etter jeg hadde regnet det ut så ...

I Henriks forklaring (ytring (3.26)) ser vi at han valgte å flytte 5 og -2 foran parentesene da han skulle foreta utregningen. Han mente dette ble lettere. I tillegg var ungdomsskoleelevene vant til at oppgavene hvor et tall skal multipliseres med en parentes var satt opp på denne måten. Den siste parentesen som skal multipliseres ut, (x^2-x) -2, skapte noe hodebry. Adrian fjernet denne parentesen og beholdt tallene slik som de sto. Han opplevde det forvirrende at oppgaven var skrevet på denne måten (ytring (3.29)), og noe som gjorde han usikker på om -2 skulle multipliseres med parentesen eller subtraheres.

Da jeg spurte de andre om hvordan de hadde løst den siste parentesen, forklarte Henrik igjen hvordan han hadde byttet over -2 til andre siden av parentesen (ytring (3.35)). Sondre fikk ikke helt til oppgaven, og Oliver forklarte ved å påpeke avstanden mellom minustegnet og tallet (ytring 3.36)). Denne måten å skille mellom fortegn og regnetegn så vi Adrian brukte i utdraget over (utdrag 3). Adrian sa selv at han så dette i denne oppgaven også, men ikke før han allerede hadde regnet ut oppgaven hvor minustegnet i -2 sto for en regneoperasjon (ytring (3.37)).

5.1.3 Flere regneoperasjoner i en oppgave

Flere av oppgavene ungdomsskoleelevene jobber med inneholdt mer enn én regneoperasjon, for eksempel oppgave 4a og 4b på oppgaveark 2 og oppgave 2 på oppgaveark 3. Disse oppgavene krevde at elevene kunne sortere ut deler og regne dem ut hver for seg, for deretter å sette dem sammen slik at de kom frem til den endelige løsningen. Oppgave 3 på oppgaveark 1 inneholdt også en slik oppgave.

Utdrag 5 – Addisjon og subtraksjon i ett regnestykke

3. Et seilfly ble sluppet fri 28 moh. Flyet steg 330 m, sank 75 m, steg 173 m, sank 25 m og sank 38 m.
   Hvor høyt over havet befant flyet seg nå?

(Hjardar & Pedersen, 2006)

Oppgaven oppgir flere tall som står for hvor mange meter flyet stiger og synker i løpet av en periode. Denne informasjonen må sorteres for å kunne løse oppgaven da tallenes stigning står annen hvert med tallene for synking. Både Sondre og Henrik prøvde å sette opp alle tallene i ett regnestykke, men møtte på utfordringer da det ble subtraksjon og addisjon om hverandre.

(1.121)	Observatør:	Men hvorfor funket ikke det tror du?
(1.122)	Henrik:	Fordi når du tar 8 + 0 – 5 + 3 – 5 – 8 så blir det -7, så jeg visste ikke hvordan man skulle løse det. Men jeg tror man må ta plussene sammen og minusene sammen egentlig.
(1.123)	Observatør:	Så du sorterer det først? Er det sånn dere andre gjorde det?
(1.124)	Adrian:	Ja det var sånn jeg gjorde det
(1.125)	Oliver:	Jeg tok bare liksom 28 moh. + 330 så -75. Så jeg tok alt i et.
(1.126)	Observatør:	Så du tok det steg for steg hver operasjon?
(1.127)	Oliver:	Ja.
(1.128)	Observatør:	Hvordan gjorde du det?
(1.129)	Sondre:	Jeg prøvde det samme som Henrik, men da gikk det bare i surr. Så da tok jeg det steg for steg.

I ytring (1.122) ser vi forklaringen til Henrik på hvorfor det ikke funket å sette alle tallene opp under hverandre. Tallene han bruker for å forklare er tallene som står på enerplassen i regnestykket han satt opp. Henrik startet med 8, adderte med 0, subtraherte med 5, adderte med 3, subtraherte med 5 og til slutt subtraherte med 8. Usikkerheten kom da løsningen på enerplassen ble negativt. Da visste han ikke hvordan han skulle gå videre. Sondre prøvde på det samme og kom heller ikke til en endelig løsning på denne måten. Han sa selv han bare gikk i surr, før han startet på nytt og regnet det ut steg for steg (ytring (1.129)). Det ble for mye på en gang med alt i ett. Henrik tok det også steg for steg etterpå og fant rett løsning.

Utdrag 6 – «Overtenking»

I utdrag 4 så vi at oppgave 1 på oppgaveark 3 skapte forvirring rundt minustegnets betydning. Denne oppgaven bød også problemer på grunn av antall operasjoner oppgaven består av.

1. Regn ut:
   $-2\,(x^2 + x - 3) + (x - x^2 + 4)5 + (x^2 - x)\ -2$

(Hjardar & Pedersen, 2007)

Etter at vi hadde snakket om minustegnet som fortegn og regnetegn, var ungdomsskoleelevene enige om at det ville vært lettere å regne ut hver parentes for seg. Samtalen videre fortsatte på følgende måte:

(3.53)	Observatør:	Men det er det at det blir så langt som gjør at det blir litt mye å holde styr på?
(3.54)	Oliver:	Ja.
(3.55)	Observatør:	Men det at det er x^2 her. Har det noe å si på om det blir vanskeligere?
(3.56)	Oliver:	Nei.
(3.57)	Henrik:	Jeg bare fjerner det og slenger det på etterpå siden av og til så tenker jeg sånn. Ja, -2 gange x^2 blir, det er liksom litt sånn ... Siden da blir det så overtenking, men hvis jeg bare fjerner i andre der, så blir det

		lettere å tenke -2 gange x så er det bare -2x. Og så bare legger jeg på den etterpå (peker på eksponenten i potensen x^2).
(3.58)	Oliver:	Ja.
(3.59)	Henrik:	Fordi når det står veldig mye så er det veldig lett å overtenke.
(3.60)	Jeg:	Ja, så det er det å bryte ned hele tiden og gjøre det minst mulig for at det skal bli lettere?
(3.61)	Oliver:	Ja.

Lange regnestykker med mange regneoperasjoner gjorde oppgavene noe utfordrende ifølge ungdomsskoleelevene. Om flere av de ukjente var opphøyd i andre (x^2) var det som gjør oppgaven vanskeligere, kan det se ut som ungdomsskoleelevene hadde ulike meninger om. Oliver syntes ikke dette hadde noen innvirkning på vanskelighetsgraden (ytring (3.56)). Henrik derimot, svarte ikke direkte på dette, men sa han fjernet eksponenten og la den til på slutten (ytring (3.57)). Videre mente han at dette hjalp ham å unngå å overtenke. Det ble fort for mye å holde styr på av informasjon. Når det i oppgaven sto mye informasjon eller flere regneoperasjoner, opplevde han det var fort gjort å begynne å overtenke (ytring (3.59)). Oliver sa seg også enig i at å bryte ned oppgaven i mindre deler gjorde den lettere å håndtere.

5.2 Elevenes bruk av forklaringer

Forklaringene, som ungdomsskoleelevene brukte i studien, er fordelt på ulike forklaringstyper. Disse vil bli presentert i kapittel 5.2.1. Elevene brukte også gestikulering i forklaringene sine, i tillegg til verbal forklaring. I kapittel 5.2.2 vil dette bli utdypet i større grad, samt eksemplifisert. Da ungdomsskoleelevene skulle forklare noe med konkrete eksempler, var det ett eksempel som de stadig vendte tilbake til, nemlig gjeld. Bruk av gjeldeksempler vil bli utdypet i kapittel 5.2.3, før elevenes håndtering av fortegnsregelen blir lagt frem i kapittel 5.2.4.

5.2.1 Forklaringstyper

Ungdomsskoleelevene i denne studien benyttet seg av ulike måter å forklare på. Disse forklaringsmåtene er delt inn i kategorier som er presentert i tabell 4.

Tabell 4: Oversikt over kategorier for forklaringsmåtene elevene brukte

Forklaringsmåte	Utdyping	Eksempel	Totalt antall
Veien om null	Tilfeller som dreier som om differansen mellom et positivt og et negativt tall. Elevene forklarte at man kan addere differansen mellom null og det første tallet med differansen mellom null og det andre tallet.	(1.10) Oliver: Ja. Da går det først ned til null da, og så er det 2 igjen, og da blir det -2.	6
Vise på tallinje	Elevene illustrerte hvordan man kan hoppe opp og ned på tallinja.	(1.84) Adrian: Så der står det jo -470, fordi år 0 er liksom 0 på tallinja. Og da er 470, -470. Så der kan du ta 2005 – (-470). (viser med hendene at man beveger seg på ei tallinje)	4

Praktisk eksempel	Et eksempel fra dagliglivet ble brukt til å forklare	(1.17) Adrian: Nei, hvis du skylder noen 9 kroner så gir du de 4 kroner, så skylder du bare 5 kroner.	5
Endrer på regnestykket	Regnestykket ble endret på ved å ignorere for eksempel et fortegnsminus som settes på i ettertid.	(2.52) Henrik: Jeg setter den der, men den betyr ingenting matematisk, fordi det er bare oppgaven som spør om det. Eller jo, den betyr noe, men jeg bare ignorerer den.	2
Deler opp regnestykket	Et regnestykke som besto av flere ledd ble delt opp og forklart ledd for ledd.	(2.120) Oliver: Da starter jeg der (peker på (-5) (-5)), også -5 gange -5 blir 25. … (2.121) Henrik: Men -4, er ikke det en unødvendig parentes egentlig? Den der? Den trenger vi jo egentlig ikke. (peker på $\frac{16}{(-4)}$) … (2.122) Oliver: Det er fordi det er minus. Og så blir det -4, og så blir det + 6 gange -3. Så blir det -18 gange -2. Så blir det 36. Så blir det 57 til svar.	2
Forklarer med fortegnsregler	Elevene forklarte ved å referere til fortegnsreglene, for eksempel «minus ganger minus gir pluss».	(1.33) Henrik: Fordi du ser liksom 5 +, og så skal det blir 3 og hvis det da står pluss blir det høyere, men det blir noe mindre. Og da må du ha et negativt tall for å gjøre det lavere igjen, siden pluss minus, det blir til minus.	4
Understreker plasseringen av regnetegnet	For å forklare forskjellen på regnetegn og fortegn henviste elevene til plasseringen av disse.	(1.151) Adrian: Jeg tror han har misforstått oppgaven. Det der er et regnestykke, ikke to tall. (peker på arket til Sondre) ... (1.157) Adrian: Den ene ligger tett ved (viser ved å knipe fingrene sammen).	1

Talleksempel	Et rent talleksempel ble gitt for å forklare noe.	(1.22) Henrik: Ja. Det er akkurat som når det er positivt. Hvis du har 2 + 2 så går det fra 2 til 4, så det blir høyere sånn som det altså 2, 3, 4. Men når det er minus tenker samme, at det også blir den veien (peker til høyre) høyere.	1

Som tabellen viser benyttet ungdomsskoleelevene åtte måter å forklare seg på gjennom studien. Av de totalt 25 forklaringene som ble analysert, gikk elevene i seks av dem veien om null. Det var spesielt to typer regnestykker hvor denne måten å forklare på gjentok seg, nemlig regnestykker på formen a – (-b) og c – d hvor d > c. Det første, a – (-b), ble forklart ved at man kan finne avstanden fra a til null og addere dette med avstanden fra null til -b. Dermed vil svaret bli det samme som a + b. Den siste formen, c – d, forklarte ungdomsskoleelevene ved at de subtraherte, slik at løsningen ble null. Deretter trakk de fra den gjenstående mengden av d fra null (c – c = 0, 0 – (d – c)). I begge tilfellene blir nullen et via punkt som de brukte i utregningene.

Forklaringsmåtene vise på tallinje, praktisk eksempel og forklaring med fortegnsregler kommer like bak når det gjelde hyppighet i bruk. Ungdomsskoleelevene illustrerte hvordan et tall endret seg etter forskjellige operasjoner ved at de men hendene hoppet opp og ned på ei tallinje i lufta. Når det gjaldt praktiske eksempler, var dette meste benyttet om gjeld for å skape en sammenheng mellom et regnestykke og virkeligheten. Forklaringer med fortegnsreglene vil si da elevene henviste til disse reglene for å begrunne utregningene sine. Disse tre måtene vil bli utdypet og eksemplifisert senere i kapittel 5.2.2, 5.2.3 og 5.2.4.

Ungdomsskoleelevene endret til tider på regnestykker og delte dem opp både i forklaringene deres og i utregningen. Endringene som ble gjort var for eksempel å fjerne negative fortegn og regne ut regnestykket uten dem, for så å sette dem på til slutt. Elevene kunne ifølge dem selv se om løsningen ble et positivt eller negativt tall ved hjelp av fortegnsreglene før det gjorde utgreningen. Dette var en metode de anvendte på korte regnestykker med én regneoperasjon eller deler av et større regnestykke. I de tilfellene der regnestykkene besto av flere ledd, tok ungdomsskoleelevene for seg ledd for ledd både i utregningen og forklaringen.

De forklaringsmåtene ungdomsskolene brukte minst var understreking av plasseringen av regnetegnet og talleksempel. Som vi ser i tabell 4 ble disse benyttet en gang hver. Understrekingen av plasseringen av regnetegnet ble brukt til å forklare forskjellen på et regnetegn og et fortegn. I oppgavene elevene fikk sto fortegn plassert helt inntil tallet de hørte til, mens regnetegnet hadde større avstand og var litt større i størrelse. Talleksempelet valgte de å benytte for å eksemplifisere retningen man beveger seg på tallinja (høyre eller venstre) og endringen av verdien på tallet (høyere eller lavere) ved addisjon og subtraksjon.

Utdrag 7 – Samtale om foretrukket forklaringsmåte

I løpet av observasjonsøktene snakket vi også om hvilken type forklaring ungdomsskoleelevene foretrakk, med andre ord hvilken type forklaringer som de forsto mest av. Utdraget under er fra den første observasjonsøkta, og vi hadde nettopp snakket om fortegnsregelen i forbindelse med addisjon og subtraksjon. Jeg viste dem et rent talleksempel uten tilknytning til det dagligdagse hvor jeg skrev følgende regnestykker: 3 -2 = 1, 3 – 1 = 2, 3 – 0 = 3, 3 – (-1) = 4 og 3 – (-2) = 5. Formålet med disse regnestykkene var at elevene skulle se et mønster i de forskjellige differansene. Hver gang subtrahenden minker med én øker differansen med én. Adrian kom etterpå med et praktisk eksempel relatert til gjeld. I etterkant av dette spurte jeg om hvilken forklaring de foretrakk av de vi hadde snakket om.

(1.295)	Observatør:	Men for å gi mening ut av det så må man ... Er det mer mening med et rent talleksempel, eller gir det mer mening med et eksempel fra hverdagen?
(1.296)	Adrian:	Jeg synes det gir mer mening sånn (peker på talleksempelet).
(1.297)	Henrik:	Det kommer an på om du skjønner hva det betyr, de tallene i den rekkefølgen. Hvis du aldri har hørt om matte, så vil det vel gi mer mening med noe du kan «relate» til som et hverdagslig problem eller en ting som skjer i hverdagen liksom, og ikke matte.

Adrian var raskt til å si at talleksempelet ga mer mening, til tross for at det var han som kom med det praktiske eksempelet. Henrik var tidligere i samtalen overbevist om at jeg hadde bevist at minus og minus er pluss ved å vise dem talleksempelet. Likevel argumenterte han for at et dagligdags problem vil være lettere å forstå dersom man ikke skjønner hva alle tall og tegn i matematikken står for. I en annen sammenheng uttrykte ungdomsskoleelevene også at oppgaver hvor et regnestykke står oppført uten noen kobling til dagliglivet var å foretrekke kontra en oppgave hvor de måtte sortere ut informasjonen og sette opp regnestykket selv. I enkelte tilfeller forklarte elevene først med en matematisk forklaring for deretter å supplere med et praktisk eksempel.

5.2.2 Gestikulering

I tillegg til verbalt språk brukte også ungdomsskoleelevene kroppsspråket som medierende redskap, i form av gestikulering. Hovedsakelig var det to av de fire ungdomsskoleelevene som tok i bruk gestikulering i forklaringene deres, Henrik og Adrian. En artefakt de også ofte benyttet seg av var tallinja. I utdrag 8 ser vi en sekvens fra den første observasjonen da både Henrik og Adrian benyttet seg av både det verbale språket, gestikulering og tallinja som medierende redskap for å forklare oppgave 1b.

Utdrag 8 – Addisjon på tallinje

1. Fyll inn tallet som mangler i den tomme ruten.
   a) 3 – 5 = ☐ b) -9 + 4 = ☐
   c) 5 + ☐ = 3 d) 5 – ☐ = 8

(Sørmeland, 2014)

(1.12)	Henrik:	-9 + 4
(1.13)	Sondre:	-15
(1.14)	Oliver:	Blir ikke det -5?
(1.15)	Sondre:	Hekkan!
(1.16)	Henrik:	Hvis du har minustall.
(1.17)	Adrian:	Nei, hvis du skylder noen 9 kroner, så gir du de 4 kroner, så skylder du bare 5 kroner.
(1.18)	Henrik:	Men liksom på en annen måte. Hvis du har da -9, og så plusser du på noe, så kan du tenke deg at det blir på en måte nærmere null siden tallet blir nærmere null, altså høyere, altså lenger oppover. Hvis du har ei tallrekke, så kommer det lenger mot høyre siden det er oppover. (Viser med hendene en tallinje og går oppover på denne)
(1.19)	Observatør:	Ja, så du tenker tallrekke?

(1.20)	Henrik:	Jeg tenker ikke tallrekke, jeg bare tenker at det blir høyere. Men tallet vil være annerledes, men det blir fortsatt høyere. Det er vanskelig å forklare.
(1.21)	Observatør:	Ja, men verdien øker når du plusser på noe. Det er sånn du tenker?
(1.22)	Henrik:	Ja. Det er akkurat som når det er positivt. Hvis du har 2 + 2 så går det fra 2 til 4. Så det blir høyere, sånn som det altså 2, 3, 4. Men når det er minus tenker samme, at det også blir den veien (peker til høyre) høyere. (viser flere ganger med hendene at man går oppover på tallinja)
(1.23)	Observatør:	Jeg skjønner hva du mener. Er dere andre enige, eller tenker dere på en annen måte?
(1.24)	Adrian:	Jeg tenker litt på en annen måte. Det er sånn at når det er pluss så går det til høyre på tallinja, og når det er minus, så går det til venstre på tallinja. (Peker til høyre og venstre mens han forklarer)

Sondre var kjapp med å si -15, men idet Oliver stilte spørsmål ved svaret, ga han uttrykk for at han innså feilen. Adrian prøvde først å forklare med et praktisk eksempel om gjeld (ytring (1.17)), før Henrik forklarte ved hjelp av ei tallinje i lufta. Ved addisjon vil tallets verdi stige og dermed bevege seg i retning høyre på ei tallinje. Denne bevegelsen forklarte og illustrerte Henrik ved å vise hvordan tallets verdi stiger med en bevegelse hvor hendene hans hoppet mot høyre på tallinja han så for seg. Selv kalte han ikke dette for ei tallinje eller tallrekke, men han tenkte tallet blir høyere (1.18). Hvert av Henriks hopp i gestikuleringen utgjorde et heltall mot høyre. Senere i samtalen (ytring (1.22)), supplerte han i tillegg med et talleksempel for å understreke tankegangen, mens han fortsatt illustrerte med hendene hvordan man hopper høyere på tallinja.

Forklaringen til Adrian som kom litt senere i samtalen (ytring (1.24)) og inneholdt noe av det samme. Han viste også med hendene hvordan tall øker eller minker i verdi på tallinja når det er snakk om addisjon og subtraksjon. Henrik hadde større fokus på verdien som økte, mens Adrian knyttet regneoperasjoner til hver sin retning på tallinja.

Utdrag 9 – Multiplikasjon på tallinje

I arbeidet med oppgaveark 2 avtar bruken av gestikulering, da jobbet de med multiplikasjon og divisjon. I utdraget under ser vi et eksempel på gestikulering ved multiplikasjon med negativt tall. Her hadde ungdomsskoleelevene nettopp regnet gjennom oppgave 2 hvor en dykker var på 4 meters dyp for deretter å dykke ned tre ganger dypere.

2. En dykker er på 4 meters dyp da han bestemmer seg for å dykke tre ganger så dypt.
   a) På hvilket dyp er dykkeren på nå? Bruk negative tall for antall meter under havoverflaten.
   b) Etter 15 minutter bestemmer dykkeren seg for å halvere dybden. På hvilket dyp er dykkeren nå?

(Tofteberg et al., 2013, s. 42)

Elevene skulle finne ut hvor dypt dykkeren befant seg ved å bruke negative tall for meter under overflaten. Diskusjonen gikk som følger:

(2.28)	Observatør:	Hva kom dere frem til nå?
(2.29)	Sondre:	12.
(2.30)	Adrian:	Med det minuset foran.
(2.31)	Sondre:	Ja, -12 da.

(2.32)	Observatør:	Hvis dere skal gå gjennom hvordan dere tenker her? Her er det jo ganging. Vi har jo bare jobbet med pluss og minus foreløpig.
(2.33)	Adrian:	Det er jo 4 meters dyp, så det er under havet. Da blir det minus. Så når du tar ganger 3, så er det 3 ganger så dypt (viser med hendene hvordan det synker). Så da blir det -12 meter.
(2.34)	Observatør:	Så har du igjen den fortegnsregelen med minus og pluss.
(2.35)	Adrian:	Ja.
(2.36)	Observatør:	Så den gjelder i ganging også?
(2.37)	Adrian:	Ja.

I starten var det litt usikkerhet om det var 12 eller -12, men ettersom oppgaven eksplisitt sier de skal benyttet negative tall som dybdemeter, landet ungdomsskoleelevene på -12. I ytring (2.32) ser vi hvordan Adrian forklarte hvorfor svaret måtte bli -12. I forklaringen anvendte han både språket og gestikulering som medierende redskap. Språket ble brukt ved å utdype oppgaveteksten, og gestikulering ble brukt sammen med artefakten tallinje, slik som både han og Henrik også gjorde i flere andre tilfeller. På samme måte som i utdrag 8 anvendte Adrian også her hendene til å hoppe nedover på tallinja. Han viste at for hver gang han hoppet nedover sank verdien med fire, totalt tre ganger ettersom de arbeidet med multiplikasjon. Tidligere hadde Henrik illustrerte hvordan man hoppet på tallinja ved addisjon, et heltall av gangen.

Gestikulering, som vi har sett eksempler på ovenfor, forsvant i løpet av arbeidet med oppgavearkene. Fra ungdomsskoleelevene begynte på oppgave 4 på oppgaveark 2 og hele oppgaveark 3 var gestikulering helt fraværende. Her jobbet elevene med bokstav- og talluttrykk. Dette omtales videre i neste kapittel.

5.2.3 Gjeld

Da elevene skulle prøve å forklare noe ved å referere til dagligdagse eksempler, var det referanse til gjeld som ble hyppigst tatt i bruk. Samtalen i utdrag 10 oppsto i etterkant av arbeidet med oppgave 4b på oppgaveark 1.

Utdrag 10 – Minus kan sammenlignes med gjeld

4. Lag passende tekst til regnestykkene
   a) -5°C – 7°C
   b) 50 000 kr – 70 000 kr

(Hjardar & Pedersen, 2006, s. 25)

I oppgaven skulle ungdomsskoleelevene lage en passende tekst til et regnestykke. Etter at alle hadde lest opp sitt forslag til tekst, snakket vi om i hvilke situasjoner vi trenger negative tall. Gjeld ble tatt opp som eksempel, og videre diskuterte vi om gjeld er nødt til å skrives som et negativt tall. Diskusjonen fortsatte på denne måten:

(1.214)	Henrik:	Minuset er sikkert der for å vise at vi ikke har de pengene.
(1.215)	Adrian:	Minus betyr… Det vi har, eller det jeg har blitt lært er at minus betyr gjeld ...
(1.216)	Oliver:	At du kan sammenligne med gjeld
(1.217)	Adrian:	Ja, det erstatter for ordet gjeld.
(1.218)	Observatør:	I alle situasjoner?
(1.219)	Adrian:	Nei, men liksom at når det har med penger å gjøre.
(1.220)	Oliver:	At du kan tenke det for å prøve å finne ut av det.

(1.221)	Observatør:	At det er en måte å hjelpe deg å finne ut av det?
(1.222)	Oliver:	(nikker)

I ytring (1.215) kommer det frem at Adrian er blitt lært at en minus foran et tall betyr gjeld. Han assosierte negative tall med gjeld, noe som kom tydelig frem da han gjennom arbeidet med oppgavene flere ganger benyttet seg av gjeld for å forstå og forklare ulike oppgaver, som for eksempel i arbeidet med oppgave 1b og 4b på oppgaveark 1 og oppgave 2b på oppgaveark 2. Videre i samtalen ble det uttrykt av både Adrian og Oliver at selv om det ikke betyr gjeld nødvendigvis, hjelper det elevene å tenke at det omhandler gjeld for å finne frem til en løsning.

Utdrag 11 – Samtale om å dele gjeld

Gjeld ble også brukt som referanse da ungdomsskoleelevene ga forklaringer til hverandre. I utdrag 11 har elevene akkurat jobbet med oppgave 2b på oppgaveark 2.

2. En dykker er på 4 meters dyp da han bestemmer seg for å dykke tre ganger så dypt.
   a) På hvilket dyp er dykkeren på nå? Bruk negative tall for antall meter under havoverflaten.
   b) Etter 15 minutter bestemmer dykkeren seg for å halvere dybden. På hvilket dyp er dykkeren nå?

(Tofteberg et al., 2013, s. 42)

Regnestykket elevene regnet ut i denne oppgaven var -12/2. Henrik sa han bare ignorerte minustegnet og la det til på slutten. Da han skulle forklare hvorfor det måtte bli slik, klarte han ikke helt å formulere en forklaring, og ble usikker.

(2.59)	Henrik:	Helt usikkert. Fordi du deler på noe, du deler på et minustall. Nei, du har et minustall og deler det så blir det vel alltid ... Sikkert ikke, jeg følger ikke med på hva jeg sier.
(2.60)	Adrian:	Hvis du tenker at du skylder noen 6 kroner. Så deler du greia med, for eksempel ... Hvis jeg skylder deg 6 kroner, så deler vi to (peker på Oliver) på å skylde deg, så trenger vi bare 3 kroner. Eller 12 da (peker på oppgaven), tenker jeg.

Adrian prøvde å hjelpe Henrik med å forklare, ved å avgi en forklaring i form av et praktisk eksempel om gjeld. Regnestykket de hadde regnet ut var en divisjon. Adrian beskrev dermed at ei gjeld (et negativt tall) kan deles på for eksempel to personer. Han brukte et annet talleksempel enn det de jobbet med i oppgaven til å begynne med, før han til slutt peker tilbake på oppgaven. I hele forklaringen hans bruker han verken begrepene negative tall, minus eller «miunstall» (som elevene ofte brukte i observasjonsøktene). Tallene Adrian nevnte var alle positive til tross for at han snakker om gjeld som han tidligere har nevnt kan byttes ut med minus. Dermed er også dette et eksempel på et tilfelle hvor ungdomsskoleelevene unngikk å bruke de negative tallene direkte.

5.2.4 Bruk av fortegnsregler

Gjennomgående i hele observasjonene var uttrykket «det er bare sånn». Dette ble brukt når elevene skulle forklare fortegnsreglene de hadde lært og benyttet seg regelmessig av. Fortegnsreglene det dreier seg om er:

- + og + blir +
- + og – blir –
- – og – blir +

Den siste av disse fortegnsreglene, – og – blir +, var bakgrunnen til samtalen i utdrag 12. Ungdomsskoleelevene hadde nettopp brukt denne regelen til å forklare hvorfor 5 – (-3) og 5 + 3 vil gi den samme løsningen.

Utdrag 12 – Samtale om hvorfor minus og minus blir pluss

(1.54)	Observatør:	Men hvorfor gjør det det?
(1.55)	Adrian:	Jeg vet ikke helt.
(1.56)	Henrik:	Jeg tror det bare er en regel. Du kan jo bevise det, men altså, lage en setning ut av det. Men jeg vet ikke hvordan man skal gjøre det nå, for å si det sånn. Akkurat som mamma sier av og til, at hun synes bare det er tull. At med matte, at bare noen har funnet på noe, at de bare har sagt at det er sånn. Men hun gjør det bare for tull da, sånn at vi skal bare begynne å diskutere med henne og bli sure på henne. Siden det gir jo ingen mening siden vi kan jo bevise det, at for eksempel ganging er riktig med telling. Men hun vil bare ikke ta det til seg.
(1.57)	Observatør:	Men det er hvert fall en regel som dere har hørt uten å helt vite begrunnelsen på det?
(1.58)	Alle nikker og sier ja.	
(1.59)	Henrik:	Det er bare en sånn huske ting.
(1.60)	Observatør:	Men dere har blitt vist eksempler på det, stemmer det?
(1.61)	Oliver:	Ja, hun har liksom kommet med sånn derre regnestykker hvor det har blitt brukt liksom.
(1.62)	Henrik:	Vi har ikke blitt bevist det, vi har bare huska det. Og så vet jeg at det blir riktig siden noen har sagt det til oss. Føler jeg da.
(1.63)	Observatør:	Så det er bare en regel som sitter?
(1.64)	Alle:	Ja.

Da ungdomsskoleelevene fikk spørsmålet om hvorfor det må være slik at – og – blir +, er det tydelig at de var litt usikre i starten. De sa jeg vet ikke og jeg tror. I ytring (1.56) ser vi at Henrik prøvde seg på en forklaring ved å si at dette bare er en regel. Han var også inne på at det er mulig å bevise at det må være slik, men han visste ikke hvordan. Moren til Henrik har ifølge ham sagt at det kan virke som om noen bare har funnet på ting i matematikken, fordi det bare er sånn. Selv om dette tilsynelatende var sagt for å få i gang en diskusjon, vil nok utsagnet kunne stemme med manges oppfattelse, særlig dersom de har opplevd matematikkfaget som mye pugging og forklaringer de ikke har forståelse av, men bare har forholdt seg til som regler. Henrik var derimot uenig i at faget bare er «funnet på» og nevnte blant annet at for eksempel ganging kan bevises.

Videre i ytring (1.59) blir regelen beskrevet som en huske ting. Ungdomsskoleelevene sa flere ganger i løpet av observasjonsøktene at dette bare var en regel man må huske. I klassen hadde de, ifølge Oliver (ytring (1.61)), blitt vist tilfeller hvor disse reglene ble brukt, men ikke fått noe konkret bevis. Reglene kunne ungdomsskoleelevene godt og sa selv at det bare var noe de husket. I ytring (1.62) ser vi Henriks begrunnelse for hvorfor han visste det var riktig, nemlig fordi noen hadde sagt det til dem tidligere.

Utdrag 13 – Samtale om fortegnsregler

I slutten av den siste observasjonsøkta ønsket ungdomsskoleelevene at jeg skulle vise dem talleksempelet jeg tidligere hadde vist dem som kan begrunne hvorfor minus og minus blir pluss. Denne gangen ville de ha et eksempel med multiplikasjon, da det forrige var subtraksjon. Samtalen gikk som følger:

(3.332) Observatør: Hvis du da begynner med (-3) · 1, (-3) · 0, (-3) · (-1). Her vil du da få -3 (peker på (-3) · 1). (-3) · 0 er 0. Ser dere, her øker vi med tre. Fra -3 til 0 så er det tre. Så da må neste være en positiv 3. Ser dere det, hele tiden endres det med tre? Det plusses på tre hver gang.

(3.333) Henrik: Tøft.

(3.334) Observatør: Så det er på bakgrunn av det mønsteret at vi sier at minus og minus er nødt til å bli pluss.

(3.335) Henrik: Ja.

(3.336) Observatør: Men når jeg viste dere denne sist, så var enkelte av dere overbevist om at jeg hadde bevist det. Det er jo ikke et direkte bevis, men holder det å legge det frem sånn?

(3.337) Sondre og Adrian: Ja.

(3.338) Observatør: Er dere fornøyd med det? Eller trenger dere noe mer bevis på det?

(3.339) Sondre og Adrian: Nei.

(3.340) Observatør: Føler dere at på ungdomsskolen på det nivået dere er så holder det med det?

(3.341) Oliver: Ja, det er greit nok hvis noen sier det.

(3.342) Observatør: Ja, så de fleste vil bare si at det går greit når en bare har en regel som noen sier at den må dere bare pugge for sånn er det?

(3.343) Sondre og Henrik: Ja.

Samtidig som jeg skrev ned disse regnestykkene, viste jeg dem også mønsteret i produktene og påpekte at produktet økte med tre hver gang (ytring (3.332)). Ungdomsskoleelevene virket fornøyd med dette som en forklaring på regelen minus og minus gir pluss. Dette til tross for at forklaringen jeg ga dem mer var et talleksempel som angir et mønster, enn et bevis. Imidlertid kan dette vise elevene logikken i mønsteret. Tidligere i studien var de overbevist om at dette var et bevis på regelen (ytring (3.336)). Derfor ville jeg å spørre ungdomsskoleelevene om de opplevde forklaringen/eksempelet som tilstrekkelig å vise slik at de kunne forstå mer av regelen, eller om de trengte ytterligere bevis. Alle fire var klare på at dette var nok, og Oliver sa også at bare noen sier det så er det tilstrekkelig (ytring (3.340)).

6 Diskusjon

Denne studien har som mål å gi svar på følgende to forskningsspørsmål: «Hva karakteriserer fire elever på 8. trinn og deres arbeid med oppgaver om negative tall?» og «På hvilke måter forklarer fire elever på 8. trinn sin fremgangsmåte i arbeid med oppgaver om negative tall?» I dette kapittelet vil jeg se på teorien og resultatene i analysene og prøve å finne noen likheter. Eventuelle likheter vil være med å støtte opp om studiens validitet. Analysene viser at ungdomsskoleelevenes arbeid er karakterisert ved at de unngikk å bruke negative tall, minustegnets betydninger var ikke alltid like lett å skille mellom og flere regneoperasjoner i en oppgave gjorde elevene forvirret. Disse kategoriene vil bli diskutert i lys av teorien i kapittel 6.1. Analysene avdekker også at ungdomsskoleelever benyttet åtte forskjellige forklaringsmåter. I forklaringene tok de ofte i bruk ei tenkt tallinje ved hjelp av gestikulering, kom med konkrete eksempler om gjeld og begrunnet forklaringer med fortegnsregler. Dette vil bli diskutert i kapittel 6.2. Som tidligere nevnt i kapittel 3.4 var i tillegg gestikulering, bruk av gjeld som eksempel og fortegnsregler også med på å karakterisere ungdomsskoleelevenes arbeid med negative tall. Dette diskuteres sammen med de ulike forklaringsmåtene, ettersom elevene benyttet seg av dem da de skulle forklare fremgangsmåtene sine. I kapittel 6.3 konkluderes diskusjonen og forskningsspørsmålene blir besvart. Videre forskning blir presentert i det siste kapittelet (kapittel 6.4).

6.1 Karakterisering av arbeid med negative tall

I arbeidet med oppgaver om negative tall så vi at ungdomsskoleelevene unngikk å bruke negative tall i utregningene sine dersom det var en mulighet for det (kapittel 5.1.1). Elevene forklarte dette selv med at de hadde gjort det på denne måten lengre, altså regne med positive tall. Dermed falt dette mer naturlig for dem. Det har blitt en vane. Ved å unngå de negative tallene slapp de også unna utfordringene regning med negative tall kan by på. Utfordringen med å skille mellom mengde og retning (Altiparmak & Özdoğan, 2010) kan unngås i enkelte tilfeller, som for eksempel slik ungdomsskoleelevene gjorde i oppgave 2a på oppgaveark 1. Elevene gikk veien om null, med andre ord adderte de absoluttverdien til tallene for å finne differansen mellom dem.

Ifølge læreplanmålene i matematikk skal elevene kunne regne med negative tall etter 7. årstrinn (Utdanningsforbundet, 2013). Ungdomsskoleelevene i denne studien gikk på 8.trinn. Dermed kan det være grunn til å tro at elevene ikke var like sikre på bruken av negative tall som på de positive. Det kan også tenkes at negative tall ble betraktet som vanskeligere. Ser vi på den historiske utviklingen, tok det lang tid før matematikere, spesielt i Europa, anerkjente negative tall og begynte å bruke dem. Dette til tross for at kinesere, indere og arabere hadde anvendt negative tall i århundrer (Holme, 2001; Ifrah, 1997a, b). Europeerne så ikke behovet for negative tall i sin matematikk eller avviste at de eksisterte. De negative tallene møtte mye motstand (Cooke, 2005; Holme, 2004). I likhet med ungdomsskoleelevene i studien, brukte de positive tall så lenge det var mulig.

Ungdomsskoleelevene, med unntak av Oliver, prøvde å unngå å få negativ variabel i arbeid med likninger, fordi de mente det ble vanskeligere da. For å unngå dette byttet elevene mellom å ha variabelen x på venstre og høyre side av likhetstegnet. Elevene i studien til Vlassis (2002) synes også det var mer utfordrende å løse likninger med negative størrelser. Negative tall viser seg å være noe mange synes er vanskelig.

I dagligtale er det den dag i dag få tilfeller der vi benytter oss av negative tall. Vi uttrykker oss gjerne på en alternativ måte. Dersom en person har gjeld til noen, oppgir man gjeldssummen som et positivt tall. Med andre ord sier man at gjelda er en sum man skylder. Når det er snakk om temperatur, kan man for eksempel høre folk si at det er to kuldegrader ute, istedenfor minus to grader ute. Ved å se på historien finner vi eksempler på matematikere som ikke ville godta negative tall, og i dagliglivet unngår vi ofte å bruke negative tall. Da er det kanskje ikke så rart at også ungdomsskoleelever unngår negative tall dersom det er mulig.

At minustegnet kan ha ulike betydninger, kan være en bidragsyter til at mange elever synes negative tall kan være utfordrende (Altiparmak & Özdoğan, 2010). Tilfellene hvor det var usikkerhet rundt minustegnets betydning i denne studien, var når ungdomsskoleelevene var i tvil om tegnet sto for en regneoperasjon eller om det var et fortegn. Det vil si skillet mellom ensartet og binær betydning (Kilhamn, 2011; Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004, 2008). I oppgaven der elevene skulle lage en passende tekst til to regnestykker, dukket denne tvilen opp på regnestykket om temperatur: -5° – 7°. Sondre tolket begge minustegnene til å være ensartet, mens de andre tolket det første til å være ensartet og det andre binært.

Da elevene jobbet med oppgave 1 på oppgaveark 3, var de også litt uenige om hvilken betydning det siste minustegnet hadde i det siste leddet av oppgaven: $(x^2 – x)$ -2. Adrian regnet som om det var binært, mens andre regnet som om det var ensartet. Adrian hadde ikke noe problem med å forklare forskjellen, og i likhet med Sondre på den tidligere nevnte oppgaven, så han feilen han hadde gjort. Det kan se ut som at det er lettere for ungdomsskoleelevene å skille mellom betydningene til minustegnet i teorien enn i praksis når de jobber med spesifikke oppgaver. I Vlassis (2008) møtte også elevene på lignende utfordringer i arbeid med likninger. De støtte på utfordringer når negative tall var involvert i likningene, blant annet fordi de blandet betydningene av minustegnet (Vlassis, 2008).

Oppgaver som inneholdt mange tall som skulle behandles på ulike måter, viste seg å være utfordrende for ungdomsskoleelevene. For å prøve å sortere informasjonen delte de opp oppgavene og behandlet hver del for seg. Da mente elevene det ble enklere for dem. I tilfeller hvor ungdomsskoleelevene ikke delte opp oppgaven, var det utfordringer som minustegnets betydning som dukket opp. I møte med noe som er vanskelig kan det være lett å miste oversikten, spesielt dersom det kommer mye vanskelig samtidig. Elevene fikk ikke helt oversikten over disse oppgavene, og som Henrik sa, det var lett å overtenke. Det kan tenkes at han med dette mente at man fort antar at fremgangsmåten må være avansert siden regnestykke ser avansert ut. Ved å ta for seg del for del, ble det lettere å se en enklere fremgangsmåte.

6.2 Elevenes bruk av forklaringer

Forklaringsmåtene ungdomsskoleelevene brukte er delt inn i de ulike forklaringstypene som ble beskrevet i kapittel 2.3. I tabell 5 er denne inndelingen presentert.

Tabell 5: Inndeling av forklaringstyper brukt i studien

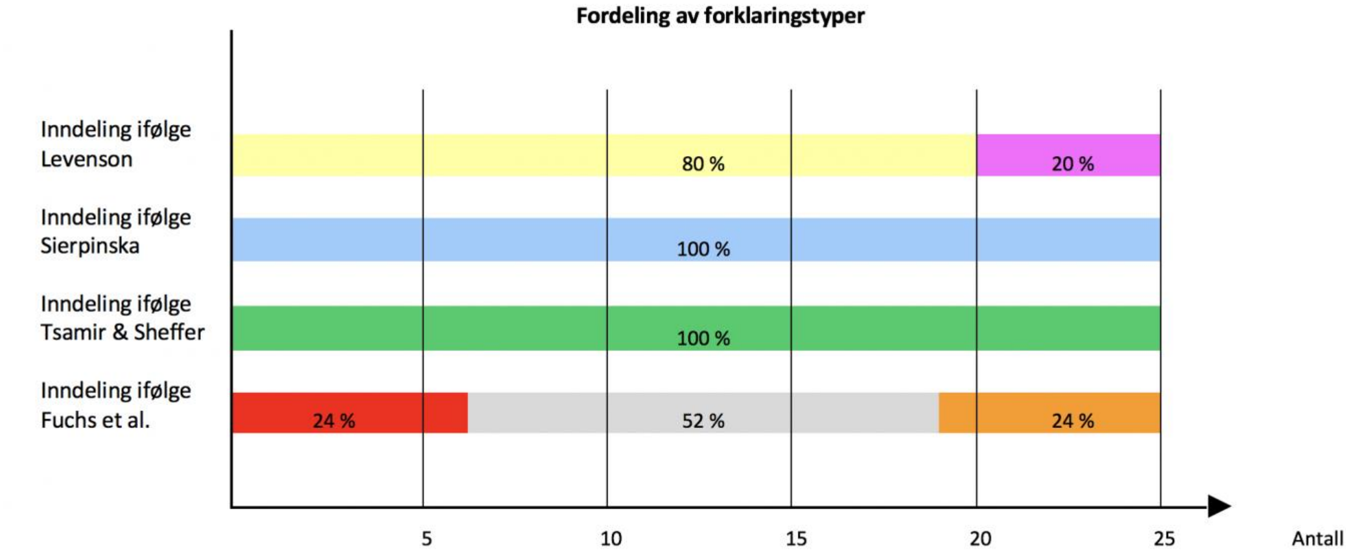
Forklarings-typer / Forklarings-måter	MB/PB	Vitenskapelig/ didaktisk	Formelle/ kontrete	Primær prosedyriske/ kombinasjon/ primære begrepsforklaringer
Veien om null	MB	Didaktisk	Konkrete	Primære begrepsforklaring
Vise på tallinje	MB	Didaktisk	Konkrete	Primær prosedyriske
Praktisk eksempel	PB	Didaktisk	Konkrete	Kombinasjon
Endrer på regnestykket	MB	Didaktisk	Konkrete	Primær prosedyriske
Deler opp regnestykket	MB	Didaktisk	Konkrete	Kombinasjon
Forklarer med fortegnsregler	MB	Didaktisk	Konkrete	Kombinasjon
Understreker plassering av regnetegn	MB	Didaktisk	Konkrete	Kombinasjon
Talleksempel	MB	Didaktisk	Konkrete	Kombinasjon

Analysen viser at ingen av forklaringene ungdomsskoleelevene brukte kunne betraktes som vitenskapelige eller formelle (Sierpinska, 1994; Tsamir & Sheffer, 2000). I forklaringene deres benyttet ungdomsskoleelevene et dagligdags språk, noe som ikke passer for disse to typene. Elevene bygget på tidligere kunnskap og kom med praktiske eksempler innimellom. Disse faktorene gjør at alle forklaringene de anvendte kan kategoriseres som konkrete og didaktiske (Sierpinska, 1994; Tsamir & Sheffer, 2000). Litt mer nyansert er det med tanke på MB- og PB-forklaringer (Levenson, 2010, 2013), primær prosedyriske forklaringer, kombinasjon av primær prosedyriske og begrepsforklaringer og primære begrepsforklaringer (Fuchs et al., 1996). r

Ser vi på forklaringstypene MB- og PB-forklaringer (Levenson, 2010, 2013), er de fleste forklaringene ungdomsskoleelevene ga i studien kategorisert som MB-forklaringer. Nettopp fordi elevene hele tiden brukte kunnskap de hadde fra før av, og bygget videre på denne, passer forklaringene deres under denne kategorien. Dermed er den eneste forklaringsmåten som betraktes som en PB-forklaring, tilfeller hvor ungdomsskoleelevene henviser til et praktisk eksempel fra dagliglivet. Dette funnet gjorde også Levenson (2010) i sin studie der de fleste elevene forklarte med MB-forklaringer.

«Veien om null» er den eneste forklaringsmåten som kan kategoriseres under primære begrepsforklaringer. Ved å benytte denne måten, forklarte ungdomsskoleelevene det underliggende konseptet bak $a – (-b) = a + b$. Primær prosedyriske forklaringstyper innebærer blant annet bruk av artefakter, og i arbeidet med negative tall viste det seg at tallinja ble flittig brukt for å forklare ulike oppgaver. Dermed blir det å «vise på tallinje» kategorisert som primær prosedyrisk (Fuchs et al., 1996). Det samme gjør «endrer på oppgaven». Endringene ungdomsskoleelevene gjorde på oppgavene var for eksempel å fjerne eksponenten i x^2 eller fortegnsminus for så å sette dem på igjen til slutt. Dette kan være en grei måte å forenkle oppgaven på hvis man er observant på at utregningen uten disse ikke påvirker den endelige løsningen. Det blir uansett ikke en helt matematisk riktig oppsetting av oppgaven, og derfor havner den under forklaringstypen primære prosedyriske forklaringer (Fuchs et al., 1996). De resterende forklaringsmåtene ungdomsskoleelevene benyttet seg av, havner alle i kategorien som er en kombinasjon av prosedyriske forklaringer og begrepsforklaringer (Fuchs et al., 1996). Elevene viser til praktiske eksempler, de omformulerer oppgaven for å påpeke plassering av fortegn og deler opp oppgaven i mindre deler for å gjøre det lettere overkommelig.

Diagrammet i figur 3 gir en oversikt over hyppigheten av de ulike forklaringstypene som ble analysert. Prosentandelen og antall forklaringer er illustrert i diagrammet.



Figur 3: Prosentvis fordeling av de ulike forklaringstypene. Antall forklaringer på førsteaksen.

Fremstillingen til venstre viser hvilke farger som representerer de ulike forklaringstypene i figur 3. Inndeling 1 viser fordelingen av matematisk baserte og praktisk baserte forklaringer (Levenson, 2010, 2013), hvor det var 20 MB-forklaringer og 5 PB-forklaringer. Inndeling 2 tar for seg didaktiske og vitenskapelige forklaringer (Sierpinska, 1994), og inndeling 3 viser konkrete og formelle forklaringer (Tsamir & Sheffer, 2000). Den siste inndelingen, inndeling 4, forteller oss at 6 av forklaringene var primær prosedyriske, 13 var en kombinasjon av prosedyriske og begrepsforklaringer og 6 var begrepsforklaringer (Fuchs et al., 1996). Av de totalt 25 forklaringene som var grunnlaget i analysen, ser vi tydelig at de dominerende forklaringstypene er matematisk baserte forklaringer med 80 %, didaktiske forklaringer med 100 %, konkrete forklaringer også med 100 % og en kombinasjon av prosedyriske og begrepsforklaringer med 52 %.

I figur 3 kommer det tydelig frem at forklaringstypene formelle og vitenskapelige forklaringer ikke var representert i ungdomsskoleelevenes forklaringer av fremgangsmåtene deres i arbeid med oppgaver om negative tall. Det kan tenkes at disse forklaringstypene kommer mer naturlig etter at man har jobbet med matematikk på et høyere nivå enn ungdomsskolepensum. Basert på denne antakelsen vil det være for mye å forvente at elever på 8. trinn benytter seg av disse, ettersom det kan bli for matematisk avansert for dem. Årsaken til elevene ikke anvendte formelle og vitenskapelige forklaringsmåter kan være at de ikke har hatt fokus på dette i matematikkundervisningen. Eventuelt har de ikke kommet så langt i opplæringsprosessen om negative tall til at de er i stand til å uttrykke tenkingen sin med et formelt matematisk språk. Forskning utført på videregående elever viser at elevene jevnt over foretrakk de konkrete forklaringene fremfor de formelle. Likevel var det enkelte oppgaver hvor formell forklaring ble foretrukket i like stor grad som den konkrete (Tsamir & Sheffer, 2000). På videregående nivå kan det dermed se ut som formelle forklaringer er mer brukt, selv om de likevel foretrekker de konkrete. Dette kan være en indiksjon på at ungdomsskoleelevene kanskje vil bli mer vant til og dermed bruke mer formelle og vitenskapelige forklaringer om noen år.

I utdrag 7 snakket jeg med ungdomsskoleelevene om hvilken forklaringsmåte de foretrakk, et talleksempel eller et praktisk eksempel. I samtalen kom det frem at de foretrakk et talleksempel, men likevel argumenterte for at et praktisk eksempel vil være lettere å forstå om man ikke har den matematiske kunnskapen som må ligge til grunn for å kunne forstå et talleksempel. Det som er interessant er at selv om ungdomsskoleelevene oftest brukte MB-forklaringer, supplerte de med PB-forklaringer innimellom. Dette gjorde også Sharon i Levenson (2013) sin studie. Hun brukte de samme forklaringstypene på de ulike matematiske emnene som hun hadde gjort ved tidligere anledninger, og la i noen tilfeller til et dagligdags eksempel når hun avga en MB-forklaring (Levenson, 2013). Ved å legge til et praktisk eksempel i tillegg til en matematisk forklaring avgir man mer enn en forklaring, og det kan dermed tenkes elevene sikrer seg at samtalepartneren forstår det de skal forklare. Et praktisk eksempel kan med andre ord sikre forståelse uavhengig av hva de har av bakgrunnskunnskap innen matematikken. Som Henrik selv sa i ytring (1.298): "for dem som aldri har hørt om matte vil det gi mer mening med noe som kan relateres til hverdagen". Den indiske matematikeren Brahmagupta gjorde noe tilsvarende da han på 600-tallet e. Kr. Brukte eiendeler og gjeldbyrder for å forklare positive og negative størrelser (Ifrah, 1997a). Eksempler som man kan relatere til har altså blitt brukt i matematikken i lang tid.

Studien til Fuchs et al. (1996) viste at faglig sterke elever behersket prosedyriske forklaringer og begrepsforklaringer bedre enn middels sterke elever. Som vi har sett brukte ungdomsskoleelevene i min studie en variasjon av primære prosedyriske forklaringer, kombinasjon av prosedyriske og begrepsforklaringer og primær begrepsforklaringer (Fuchs et al., 1996). Dette kan ha sammenheng med at ungdomsskoleelevene som ble valgt ut til å delta i min studie, var regnet som faglig sterke i matematikk.

Språket er et av de viktigste redskapene man kan bruke til å mediere kunnskap (Säljö, 2003). Gjennom hele studien benyttet ungdomsskoleelevene seg av språket som et medierende redskap. Ved å sitte i ei gruppe hjalp elevene hverandre både mens de regnet oppgavene og da de forklarte etterpå. Elevene brukte hovedsakelig språkets utpekende funksjon og språkets semiotiske funksjon (Säljö, 2003). Den ene funksjonen utpeker eller beskriver noe, mens den andre beskriver meningene bak et ord eller uttrykk. Gjennomgående i hele studien pekte ungdomsskoleelevene på det de skulle forklare fysisk eller beskrev det verbalt. De diskuterte også hva som ligger i uttrykk og regler som for eksempel fortegnsreglene. Elevene prøvde for eksempel å overbevise seg selv og hverandre om at minus multiplisert med minus blir pluss.

Tallinje er en artefakt som ble mye benytte i forbindelse med gestikulering i et par av ungdomsskoleelevenes forklaringer. Gestikuleringen fungerte som et tillegg til den verbale forklaringen, og bevegelsene på tallinja ble fremhevet av disse bevegelsene (Radford, 2002). Forklaringene hvor dette brukt var også lettere å henge med på, og ungdomsskoleelevenes innlevelse understreket poenget i forklaringene (Radford, 2003). De brukte gestikulering ofte i starten av studien, men hyppigheten avtok og ble til slutt fraværende. I den siste observasjonsøkta var det ingen gestikulering i det hele tatt. Oppgavene ungdomsskoleelevene jobbet med da var mer abstrakte enn oppgavene de jobbet med tidligere. I observasjonsøkt 3 jobbet elevene mer med multiplikasjon og divisjon enn tidligere, og innenfor det matematiske emnet algebra. Abstrakte oppgaver kan virke vanskeligere å forestille seg. Dermed blir det også mer utfordrende å gestikulere og bruke artefakter. Som vi har sett tidligere, ifølge en studie av Vlassis (2002), utfordrer negative tall tankegangen nettopp fordi de er så abstrakte.

Tidligere har vi sett at Brahmagupta, indisk astronom og matematiker, utformet regler for null, positive og negative størrelser for omtrent 1400 år siden. I disse reglene ble positive størrelser kalt eiendeler og negative størrelser ble kalt gjeld (Ifrah, 1997a; Katz, 2004; Rogers, 2011). Dette var begrep som folk flest antakelig kjente til, og det kan dermed tenkes at det var lettere for dem å forstå det. I ytring (1.215) sa Adrian han hadde lært at minus betyr gjeld. Han og de andre ungdomsskoleelevene brukte også gjeld som eksempel flere ganger i løpet av studien. Elevene kjente til begrepene gjeld og eiendel fra dagliglivet, og derfor kan det være enklere for dem å forstå negative tall ved å bruke disse eksemplene. Man må derfor kunne anta at ungdomsskoleelevene hadde fått forklaringer av negative tall med henvisning til gjeld, og nå brukte samme forklaring selv. Kanskje kan denne måten å eksemplifisere negative tall på har gått i arv i generasjoner minst siden Brahmaguptas tid?

Brahmaguptas elleve regler var formert som et vers. En av fordelene med dette var at reglene ble lettere å huske og resitere (Ifrah, 1997a). Kanskje mente han folk ville ha vansker med å forstå dem og derfor måtte pugge dem? I så fall stemmer det godt med slik mange elever kanskje oppfatter fortegnsreglene i dag. Henrik sa selv i ytring (1.59) at fortegnsreglene bare er en «husketing».

Flere kan kanskje se på matematikk som noe litt uforståelig på bakgrunn av regler som bare må pugges og påstander om at det bare er sånn. Dette kan bidra til å skape distanse til faget og hindre forståelsen. Ungdomsskoleelevene i denne studien virket å ha godtatt at dette er en regel som stemmer, til tross for at de ikke hadde fått noe tilstrekkelig bevis. Da elevene ble vist et eksempel, var de overbevist om at dette var bevis nok (jfr. kapittel 5.2.4 utdrag 13). Dermed kan man undre seg over om det kanskje holder å vise ungdomsskoleelever et eksempel på fortegnsreglene, slik at de ser mønsteret. Selv sa elevene at som ungdomsskoleelever holder dette eksempelet. De var også overbevist om at regelen stemte før dette ble vist til dem på bakgrunn av at en lærer hadde sagt det. Tilliten elevene viste til lærere var dermed stor, og de ga uttrykk for at så lenge noen har sagt at det er sånn så stemmer det.

Cornwell (2004) skriver om tre trekk som kan brukes til å teste forståelsen. En av disse er gapet mellom kunnskap og forståelse. Fortegnsreglene kunne ungdomsskoleelevene godt når de ble spurt om dem, og i mange tilfeller benyttet de seg også av dem på en korrekt måte. Likevel var det å forklare hvorfor de stemmer ikke like lett. Kunnskapen hadde ungdomsskoleelevene, men forståelsen var kanskje ikke helt på plass når det gjaldt disse fortegnsreglene. Uansett var elevene fornøyd med det de har fått av forklaringer i form av eksempler, både talleksemplet og praktiske eksempler med tilknytning til dagliglivet.

6.3 Konklusjon

Gjennom arbeidet med denne studien er det kommet frem at det som kategoriserer ungdomsskoleelevenes arbeid med negative tall er at de unngikk å bruke dem dersom det var mulig. Studien viser også at det til tider var utfordrende for elevene å skille mellom minustegnets betydninger, og at oppgaver med mange regneoperasjoner fort ble forvirrende om ikke ungdomsskoleelevene delte dem opp i mindre deler. Å bruke gjeld som praktisk eksempel, gestikulere som et tillegg til forklaringer og bruk av fortegnsregler, er også med på å karakterisere ungdomsskoleelevenes arbeid i utregninger og begrunnelser. I tillegg var det noe de brukte for å forklare. Dette karakteriserer både det elevene gjorde, men også hvordan de forklarte.

Som vi har sett i tabell 5, brukte ungdomsskoleelevene åtte ulike forklaringsmåter. Elevene benyttet forklaringer som ikke var veldig avanserte, men heller ikke veldig forenklet, noe som kan ha sammenheng med hvor de befant seg i utdanningsløpet. Dette var vel og merke ungdomsskoleelever som hadde høy måloppnåelse i faget. Vi har sett at elevene syntes et talleksempel ga mer mening enn et praktisk eksempel, til tross for at de selv forklarte med et praktisk eksempel i dette tilfelle. En del av det ungdomsskoleelevene forklarte gjorde de muligens fordi de hadde lært å forklare det slik, ikke nødvendigvis fordi det var den beste måten for dem å forstå det på. Det kan hende andre forklaringsmåter hadde vært bedre for elevene, men fordi de ikke hadde erfaring med så mange ulike varianter, hadde de ikke forutsetninger for å trekke frem andre måter som mer hensiktsmessige. Forståelsen av negative tall har hatt vansker med å vinne frem opp gjennom historien. Kanskje er det derfor heller ikke til å undre seg over at elever i dagens grunnskole har utfordringer med oppgaver som innebefatter negative tall, og særlig med å forklare logikken og reglene for disse.

6.4 Videre forskning

Som vi har sett kan utfordringene ungdomsskoleelevene i denne studien møtte på, og det som karakteriserer arbeidet deres med negative tall, finnes igjen i den historiske utviklingen av negative tall. Kilhamn (2011) erfarte også dette i sin studie hvor hun fulgte elever i tre år, fra 6. – 9. klasse. I hennes studie viste det seg i tillegg at elever med høyt utviklet tallforståelse opplevde færre utfordringer enn elever med lavt utviklet tallforståelse. På bakgrunn av dette stiller hun spørsmål om elever burde få opplæring i negative tall tidligere enn når de innføres i dag (Kilhamn, 2011). Manchester (2011) er også inne på dette i sin studie. Ifølge hennes studie har barn helt ned til 4-årsalderen en intuisjon og innsikt i negative tall. Ungdomsskoleelevene i min studie begrunnet blant annet en unngåelse av negative tall med at de var mer vant til å regne med addisjon dersom de kunne det istedenfor å bruke subtraksjon (utdrag 1). En tidligere start med negative tall kunne muligens resultert i at elevene ble mer vant å regne med dem og anså også dette som en vane.

7 Pedagogiske implikasjoner

Som vi så i diskusjonen er det flere som tar til orde for at man bør vurdere å starte tidligere med å introdusere barn for negative tall. For at elevene skal bli vant til og komfortable med å anvende negative tall, bør oppdragere og pedagoger muligens være mer bevisst på å bruke minus som begrep både i underholdene og lærende aktiviteter. Vil barn ha større forutsetning for å anvende og forstå negative tall i matematikk på et senere tidspunkt dersom de i tidlig alder hører voksne bruke dem i dagligtale og selv møter dem i lek? Dette hadde vært interessant å forske videre på.

For matematikklærere kan funnene i denne studien bidra med informasjon om utfordringer elever sannsynligvis vil støte på i arbeid med negative tall. Man kan riktignok ikke hevde at funnene i denne studien gjelder for alle elever på 8. trinn, men det er likevel et lite innblikk i hvordan noen av elevene arbeider med negative tall. Ungdomsskoleelevene i studien oppfattet fremgangsmåtene sine som en vane. Dersom en antar at dette gjelder flere elever i skolen, vil det være rimelig å anta at et større fokus på forskjellige fremgangsmåter i matematikkundervisningen hjelpe til å velge ulike innfallsvinkler for å løse oppgavene. De får dermed et større utvalg i sin verktøykasse som kan benyttes i arbeidet med dette emnet. Samtidig vil det kreve oppgaver der det legges til rette for bruk av flere fremgangsmåter.

Elever kan heller ikke uttale seg om eller anvende noe de ikke har hørt om før. Dersom elevene er vant med en måte å forklare på, og ikke blir fortalt eller vist andre forklaringsmåter, vil de bruke den ene måten de kan og kjenner til. Å variere forklaringsmåter i matematikkundervisningen kan derfor være viktig, samtidig som man da mest sannsynlig vil treffe flere elever slik at flere forstår det som blir forklart. På samme tid viser studien at elever kan få til mye selv om de ikke forstår det de gjør, så lenge de har noen gode regler å forholde seg til. Ungdomsskoleelevene løste oppgaver på teknikk. Oppgaver som i utgangspunktet kunne se vanskelige ut, fikk flere av dem til hvis de har en måte å forenkle det på eller noen regler å anvende, selv om de ikke nødvendigvis skjønte det. Det ser dermed ut som at elever kan komme et stykke med teknikk på dette nivået.

Fortegnsreglene som jevnlig blir nevnt i studien er noe alle elever på 8.trinn skal ha hatt undervisning om. Ungdomsskoleelevene i studien mente det holdt for dem at en lærer hadde sagt at disse reglene stemmer. Da førte de i utgangspunktet ikke behov for noe bevis. Tilliten disse ungdomsskoleelevene viste til lærere generelt er noe det er verdt å tenke over. Det er bra at elevene stoler på sine lærere. Imidlertid bør man som lærer også være bevisst på og etterstrebe at elevene lærer seg å være litt kritiske og reflektere selv over det som presenteres som sannheter. Selv om elevene var fornøyd med å bli gitt en regel og fortalt at denne stemmer, reagerte de blant annet med å si «tøft» når de ble vist et eksempel som var med på å underbygge regelen. Dette kan tyde på at elevene likte å få det de oppfattet som dokumentasjon på regelen.

Når det gjelder negative tall som emne, er dette kanskje noe av det vanskeligste å bevise for en ungdomsskoleelev. Praktiske eksempler på negativ multiplisert med negativ er vanskelig å finne. Da kan det muligens holde overfor elever på 8. trinn å vise til eksempelet som underbygger regelen. Når det gjelder å føre bevis, er det kanskje mer naturlig å begynne med emner innen matematikken som ikke er like abstrakte som negative tall. Som lærer på ungdomsskoletrinnet kan man muligens ikke forvente at elevene skal evne å forstå og bevise fortegnsreglene fullt ut etter 10 års skolegang. Det tok tross alt det europeiske samfunnet århundrer i det hele tatt å erkjenne at vi har behov for negative tall.

8 Egen vurdering av prosjektet

Som lærer i grunnskolen støter man stadig på utfordringer i forhold til undervisning av elever. Valg av pedagogikk kan variere ut ifra hvilket emne det skal undervises i. Samtidig er valg av den eller de optimale metodene for de forskjellige elevgruppene ikke det letteste å bestemme. I tillegg må man ta hensyn til kravet om tilpasset opplæring for alle. I starten av dette prosjektet ønsket jeg derfor å forske på et emne jeg synes kan være noe utfordrende å skulle undervise i, nemlig negative tall. Jeg håpet dermed at jeg etter endt studie ville sitte igjen med en større forståelse av emnet og et større innblikk i hvordan elever jobber med dette.

Denne studien i forhold til elevers forklaringer og arbeid med negative tall, har for min del vært både interessant og lærerik. Gjennom arbeidet har jeg fått en større forståelse for negative tall, hvilke forklaringsmåter man kan bruke innen matematikkfaget og hvilke utfordringer som elever møter i arbeid med negative tall. Dette medfører at jeg er blitt noe tryggere på hvordan jeg skal gripe an undervisningen om dette emnet i fremtida. Elevene har gitt meg et nyttig innblikk i hvordan de arbeider og reflekterer, en innsikt det hadde vært vanskelig å få i det daglige arbeidet som lærer. Jeg har hatt tid til å fordype meg i emnet teoretisk, sett hva forskere har kommet frem til og i tillegg fått mulighet til å innhente førstehåndsinformasjon fra en gruppe elever som hadde tid til å være gjenstand for min observasjon og besvare spørsmål.

Selvfølgelig vil en studie av denne typen innebære at man støter på utfordringer og opplever noe frustrasjon. Dette er imidlertid også noe som gir erfaring man kan dra nytte av ved senere anledninger. I tillegg vil det alltid være valg man må diskutere eller kan vurdere annerledes. Studien har gitt meg mulighet til slike diskusjoner med fagpersoner innenfor matematikk og andre med interesse for fagområdene pedagogikk og matematikk. Meningsutveksling er alltid utviklende. Det har bidratt til at jeg sitter igjen med et større vurderingsgrunnlag til bruk i pedagogiske situasjoner og større forståelse for den elevgruppen jeg skal arbeide med. Samtidig har jeg lært mer om hvordan man utfører et forskningsarbeid, og særlig utfordringene med formelle studier av unge mennesker i en opplæringsinstitusjon.

Studien har gjort det enda klarere for meg at undervisningssituasjonen er kompleks. Det er mange faktorer som må spille på lag for å få et godt utbytte, faktorer jeg vil trekke frem er samhandling og språk som er viktige komponenter. Gjennom interaksjon med andre i en læringssituasjon utveksles og utvikles kunnskap, samtidig som lærers faglige og pedagogiske kunnskaper og ferdigheter beriker interaksjonen. Når man tar i bruk hele mennesket, spiller på tidligere erfaringer og benytter artefakter og eksempler på en gunstig måte, øker læringsutbyttet hos elevene.

Referanseliste

Altiparmak, K. & Özdoğan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(1), 31-47. https://doi.org/10.1080/00207390903189179

Bakke, B. & Bakke, I. N. (2002). *Grunntall 8, matematikk for ungdomstrinnet*. Drammen: Elektronisk Undervisningsforlag.

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5. utg.). Oxford: Oxford University Press.

Cooke, R. (2005). *The history of mathematics. A brief course* (2. utg.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Cornwell, J. (2004). *Explanations: Styles of explanation in science*. Oxford: OUP Oxford.

Dysthe, O. (Red.). (2003). *Dialog, samspel og læring* (2. utg.). Oslo: Abstrakt forlag.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Karns, K., Hamlett, C. L., Dutka, S. & Katzaroff, M. (1996). The relation between student ability and the quality and effectiveness of explanations. *American Educational Research Journal, 33*(3), 631-664.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2006). *Faktor 1 oppgavebok*. Oslo: J. W. Cappelens Forlag.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2007). *Faktor 2 oppgavebok*. Oslo: J. W. Cappelens Forlag.

Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H. K. & Wallace, A. K. (2014). *Nummer 8, matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Aschehoug.

Holme, A. (2001). *Matematikkens historie. Fra Babylon til mordet på Hypatia*. Bergen: Fagbokforlaget.

Holme, A. (2004). *Matematikkens historie. Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel*. Bergen: Fagbokforlaget.

Ifrah, G. (1997a). *All verdens tall. Tallenes kulturhistorie 1*. Oslo: Pax Forlag

Ifrah, G. (1997b). *All verdens tall. Tallenes kulturhistorie 2*. Oslo: Pax Forlag.

Katz, V. J. (2004). *A history of mathematics: Brief version*. Boston: Pearson/Addison-Wesley.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers* (Doktorgradsavhandling). University of Gothenburg. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1575.0649

Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I. & Lewis, M. (2012). Developing symbol sense for the minus sign. *Mathematics Teaching in Middle School, 18*(1), 5-9.

Levenson, E. (2010). Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics, 73*(2), 121-142. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9208-y

Levenson, E. (2013). Exploring one student's explanations at different ages: The case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 181-203. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9447-1

Manchester, P. (2011). *Young children conceptualize the relationships among positive and negative numbers and zero* (Doktorgradsavhandling). Hentet fra http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=kent1301668039

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02
Rogers, L. (2011). The history of negative numbers. Hentet 28.04.19 fra https://nrich.maths.org/5961
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.
Säljö, R. (2003). *Læring i praksis* (3. utg.). Oslo: Cappelen akademisk forlag.
Sørmeland, H. (2014). *Det e dumt når folk e så negativ så da må vi prøv å få dem positiv: En casestudie om elevers arbeid med tekstoppgaver om negative tall på 7. trinn* (Masteroppgave, Høgskolen i Sør-Trøndelag). Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/196461/Sørmeland_2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y
Thompson, J. & Martinsson, T. (1997). *Matematikkleksikon*. Oslo: Kunnskapsforlaget.
Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2013). *Maximum 8 grunnbok, matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.
Tsamir, P. & Sheffer, R. (2000). Concrete and formal arguments: The case of division by zero. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 92-106. https://doi.org/10.1007/BF03217078
Utdanningsforbundet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04?lplang=http://data.udir.no/kl06/nob#
Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving og linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 341-359.
Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in «negativity». *Learning and Instruction, 14*(5), 469-484.
Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology, 21*(4), 555-570. https://doi.org/10.1080/09515080802285552
Wellington, J. (2000). *Educational research: Contemporary issues and practical approaches* (1. utg.). London: Continuum.
Wragg, E. (2005). *The art and science of teaching and learning: The selected works of Ted Wragg*. London: RoutledgeFalmer.

Vedlegg

Vedlegg 1: Godkjenningsbrev fra NSD

Vedlegg 2: Informasjonsskriv til foresatte og elever

Vedlegg 3: Oppgaveark 1

Vedlegg 4: Oppgaveark 2

Vedlegg 5: Oppgaveark 3

Vedlegg 6: Transskripsjon av første observasjon

Vedlegg 7: Transskripsjon av andre observasjon

Vedlegg 8: Transskripsjon av tredje observasjon

Vedlegg 1: Godkjenningsbrev fra NSD

NSD Personvern
24.01.2019 19:00

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 728614 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 24.01.19. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.06.2019.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:
- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2: Informasjonsskriv til foresatte og elever

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Ungdomsskoleelevers arbeid med negative tall"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se hvordan ungdomsskoleelever jobber sammen med negative tall. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Som en avslutning på utdanningen skal jeg skrive en mastergradsoppgave hvor jeg skal jeg gjøre et forskningsprosjekt tilsvarende et halvt års arbeid. Arbeidet mitt vil dreie seg om elevers arbeid med oppgaver om negative tall. Det handler om hvordan elever arbeider sammen og forklarer det de gjør underveis i løsningsprosessen. Målet er å få frem kunnskap om hvordan man kan legge til rette undervisning for læring av negative tall i matematikk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Deltakerne til dette forskningsprosjektet skal være elever i 8.klasse på ungdomsskolen, og derfor får du spørsmål om å delta.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvid du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du arbeider med andre elever i 2-3 økter. I disse øktene vil dere få oppgaver dere skal jobbe med sammen, og underveis vil jeg stille spørsmål og be om forklaringer til løsningene deres. Alt blir tatt opp på videobånd. De observasjoner og kommentarer jeg får fra deg/dere vil bli behandlet konfidensielt, og vil ikke under noen omstendigheter slå tilbake på deg/dere som elever. Jeg vil således analysere det materialet jeg samler inn, og alt vil være anonymt.

Om ønskelig kan foreldre få se oppgavene og på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Opplysningene jeg her får vil kunne gis faglærer og til min veileder Martin Carlsen, men anonymt.

- For å sikre at ingen uvedkommende får tilgang til personopplysningene vil alle deltakeres navn bli erstattet med pseudonym som lagres adskilt fra øvrige data, datamaterialet vil bli kryptert, lagres på forskningsserver og innelåst
- Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i det ferdige produktet, masteroppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 15.mai 2019. Personopplysninger vil bli anonymisert og opptak blir slettet ved prosjektslutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Universitet i Agder ved Martin Carlsen, på epost: Martin.Carlsen@uia.no eller telefon: 38 14 16 59
- Mastergradsstudent Hanne Marit Løvås Skogseid, på epost hannms11@student.uia.no eller telefon: 97645742
- Vårt personvernombud: Ina Danielsen, på epost: ina.danielsen@uia.no eller telefon: 45 25 44 01
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Matrin Carlsen

Hanne Marit Løvås Skogseid

Prosjektansvarlig

Mastergradsstudent

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Ungdomsskoleelevers arbeid med negative tall», og har fått anledning til å stille spørsmål.
Jeg samtykker til at ______________________________ (navn på elev) observeres, intervjues og at hans/hennes opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 15.mai.

(Signert av forelder/foresatt, dato)

Oppgaveark 1

1. Fyll inn tallet som mangler i den tomme ruten.

a) $3 - 5 = \square$

b) $-9 + 4 = \square$

c) $5 + \square = 3$

d) $5 - \square = 8$

2. Sokrates, Platon og Aristoteles er tre av historiens store filosofer.
   a) Sokrates ble født i år 470 f Kr. Hvor mange år før deg ble han født?
   b) Platon startet en filosofisk skole i Athen i år 387 f Kr. Denne skolen var i aktivitet fram til 529 e Kr. Hvor mange år var denne skolen i virksomhet?
   c) Da Aristoteles døde i år 322 f Kr, var han 62 år. I hvilket år ble han født?

3. Et seilfly ble sluppet fri 28 moh. Flyet steg 330 m, sank 75 m, steg 173 m, sank 25 m og sank 38 m.
   Hvor høyt over havet befant flyet seg nå?

4. Lag passende tekst til regnestykkene
   a. -5°C - 7°C

b. 50 000 kr – 70 000 kr

Vedlegg 4: Oppgaveark 2

Oppgaveark 2

1. Den laveste temperaturen som er blitt målt i Norge, er -51,4 grader C. Den ble målt i Karasjok. Den høyeste temperaturen er målt i Nesbyen og var 35,6 grader C. Hvor stor er forskjellen?

2. En dykker er på 4 meters dyp da han bestemmer seg for å dykke tre ganger så dypt.
   a) På hvilket dyp er dykkeren på nå? Bruk negative tall for antall meter under havoverflaten.
   b) Etter 15 minutter bestemmer dykkeren seg for å halvere dybden. På hvilket dyp er dykkeren nå?

3. Georg har gjeld. Han skylder banken penger. På kontoutskriften står det -51 000 kr. De tre barna hans bestemmer seg for å overta gjelden hans. Hvor stor gjeld får hvert av barna?

4. Regn ut

a) $(-5)\,(-5) + \frac{16}{(-4)} + 6\,(-3)\,(-2)$

b) $-\,\frac{(-18)}{(-2)} + 15\,(-8) - (-7)\,(-12) - \frac{27}{(-3)}$

Oppgaveark 3

1. Regn ut:
   $-2\ (x^2 + x - 3) + (x - x^2 + 4)5 + (x^2 - x)\ -2$

2. Regn ut
   $4 - 3\ (x - 1) = -(3 - 2x)$

3. Regn ut
   $8 + x^2 = 33$

Vedlegg 6: Transkripsjon av første observasjon

Transkripsjon av første observasjon

Varighet: 39 minutter og 38 sekunder

Symbolforklaring:

,	Samme som skriftlig tekst
.....	Setningen fullføres ikke/hengende i lufta
?	Spørsmål eller indikasjon til spørsmål
!	Som i skriftlig tekst
( )	Beskrivelse av det observatøren ser, for eksempel gestikulering
Mellomrom mellom linjene	Stille/elevene regner

Observasjonsøkt 1:

(1.1)	Observatør:	Vi starter med at dere jobber litt sammen, og så vil jeg veldig gjerne høre hvorfor dere gjør som dere gjør.
(1.2)	Henrik:	På de første også når vi skal fylle inn i rutene?
(1.3)	Observatør:	Ja, bare hvordan dere tenker. Så hvis vi bare begynner med de første. Det er egentlig bare sånn oppvarmingsoppgaver.
(1.4)	Henrik:	På den første, hva tenker vi?
(1.5)	Alle:	-2
(1.6)	Henrik:	Ja svaret blir jo -2, men hvordan tenker vi?
(1.7)	Oliver:	At hvis du har 3 av noe og så tar du bort 5, så.. Ja, det går jo ikke da. Det var veldig dårlig forklart. (ler)
(1.8)	Henrik:	Men hvis du tar. Hvis du bare bytter om på det da. Selv om det ikke går an da, men det er jo bare et ... Så tar du 5 -3, så blir det 2. Og siden det står andre veien, så blir det liksom motsatt. Så da kan vi bare si at ...
(1.9)	Observatør:	Men du sa at hvis du har 3 og tar bort 5, så går det ikke.
(1.10)	Oliver:	Ja. Da går det først ned til null da, og så er det 2 igjen, og da blir det -2.
(1.11)	Observatør:	Ja, okei. Og videre på b.
(1.12)	Henrik:	- 9 + 4
(1.13)	Sondre:	-15
(1.14)	Oliver:	Blir ikke det -5?
(1.15)	Sondre:	Hekkan!
(1.16)	Henrik:	Hvis du har minustall.
(1.17)	Adrian:	Nei, hvis du skylder noen 9 kroner, så gir du de 4 kroner, så skylder du bare 5 kroner.
(1.18)	Henrik:	Men liksom på en annen måte. Hvis du har da -9, og så plusser du på

noe, så kan du tenke deg at det blir på en måte nærmere null, siden tallet blir nærmere null. Altså høyere, altså lenger oppover. Hvis du har ei tallrekke, så kommer det lenger mot høyre siden det er oppover. (Viser med hendene en tallinje og går oppover på denne)

(1.19) Observatør: Ja, så du tenker tallrekke?

(1.20) Henrik: Jeg tenker ikke tallrekke, jeg bare tenker at det blir høyere. Men tallet vil være annerledes, men det blir fortsatt høyere. Det er vanskelig å forklare.

(1.21) Observatør: Ja, men verdien øker når du plusser på noe. Det er sånn du tenker?

(1.22) Henrik: Ja. Det er akkurat som når det er positivt. Hvis du har 2 + 2, så går det fra 2 til 4, så det blir høyere. Sånn som det altså 2, 3, 4. Men når det er minus tenker samme, at det også blir den veien (peker til høyre) høyere. (viser flere ganger med hendene at man går oppover på tallinja)

(1.23) Observatør: Jeg skjønner hva du mener. Er dere andre enige, eller tenker dere på en annen måte?

(1.24) Adrian: Jeg tenker litt på en annen måte. Det er sånn at når det er pluss, så går det til høyre på tallinja. Og når det er minus, så går det til venstre på tallinja. (Peker til høyre og venstre mens han forklarer)

(1.25) Observatør: Oliver, du er enig?

(1.26) Oliver: Ja.

(1.27) Observatør: Sondre?

(1.28) Sondre: Ja.

(1.29) Observatør: Ja, neste.

(1.30) Henrik: Jeg tror det er -2.

(1.31) Adrian, Oliver, Sondre: Ja

(1.32) Observatør: Hvorfor det?

(1.33) Henrik: Fordi du ser liksom 5 + og så skal det blir 3. Og hvis det da står pluss, blir det høyere, men det blir noe mindre. Og da må du ha et negativt tall for å gjøre det lavere igjen. Siden pluss minus, det blir til minus.

(1.34) Observatør: Hvorfor blir pluss og minus til minus?

(1.35) Sondre: Det er bare sånn

(1.36) Observatør: Det er bare sånn?

(1.37) Henrik: Det er sånn at minus og minus blir pluss, men jeg vet ikke hvorfor pluss og minus blir minus.

(1.38) Observatør: Hvorfor blir minus og minus pluss da?

(1.39) Henrik: Jeg tror det er… Fordi at hvis du har et positivt tall, eller så er det et negativt tall. Jeg er litt usikker. Og så tar du og trekker noe fra det så på en måte så er det..... Jeg må tenke litt over det, det er lenge siden jeg har tenkt over det.

(1.40) Observatør: Ja, men vi kan komme tilbake til det. Men på d?

(1.41) Oliver: -3?

(1.42) Adrian: Ja, men 5..

(1.43) Observatør: Sånn at det står - - 3?

(1.44) Oliver: Ja, - - 3.

(1.45) Adrian: Å ja, sånn ja. Fordi minus og minus blir pluss.

(1.46) Observatør: Ja, der kom den igjen. Men det er en regel som dere har lært?

(1.47) Oliver og Sondre: Ja! (nikker)

(1.48) Observatør: Men fikk dere en forklaring på hvorfor det er sånn?

(1.49) Oliver: Egentlig ikke.

(1.50) Sondre: Nei.

(1.51)	Adrian:	Det er vel sånn at minus det går jo til venstre. Men når du blander et negativt tall inn så skifter den negative retning, at det blir den andre (peker til høyre). Med minus hvert fall.
(1.52)	Observatør:	Jeg skjønner ikke helt hva du mener.
(1.53)	Adrian:	Altså når du har minus. For eksempel hvis det hadde stått -3 så hadde det jo blitt 2, fordi 2 er til venstre for 5. (peker til venstre med hendene). Men siden du blander inn et negativt tall, så går det den andre veien istedenfor. (peker til høyre med hendene)
(1.54)	Observatør:	Men hvorfor gjør det det?
(1.55)	Adrian:	Jeg vet ikke helt.
(1.56)	Henrik:	Jeg tror det bare er en regel. Du kan jo bevise det, men altså, lage en setning ut av det. Men jeg vet ikke hvordan man skal gjøre det nå for å si det sånn. Akkurat som mamma sier av og til at hun synes bare det er tull at med matte, at bare noen har funnet på noe, at de bare har sagt at det er sånn. Men hun gjør det bare for tull da, sånn at vi skal bare begynne å diskutere med henne og bli sure på henne. Siden det gir jo ingen mening siden vi kan jo bevise det, at for eksempel ganging er riktig med telling. Men hun vil bare ikke ta det til seg.
(1.57)	Observatør:	Men det er hvert fall en regel som dere har hørt uten å helt vite begrunnelsen på det?
(1.58)	Alle nikker og sier ja.	
(1.59)	Henrik:	Det er bare en sånn huske ting.
(1.60)	Observatør:	Men dere har blitt vist eksempler på det, stemmer det?
(1.61)	Oliver:	Ja, hun har liksom kommet med sånn derre regnestykker hvor det har blitt brukt liksom.
(1.62)	Henrik:	Vi har ikke blitt bevist det, vi har bare huska det. Og så vet jeg at det blir riktig siden noen har sagt det til oss. Føler jeg da.
(1.63)	Observatør:	Så det er bare en regel som sitter?
(1.64)	Alle:	Ja.
(1.65)	Henrik:	Ja, og så minus foran parentes, så skrifter du alle tingene inni. Det er på en måte litt samme som det. (gestikulerer veldig med hendene)
(1.66)	Observatør:	Skal vi gå videre på tekstoppgaven? (Leser oppgave 2a.)
(1.67)	Sondre:	Da må du ta 2019 + 470.
(1.68)	Adrian:	2015, nei 205. Altså 2005.
(1.69)	Sondre:	Ja, for jeg tenkte nå.
(1.70)	Adrian:	Du må ta 2005 + 470
(1.71)	Henrik:	Ja, det blir jo riktig det.

(1.72)	Observatør:	Hva får dere da?
(1.73)	Oliver:	2475.
(1.74)	Observatør:	Men du sa man måtte ta pluss?
(1.75)	Oliver:	Ja, det blir liksom først så er det 2005 ned til år 0, og så må du plusse på de som er liksom 470 år f.Kr. så må du plusse de sammen.
(1.76)	Observatør:	Kunne man gjort det på en annen måte?
(1.77)	Henrik:	Ja, du kunne vel det. 470 – 2005, kanskje?
(1.78)	Oliver:	Det blir ikke helt
(1.79)	Henrik:	Nei, det hadde ikke gått.
(1.80)	Oliver:	Jeg kommer ikke på noen annen måte.
(1.81)	Observatør:	En ganske lik måte, litt sånn som dere hadde her oppe (peker på 1 d). At man får to fortegn etter hverandre.
(1.82)	Henrik:	Ja minus minus.

(1.83) Oliver: 2005 – (-470).

(1.84) Adrian: Så der står det jo -470, fordi år 0 er liksom 0 på tallinja. Og da er 470, -470. Så der kan du ta 2005 – (-470). (viser med hendene at man beveger seg på ei tallinje)

(1.85) Observatør: Men minus minus?

(1.86) Henrik: Ja, fordi man sier jo før Kristus. Men Kristus er jo år 0, så det er jo akkurat det samme som 0 på tallinja. Så hvis det er før 0 på tallinja, så er det jo før på tallinja, altså negativt.

(1.87) Observatør: Ja, men hvorfor gikk dere rett til pluss da?

(1.88) Henrik: Det er en metode som vi lærte tidligere. Så det er mer naturlig kanskje? Vi har gjort det lenger.

(1.89) Observatør: Ja, hvis vi går videre på b da. (Leser oppgave 2 b)

(1.90) Oliver: 916 år

(1.91) Observatør: Hvordan kom du frem til det?

(1.92) Oliver: Egentlig på samme måte. Fordi du har først de 387 årene til år 0, også plusser du på de 529 årene etter år 0.

(1.93) Observatør: Ja, gjorde dere andre det på samme måte?

(1.94) Sondre: Ja, jeg gjorde samme som han

(1.95) Adrian: Jeg fikk 916

(1.96) Henrik: Jeg fikk også 916. Jeg tok den minus minus greia, men jeg gadd ikke å skrive den to ganger så jeg skrev bare minus minus, ikke pluss.

(1.97) Observatør: Ja, hvorfor valgte du den metoden nå?

(1.98) Henrik: Du spurte om det

(1.99) Observatør: Ja, jeg bare lurer på hvilken metode dere foretrekker. Hvilken metode dere tenker med en gang at den er best for meg.

(1.100) Adrian: Jeg tror det er egentlig fordi minus minus tar lengre tid, eller tar mer plass, eller lengre å skrive enn pluss. (viser med hendene stort og lite mellomrom)

(1.101) Observatør: Så det er på en måte en snarvei å ta pluss?

(1.102) Adrian: Ja

(1.103) Observatør: Til slutt da, når han døde. Det var i år 322 f.Kr. Da var han 62 år Gammel. Hvilket år ble han født?

(1.104) Oliver: År 260. Nei, glem det.

(1.105) Henrik: 384

(1.106) Adrian: 384

(1.107) Observatør: Hvordan gjorde dere det da?

(1.108) Henrik: Før Kristus. – 62. jeg tok bare pluss istedenfor minustegnet.

(1.109) Observatør: Du plusset dem sammen?

(1.110) Henrik: Ja

(1.111) Observatør: Ja, samme begrunnelse som tidligere?

(1.112) Henrik: Ehm ja. Jeg tok bare pluss.

(1.113) Observatør: Var et noen som gjorde det på en annen måte?

(1.114) (Elevene rister på hodet.)

(1.115) Observatør: Da går vi videre, og så er det noen få oppgaver til. Her er det snakk om et seilfly. (Leser oppgave 3)

(1.116) Adrian: Jeg fikk 393.

(1.117) Oliver: Jeg fikk også det

(1.118) Henrik: Jeg prøvde bare å gjøre det i en, men det funket ikke.

(1.119) Sondre: Jeg prøvde også på det.

(1.120) Henrik: Jeg har liksom aldri sjekket om det funker eller ikke.

(1.121) Observatør: Men hvorfor funket ikke det tror du?

(1.122) Henrik: Fordi når du tar 8 + 0 – 5 + 3 - 5 – 8 så blir det -7, så jeg visste ikke hvordan man skulle løse det. Men jeg tror man må ta plussene sammen og minusene sammen egentlig.

(1.123) Observatør: Så du sorterer det først? Er det sånn dere andre gjorde det?

(1.124) Adrian: Ja, det var sånn jeg gjorde det

(1.125) Oliver: Jeg tok bare liksom 28 moh. + 330 så -75. Så jeg tok alt i et.

(1.126) Observatør: Så du tok det steg for steg hver operasjon?

(1.127) Oliver: Ja.

(1.128) Observatør: Hvordan gjorde du det?

(1.129) Sondre: Jeg prøvde det samme som Henrik, men da gikk det bare i surr. Så da tok jeg det steg for steg.

(1.130) Observatør: Men hvorfor tror dere at det blir så mye surr når dere tar alt i ett med pluss og minus?

(1.131) Oliver: Fordi vi er jo vant til å ta enten plusse alle sammen eller minus alle. Og når det blir blanding da blir det jo mye vanskeligere.

(1.132) Observatør: Det blir rett og slett for mye å holde styr på?

(1.133) Alle: Ja.

(1.134) Adrian: Og så står det der, annenhver på en måte da (Peker fra side til side med hendene)

(1.135) Observatør: De to siste, der er det en a og en b oppgave. Der skal dere finne en passende situasjon, altså at dere skriver en tekst som passer til dette regnestykket da. Kanskje dere har gjort sånne oppgaver før?

(1.136) Adrian: Ja, vi har.

(1.137) Adrian: Skal det bare være tekst, eller var det tekstoppgave?

(1.138) Observatør: Dere lager en tekst som passer. Det trenger ikke være en tekstoppgave nødvendigvis, men du kan ha et spørsmål om du vil.

(1.139) Adrian: Jeg hadde et spørsmål jeg.

(1.140) Observatør: Skal vi ta en runde, og så kan dere lese opp hver deres? Skal vi begynne med Adrian?

(1.141) Adrian: I Kristiansand var det – 5 grader celsius, mens i Oslo var det 7 grader kaldere. Hvor kaldt er det i Oslo?

(1.142) Henrik: Temperaturen var -5 grader celsius i Tromsø på mandag. Den hadde sunket -7 grader celsius til tirsdag.

(1.143) Sondre: På mandag var temperaturen -5 grader celsius. På tirsdag var den -7 grader celsius. Hvor mye har temperaturen synket?

(1.144) Oliver: En dag var det -5 grader celsius ute. Neste dag hadde temperaturen synket med 7 grader celsius. Hvor mange grader var det neste dag?

(1.145) Henrik: Hvorfor tok dere akkurat temperatur på den oppgaven?

(1.146) Observatør: Ja, men nå står det jo celsius da.

(1.147) Henrik: Ja, men du kunne jo ... Ja, det står celsius, ja.

(1.148) Observatør: Men alle hadde det at det var en sammenligning med synke og stige i forhold til to forskjellige målinger med temperatur, stemmer ikke det?

(1.149) Adrian: Jeg tror ikke Sondre hadde det

(1.150) Sondre: Nei, men jeg hadde hvor mye den hadde sunket.

(1.151) Adrian: Jeg tror han har misforstått oppgaven. Det der er et regnestykke, ikke to tall. (peker på arket til Sondre).

(1.152) Sondre: Å JA! Jeg trodde det sto minus fem og minus syv. (smiler)

(1.153) Observatør: Ja, men det er jo bra tekstoppgave til minus fem og minus syv. Hva gjorde at du tenkte det var to forskjellige tall?

(1.154) Sondre: Jeg så bare minus foran fem, og da trodde jeg det var minus for syv også.

(1.155) Henrik: Er det ikke det da?

(1.156) Observatør: Ja, det er kanskje ikke så lett å se. Men hvis dere ser på de to minustallene i den oppgaven?

(1.157) Adrian: Den ene ligger tett ved (viser ved å knipe fingrene sammen).

(1.158) Sondre: Ja, jeg så det nå.

(1.159) Observatør: Så det er forskjell på minusene.

(1.160) Sondre og Adrian: Ja.

(1.161) Observatør: Hvilke typer minus har vi?

(1.162) Adrian: Fortegnsminus ... og ... jeg husker ikke hva det heter.

(1.163) Observatør: Som regnetegn.

(1.164) Adrian: Ja, regnetegn.

(1.165) Observatør: Fort gjort å blande. Ja, hvis vi tar siste oppgaven også da.

(1.166) Henrik: Det var skikkelig plagsomt.

(1.167) De andre: Hva da?

(1.168) Henrik: At det ikke var det samme, det så helt likt ut.

(1.169) Observatør: (Leser opp oppgave 4b)

(1.170) Henrik: Skal vi skrive en oppgave til det?

(1.171) Observatør: Ja, samme som den forrige dere gjorde.

(1.172) Henrik: Er det noen som vet hvilken valuta de bruker i Nord Korea?

(1.173) Alle: (ler)

(1.174) Adrian: Det er kroner

(1.175) Henrik: Okei, kroner. Han var sikkert på ferie i Norge da.

(1.176) Observatør: Ferdig? Skal vi ta en runde til? Vi kan begynne fra andre enden nå.

(1.177) Oliver: Du har 50 000 kr og vil kjøpe en ting til 70 000 kr. Du må låne penger av banken. Hvor mye skylder du banken?

(1.178) Sondre: Et par har 50 000 kr. De trenger 70 000kr. De låner penger slik at de har 70 000. Hvor mye har de lånt?

(1.179) Henrik: Kim Jong-un hadde 50 000 kr lommepenger. (ler) Han kjøpte en båt til 70 000 kr. Hvor mye mindre kr hadde han på bankkontoen sin etterpå?

(1.180) Adrian: Du har 50 000 kr, men du skylder en fyr 70 000 kr, men du har ikke nok. Hvor mye penger trenger du for å betale den fyren?

(1.181) Observatør: Ja, vet ikke helt hva jeg skal si til Nord Korea men ... (ler) Vi kan begynne med dere som snakket om gjeld da. Hvorfor valgte dere en oppgave i forhold til gjeld?

(1.182) Adrian: Fordi jeg har sett det før.

(1.183) Observatør: Ja, det er det som du tenker er vanlig med en sånn type oppgave?

(1.184) Adrian: Ja

(1.185) Oliver: Det var egentlig det jeg tenkte også når det er kroner med minustall.

(1.186) Sondre: Jeg tenkte samme som han (nikker bort mot Oliver). Når det er minus foran, så er det gjeld.

(1.187) Observatør: Er det noen andre situasjoner enn gjeld vi bruker negative tall som dere kan komme på?

(1.188) Henrik: Ehmmm ... Jeg vil komme på noe, jeg har veldig lyst til det

(1.189) Sondre: Kjøper du noe som koster 20 000

(1.190) Henrik: Ja, men da har du jo gjeld.

(1.191) Sondre: Ikke hvis man har de 20 000. Nei, fella, det blir feil. Det blir 0 det.

(1.192) Observatør: Ellers så må du vinkle det om og si hvor mye må du spare for å kunne kjøpe det. Hvor mye mangler du?

(1.193) Adrian: Det er på en måte det jeg skrev.

(1.194) Observatør: Ja. I forhold til negative tall, hva er poenget med å lære det på skolen tror dere? Når har dere bruk for det?

(1.195) Sondre: Når vi skal låne.

(1.196) Observatør: Ja

(1.197) Henrik: Kanskje vinkler?

(1.198) Observatør: Hvordan da?

(1.199) Henrik: Nedforbakker så er det jo minusgrader.

(1.200) Observatør: At du kan ha negative vinkler?

(1.201) Henrik: Ja. Går ikke det an?

(1.202) Observatør: I forhold til vinkler så har man 360 grader, og uansett hvor du går så

(1.203) Henrik: Jo, jeg vet det, fordi hvis du har en nedforbakke. Ikke sant? Som er den veien (peker med hånda) også skal du måle den den veien (viser med ei gradskive) så kan du jo egentlig bare snu veien (snur gradskiva andre veien). Eller bare gå på andre siden av veien og se fra andre siden. MEN det hadde jo vært mer logisk, men det hadde jo ikke vært noe gøy. (ler)

(1.204) Oliver: Sånn hvis vi skal låne til hus eller bil eller noe sånt.

(1.205) Observatør: Ja, men hvis vi snur litt rundt på den her oppgaven da. Og si at, sånn som for eksempel som på den første her, d. (Alle snur arket rundt til oppgave 1d). Så har du 5 minus et eller annet som blir 8. Og der har dere skrevet -3, har dere ikke det?

(1.206) Sondre: Ja

(1.207) Observatør: Men man kunne jo, siden man har to minustegn, at man kunne gjort den snarveien som dere brukte her. Kunne dere ikke det?

(1.208) Sondre: Gjort om til pluss.

(1.209) Observatør: Ja, bare satt den til pluss med en gang. Kan vi ikke det når det er snakk om gjeld?

(1.210) Oliver: Hvis noen skylder deg noe, og du får det, da kan du bare plusse det på.

(1.211) Observatør: For sånn som hvis du skylder noen penger. Må det stå at det er minus så og så mange penger du skylder dem?

(1.212) Henrik: Det kan stå at det er så og så mange penger du skylder.

(1.213) Oliver: Da kan du bruke pluss

(1.214) Henrik: Minuset er sikkert der for å vise at vi ikke har de pengene.

(1.215) Adrian: Minus betyr… Det vi har, eller det jeg har blitt lært er at minus betyr gjeld ...

(1.216) Oliver: At du kan sammenligne med gjeld

(1.217) Adrian: Ja, det erstatter for ordet gjeld.

(1.218) Observatør: I alle situasjoner?

(1.219) Adrian: Nei, men liksom at når det har med penger å gjøre

(1.220) Oliver: At du kan tenke det for å prøve å finne ut av det

(1.221) Observatør: At det er en måte å hjelpe deg å finne ut av det?

(1.222) Oliver: (nikker)

(1.223) Observatør: Er det noen andre situasjoner som det er lurt at dere vet hvordan man regner med negative tall?

(1.224) Oliver: Grader? Sånn som den forrige oppgaven.

(1.225) Observatør: Ja. Men dere var innom på de her første oppgavene ... Dere nevnte tallinje. Dere nevnte at dere tenker hvor langt er det fra null, og hvor langt er neste del fra null når dere går mellom pluss og minus. Og så nevnte dere også de her reglene. Med minus og minus gir pluss. Pluss og minus gir minus og sånn. Kanskje litt vanskelig spørsmål, men… Si at dere sitter inne i klassen ved siden av noen som ikke skjønner dette. Hvordan vil dere forklare dette til dem?

(1.226) Henrik: At minus og minus er pluss?

(1.227) Observatør: Ja, for eksempel.

(1.228) Henrik: Sånn som vi ble lært det, det er bare sånn.

(1.229) Observatør: Ja, si at det var Adrian som ikke forsto det da (peker på Adrian). Tror du han hadde sagt: «Ja, okei, men det er greit?»

(1.230) Henrik: Altså, jeg har blitt lært mange sånne ting at han skjønner det (peker på Adrian), men jeg skjønner det ikke. Og så er det bare sånn. Hvorfor i Hekkfjell er det sånn? Og så sier han sånn, det er bare sånn. Og nå har det skjedd såpass mange ganger med meg at det bare er sånn. Hvis det er sånn at jeg sier det bare er sånn, så må jeg bare prøve å huske det, og akseptere det.

(1.231) Adrian: Men er grei huskeregel på minus er at du kan liksom legge sammen to minus til å bli pluss. Hvis du bare tar den ene minus og flytter den over.

(1.232) Oliver: Og vri den

(1.233) Adrian: Så blir det pluss.

(1.234) Observatør: Hæ?

(1.235) Henrik: Hvis du har en minus

(1.236) Adrian: En minus der (viser med en penn) og en minus der (viser med en ny penn), også flytter du den over sånn (flytter den ene pennen over den andre, slik at det blir en pluss).

(1.237) Henrik: Også blir det til en pluss (viser med gradskive og viskelær)

(1.238) Observatør: Men hva gjør du da hvis du har en pluss og en minus?

(1.239) Henrik: Da...

(1.240) Sondre: Da tar du minus i regnestreken.

(1.241) Henrik: Ja, fordi da skal det egentlig stå pluss minus minus

(1.242) Adrian: Ja, da tar du bare og gjør sånn (slår bort den ene pennen som skal være plusstegn med den pennen som skal være minus)

(1.243) (Alle ler)

(1.244) Observatør: Når vet du at du skal skyve ut, og når vet du at du skal legge sammen?

(1.245) Henrik: Det bare husker du.

(1.246) Adrian: Det er jo sånn minus og pluss. Det står jo aldri, fordi pluss er det samme som ingenting på en måte. For det står jo ikke pluss foran et tall sånn som det gjør med minustall.

(1.247) Henrik: Nei, men bare tenk deg siden det plussen og minusen markerer er jo på en måte om tallet er positivt eller negativt, hvert fall den siste.

(1.248) Observatør: Ja, det er fortegnstegnene.

(1.249) Henrik: Ja, så hvis det er to stykk så er den siste alltid fortegn på en måte. Så hvis det er minus minus så står det alltid noe før minus minuset. Eller kanskje det egentlig ikke gjør det. Det trenger nødvendigvis ikke gjøre det. Hvis det står 3 - -4, så står det egentlig 3 også tar de vekk minus. Ja, jeg husker ikke hva det andre var, 4 eller noe, jeg husker ikke. Det er forklaringen min.

(1.250) Observatør: Men du sa, du har 3 - -4.

(1.251) Henrik: Ja, du tar. Ja, du kan si du tar 3 minus liksom det ehm ehm (legger hodet ned på bordet). 3 - -4. Hvis du deler det opp, hvis du tar et mellomrom. 3 -   -4.

(1.252) Observatør: Ja, men hvordan?

(1.253) Henrik: Fordi minus 4, altså den minusen det er fortegn.

(1.254) Observatør: Ja, den siste minusen er fortegn.
(1.255) Henrik: Ja.
(1.256) Observatør: Men du skal likevel trekke fra 4 negative.
(1.257) Henrik: Det er vel bare måten å si det på.
(1.258) Observatør: Men hvordan kan du forklare at de fire negative gjør svaret positivt?
(1.259) Henrik: Årh (legger hodet ned på bordet igjen og sukker)
(1.260) Adrian: Men altså når det står 3 – 4
(1.261) Henrik: Jo, men hvis du skriver det opp sånn. Ikke sant? (peker på regnestykket 3 – (-4)). Så står det minus foran parentesen, og da skal du skifte alle fortegnene inni parentesen eller alle tegnene inni parentesen. Så da blir det til pluss.
(1.262) Observatør: Hvorfor skal man det?
(1.263) Henrik: Hvorfor man skal det? Jeg vet da søren! (alle ler)
(1.264) Adrian: Det er jo det hun har spurt om hele tiden.
(1.265) Henrik: Det er også bare en sånn regel, bare sånn. Det er sånn.
(1.266) Observatør: Men hvorfor?
(1.267) Henrik: (himler med øynene og sukker) Urh, dette er så vanskelig! Kan jeg ikke spørre deg hvorfor, så kan jeg se ditt svar?
(1.268) Adrian: Når det står 3 – 4 så er jo minusen som beviser at 4 er negativt. Han skifter hvert fall om firetallet til et negativt tall. Sånn at da får du 3 og så -4, og -4 er større liksom.... Jeg vet ikke hvordan jeg skal forklare det. Det blir 1, men når du har da en minus foran minustallet så....
(1.269) Henrik: Finnes det en fasit, eller vil du bare plage oss og vite hvordan vi tenker? (alle ler)
(1.270) Observatør: Jeg bare lurer på hvordan dere... Har dere godtatt regelen bare?
(1.271) Alle: Ja!
(1.272) Henrik: Vi har bare gitt opp på å prøve å.... Hva hvis du har 4 bananer, og så skal du ta vekk 3 ikke-eksisterende bananer. Det gir ikke mening. Jeg tror vi må bruke penger.
(1.273) Adrian: Eller jo, hvis du har 3 og så minus minus, så tar du jo og minuser den minusen. Og da når du har bare 3 og 1 igjen, så må di liksom ha noe imellom, så da blir det pluss.
(1.274) Observatør: Jeg vet ikke om jeg henger helt med. Men hvis dere ser på denne (viser en rekke med regnestykker 3 – 2, 3 – 1, 3 – 0, 3 – (-1), 3 – (-2), og regner det ut sammen med dem)
(1.275) Henrik: Å det plagde meg.
(1.276) Observatør: Ser dere et mønster?
(1.277) Henrik: Ååå, det plagde meg! Å det plagde meg sykt! Det var plagsomt.
(1.278) Observatør: Hva da?
(1.279) Henrik: At du beviste det.
(1.280) Observatør: Men dette er egentlig ikke et bevis. Det er et eksempel.
(1.281) Henrik: Det er jo et bevis på at det er sånn det må være.
(1.282) Oliver: Men det er jo ikke en forklaring liksom.
(1.283) Observatør: Hvis tallene følger et mønster, så må det være sånn ja.
(1.284) Henrik: Ja, sånn som det at det følger et mønster.
(1.285) Oliver: Men hun har liksom ikke forklart hvorfor det er det.
(1.286) Henrik: Nei, jeg greier ikke forklare hvorfor det blir det, men det gir jo mening.
(1.287) Observatør: Du virker overbevist.
(1.288) Henrik: Ja, det gir jo mening.
(1.289) Adrian: Men en ting som gir mening da er at hvis du har blitt lært at, for

eksempel meg da. At -2 betyr gjeld. Så da, hvis du har en minus foran så snur du egentlig bare den gjelda, sånn at han har gjeld med deg sånn at du får 4. Da blir svaret 7.

(1.290)	Henrik:	Å ja! Jeg skjønte det. Så hvis jeg bare gir gjelda mi til den andre personen. Man bare gir gjelda si til den andre personen.
(1.291)	Adrian:	Du bare snur gjelda.
(1.292)	Henrik:	Det er akkurat som man gir dobbelt så mye, dermed skylder han deg tilbake. Hvis jeg skylder han 4, så gir jeg han 8, så skylder han meg 4.
(1.293)	Oliver:	Ja.
(1.294)	Adrian:	Så sier du da at der er det et magisk firetall som er det motsatte.
(1.295)	Observatør:	Men for å gi mening ut av det så må man ... Er det mer mening med et rent talleksempel, eller gir det mer mening med et eksempel fra hverdagen?
(1.296)	Adrian:	Jeg synes det gir mer mening sånn (peker på talleksempelet).
(1.297)	Henrik:	Det kommer an på om du skjønner hva det betyr, de tallene i den rekkefølgen. Hvis du aldri har hørt om matte, så vil det vel gi mer mening med noe du kan «relate» til som et hverdagslig problem, eller en ting som skjer i hverdagen liksom, og ikke matte.

Vedlegg 7: Transkripsjon av andre observasjon

Transkripsjon av andre observasjon

Varighet: 42 minutter og 24 sekunder

Symbolforklaringer:

,	Samme som skriftlig tekst
.....	Setningen fullføres ikke/hengende i lufta
?	Spørsmål eller indikasjon til spørsmål
!	Som i skriftlig tekst
( )	Beskrivelse av det observatøren ser, for eksempel gestikulering
Mellomrom mellom linjene	Stille/elevene regner

Observasjonsøkt 2:

(2.1) Observatør: Vi begynner med å lese den første oppgaven.

(2.2) Henrik: Å ja du skulle finne forskjellen?
(2.3) Oliver: Ja
(2.4) Henrik: Jeg tror jeg «approacha» denne oppgaven litt skeivt.
(2.5) Observatør: Ja, hva var det du tenkte?
(2.6) Sondre: Det her blir jo helt feil.
(2.7) Adrian: Du burde ikke begynne med minustall.

(2.8) Observatør: Men Henrik og Sondre, hvordan var det dere tenkte først?
(2.9) Sondre: Det gikk helt skeis først.
(2.10) Henrik: Ja vi tok minus siden vi misforsto oppgaven litt.
(2.11) Adrian: Nei, Sondre gjorde det annerledes.
(2.12) Sondre: Jeg vet ikke hvordan jeg har gjort
(2.13) Henrik: Tok du pluss eller minus eller begge?
(2.14) Sondre: Jeg tror jeg tok pluss først, men så skjønte jeg ikke hva det ble. Jeg tror det ble minus.
(2.15) Adrian: Både og. 4 – 3 er 4? (ser på Sondre sitt ark)
(2.16) Sondre: Hekkan!
(2.17) Adrian: Eller er det et veldig shady ettall?
(2.18) Henrik: Du har sikkert tenkt det er 3 pluss så mange du tar vekk 5.
(2.19) Observatør: Så dere har egentlig sett på som om at begge er positive, og så sett forskjellen?
(2.20) Henrik: Ja, jeg gjorde det. Så tar du bare. Ja, siden du skal jo finne hvor mange grader det er i positivt. Siden du sier jo ikke forskjellen var -87 grader.
(2.21) Observatør: Nei, men så for å finne ut av denne oppgaven så... Hva tenker dere først?

(2.22)	Adrian:	Når du skal finne differansen mellom to tall så pleier du jo å ta minus. Og da tar du, når du tar minus et minustall så blir det pluss. (viser et plusstegn med fingrene)
(2.23)	Observatør:	Ja, det var sånn du tenkte?
(2.24)	Adrian:	Mm
(2.25)	Observatør:	Ja, Oliver?
(2.26)	Oliver:	Jeg bare plusset de sammen.
(2.27)	Observatør:	Ja, det er litt likt som forrige gang, bare for å komme litt inn i det. Men hvis vi ser på neste oppgave da? (leser oppgave 2a)

(2.28)	Observatør:	Hva kom dere frem til nå?
(2.29)	Sondre:	12.
(2.30)	Adrian:	Med det minuset foran.
(2.31)	Sondre:	Ja, -12 da.
(2.32)	Observatør:	Hvis dere skal gå gjennom hvordan dere tenker her? Her er det jo ganging… Vi har jo bare jobbet med pluss og minus foreløpig.
(2.33)	Adrian:	Det er jo 4 meters dyp, så det er under havet. Da blir det minus. Så når du tar ganger 3, så er det 3 ganger så dypt (viser med hendene hvordan det synker). Så da blir det -12 meter.
(2.34)	Observatør:	Så har du igjen den fortegnsregelen med minus og pluss.
(2.35)	Adrian:	Ja.
(2.36)	Observatør:	Så den gjelder i ganging også?
(2.37)	Adrian:	Ja.
(2.38)	Observatør:	På b da? (leser 2b)

(2.39)	Observatør:	Fikk dere likt svar alle sammen?
(2.40)	Alle:	-6
(2.41)	Observatør:	Ja, hvordan løste dere denne da?
(2.42)	Oliver:	Bare delte -12 meter på 2.
(2.43)	Adrian:	Å halvere betyr å dele på 2.
(2.44)	Sondre:	Jeg visste ikke hva det betydde, men så halv så jeg tenkte bare 2.
(2.45)	Henrik:	Jeg trodde vi måtte gjøre det i to regnestykker så jeg tok -12/2, og så tok jeg 12 – 6 eller minus svaret da
(2.46)	Oliver:	Hm?
(2.47)	Henrik:	12 minus svaret av 12/2. Så 12 – 6.
(2.48)	Observatør:	Så du tok -12/2 og så fikk du?
(2.49)	Henrik:	Jeg bare ignorerte minusen.
(2.50)	Observatør:	Hvorfor ignorerer du minusen?
(2.51)	Henrik:	Fordi det har ikke noe å si. Oppgaven spør bare om du kan si det i minus på en måte. Men da har liksom....
(2.52)	Observatør:	Så du setter den på til slutt?
(2.53)	Henrik:	Jeg setter den der, men den betyr ingenting matematisk, fordi det er bare oppgaven som spør om det. Eller jo den betyr noe, men jeg bare ignorerer den.
(2.54)	Observatør:	Men hvordan vet du at du kan ignorere den, og det blir samme svaret som hvis du hadde hatt den med hele veien?
(2.55)	Henrik:	Det gir jo ikke mening hvis du skal lese det for meg som skal gjøre oppgaven lokalt (smiler).
(2.56)	Observatør:	Ja, for du vet at det må bli minus uansett?
(2.57)	Henrik:	Ja, helt sikkert.

(2.58) Observatør: Fordi?

(2.59) Henrik: Helt usikkert. Fordi du deler på noe, du deler på et minustall. Nei, du har et minustall og deler det så blir det vel alltid ... Sikkert ikke. Jeg følger ikke med på hva jeg sier.

(2.60) Adrian: Hvis du tenker at du skylder noen 6 kroner. Så deler du greia med for eksempel… Hvis jeg skylder deg 6 kroner, så deler vi to (peker på Oliver) på å skylde deg, så trenger vi bare 3 kroner. Eller 12 da (peker på oppgaven), tenker jeg.

(2.61) Henrik: Det virker ganske improvisert.

(2.62) Adrian: (ler og nikker)

(2.63) Observatør: Sånn som du sa Henrik, så sa du at du tok -12/2 så fikk du -6. Så sa du du tok 12 igjen, og så tok du og trakk fra 6. Vil du ikke da få -12 - - 6?

(2.64) Henrik: Jo, men det står egentlig to minuser der (skriver på arket), bare du så den ikke før nå.

(2.65) Observatør: Hvordan synes dere egentlig det er å jobbe med tekstoppgaver kontra rene talloppgaver?

(2.66) Oliver: Det er greit. Det er enklere hvis man får stykket og bare skal regne ut det. Men vi finner jo ut av det.

(2.67) Observatør: Hvorfor er det enklere med bare et vanlig regnestykke?

(2.68) Henrik: Da trenger vi ikke å finne ut hvilken regneart vi skal bruke.

(2.69) Oliver: Ja.

(2.70) Observatør: Så litt av jobben er gjort på en måte. Så hvis dere snur arket, så synes dere det er lettere å regne sånne som kommer lenger nede?

(2.71) Sondre: Uff.

(2.72) Henrik og Oliver: Ja.

(2.73) Sondre: Det her er langt utenfor min...

(2.74) Observatør: Men vi tar først treeren da. Der har vi en tekstoppgave til. Så vil jeg veldig gjerne vite hvordan dere sorterer ut informasjon fra teksten her for å vite hva dere må gjøre.

(2.75) Henrik: Georg har gjeld, så han har minuspenger. Kontoutskrift? Hva er det han har kjøpt som koster akkurat 51 000 kroner?

(2.76) Observatør: Hvordan kommer dere fra teksten til å sette opp det regnestykket?

(2.77) Henrik: Fordi de skal dele gjelden hans, og han har 51 000 i gjeld. Så da må du spre de 51 000 over 3 stykk siden de skal dele det. Så det sier seg selv, du skal dele de pengene på 3 antall personer.

(2.78) Observatør: Og da får dere som svar?

(2.79) Adrian: -17 000.

(2.80) Oliver: Men skylder de ikke 17 000 hver da?

(2.81) Henrik: Jo, men de skylder så det betyr at det ikke er de sine penger. Så da blir det minuspenger.

(2.82) Oliver: Ja, men liksom hvor stor gjeld? Å ja, ja! Bare glem det.

(2.83) Observatør: Men blir det riktig nå da, når dere setter på en minus foran 17 000?

(2.84) Adrian: Det står jo -51 000 kroner, så da må du jo ta det med i teksten.

(2.85) Observatør: Ja, men står det det i de regnestykkene som dere har lagd? Står det -51 000? (peker på regnestykket) Hvis det er et positivt tall delt på et positivt tall så kan jo ikke det bli et negativt tall, kan det det?

(2.86) Adrian: Nei.

(2.87) Oliver: (snakker til Henrik) Hvorfor tar du -3? Det blir jo pluss. (ler)

(2.88) Henrik: (ler) Å ja! Å ja, fordi pluss og pluss blir også pluss. Svarte, det finnes ingen løsning. (ordene forsvinner/latter og mumling)

(2.89) Observatør: Okei, er alle kommet i mål på den? Du har fortsatt to positive som blir en negativ.

(2.90) Henrik: Ja, men jeg… Se da, se da. Kan du ikke se den der? Det er en minus (skriver et minustegn)

(2.91) Observatør: De neste oppgavene, de to siste, har dere regnet sånne oppgaver før?

(2.92) Alle: Nei.

(2.93) Adrian: Men jeg tipper jo det bare er sånn -5 og -5 at det er et gangetegn imellom siden det ikke står noe.

(2.94) Observatør: Ja, vil dere prøve dere på den første der?

(2.95) Sondre: Den er langt utenfor min hjerne.

(2.96) Observatør: Hvis du deler det opp i flere, tar den her først liksom (viser på arket hvordan man kan dele opp regnestykket i flere deler). Og så tar du den delen for seg, og den delen for seg.

(2.97) Sondre: Ja, men jeg skjønner ikke den midterste.

(2.98) Observatør: Når det står en brøk, så er brøkstreken det samme som dele.

(2.99) Sondre: Ja, det har jeg lært.

(2.100) Observatør: Sånn at her i midten står det 16 delt på -4.

(2.101) Adrian: Jeg har et svar hvert fall.

Elevene sitter lenge, regner litt og visker ut igjen.

(2.102) Adrian: (ser på Olivers svar): Vi har ikke det samme.

(2.103) Sondre: Hvis du ser på meg, så har nok du gjort riktig.

(2.104) Adrian: Nei, jeg så på Oliver.

(2.105) Sondre: Å ja.

(2.106) Adrian: Altså, jeg tror ikke jeg har riktig altså.

(2.107) Henrik: Her så tror jeg du må ta disse her og få inn i hverandre siden det er parentes før gange. Eller så kan du gange den inn i den sånn at det blir bare én parentes. (peker på 6 (-3) (-2))

(2.108) Oliver: Det blir det samme til slutt da.

(2.109) Henrik: Ja, men jeg synes det blir enklere.

(2.110) Oliver: Tar du sammen de to, så er det 6 gange 6, så er det 36. (viser på arket) 6 gange -3 så er det -18, så gange -2 er 36.

(2.111) Henrik: Ja, men ... ehh. Ja, det er sant.

(2.112) Adrian: Men spørsmålet er om det blir -36 eller 36, fordi du har jo at du skal ta parentes først, men du setter jo parentes bare fordi det er minustall. Så jeg er ikke helt sikker på om det skal være 6 ganger 3 og så blir det minustall eller...

(2.113) Oliver: Nei, det blir pluss.

(2.114) Adrian: Det blir pluss uansett.

(2.115) Observatør: Hvordan begynte dere her?

(2.116) Sondre: Begynte?

(2.117) Observatør: Ja, hva tenker dere når dere ser på denne oppgaven? Hva er det første dere vil gjøre?

(2.118) Oliver: Å løse ut parentesene egentlig.

(2.119) Observatør: Ja.

(2.120) Oliver: Da starter jeg der (peker på (-5) (-5)), og så -5 gange -5 blir 25 og der

(2.121) Henrik: Men -4 er ikke det en unødvendig parentes egentlig? Den der? Den trenger vi jo egentlig ikke. (peker på $\frac{16}{(-4)}$)

(2.122) Oliver: Det er fordi det er minus. Og så blir det -4, og så blir det + 6 gange -3, så blir det -18 gange -2. Så blir det 36. Så blir det 57 til svar.

(2.123) Henrik: Jeg synes den $\frac{16}{(-4)}$ var skikkelig forvirrende siden jeg fikk det ikke til å stemme at det kunne bli det samme som, eller liksom at det kunne bli -4. Siden jeg synes det blir så sykt rart liksom, at det virka som om jeg hadde gjort noe feil. Jeg ble usikker.

(2.124) Observatør: Men så snakket dere om de her parentesene når det ikke står noe foran. Det står ikke noe tegn eller noe.

(2.125) Oliver: Nei, da skal du bare gange.

(2.126) Adrian: Ja, du skriver det som gange.

(2.127) Observatør: Ja, og når det bare står et tall foran en parentes da?

(2.128) Oliver: Der som det står +6 liksom?

(2.129) Observatør: Ja, for eksempel.

(2.130) Oliver: Da skal du jo gange det sammen.

(2.131) Henrik: Man ganger det ut.

(2.132) Oliver: Hvis det hadde stått 6 + -3, da skulle du ikke ha ganget det.

(2.133) Henrik: Kunne du ikke bare ha fjernet parentesen da egentlig?

(2.134) Adrian: Det er jo bare parentes der, fordi det er minustall.

(2.135) Observatør: Men hvis vi hadde hatt positive tall, så måtte vi vel hatt et regnetegn mellom?

(2.136) Adrian: Ja, da hadde det vært gange mellom.

(2.137) Observatør: Sånn at gangetegnet fjernes når minusen kommer?

(2.138) Adrian: Nei, da har du jo det vært 5+5. Det blir positivt. Så det er 6 + 3 + 2.

(2.139) Henrik: Vent, 5. Hvorfor hadde det vært disse her hvis femerne hadde vært positive, hvorfor blir det 5+5?

(2.140) Adrian: Fordi når de er positive så må de jo ha en pluss foran, og den plussen kommer foran når det er et tall foran det igjen.

(2.141) Henrik: Å ja, da er det + 5 + 5 liksom.

(2.142) Adrian: Ja.

(2.143) Oliver: Men det må jo ikke være pluss. Det kan jo bare være 5 ute pluss eller minus foran.

(2.144) Adrian: Da er det ikke... Det er jo sånn der, positivt.

(2.145) Observatør: Men når det er tall og et ikke står noe foran?

(2.146) Adrian: Da må det være en parentes.

(2.147) Observatør: Blir det positivt eller negativt tall?

(2.148) Henrik: Det er positivt.

(2.149) Observatør: Så du kunne skrevet i parentesen (+5) og så en ny (+5), og da slipper du det gangetegnet? Men kutter du parentesene så må du ha et gangetegn imellom.

(2.150) Oliver: Mm (nikker)

(2.151) Observatør: Hvis ikke blir det veldig forskjellig svar.

(2.152) Henrik: Jeg vil gjerne høre hva Sondre har gjort.

(2.153) Sondre: Meg?

(2.154) Observatør: Hvordan tenkte du?

(2.155) Sondre: Vet ikke. Jeg bare gjorde noe.

(2.156) Henrik: De her to første er jo riktig, men jeg lurer på hva du gjorde her. (peker på utregningen til Sondre. 25 + 4 + 18 – 12)

(2.157) Sondre: Jeg tok bare 6 ganger 3, og det er 18. Jeg vet ikke om det er pluss eller minus.

(2.158) Oliver: Ja, og så tok du den...

(2.159) Henrik: Når du ganger noe med minus, så tror jeg...

(2.160) Adrian: Når du ganger et positivt tall med et minustall, så blir det minustall.

(2.161) Oliver: Jeg tror han tok 6 gange -3 og 6 gange -2.

(2.162) Sondre: Ja!

(2.163) Observatør: Men hvorfor blir ikke det helt riktig?

(2.164) Sondre: Jeg vet ikke.

(2.165) Henrik: Fordi at...

(2.166) Adrian: Jo, fordi at 6 står inntil -3 parentesen og ikke begge

(2.167) Henrik: Ja, ja, så hvis det hadde stått 6 her også (skriver et sekstall mellom parentesene), så skulle du tatt 6 og ganget med det, og så 6 og ganget med det (peker på arket). Men siden det ikke står der, så må du bare ta det og gange inn i den. Ikke sant? Og så når du får det, som er -18, så skal liksom -18 bli ganget med den (peker på (-2)). Og når du tar et tall som er minus og ganger det med et tall som er minus, så får du et positivt.

(2.168) Sondre: Jeg skjønte det nesten.

(2.169) Observatør: Men hva er det? Er det måten det er ført opp på som gjør at det er forvirrende?

(2.170) Sondre: Ja.

(2.171) Observatør: Hva er det med føringen som gjør at det blir forvirrende? Er det at det er så mange tall og mange ting å gjøre? Eller er det mer hvordan det står med parentesene og med fortegn og..

(2.172) Adrian: Det er parentes.

(2.173) Observatør: Parentesene gjør det mye vanskeligere?

(2.174) Oliver: Ja.

(2.175) Observatør: Men hvis vi ser på den neste oppgaven da. Der er det jo også en del ledd og parenteser.

(2.176) Henrik: Jeg er stuck på den første, der må jeg tenke.

(2.177) Sondre: Jeg har ikke sjans.

(2.178) Henrik: Når du tar, liksom hvis det hadde stått gange -18, -2, så hadde det blitt plusstall. Men jeg vet da søren hva som skjer hvis du tar minus og deler på et minus.

(2.179) Adrian: Men det er jo sånn at når du har to positive tall, så kan du ikke gå under 0. Men jeg vet ikke hvordan det er med to minustall at det ikke kan gå over... 0.

(2.180) Henrik: Ja, 1 – 1. Altså, nei -1 -1, da kommer det jo nedover. Du kan ikke kommer over null.

(2.181) Adrian: Men så etter det så blir jeg usikker, for det står et minus foran brøken.

(2.182) Henrik: Ja, men da tenker jeg bare sånn, det er minus der og minus der, da blir det sikkert pluss.

(2.183) Adrian: Ja, for du vet på Dragonbox? Sant? At når et tall står utenfor så kan du ikke bare gange det inn?

(2.184) Henrik: Jeg tror ikke vi kan gange minusen inn.

(2.185) Adrian: Jo, men, okei jeg tenker... Jeg går for det.

(2.186) Henrik: Jeg tror jeg også går for det siden det står liksom minus minus på begge.

(2.187) Oliver: På den siste skal man bytte på begge, opp og nede også eller skal man ikke?

(2.188) Henrik: Adrian du fikk 120?

(2.189) Adrian: - 120

(2.190) Henrik: Å ja, ja det er mer riktig hvis jeg tenker meg litt om. Jeg dobbeltsjekker det (stirrer tankefullt ut i luften). Det er noe jeg ikke har gjort riktig. Det gir mening, men det gir ikke mening.

(2.191) Oliver: Har du svaret der? (nikker mot skriveblokken min)

(2.192) Observatør: Jeg regnet det ut i går.
(2.193) Oliver: Er det riktig?
(2.194) Observatør: Det er toere alle tre?
(2.195) Oliver: Ja.
(2.196) Observatør: Det er ikke helt det jeg kom frem til. Men ikke så langt unna da.
(2.197) Oliver: Jeg har ikke peiling.

(2.198) Henrik: Det må jo være 120, men... Skal det være 120 gange 7?
(2.199) Oliver: Nei, det er feil (visker ut på sitt ark).
(2.200) Henrik: Hvis det er 120 gange 7, så blir det så sykt høyt tall. Det kan jo ikke være det.
(2.201) Adrian: Hvorfor skal det være 120 gange 7?
(2.202) Henrik: Fordi du altså...
(2.203) Oliver: Er det riktig?
(2.204) Henrik: + 15. Ikke sant? Så ganger vi med -8 og får 120. Ikke sant?
(2.205) Adrian: Men hvorfor skal det være gange? Hvorfor skal det være 120 gange?
(2.206) Henrik: Hæ?
(2.207) Adrian: Hvorfor skal det være 120 gange?
(2.208) Henrik: Nei, det er ikke… Nei, det er ikke... Det er... Er det 120 + 7? (spørrende blikk)
(2.209) Observatør: Hva er det du lurer på Henrik?
(2.210) Henrik: Alt.
(2.211) Observatør: Alt?
(2.212) Henrik: Ja.
(2.213) Observatør: Men -120, hvor har du fått det fra?
(2.214) Henrik: Det er ikke minus, eller det skal ikke være minus...
(2.215) Adrian: Jeg har et svar hvert fall.
(2.216) Henrik: Tror jeg. Jo, det skal være minus. Der også den der driten, og så den der... (snakker seg gjennom oppgaven i bakgrunnen, får ikke tak i ordene)
(2.217) Oliver: Hvordan fikk du -204 der? Hvis du tar 9 – 120, hva blir det?
(2.218) Adrian: Nei, jeg tenkte 120 – 84, også -9 + 9.
(2.219) Oliver: Ja men er det... Hva sa du?
(2.220) Adrian: Nei vent.
(2.221) Adrian og Oliver diskuterer Adrian sin utregning, mens jeg snakker med Henrik. Innholdet i begge samtalene er vanskelig å gjengi ettersom det snakkes i munnen på hverandre.
(2.222) Oliver: Svaret er riktig, men hvis du tar -120 – 84 det blir -204, og så tar du + 9..
(2.223) Adrian: Ja, jeg bare nuller de ut fordi den…
(2.224) Oliver: Den er pluss, og den er pluss (peker på arket til Adrian).
(2.225) Adrian: Ja jeg vet det, men det blir jo. Du tar jo den minus den.
(2.226) Oliver: Ja, da tar du 9 – 120.
(2.227) Adrian: Ja, jeg vet det, men liksom… Jeg vet ikke hvordan. men det blir riktig selv om, altså.
(2.228) Oliver: Hvis du tenker i riktig rekkefølge..
(2.229) Adrian: Jeg vet ikke hvordan det blir riktig, men jeg vet...
(2.230) Oliver: 9 – 120 det blir jo 111. -84.
(2.231) Adrian: Det blir 195.
(2.232) Oliver: +9
(2.233) Adrian: Ja.
(2.234) Oliver: Ja +9, det er negativt.
(2.235) Adrian: Å ja (ser tankefull ut og skriver på arket)
(2.236) Henrik: Ååårh! Det er altfor mye (har sittet og regnet litt for seg selv). -111.
(2.237) Observatør: (spør Adrian). Hvorfor bytta du?
(2.238) Adrian: Fordi jeg hadde… Jeg tok -295 + de som jeg trodde var -295, men jeg fikk 286. Nei (ordene forsvinner litt, sier flere tall og puster oppgitt ut)

(2.239) Observatør: Skal vi ta den steg for steg? Eller vil du prøve litt til Henrik?
(2.240) Henrik: Svarte!! (sammenlikner sitt svar med de andres)
(2.241) Henrik: Jeg fikk -37.
(2.242) Adrian: Men hvis vi tar den der -18 og -2 ut av brøken, og bare tar - - 18 da blir det 18 delt på -2, da blir det -9.
(2.243) Oliver: Men det jeg tenker da, hvis du tenker sånn der sånn parentes. Hvis du har 18 + 16 for å ta et tall.
(2.244) Henrik: Jo, men disse her er jo ett regnestykke. Skal den ikke inn i begge to?
(2.245) Oliver: Jo, det var det jeg også tenkte. Så tar du minusen inn der så får du + 18.
(2.246) Henrik: Siden det her er jo en del. Ikke sant? (setter ring rundt - $\frac{(-18)}{(-2)}$)
(2.247) Adrian: Så da blir det jo -204 på meg.
(2.248) Oliver: Ja.
(2.249) Adrian: Da må jeg bytte tilbake.
(2.250) Oliver: Men det er bare hvordan du kom frem til det. Fordi det er fortsatt, liksom. Det var helt riktig regnet det som du fant i stad, men liksom hvordan du fant du + 9? Hvis du tenker, hvis du tar den inn der så blir det -27 og +3. -27/3 blir -9.
(2.251) Adrian: Nei, det blir + 9 fordi det er jo -27 delt på, nei...
(2.252) Henrik: Årh! Nå må jeg gjøre det igjen!
(2.253) Oliver: -27/3 blir -9.
(2.254) Adrian og Oliver ler
(2.255) Oliver: Du kom frem til riktig svar.
(2.256) Adrian: Jeg vet ikke (ler fortsatt)
(2.257) Henrik: -204 fikk jeg nå.
(2.258) Adrian: Altså jeg vet ikke hvordan jeg får det, men…
(2.259) Observatør: Hvis vi ser kun på et ledd av gangen, så ser det ut som dere klarer dere greit.
(2.260) Adrian og Oliver: Ja.
(2.261) Sondre: (rykner på nesen)
(2.262) Observatør: Er du uenig? Hvis du hadde hatt bare denne du skulle regne ut (peker på et av leddene i utregningen), så hadde det vært en grei oppgave?
(2.263) Sondre: Ja, det hadde jeg sikkert klart.
(2.264) Adrian: Nå vet jeg hvordan jeg fikk det!
(2.265) Observatør: Men da lurer jeg på… Når man kunne plukket ut deler av oppgaven hele veien, og det hadde vært greie oppgaver, hvorfor blir det da vanskelig når alt står i ett?
(2.266) Henrik: Hva mente du med alt står i ett?
(2.267) Adrian: Man går i surr, eller jeg går i surr.
(2.268) Observatør: Nå står jo hele det her (peker på oppgaven), så her har du et langt regnestykke.
(2.269) Henrik: Å ja, jeg deler det opp.
(2.270) Oliver: Liksom meg og Adrian i starten tenkte at den var -9.
(2.271) Henrik: Eller jeg delte det ikke opp. Jeg skriver jo en ting om gangen. Og da fokuserer jeg jo på en ting om gangen. Det er ikke sånn at jeg tar alt i hodet på en måte.
(2.272) Observatør: Så du plukker ut den du, og så tar du den? (peker på hvert ledd i oppgaven)
(2.273) Henrik: Jeg vil ikke si jeg plukker den ut, men liksom… Jeg skriver de først opp regnestykket...
(2.274) Oliver: Sånn gjør jeg, tror jeg (nikker mot det jeg nettopp viste til Henrik).
(2.275) Observatør: Du gjør fire operasjoner egentlig?
(2.276) Oliver: Ja.
(2.277) Henrik: Eller vanligvis så skriver jeg opp regnestykket, og da har jeg jo det her. Så da

skal jeg jo først regne ut den (peker på - $\frac{(-18)}{(-2)}$). Da gidder jeg jo ikke regne ut den samtidig som jeg renger ut den. (peker på flere ledd). Så jeg deler det i to, og så husker jeg bare det svaret der i hodet. Og så tar jeg det gange det, og så plusser på svaret. (15 (-8) og plusser svaret til - $\frac{(-18)}{(-2)}$). Etterpå så ender jeg jo opp med det liksom, når jeg har svart på alle disse her (peker på mellomregningen hans). Så må jeg jo regne de svarene sammen til et svar.

(2.278) Observatør: Og endelig svar er -204?
(2.279) Henrik: Jeg håper det.
(2.280) Oliver: Ja.
(2.281) Adrian: Jeg håper det jeg også.
(2.282) Observatør: Ja, jeg kom også frem til -204.
(2.283) Adrian: Det var det jeg fikk i starten.
(2.284) Observatør: Men hvorfor er det egentlig sånn at når det står minus foran en parentes så skal du bytte fortegn?
(2.285) Adrian: Siden du ganger inn minusen.
(2.286) Observatør: Du ganger inn en minus?
(2.287) Adrian: Ja.
(2.288) Henrik: Du må få den inn i parentesen fordi du må ha vekk parentesen. Du må få det som står inntil på utsiden inn, og så når det står minus minus, da får man begge så vil det bli pluss. Og det forklarte du forrige gang med den der hemma 1, 2, 3 minus...

(2.289) Adrian: Hvis du har, hvis du tar minus den siste der. Og så har du – (27 + 3) (skriver på arket). Da blir det jo at du ganger inn minus. Minus gange pluss det er pluss, og minus gange minus det er pluss. Da blir det jo...
(2.290) Observatør: Ja, men kan du gange inn bare et tegn?
(2.291) Adrian: Det høres rart ut, men du kan.
(2.292) Henrik: Ja, du kan det. Men du kan bare gange inn minus vel?
(2.293) Adrian: Ja, du trenger ikke si gange. Du kan jo bare si minus og pluss er pluss. Du trenger ikke si gange.
(2.294) Observatør: Nei, men det er egentlig ganging du gjør?
(2.295) Adrian: Jeg vet ikke.
(2.296) Observatør: Du sa du tenkte at du ganger inn minusen.
(2.297) Henrik: Det er bare det man kaller det, fordi vanligvis ganger man inn et tall.
(2.298) Adrian: Ja, for hvis det hadde stått -1 der, så hadde du jo ganga inn -1.
(2.299) Henrik: Men jeg vet ikke om det er riktig å si at man ganger inn et tall.
(2.300) Observatør: (peker mot Adrian) Ja. Hvis du ganger inn -1, påvirker du noen av tallene i parentesen da?
(2.301) Adrian: Nei, da blir det jo det samme som hvis det hadde vært minus.
(2.302) Observatør: Så når det står pluss foran en parentes, så kan vi jo egentlig si at vi ganger inn noe da også, kan vi ikke det?
(2.303) Adrian: Man ganger med +1.
(2.304) Henrik: Ja, men man sier ikke at man ganger inn pluss, fordi at når man bare sier et tall, så vil det jo være pluss.
(2.305) Adrian: Fordi minus minus...
(2.306) Henrik: Hvis ikke man sier minus foran, så er det pluss.
(2.307) Adrian: -2 gange 1 det er -2. Det blir jo riktig uansett. Så når det da står egentlig, når minus er foran parentes, tror jeg, så sier vi ettall. Hvis det ga mening?
(2.308) Henrik: Jaja, sånn ja! Men det står bare sånn siden du skal liksom ta vekk minusen, så

du ganger det med positiv, men det blir jo fortsatt minus. 1 gange -2 det blir jo...

(2.309)	Adrian:	Men hva er det du mener nå?
(2.310)	Henrik:	Jeg vet ikke. Jeg prøver å plukke ut ting som jeg forstår av det som du sier.
(2.311)	Adrian:	Men når det er minus her så står det jo -1, og når det er pluss, så kan du bare fjerne pluss så står det 1. (viser ved å skrive på arket). Så ganger du det med 1 som er 27, og så ganger du det med 1 som er -3. Da blir det jo det samme, og da kan du løse opp parentesen siden du ikke har noe foran.
(2.312)	Henrik:	Såpass skjønte jeg jo, men hvis det hadde stått minus inni parentesen. Hvis det hadde stått -27 – ...
(2.313)	Adrian:	Ja, -27 – 3.
(2.314)	Henrik:	Ja, 1 gange -27, det blir jo -27.
(2.315)	Adrian:	Ja.
(2.316)	Oliver:	Ja, men hvis det er det minus, så er det jo -1 gange. Da blir det 27.
(2.317)	Adrian:	Siden når det er minus så skal du jo bytte fortegnene. Og da gir det jo mening at det står -1. Fordi da når du ganger med -1, så blir det jo +27 og +3.
(2.318)	Observatør:	Har dere hatt om ligninger?
(2.319)	Oliver:	Vi har det nå.
(2.320)	Observatør:	3x – 2x.
(2.321)	Adrian:	Så blir det jo x.
(2.322)	Observatør:	Hvorfor skriver vi ikke 1x?
(2.323)	Oliver:	Fordi det er én x som bare står der egentlig.
(2.324)	Adrian:	Matte vil forkorte alt.
(2.325)	Observatør:	Akkurat. Så derfor skriver vi bare minusen istedenfor -1.

Vedlegg 8: Transkripsjon av tredje observasjon

Transkripsjon av tredje observasjon

Varighet: 34 minutter og 58 sekunder

Symbolforklaringer:

,	Samme som skriftlig tekst
.....	Setningen fullføres ikke/hengende i lufta
?	Spørsmål eller indikasjon til spørsmål
!	Som i skriftlig tekst
( )	Beskrivelse av det observatøren ser, for eksempel gestikulering
Mellomrom mellom linjene	Stille/elevene regner

Observasjonsøkt 3:

(3.1)	Observatør:	Jeg er litt usikker på hvor mye dere har jobbet med dette.
(3.2)	Sondre:	De har nok, men ikke meg.
(3.3)	Henrik:	Jeg er ikke noe god på det, jeg har glemt alt.
(3.4)	Observatør:	Dere kan bare begynne på første oppgave.

(3.5)	Oliver:	Jeg tror jeg har det.
(3.6)	Sondre:	Jeg har et svar, men det er nok feil.
(3.7)	Henrik:	Ja, jeg også.
(3.8)	Adrian:	Vi har ikke samme (ser på Sondre sitt ark).
(3.9)	Observatør:	Hva er det dere har fått?
(3.10)	Adrian:	Jeg fikk $-6x^2 + 2x + 24$
(3.11)	Sondre:	Jeg fikk $4x^2 + 8x – 16$.
(3.12)	Henrik:	Jeg fikk $9x^2$
(3.13)	Oliver:	Jeg fikk også $-9x^2 + 5x + 26$
(3.14)	Henrik:	+ jeg må se hvor mange x-er jeg har.
(3.15)	Observatør:	Ja, litt forskjellige svar.
(3.16)	Henrik:	$+5x + 26$.
(3.17)	Observatør:	Men hvordan begynner dere på en slik oppgave?
(3.18)	Sondre:	Jeg prøvde å få bort parentesene.
(3.19)	Observatør:	Hvordan får du de bort?
(3.20)	Adrian:	Ganger inn tallet som står ved siden av.
(3.21)	Henrik:	Jeg fikk + 26, ja altså. $-9x^2 + 5x + 26$. Fikk du også det?
(3.22)	Oliver:	Ja.
(3.23)	Adrian:	Jeg er ikke helt sikker på den.
(3.24)	Henrik:	Å, skal jeg si deg hva jeg gjorde?
(3.25)	Observatør:	Ja.

(3.26)	Henrik:	Jeg tok -2 og ganget det med x^2, så blir det $-2x^2$. -2 ganger x blir -2x. Og så ganget jeg med -3. Det blir 6. Siden det er minus og minus blir pluss, ja altså, når du ganger. Og så femtallet i neste parentes står på den andre siden, så du bare tar det over på venstre, fordi det er lettere. Så 5 gange x er 5x. 5 gange $-x^2$ er $-5x^2$. Og 5 gange 4 er 20, og så er det neste parentes. Da står -2 på høyresiden, så jeg tar den over på venstre. Og så -2 gange x^2 er $-2x^2$, og -2 gange -x er 2x.
(3.27)	Adrian:	Det var det jeg ikke gjorde. Jeg tok bare + x^2 -x og så – 2.
(3.28)	Observatør:	Ja, du glemte å gange ut den siste parentesen.
(3.29)	Adrian:	Nei, det er litt forvirrende når det står -2 for jeg er ikke helt sikker på om det er et fortegn eller ikke.
(3.30)	Observatør:	Ja, om det er et regnetegn eller fortegn?
(3.31)	Adrian:	Ja, men jeg ser hva som er forskjellen.
(3.32)	Observatør:	Men dere andre da, hva var det dere tenkte med den -2 her (peker på oppgaven).
(3.33)	Henrik:	Den siste, -2?
(3.34)	Observatør:	Ja.
(3.35)	Henrik:	Ehm, jeg tenkte at siden jeg hadde flyttet over femtallet på venstresiden av forrige parentes, så står det ikke ingenting der, så da kunne jeg like godt bare bytte ut den plassen med -2. Og ha -2 der.
(3.36)	Oliver:	Den bakerste -2 er minusen mye nærmere enn for eksempel – 2. (legger trykk på ordet minus.)
(3.37)	Adrian:	Mm, jeg så det etter jeg hadde regnet ut så ...
(3.38)	Sondre:	Jeg så ikke noe.
(3.39)	Observatør:	Du så ikke noe?
(3.40)	Sondre:	Nei.
(3.41)	Observatør:	Men ganget du eller trakk du fra?
(3.42)	Sondre:	Jeg tok litt av hvert.
(3.43)	Observatør:	På den siste der?
(3.44)	Sondre:	Den bare satt jeg ned.
(3.45)	Observatør:	Ja, men hvis de her hadde vært hver for seg, hadde det vært lettere da? Å tatt den parentesen og bare regnet det, så bare den og bare den. (peker på hver av parentesene)
(3.46)	Adrian:	Ja.
(3.47)	Oliver:	Ja, det er enklere.
(3.48)	Henrik:	Nei, jeg bare fjerner det i hodet mitt.
(3.49)	Observatør:	Du fjerner det i hodet?
(3.50)	Henrik:	Jeg tenker liksom når jeg gjør sånn som det, så når jeg kommer til det femtallet der og skal legge det over på venstre, så bare gjør jeg så som dette her over arket og later som om det ikke er der. Siden det hjelper meg på en eller annen måte.
(3.51)	Adrian:	Siden det plusstallet er foran ...
(3.52)	Henrik:	Jeg bare diller sånn. Men så er det minus, pluss og så minus blir jo egentlig bare minus. Så det kommer der med et plusstall også.
(3.53)	Observatør:	Men det er det at det blir så langt som gjør at det blir litt mye å holde styr på?
(3.54)	Oliver:	Ja.
(3.55)	Observatør:	Men det at det er x^2 her. Har det noe å si på om det blir vanskeligere?
(3.56)	Oliver:	Nei.
(3.57)	Henrik:	Jeg bare fjerner det og slenger det på etterpå siden av og til så tenker jeg sånn. Ja, -2 gange x^2 blir, det er liksom litt sånn ... Siden da blir det så overtenking, men hvis jeg bare fjerner i andre der, så blir det

		lettere å tenke -2 gange x så er det bare -2x. Og så bare legger jeg på den etterpå (peker på eksponenten i potensen x^2).
(3.58)	Oliver:	Ja.
(3.59)	Henrik:	Fordi når det står veldig mye så er det veldig lett å overtenke.
(3.60)	Observatør:	Ja, så det er det å bryte ned hele tiden og gjøre det minst mulig for at det skal bli lettere?
(3.61)	Oliver:	Ja.

(3.62)	Observatør:	Okei, men skal vi prøve oss på den neste da. Det er ei ligning da. Har dere hatt om ligninger?
(3.63)	Alle:	Ja.
(3.64)	Sondre:	Det er jeg håpløs på.
(3.65)	Henrik:	Århh, det er dritt. Vi har ikke hatt så veldig mye om det. Vi har hatt sånne enkle noen, men så må vi bare finne ut de vanskelige selv.

(3.66)	Henrik:	Skal man først gange ut parentesene før man begynner å «flytte og bytte» holdt jeg på å si?
(3.67)	Adrian:	Det kan vel du velge selv.
(3.68)	Henrik:	Okei.

(3.69)	Henrik:	Er du ferdig allerede? (ser bort på Oliver)
(3.70)	Adrian:	Jeg er også ferdig.
(3.71)	Henrik:	Det er «scam», det er «dritscam»! Jeg har bare kommet til andre linje. Begynte dere tidligere eller noe?

(3.72)	Oliver:	Å nei, der har jeg gjort en feil.
(3.73)	Sondre:	Godt å høre.
(3.74)	Henrik:	Det er lett å gå i surr synes jeg.
(3.75)	Adrian:	(ser på arket sitt) Hva er det jeg har gjort? Ja, okei nå er jeg ferdig. Jeg satt på prøve også.
(3.76)	Sondre:	Såpass ja.
(3.77)	Adrian:	Jeg har ikke peiling på om jeg har gjort det riktig.
(3.78)	Henrik:	(ser på arket til Oliver og sammenligner med sin utregning). Men hva skjer med den?
(3.79)	Oliver:	Hm?
(3.80)	Henrik:	+1?!
(3.81)	Sondre:	Nå kom jeg feil.
(3.82)	Henrik:	Det er jo 3. Det er jo 3 gange 1?
(3.83)	Oliver:	Nei, der gjorde jeg også feil.
(3.84)	Henrik:	Årk!
(3.85)	Oliver:	Så du på min nå? (ler)
(3.86)	Henrik:	Skifta du fortegn den? (ser på arket til Oliver) Jeg skal bare sjekke, fordi jeg er så usikker. Liksom det har jo ikke noe å si om vi skal regne hvis vi ikke vet hvordan vi regner.
(3.87)	Observatør:	Hva er det du er usikker på?
(3.88)	Henrik:	Ehm, du vet når du skal «flytte og bytte». Ikke sant? Så vil du helst ha x-ene på den ene siden og vanlige tall på den andre. Så hvis det ...
(3.89)	Adrian:	Det har ikke noe å si hvilken side du har x på.

(3.90)	Henrik:	Hvis det allerede står, liksom hvis det er et av de vanlige tallene her da (peker til venstre) og x-ene her (peker til høyre), så står det allerede et vanlig der (peker til venstre igjen). Trenger jeg å bytte fortegn på det?
(3.91)	Observatør:	Nei.
(3.92)	Henrik:	Bare de jeg bytter?
(3.93)	Oliver:	Du bytter de du flytter over.
(3.94)	Henrik:	Okei.
(3.95)	Adrian:	Ikke flytt, ikke bytt.
(3.96)	Henrik:	Da tror jeg jeg har gjort noe feil. Nå må jeg tenke.
(3.97)	Observatør:	Hvis det står, så beholder du.
(3.98)	Henrik:	Her er det bare å vente altså. (snakker litt for seg selv mens han regner)
(3.99)	Adrian:	Jeg fikk x = 2, men så fikk jeg 1 = 1 på å sette på prøve.
(3.100)	Oliver:	Det er riktig det.
(3.101)	Sondre:	Fytti, jeg har mye lengre enn det dere har (ser på arket til Oliver og Adrian). Se på det her (viser sitt ark og ler).
(3.102)	Adrian:	Du har gjort på den vanskelige måten, den kompliserte måten.
(3.103)	Henrik:	Jeg tror jeg har funnet ut av det.
(3.104)	Oliver:	Men du kan ikke ha, (peker på arket til Henrik) du må ha én x. Og så må du dele på 5.
(3.105)	Observatør:	Du er nesten i mål.
(3.106)	Oliver:	Men du har gjort riktig til nå.
(3.107)	Henrik:	Ja, delt på 2 ...
(3.108)	Oliver:	2 eller
(3.109)	Henrik:	Nei. (visker ut og snakker litt lavt for seg selv mens han retter opp)
(3.110)	Adrian:	Jeg må se hva du har gjort her (ser på arket til Sondre)
(3.111)	Sondre:	Jeg tror du kan skjønne det nesten.
(3.112)	Adrian:	Du har glemt å bytte på den ene der.
(3.113)	Sondre:	Har jeg det?
(3.114)	Adrian:	Du har glemt å bytte her. (skriver en minus på arket)
(3.115)	Sondre:	Nei der står det et tretall. (peker på arket)
(3.116)	Adrian:	Er det et tretall?
(3.117)	Sonde:	Ja (ler).
(3.118)	Adrian:	Er det en minus?
(3.119)	Sondre:	Jeg vet ikke.
(3.120)	Adrian:	Hvis ikke det er en minus, så har du ingen minus der.
(3.121)	Sondre:	Jeg vet ikke.
(3.122)	Henrik:	Hvis ikke det er en minus, så har du ikke minus. Det sa meg null. (ler med Sondre)
(3.123)	Adrian:	Men det er liksom han har ...
(3.124)	Henrik:	Det er jo selvfølgelig. Hvis ikke det er en minus, så har du ikke en minus.
(3.125)	Adrian:	Ja, men han hadde en parentes som gikk liksom sånn (viser med hendene i lufta) og tallet sto midt på parentesen. Så jeg skjønte ikke om det var en minus eller parentesen.
(3.126)	Observatør:	Ja, hva synes dere om den her oppgaven?
(3.127)	Sondre:	Komplisert som vanlig.
(3.128)	Adrian:	Som vanlig.
(3.129)	Henrik:	Nei, det var greit nok. (ler)
(3.130)	Observatør:	Når du bare kom i mål?
(3.131)	Henrik:	Ja.

(3.132)	Adrian:	Jeg og Oliver har gjort mer av dette her enn dere to da.
(3.133)	Sondre:	Jeg har ikke gjort en dritt av dette før.
(3.134)	Observatør:	Men hvorfor var denne vanskelig?
(3.135)	Sondre:	Jeg har ikke lært det.
(3.136)	Henrik:	Vi har ikke lært alle reglene for det. Jeg bare antar ting og prøver det.
(3.137)	Observatør:	Men hvor var det det stoppet opp det? Hvor var det det begynte å bli vanskelig?
(3.138)	Sondre:	På begynnelsen.
(3.139)	Henrik:	Nei. det var… Siden jeg visste jo ikke om de der som allerede sto der skulle bytte.
(3.140)	Observatør:	Men å løse opp parentesene.
(3.141)	Oliver:	Det var greit.
(3.142)	Observatør:	Gikk det greit.
(3.143)	Adrian:	Det var det jeg gjorde først.
(3.144)	Sondre:	Jeg prøvde å gjøre det, men det gikk litt i surr. Når jeg begynte med det, så var jeg ferdig med den (peker på utregningen), og etter det har jeg ikke skjønt hva jeg gjorde.
(3.145)	Adrian:	3 + 2x, 3 ... hvorfor er det et ettall der?
(3.146)	Sondre:	Jeg tror jeg flytta den.
(3.147)	Adrian:	Å ja. Men den må bak.
(3.148)	Sondre:	Bak? Er det også en regel?
(3.149)	Adrian:	Ja.
(3.150)	Sondre:	Okei.
(3.151)	Adrian:	For hvis ikke får du gange 1.
(3.152)	Henrik:	Alt som allerede står på den ene siden liksom, skal bare stå der, og alt det som skal over, skal lengst vekk (peker til andre siden av rommet).
(3.153)	Sondre:	Ja, okei.
(3.154)	Observatør:	Må det det?
(3.155)	Oliver:	Nei, ikke lengst vekk.
(3.156)	Adrian:	Så lenge det er på høyresiden.
(3.157)	Sondre:	Så det var ikke feil?
(3.158)	Observatør:	Du må bare være litt forsiktig med hvilke fortegn som er med. Hvis du flytter det foran noe, så må du jo ha et eller annet fortegn mellom dem, ellers blir det at du skal gange dem sammen.
(3.159)	Adrian:	Og det har du gjort. Du har tatt gange 1. Det skal være + 1.
(3.160)	Sondre:	Jaja.
(3.161)	Observatør:	Ja, men etter parentesene var løst opp da?
(3.162)	Adrian:	Ganske «straight forward», bare "flytt og bytt». Så fikk du 10 = 5x, så delt på 5, så får du 2 = x.
(3.163)	Observatør:	Men du har valgt å ha… Alle har vel valgt å ha x-ene på høyre side.
(3.164)	Sondre:	Jeg har på venstre.
(3.165)	Adrian:	Det er det som også blir komplisert.
(3.166)	Observatør:	Ja, men har du… Her har du ikke det. Her har du den på høyre, og så har du flytta den over til venstre til slutt. (snakker til Sondre og peker på arket hans)
(3.167)	Sondre:	Ja, det var sånn du mente.
(3.168)	Observatør:	Ja, for det har alle sammen gjort som jeg kan se.
(3.169)	Sondre:	Jeg så jo på Adrian og han hadde på venstre så jeg satset på det var riktig.
(3.170)	Observatør:	Ja, hvorfor har dere hatt x-ene på høyre siden, og så tar dere det over til venstre til slutt?

(3.171)	Adrian:	Fordi hvis det hadde stått på venstre, så hadde det stått -x, og da blir det bare ennå vanskeligere.
(3.172)	Oliver:	Men liksom vi sier det er x som er 2. Det er ikke 2 som er x.
(3.173)	Henrik:	2 = x, x = 2. 1 = 1. Hvis 2 er det samme som x, så er jo x det samme som 2.
(3.174)	Oliver:	Ja, ja.
(3.175)	Henrik:	Det er det samme, men det er bare sånn måten du sier det på gjør det ene riktigere enn det andre.
(3.176)	Adrian:	Men du skal alltid på slutten ha x-en på venstre side.
(3.177)	Observatør:	Hvorfor det?
(3.178)	Adrian:	Læreren vår sa det.
(3.179)	Oliver:	Det er bare sånn det er.
(3.180)	Henrik:	Jeg tror det er. Kanskje det har noe å gjøre med når man regner et vanlig regnestykke. Så sier læreren at rekkefølgen skal alltid være sånn der at det mest kompliserte skal være nærmest inntil, eller man sier ikke det da, men for eksempel når noe er opphøyd så skal det ...
(3.181)	Adrian:	Det største.
(3.182)	Henrik:	Så skal det være… Ja, det største være til venstre, og så kommer det liksom sånn. Etter det så kommer variablene a, b, c ...
(3.183)	Observatør:	Ja, sånn som her oppe at du har x^2 først, (peker på oppgave 1) så og så tall?
(3.184)	Henrik:	(nikker)
(3.185)	Observatør:	Ja, for når man regner i ligninger så… Og dere har 2 = x er jo akkurat det samme som x = 2. Det er jo litt sånn, den her kan du lese begge veien (peker på =). Så det var derfor jeg lurte på hvorfor dere byttet den.
(3.186)	Adrian:	Fordi læreren vil ha det sånn.
(3.187)	Observatør:	Vil ha x-en der? (peker på venstre side av =)
(3.188)	Henrik:	Mhm, det er lettere. Hvis du liksom skal finne x-en så er det lettere si x = og så tallet på en måte. Det høres mer riktig ut enn 2 =.
(3.189)	Oliver og Adrian:	Ja.
(3.190)	Henrik:	Det blir riktig så lenge du har regnet det ut på en måte. Men uten et regnestykke så hadde det blitt mye bedre og satt x =.
(3.191)	Observatør:	Men det er derfor jeg lurte på hvorfor dere da har valgt å flytte x-en på høyre side når dere har fått beskjed fra læreren deres at den skal være på venstre.
(3.192)	Henrik:	Ja, på svaret.
(3.193)	Observatør:	Ja. Så da gjør dere jo dobbelt arbeid (peker fra den ene til den andre siden med hendene).
(3.194)	Oliver:	Å ja, jeg tar det rett over på venstre. Når jeg skal ta x-en, så tar jeg det på venstre liksom.
(3.195)	Henrik:	Vent, antok du at vi kom til å gjøre dette her? Siden det virker veldig planlagt.
(3.196)	Observatør:	Ehm, litt blanda. Noe er planlagt, og noe er ikke planlagt. For hvis dere hadde hatt x-ene på venstre side, hva hadde dere endt opp med mot slutten da?
(3.197)	Adrian:	Da hadde vi fått minus ... Da hadde det blitt -5x.
(3.198)	Observatør:	Mm, og på andre siden hadde du fått?
(3.199)	Oliver:	-10 vel?
(3.200)	Sondre:	Ja.
(3.201)	Observatør:	Og da er det vanskeligere?
(3.202)	Adrian:	Ja, for da må du gange det med -1.

(3.203)	Observatør:	Må du det?
(3.204)	Oliver:	Nei, du kan bare… Når du ser sånn som jeg har gjort, så er det -x der og 2 der. Da kan jeg bare bytte på begge to.
(3.205)	Observatør:	Ja, for du har… Ja, du har den på venstre.
(3.206)	Oliver:	Hvis man ganger det med -1 her nede, så blir det jo x = 2.
(3.207)	Observatør:	Ja, hvis du ser på den linja over der. Kunne du gjort noe der så du hadde sluppet den neste linja?
(3.208)	Oliver:	Ja mm... nei.. (mumler noe)
(3.209)	Observatør:	Du deler på 5.
(3.210)	Oliver:	Ja?
(3.211)	Henrik:	Stryket ut femmeren?
(3.212)	Observatør:	Også får du -x. Kunne du fått x bare?
(3.213)	Oliver:	Hvis jeg bare (lyden forsvinner litt) eller noe sånn.
(3.214)	Observatør:	For hvis vi har et negativt tall, og så deler vi på et eller annet, og så ønsker vi at svaret blir positivt.
(3.215)	Oliver:	Da kunne vi ganget det med -1. Eller noe sånn.
(3.216)	Henrik:	Blir deling på minus og minus pluss?
(3.217)	Observatør:	Etterpå kunne du tatt og så ganget med -1 for eksempel. Det er jo egentlig det du har gjort når du skriver, men jeg tenker før der igjen når du har -5x = -10. Kan du ta alt i en da? Og så bare komme frem til x = 2?
(3.218)	Oliver:	Det er jo garantert en metode i og med at du sier det sånn, men jeg skjønner ikke den metoden.
(3.219)	Observatør:	Jeg bare lurer på hvorfor du deler på 5?
(3.220)	Oliver:	Fordi da blir det bare x igjen liksom.
(3.221)	Observatør:	Ja, -x igjen.
(3.222)	Oliver:	Ja.
(3.223)	Observatør:	Men det er derfor jeg lurer på, istedenfor å dele på 5 kan du dele på noe annet så det bare står x?
(3.224)	Oliver:	Å, -5!.
(3.225)	Observatør:	Ja, da hopper du over hele neste linje.
(3.226)	Oliver:	Ja.
(3.227)	Observatør:	For da har du minus delt på minus som blir pluss.
(3.228)	Oliver:	Ja.
(3.229)	Observatør:	Det samme er det her også, (ser på Adrian sitt ark). For du nevnte at du synes det var vanskeligere hvis du får minus her (peker på venstre siden).
(3.230)	Adrian:	Ja, det blir ikke akkurat vanskeligere, men jeg vil helst at det ikke skal bli minus.
(3.231)	Observatør:	Men hvorfor? Hva er det som er så ille med minus?
(3.232)	Adrian:	Fordi minus må man bytte rundt.
(3.233)	Observatør:	Ja, du må gjøre ekstra arbeid på en måte?
(3.234)	Adrian:	Ja, for ingen vil ha -x = -2.
(3.235)	Observatør:	Ja, skal vi gå videre på neste oppgave.

(3.236)	Henrik:	Åi, den var drit.
(3.237)	Adrian:	Jeg ser hva svaret blir, men hvordan skal jeg komme frem til det.
(3.238)	Henrik:	Jeg bare prøver på helt vanlig måte, så ser jeg hvordan det funker.
(3.239)	Adrian:	Jeg tror jeg vet hva jeg må gjøre.
(3.240)	Henrik:	Skal vi bare dele opp x-en? Kvadratrot? Hva er det du driver med?
(3.241)	Adrian:	Det er jo det du må gjøre.

(3.242)	Henrik:	Hæ? Nå skjønner jeg ingenting.
(3.243)	Adrian:	Jeg vet ikke hvordan man skriver det med kvadratrot, men jeg håper det er sånn.
(3.244)	Oliver:	Jeg har gjort feil her nå.
(3.245)	Henrik:	x gange x
(3.246)	Sondre:	Å ja.
(3.247)	Observatør:	Har dere hatt om dette som kalles for andregradsligninger?
(3.248)	Sondre:	Nei.
(3.249)	Adrian:	Vi har vært borti det meg og Oliver.
(3.250)	Oliver:	Har vi det?
(3.251)	Henrik:	Jeg har ikke.
(3.252)	Adrian:	Ja, vi var nesten borti det.
(3.253)	Observatør:	Men hvis ikke, klarer dere å komme til et uttrykk der det står x^2 = ?
(3.254)	Oliver:	Ja.
(3.255)	Sondre:	25.
(3.256)	Observatør:	Hva er det x^2 er for noe? Hva er det det samme som?
(3.257)	Henrik:	Åi, og hvis du tar kvadratroten av x^2 og kvadratroten av
(3.258)	Adrian:	Ja det var akkurat det jeg gjorde.
(3.259)	Observatør:	Ja, og så når han da tar kvadratrot… Hva er det kvadratrot betyr for noe?
(3.260)	Adrian:	x gange x på en måte.
(3.261)	Observatør:	Men kvadratrot spør jo hvilket tall tall kan du gange med seg selv for å få det som står inni roten. Så her har Adrian tatt kvadratroten av x^2 og kvadratroten av 25. Og kvadratroten av x^2 ...
(3.262)	Henrik:	Jeg fikk $x = 5$.
(3.263)	Observatør:	Ja, men skjønner dere hvorfor dere gjør dette her?
(3.264)	Adrian:	Ja.
(3.265)	Sondre:	Jaa.
(3.266)	Observatør:	For egentlig så står det jo $x \cdot x = 25$. så må du da lage et gangestykke med to like tall som blir 25. Og det er $5 \cdot 5$.
(3.267)	Oliver:	Jaa!
(3.268)	Henrik:	Så da må en ene x-en være 5.
(3.269)	Adrian:	Er det sånn du skriver kvadratrottegnet?
(3.270)	Observatør:	Ja, du trenger egentlig ikke ha med den mellomregningen. Da kan bare skrive det sånn. (peker på utregningen hans)
(3.271)	Adrian:	Ja, jeg vet det, men jeg... Det var ikke meningen å ha med den.
(3.272)	Observatør:	Det jeg lurer på da er, kan det bli noe annet enn 5?
(3.273)	Henrik:	Hva snakker vi her?
(3.274)	Adrian:	Jeg tror ikke det.
(3.275)	Observatør:	Kan x være noe annet enn 5?
(3.276)	Adrian:	Nei.
(3.277)	Sondre:	Nei!
(3.278)	Henrik:	Nei, fordi du må gange 5 med 5 for å få 25.
(3.279)	Observatør:	Men er det noe annet vi kan gange med seg selv å få 25?
(3.280)	Henrik:	Ehh...
(3.281)	Adrian:	Nei.
(3.282)	Henrik:	Nei, det er ikke det.
(3.283)	Henrik:	Du vet noe vi ikke vet føler jeg. Jeg vil ikke tro det ...
(3.284)	Observatør:	Husker du første ganga så ble du veldig irritert, fordi jeg spurte deg om en regel?
(3.285)	Henrik:	Ja, men jeg husker ikke hva det var.
(3.286)	Observatør:	Som du skulle forklare.

(3.287) Henrik: Ja, minus minus.
(3.288) Observatør: Ja minus og minus det blir?
(3.289) Henrik: Å ja, -5 gange -5.
(3.290) Oliver: Ja.
(3.291) Observatør: Ja, det blir også 25.
(3.292) Henrik: Ikke spør om det igjen. Jeg har glemt det, jeg vil ikke forklare det.
(3.293) Observatør: Nei, men du er enig i det?
(3.294) Henrik: Ja.
(3.295) Observatør: Sånn at både 5 og -5 kan være svaret her. Men kunne vi hatt for eksempel ...
(3.296) Adrian: Men hvordan får man -5 da?
(3.297) Observatør: Hvordan du regner deg frem til -5?
(3.298) Adrian: Ja.
(3.299) Observatør: I en sånn ligning så kan man ikke vite om det er 5 eller -5, så du må rett og slett bare skrive på x = 5 eller x = -5.
(3.300) Henrik: Eller så kan du bare bytte plass på x^2 og 25.
(3.301) Observatør: Ja, hva skjer da?
(3.302) Henrik: Da får du minus på begge.
(3.303) Observatør: Hvordan blir det?
(3.304) Henrik: Da får du jo -5, og så -x, og så kvadratrot.
(3.305) Observatør: Sånn tenker du på? (skriver $-\sqrt{25} = -\sqrt{x^2}$ på et ark)
(3.306) Adrian: Ja det er sånn han tenker.
(3.307) Henrik: Nei, hvis du tar -25. Ikke sant? Og så kvadratrota av -25, og så finner du kvadratrota av $-x^2$.
(3.308) Observatør: Ja, du vil at det skal stå sånn (skriver $\sqrt{-25} = \sqrt{-x^2}$ på et ark)
(3.309) Henrik: Ja.
(3.310) Observatør: Men går det an å finne?
(3.311) Oliver: Nei.
(3.312) Observatør: To tall som ganger, altså et tall du ganger med seg selv og så blir det 25?
(3.313) Henrik: Nei, dritt! Det går ikke. Du kan ikke finne kvadratrota av minustall. Fordi at minus og minus blir pluss.
(3.314) Observatør: Ja så hvis det hadde stått sånn her da (skriver $-\sqrt{25} = -\sqrt{x^2}$ på et ark).
(3.315) Adrian: Men hva betyr det, minus kvadratrot?
(3.316) Observatør: Det betyr… Altså du kunne egentlig satt en parentes rundt her da (skriver $-(\sqrt{25})$). Så regn ut det (peker på $\sqrt{25}$), og så setter du på minusen.
(3.317) Adrian: Så kvadratrota er en parentes på en måte?
(3.318) Observatør: Ja, på en måte. Så hvis du hadde hatt sånn (peker på $-\sqrt{25} = -\sqrt{x^2}$) så hadde du fått -5 her. Men på denne siden så vil du få et problem å ta minus ... (peker på $\sqrt{-25} = \sqrt{-x^2}$).
(3.319) Adrian: Det går ikke.
(3.320) Observatør: Nei, så man gjør det veldig vanskelig for seg selv hvis man bytter rundt på det.

(3.321) Observatør: Men jeg skal ikke spør om det jeg spurte dere om første gangen, men jeg spør dere om noe annet. Fordi første gangen så spurte jeg hvordan dere synes oppgavene var, så sa dere at de var litt lette i forhold til det dere har jobbet med før. Men da nevnte du, Henrik, at dere hadde vanskeligere oppgaver, fordi dere hadde regnet med parentes med minus foran. Og da sa du at da måtte man bytte fortegn på alle. Hvorfor må du det?

(3.322) Henrik: Fordi det blir jo det samme som -1. Det kan jo likegodt stå -1 der.

(3.323) Observatør: Hvordan blir det da hvis det står -1 der?

(3.324) Oliver: -1 gange alt det som står i parentesen.

(3.325) Observatør: Men da har du igjen den reglen som ...

(3.326) Henrik: Ja, kan du bare repetere den? For jeg husker den ikke.

(3.327) Observatør: At minus gange minus blir pluss?

(3.328) Henrik: Ja, skriv det opp. Jeg husker det ikke. Jeg kom til å tenke på det, men så tenkte jeg bare sånn 1. Og så har du 5, og så bare teller du ned så blir det ... 1, 2, 4, 3, 3, og så bare det ga ikke mening.

(3.329) Observatør: Du tenker på det mønsteret som jeg tegnet opp, ikke selve regelen?

(3.330) Henrik: Ja, skriv mønsteret.

(3.331) Observatør: Ja, du har mønster med ganging og mønster med pluss og minus.

(3.332) Henrik: Den med ganging.

(3.333) Observatør: Hvis du da begynner med $-3\cdot1$, $-3\cdot0$, $-3\cdot-1$. Her vil du da få -3 (peker på $-3\cdot1$), $-3\cdot0$ er 0, ser dere her øker vi med tre. Fra -3 til 0 så er det tre. Så da må neste være en positiv 3. Ser dere det? Hele tiden endres det med tre. Det plusses på tre hver gang.

(3.334) Henrik: Tøft.

(3.335) Observatør: Så det er på bakgrunn av det mønsteret at vi sier at minus og minus er nødt til å bli pluss.

(3.336) Henrik: Ja.

(3.337) Observatør: Men når jeg viste dere denne sist, så var enkelte av dere overbevist om at jeg hadde bevist det. Det er jo ikke et direkte bevis, men holder det å legge det frem sånn?

(3.338) Sondre og Adrian: Ja.

(3.339) Observatør: Er dere fornøyd med det? Eller trenger dere noe mer bevis på det?

(3.340) Sondre og Adrian: Nei.

(3.341) Observatør: Føler dere at på ungdomsskolen på det nivået dere er så holder det med det?

(3.342) Oliver: Ja, det er greit nok hvis noen sier det.

(3.343) Observatør: Ja, så de fleste vil bare si at det går greit når en bare har en regel som noen sier at den må dere bare pugge, for sånn er det?

(3.344) Sondre og Henrik: Ja.