

Irrasjonalitet og det gyldne snitt

Graden av irrasjonalitet og egenskaper ved ϕ

Ragnar Glendrange

VEILEDER

Niclas Larson

Universitetet i Agder, 2019

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag

Forord

Jeg husker veldig godt første gang jeg virkelig møtte det gylne snitt. Det var eksamen i matematikk på ungdomsskolen. Oppgaven handlet først om å fortsette fibonaccifølgen, deretter å sette sammen kvadrater med sidelengde tilsvarende fibonaccitalene. Til min store forbauselse, ble lengden delt på bredden av denne sammensatte figurene nærmere og nærmere et spesifikt tall. I oppgaven var det kommentert at dette tallet dukker opp noen steder i naturen.

Det var under denne eksamen jeg virkelig begynte å danne tanker om at matematikk var et slags underliggende rammeverk for naturen. Disse tankene skulle senere blomstre til en enorm interesse for biologi og fysikk. Men det gylne snitt så jeg ikke så mye mer til, det dukket ikke særlig opp i mine studier innenfor realfag. Men det siste året har det vært muligheter i studiet hvor jeg har valgt å se litt nærmere på platonske legemer, som er geometriske figurer som har en nær relasjon til det gylne snitt. Kort sagt ga det blod på tann og det var ikke lenger så mye tvil om hvilket tema jeg ville fordype meg i på masteroppgaven.

Før studiene rettet mot oppgaven startet, var det gylne snitt et kjent fenomen og det var ingen problem å gjengi hva det var, konstruere det eller identifisere enkle representasjoner av det. Det som manglet var *hvorfor* tallet var så spesielt og *hvorfor* det fremtrådte så mange steder. Studiene av det gylne snitt i henhold til oppgaven, all selvstendige regningen og skrivingen av denne oppgaven har vært det mest interessante jeg har gjort i matematikk hittil og det har vært utrolig opplysende i forhold til spørsmålene jeg satt med i starten.

Underveis i oppgaven oppdaget jeg at dette er langt mer komplekst enn hva jeg hadde trodd, og én oppgave er på ingen måte tilstrekkelig for å kartlegge dette emnet. Men med dette innblikket har jeg gode muligheter til å studere noen av strukturene videre også utenfor denne oppgaven. For som en person som tilbringer mye tid i naturen og har en fascinasjon for matematikk og realfag generelt, er nettopp dette et tema som er bindende mellom de verdenene og dermed svært givende å studere.

Takk til alle som indirekte har bidratt til denne oppgaven med diskusjoner, samtaler og motiverende ord. Det har vært et morsomt tema å diskutere, selv om det til tider har grenset mot at både jeg og samtalepartner har blitt gale av det. Den største takken går til veilederen min Niclas Larson. Ikke bare på grunn av veiledningen, men også på grunn av hans væremåte, holdning og tilnærming til faget. For min del har det vært beroligende i en ellers stressende tid både med studier, jobb og fritid. Han var med andre ord helt riktig veileder til riktig tid. Tusen takk!

Sammen drag

Det gy lne snitt er et forholdstall som har v ert kjent i over tusen r gjennom skriftlige kilder, og har muligens v ert kjent lengre uten at dette har blitt nedskrevet. Tallet er nok mest kjent for sin relasjon med fibonacci-tallrekken, arkitektur og kunst, men fremtrer ogs  naturlig (approximert) i solsikker, kongler, vekstm nstre og mye mer, og i abstrakt geometri i sammenhenger man ikke n dvendigvis forventer  finne det. S  hva er s  spesielt med det gy lne snitt?

Mye av svaret finnes i irrasjonalitet. Som en slags overordnet egenskap til irrasjonale tall blir graden av irrasjonalitet definert ved hjelp av kjedebr ker og hvor lett tallet lar seg approksimere av rasjonale tall. I den forstand kan et irrasjonalt tall som lar seg approksimere godt av et rasjonalt tall kalles for *mindre irrasjonalt* enn et irrasjonalt tall som ikke lar seg approksimere av rasjonale tall like godt ved bruk av rasjonale tall i samme st rrelsesorden.

Med dette som utgangspunkt vil det gy lne snitt ikke bare v ere et irrasjonalt tall, men faktisk det mest irrasjonale tallet ettersom det aldri lar seg approksimere s rlig godt av rasjonale tall sett i forhold til andre irrasjonale tall. Det er blant tallene som befinner seg i det vre sjiktet av irrasjonalitet de interessante egenskapene begynner  fremtre.

En fin m te  illustrere irrasjonaliteten p  er gjennom det som i denne oppgaven kalles for *kerproblemer*. Konseptet baserer seg p  kre hvor for eksempel fruktr er er plantet systematisk p  rekker og kolonner som st r vinkelrett p  hverandre, da vil det av og til v ere mulig  se tvers gjennom hele keren. For den matematiske representasjonen er keren uendelig stor, tr erne er erstattet med punkter i alle koordinater med positive heltall som x - og y -verdi, og observat ren st r i origo. Synsretningen til observat ren vil kunne representeres av en line r funksjon med en gradient. Videre kan man sp rre seg i hvilken retning observat ren ikke ser noen tr er i det hele tatt. Det viser seg at hvis gradienten er et rasjonelt tall vil synsretningen bli blokkert av punktet som har x - og y -koordinater som tilsv erer telleren og nevneren i den rasjonale gradienten. Derimot vil alle irrasjonale gradienter s rge for at observat rens synsretning aldri vil bli blokkert av punkter, og observat ren vil kunne se tvers igjennom den uendelige keren med uendelig mange tr er. Synsretningen som til enhver tid har st rste avstand til de n rmeste punktene har gradienten ϕ fordi det er det mest irrasjonale tallet.

De mest irrasjonale tallene er ogs  de beste tallene  bruke som fordelingstall for  fordele punkter langs en linje, en sirkelperiferi eller utover i en spiral. De rasjonale tallene vil ikke fungere godt som fordelingstall da punkter etterhvert vil sammenfalle. De minst irrasjonale tallene, alts  de som lar approksimere godt av rasjonale tall, vil plassere punktene ujevnt s  de *nesten* sammenfaller.

Summary

The golden ratio has been known for over a thousand years through written sources, and possibly for an even longer time without having been recorded in writing. The ratio is most likely best known for its relationship to the Fibonacci Sequence, architecture and art; however, it also occurs naturally (by approximation) in sunflowers, pinecones, and growth patterns, among other things, and in abstract geometry it may appear in contexts where it might not be altogether expected. What, then, is it that makes the golden ratio so extraordinary?

The answer lies largely in the degree of irrationality. The degree of irrationality is determined by the use of continued fractions and by how easily the number is approximated by rational numbers. In this sense, an irrational number that is easily approximated by a rational number could be considered less irrational than an irrational number that will not be as easily approximated by rational numbers when using rational numbers of the same size.

With a point of departure in this concept, the golden ratio will not only be an irrational number; it will indeed be the most irrational number as it is not approximated very well by rational numbers compared to other irrational numbers. It is among the numbers which exist in the uppermost category of irrationality that the interesting qualities start to become apparent.

A good way to illustrate this irrationality is by means of what in this paper will be called ‘orchard problems’. This concept is based on orchards in which fruit trees, for example, have been planted systematically in rows and columns that are placed perpendicular to each other, in which case it will at some points be possible to see through the entire orchard. In the mathematical representation the orchard is infinite, the trees are replaced by points in all coordinates with positive integers as x and y values, and the observer is in the origin. The line of sight of the observer would be represented by a linear function with a gradient. It turns out that if the gradient is a rational number, the line of sight will be blocked by the point which has x and y coordinates corresponding to the numerator and denominator of the rational gradient. On the other hand, all irrational gradients will ensure that the observer’s line of sight will never be blocked by any points, and the observer will be able to see right across the infinite orchard containing an infinite number of point-trees. The line of sight which at any given time has the largest distance to the closest points will have the gradient ϕ , because it is the most irrational number.

The most irrational numbers are also the best numbers to use as distribution coefficients for distributing points along a straight line, a circle perimeter or outwards in a spiral. The rational numbers will not work well as distribution figures, as points will thus eventually coincide. The least irrational numbers, that is, those that are easily approximated by rational numbers, will place the points unevenly, causing them to almost coincide.

Innhold

1	Introduksjon	6
1.1	Bakgrunn	6
1.2	Det Gylne Snitt	6
1.3	Tallfølger og det gylne snitt	8
1.3.1	Fibonaccifølgen	8
1.3.2	Lucasfølgen	10
2	Irrasjonalitet	13
2.1	Kjedebøker	14
2.1.1	Generelt	15
2.1.2	Irrasjonale tall og kjedebøker	15
2.1.3	Approksimasjoner av rasjonale tall	17
2.1.4	Approksimasjoner av irrasjonale tall	22
2.2	Åkerproblem	25
2.2.1	Rasjonale tall i åkern	26
2.2.2	Åkertitting generalisert	28
2.3	Graden av irrasjonalitet	30
2.3.1	Observasjoner	30
2.3.2	Implikasjoner	31
3	Fordeling	33
3.1	Linjestykke	33
3.1.1	Halvering	33
3.1.2	Fordelingstall	35
3.2	Irrasjonale fordelingstall	38
3.2.1	Eulers tall	38
3.2.2	Relaterte størrelser	40
3.2.3	Forente størrelser	42
3.2.4	Generelt	44
3.2.5	Pi	45
3.2.6	Kvadratrot av 2	47
3.2.7	Det gylne snitt	49
3.3	Sirkulær fordeling	53
3.3.1	Sirkelperiferi	53
3.3.2	Spiral	55
4	Konklusjon	59
	Referanser	63

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Bakgrunn

Det gyldne snitt er et forholdstall som har en rekke anvendelsesområder og forekommer mange steder. Noen eksempler kan være alt fra intelligent design av mennesker innenfor arkitektur, kunst, utvikling av søkemotor-algoritmer, til å beskrive naturlige fenomener som plantevekst, dyrevekst og krystallografi (for kvasikrystaller).

Mye av motivasjonen til å skrive denne oppgaven kommer fra det vide spekteret hvor forholdstallet brukes. For å definere motivasjonen bedre og studere egenskapene bedre, kreves en introduksjon av opprinnelsen og grunnleggende om det gyldne snitt, samt om tilknytningen til den velkjente Fibonacci-tallfølgen.

Det er allerede skrevet mye både dette forholdstallet og Fibonacci-tallrekken innenfor et stort utvalg av fagdisipliner, da inkludert religion, filosofi og matematisk mystikk. Denne oppgaven skal fokusere på de rent matematiske egenskapene i et forsøk på å identifisere styrkene, fordelene og egenskapene som gjør at det brukes av både mennesker og naturen i strukturer og systemer.

I denne introduksjonen skal det historiske aspektet oppsummeres kort, hva det gyldne snitt er skal defineres, sammenhengen med Fibonacci-tallfølgen skal forklares og noen konstruerte og naturlige forekomster skal presenteres.

1.2 Det Gyldne Snitt

Gyldne forholdstall, guddommelig proporsjon, gyldne seksjon, hellige oppdeling er alle synonymmer på forholdstallet, som i denne oppgaven utelukkende vil bli omtalt som det gyldne snitt. Tallet er irrasjonalt, som betyr at det ikke kan uttrykkes presist med en brøk bestående av heltall, og det er dermed vanlig å bruke en egen bokstav for å uttrykke dens verdi. Senere i oppgaven skal det forklares mer rundt de irrasjonale egenskapene og betydningen av irrasjonalitet.

Avhengig av hvilke kilde man studerer, varierer det i hovedsak mellom to greske bokstaver for å betegne tallet, τ og ϕ . Bruken av τ , som er en liten gresk *T*, kommer fra det greske ordet for seksjon, $\tau\omicron\mu\eta$ (Posamentier & Lehmann, 2007), mens bruken av ϕ , som er en liten gresk *F*, kommer fra fornavnet til den greske skulptøren og arkitekten Feidias, som står bak statuen av Zeus i tempelet i Olympia og ledet konstruksjonen av Parthenon i Athenes (Geelmuyden, 2013).

Det varierer også om τ og ϕ betegner det gyldne snitt, eller det resiproke tall til det gyldne snitt. Det har med at ϕ og $\frac{1}{\phi}$ deler de fleste egenskaper, som vil bli tydeligere

videre i oppgaven. I denne oppgaven vil ϕ utelukkende og entydig bli brukt til å betegne det gyldne snitt gitt. Verdien til det gyldne snitt er definert som forholdet mellom to linjestykker som til sammen står i samme forhold til den lengste linja. Altså:



Figur 1.1: Linjestykke delt i det gyldne snitt.

$$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \approx 1.61803399\dots$$

Ovenfor ble det nevnt at det resiproke tall av ϕ også hadde en egen betegnelse i flere tekster, og det er ikke uten grunn at dette tallet også studeres. Det skal vise seg at dette er en av de unike egenskapene til ϕ da dette er det eneste tallet som har følgende egenskap:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a} &= \frac{a}{b} = \phi \\ 1 + \frac{b}{a} &= \frac{a}{b} = \phi \\ 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{a}{b} = \phi \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} &= \frac{a}{b} - 1 = \phi - 1 \\ \frac{1}{\phi} &= \phi - 1 \approx 0.61803399\dots \end{aligned}$$

Denne sammenhengen kan vi bruke til å konstruere et algebraisk tall som kan uttrykkes med rottegn i en brøk for å uttrykke en presis verdi, ved bruk av grunnleggende algebra og formelen for å løse kvadratiske likninger.

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 \tag{1.1}$$

$$\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{1.2}$$

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi_1 = 1.61803399\dots \quad , \quad \phi_2 = -0.61803399\dots$$

Likningen gir kun én positiv løsning, $\phi_1 = \phi$. Det er allikevel verdt å notere den andre løsningen som gir den negative resiproken, som igjen viser at tallene henger tett sammen ved flere enn forventede sammenhenger.

1.3 Tallfølger og det gyldne snitt

Allerede nå er det vist noen overraskende egenskaper tallet ϕ har, men det skal vises at det også er bundet i strukturen til et par velkjente tallfølger.

1.3.1 Fibonaccifølgen

Det er et vidt spekter av sammenhenger mellom fibonaccifølgen og ϕ , det vil derfor være naturlig å introdusere denne følgen (og en annen). Kun et par av sammenhengene vil bli drøftet i denne oppgaven, ettersom fokuset i oppgavene i sin helhet vil være i egenskapene til ϕ , og ikke nødvendigvis hvordan det henger sammen med følger. Det er allikevel avslørende for egenskapene til ϕ hvordan noen av disse sammenhengene opptrer.

Fibonaccifølgen er en kjent additiv rekursiv følge som fremtrer fra to startverdier, deretter er neste tall i følgen alltid er summen av de to foregående. For å få Fibonacci-følgen med frøene enten være $[0,1]$, $[1,0]$ eller $[1,1]$, sistnevnte vil ekskludere 0 fra rekken.

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
1	0	1	2	3	5	8	13	21	34
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tallfølgen ble først presentert i vesten over 1500 år etter den første kjente nedskrivelsen i India, av matematikeren Pingala (Singh, 1985), som forøvrig også er kjent for den første beskrivelsen av det binære tallsystemet. I den vestlige verden ble den i 1202 presentert av den italienske matematikeren Leonardo av Pisano (Dunlap, 1997), mer allmen kjent som *Fibonacci*, når han publiserte boka *Liber Abaci* (*Kalkuleringsboka*). I tillegg til å introdusere tallrekken i denne boka, introduserte han også det arabiske tallsystemet (Posamentier & Lehmann, 2007) vi enda bruker den dag i dag. *Liber Abaci* starter med følgende ord:

*De ni indiske figurer er: 9 8 7 6 5 4 3 2 1.
med disse ni figurer, og med symbolet 0, som araberne kaller zephyr,
er hvilket som helst tall er skrevet.*

Approksimasjon av forholdet til påfølgende fibonaccitall

Leonardo av Pisano introduserte mange viktige matematiske elementer til vesten, men det han ikke viste var sammenhengen mellom fibonaccifølgen og det gyldne snitt. Det skulle gå over 400 år etter introduksjonen av fibonaccifølgen før noen noterte forholdet mellom de påfølgende fibonaccitallene i rekken. I 1611 skriver Johannes Kepler et kort hefte til sin venn og konsulent Baron Wackher von Wackhenfels med tittelen *Strena Seu de Nive Sexangula* (*Nyttårsgave av Hexagonale Snøflak*) (Kepler, 1997) (Kepler, 1966) hvor han forteller;

*Som 5 er til 8, er også 8 til 13, praktisk talt,
og som 8 er til 13, er også 13 til 21 nesten.*

Fra der konkluderte han at uendelig langt ute i følgen, vil forholdet mellom to påfølgende tall være ϕ , men dette ble ikke formelt bevist før et århundre senere (Dunlap, 1997). Et interessant poeng ved denne notasjonen til Kepler, er at han anerkjenner nesten-likhetene i forholdene mellom tallen, men uten å nevne fibonaccifølgen. I notasjonen under er tallene allikevel kalt F_n for ordens skyld. Ved moderne notasjoner vil resultatet se slik ut:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi \quad (1.3)$$

hvor F_n er tall nummer n i fibonaccifølgen og $n > 1$

Dette forteller oss at med større fibonaccitall, altså tall fra langt ut i fibonaccifølgen, vil forholdet F_n/F_{n-1} være en god approksimasjon til det gylne snitt. Ifølge Kepler vil selv approksimasjoner ved små fibonaccitall gi tilfredsstillende resultater. Senere i oppgaven skal denne påstanden undersøkes i forhold til andre irrasjonale tall.

n	$\frac{F_n}{F_{n-1}}$	Desimalrepresentasjon	Avvik fra ϕ
1	$\frac{1}{1}$	1	-38.19660 %
2	$\frac{2}{1}$	2	23.60680 %
3	$\frac{3}{2}$	1.5	-7.29490 %
4	$\frac{5}{3}$	$1.\bar{6}$	3.00566 %
5	$\frac{8}{5}$	1.6	-1.11456 %
6	$\frac{13}{8}$	1.625	0.43052 %
7	$\frac{21}{13}$	1.615384615...	-0.16374 %
8	$\frac{34}{21}$	1.619047619...	0.06265 %
9	$\frac{55}{34}$	1.617647058...	-0.02391 %
10	$\frac{89}{55}$	$1.6\bar{18}$	0.00913 %
11	$\frac{144}{89}$	1.617977528...	-0.00349 %
12	$\frac{233}{144}$	$1.6180\bar{5}$	0.00133 %

Tabell 1.1: Nøyaktigheten til de første approksimasjonene.

Tabell 1.1 viser forholdet mellom påfølgende fibonaccitall oppgitt i desimalrepresentasjon og avviket fra det gylne snitt oppgitt i prosent med fem desimaler. Etter $n > 5$ er avviket allerede under 0.5 %, og avviket er alternerende positivt og negativt, og absoluttverdien til avviket er monotont avtagende. Dette stemmer overens med likning 1.3. Om dette er komperativt gode approksimasjoner sammenliknet med andre irrasjonelle tall skal diskuteres senere i oppgaven sammen med kjedebrøker og åkerproblemet.

Høyere Potenser av det gyldne snitt

Sammenhengen beskrevet i forrige del er ikke den eneste sammenhengen mellom fibonacci-tall og ϕ som er bemerkelsesverdig. Under er det tatt utgangspunkt i likning 1.2, ved å snu og substituere likningen i seg selv, kan de høyere potenser av ϕ beskrives ved hjelp av koeffisienter og konstanter.

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$\phi^3 = \phi^2 + \phi$$

$$\phi^3 = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi(2\phi + 1) = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi(3\phi + 2) = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi(5\phi + 3) = 5\phi^2 + 3\phi = 5(\phi + 1) + 3\phi = 8\phi + 5$$

$$\phi^7 = \phi(8\phi + 5) = 8\phi^2 + 5\phi = 8(\phi + 1) + 5\phi = 13\phi + 8$$

$$\phi^n = F_{n-1} \cdot \phi + F_{n-2}$$

Denne trenden virker mystisk ved første øyekast, og ikke minst gøy. Forklaringen til hvorfor fibonacci-tallene dukker opp her, ligger i at det er den enkleste additive rekursive følgen med startverdiene $[1,1]$ (alternativt $[0,1]$). Disse startverdiene finner vi også i definisjonen til det gyldne snitt, ved $\phi^2 = 1\phi + 1$ (alternativt $\phi = 1\phi + 0$). Ved substitusjon i seg selv vil løsningen av høyere potenser være rekursiv addisjon fra forrige potens, som vist i utregningene ovenfor. Det er et elegant nettverk som binder sammen den rekursive addisjonen med ϕ , men ettersom det ikke er hovedtema for denne oppgaven vil ikke sammenhengen bli studert i dybden her.

1.3.2 Lucasfølgen

Som nevnt ovenfor er fibonaccifølgen den enkleste additive rekursive følgen og den henger tett sammen med fibonaccifølgen, tilsynelatende. Kan det være at det ikke nødvendigvis er fibonaccifølgen, men den rekursive addisjonen som er årsaken til sammenhengen?

Fibonacci-følgen oppstår fra startverdiene $[1,0]$, $[0,1]$ eller $[1,1]$. Ved å endre startverdiene kan det fremtre andre tallfølger som kan likne fibonaccifølgen eller ha distinkte forskjeller, avhengig av hvilke verdier som velges. Ved bruk av to påfølgende fibonaccitall (f.eks. 1, 2; 8, 13; 21, 34; 89, 144 osv), uavhengig nummer på fibonaccitallet (F_n), vil fibonacci-følgen fremtre igjen, med forskjellen at følgen starter et annet sted. For å produsere en helt annen additiv rekursiv følge, må det brukes startverdier hvor summen av det første produserte tallet i følgen og den siste startverdien *ikke* produserer et fibonacci-tall, altså startverdier $[a_0, a_1]$ som oppfyller følgende kriterie:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 &= a_2 \\ a_1 + a_2 &= a_3 \neq F_n \end{aligned}$$

Additive rekursive følger kan beskrives på den negative siden av tallinjen, men her velges det å forholde seg til positive tall. Videre er det også ønskelig å involvere de lave positive heltallene i størst grad for å gjøre følgen komplett. Da er et naturlig sted å lete etter startverdier nettopp blant de lavest positive heltallene, altså null eller naturlige tall i nærheten av null. Startverdiene $[a_0, a_1] = [1, 2]$ vil som nevnt ikke fungere, da dette vil produsere $a_0 + a_1 = 1 + 2 = a_2 = 3$ som videre gir $a_1 + a_2 = 2 + 3 = a_3 = 5 = F_4$. Dette er en ugunstig løsning ettersom det er to påfølgende fibonacci-tall ($a_2 = 3 = F_3, a_3 = 5 = F_4$) som vil sørge for at følgen videre blir fibonacci-følgen. Hvis derimot startverdiene er de samme, men plassene byttes slik at $[a_0, a_1] = [2, 1]$, vil det være fibonacci-tall, men motsatt påfølgende. Følgen som da utvikles kan også produseres ved å bruke startverdi $[0, 2]$, som vist under.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2 & 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 & 47 & 76 & 123\dots \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 & 47 & 76 & 123\dots \end{array}$$

Denne tallfølgen er kalt lucas-følgen, oppkalt etter den franske matematikeren Edouard Lucas som i 1877 publiserte sin beskrivelse og studie av tallfølgen (Dunlap, 1997), samt navnga og populariserte fibonacci-følgen som frem til da var forholdsvis ukjent (Gardner, 1992).

Videre kan vi definere $[a_0, a_1] = [2, 1] = [L_0, L_1]$ og undersøke forholdet mellom de påfølgende lucas-tallene på samme vis som fibonacci-tallene i Tabell 1.1 på side 9.

Det viser seg at også lucas-følgen har tall hvor forholdet mellom de påfølgende tallene approksimerer det gyldne snitt, altså at:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \phi \tag{1.4}$$

hvor L_n er tall nummer n i lucas-følgen og $n > 1$

Dette impliserer at det ikke er selve følgen ϕ har en korrelasjon til, men heller den additive rekursive egenskapen. Dette diskuteres det mer om i kapittel 3 hvor egenskapen settes i kontekst.

Videre, er det mange sammenhenger som knytter sammen fibonacci-tallene og lucas-tallene (se f.eks. Dunlap, 1997):

$$L_n \approx \sqrt{5}F_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5}F_n$$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

Det er mer morosaker som ikke nødvendigvis belyser egenskaper ved hverken gyldne snitt eller følgene. Forklaringen bak disse sammenhengene er at både fibonaccifølgen

n	$\frac{L_n}{L_{n-1}}$	Desimalrepresentasjon	Avvik fra ϕ
1	$\frac{1}{2}$	0.5	-69.09830 %
2	$\frac{3}{1}$	3	85.41020 %
3	$\frac{4}{3}$	$1.\bar{3}$	-17.59546 %
4	$\frac{7}{4}$	1.75	8.15594 %
5	$\frac{11}{7}$	1.571428571...	-2.88037 %
6	$\frac{18}{11}$	$1.\overline{63}$	1.13283 %
7	$\frac{29}{18}$	$1.6\bar{1}...$	-0.42786 %
8	$\frac{47}{29}$	1.620689655...	0.16413 %
9	$\frac{76}{47}$	1.617021277...	-0.06259 %
10	$\frac{123}{76}$	1.618421053...	0.02392 %
11	$\frac{199}{123}$	1.617886179...	-0.00914 %
12	$\frac{322}{199}$	1.618090452...	0.00349 %

Tabell 1.2: Nøyaktigheten til noen approksimasjoner.

og lucasfølgen er av samme rekursive type følge og som videre betyr at begge har egenskapen at forholdet mellom påfølgende tall i følgene grenser mot ϕ , og som vist kan følgene knyttes sammen ved matematisk manipulasjon. Altså, det forteller mer om likheten mellom følgene enn om selve egenskapen til ϕ . Dermed vil ikke lucasfølgen diskuteres mer i denne oppgaven utover det som er presentert her.

Kapittel 2

Irrasjonalitet

I introduksjonen til denne oppgaven ble det påpekt at tallet ϕ er irrasjonalt, og i dette kapitlet skal irrasjonalitet generelt og irrasjonaliteten til ϕ studeres. I den anledning er det naturlig å starte med å bevise at ϕ faktisk er irrasjonalt. Som vist i introduksjonen er definisjonen til ϕ fra delingen av et linjestykket som oppfyller følgende kriterie:



Figur 2.1: Linjestykke delt i det gyldne snitt.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Videre, med å substituere inn $a = \phi$ og $b = 1$ og snu på likningen får uttrykket $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, og den positive løsningen til denne likningen er gitt ved:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dette uttrykket som definerer forholdstallet ϕ viser at det er kun et av leddene i telleren som har en irrasjonal del med $\sqrt{5}$. Fra definisjon er et irrasjonalt tall sin desimalrepresentasjon uendelig mange desimaler uten periodisk utvikling. Enkelte rasjonale tall har uendelige mange desimaler, da for eksempel $\frac{1}{7} = 0.14285714285714... = 0.\overline{142857}$, men de har da en periodisk utvikling som vist på eksemplet. Det betyr at summen av et irrasjonalt tall og et heltall også være irrasjonalt ettersom summeringen vil kun endre heltallsdelen av det irrasjonale tallet. Videre, vil en deling av et irrasjonalt tall med et rasjonalt tall også produsere et nytt irrasjonalt tall. Dermed er det tilstrekkelig å vise at $\sqrt{5}$ er irrasjonalt for å vise at hele uttrykket er irrasjonalt.

Irrasjonaliteten av røtter

Anta at $n \in \mathbf{Z}$, og at n ikke er et kvadrattall. Hvis \sqrt{n} skal være irrasjonal, må $x^2 = n$ oppfylle kravet $x \notin \mathbf{Q}$.

For å bevise dette, brukes kontrapositivt bevis hvor det motsatte antas. Altså, anta at x faktisk er et rasjonalt tall, $x = \frac{a}{b}$, hvor $a, b \in \mathbf{Z}^+$, og uten å miste generalitet anta at a og b ikke har noen felles primfaktor. Dette gir:

$$n = x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$b^2n = b^2x^2 = a^2$$

Videre forteller aritmetikkens fundamentalteorem at samtlige naturlige tall kan skrives som et unikt produkt av primtall. Altså at n kan uttrykkes på følgende vis:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$$

Hvor alle p_i er unike primtall og alle $k_i \geq 1$

Det er antatt at n ikke er et kvadrattall, dette betyr at minst én av de unike primtallene må ha oddetalls-eksponent. For å gi et moteksempel; i et heltall bestående bare av primtall med partalls-eksponenter vil kvadratrotten av tallet gi et nytt heltall ($c = 144 = 2^4 \cdot 3^2 \Rightarrow \sqrt{c} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$). Dermed:

$$n \neq \text{kvadrattall} \Rightarrow \exists j = 1, 2, 3, \dots, m \text{ s\aa}nn \text{ at } k_j \text{ er oddetall.}$$

Se tilbake på likningen $b^2n = a^2 \Rightarrow a^2 = nb^2$. Ettersom p_j , som er primtallet med oddetalls-eksponent, må være en faktor på høyresiden i n , må den også eksistere på venstresiden i a^2 . Dette gir oss at:

$$a^2 = nb^2$$

$$\Rightarrow p_j \text{ er en faktor i } a^2$$

$$\Rightarrow p_j \text{ er en faktor i } a$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ har en partalls-eksponent av } p_j$$

$$\Rightarrow b^2 \text{ må ha } p_j \text{ som en faktor}$$

Den siste implikasjonen kommer fra at a^2 har en partalls-eksponent av p_j og n har en oddetalls-eksponent p_j , som betyr at b^2 må ha en oddetalls-eksponent av p_j . Dette er både umulig og en motsigelse, ettersom i antagelsen hadde a og b ingen felles primtallsfaktor og kvadrerte heltall må ha partalls-eksponent. Dermed må kvadratrotten av alle naturlige tall som ikke er kvadrattall være irrasjonale.

$$n \neq \text{kvadrattall} \Rightarrow n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{5} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow \phi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$$

2.1 Kjedebrøker

Irrasjonale tall er problematiske å representere med standardnotasjoner som brøk og desimaltall, ettersom de fra definisjon ikke kan representeres ved bruk av brøk og at de har uendelig antall desimaler uten periodisk utvikling. Det kan dermed være gunstig med alternativ notasjonsform som kan fungere bedre for noen irrasjonale tall, som for eksempel ved bruk av *kjedebrøker*. Kjedebrøker viser seg å være en presis og entydig representasjonsform, samt avslørende for approksimeringsegenskapene til noen irrasjonale tall.

2.1.1 Generelt

Det rasjonale tallet $\frac{13}{9}$ kan noteres på desimalform som $1.444\dots = 1.\bar{4}$. Som et eksempel, skal tallet nå stegvis omformes til en kjedebrøk. Ideen med kjedebrøker er at tall kan skrives som en sammenhengende kjede av brøker i nevneren.

$$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9} = 1 + \frac{1}{\frac{9}{4}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}$$

Denne spesifikke kjedebrøkutviklingen stopper her, ettersom den siste brøken i utviklingen har 1 i telleren og 4 i nevneren, som gjør at resiproken vil bli eksakt 4 som eventuelt skulle vært notert under. Dermed kan brøken noteres på formen $\frac{13}{9} = [1; 2, 4]$. Tallet har altså en *endelig* kjedebrøk, og det er en egenskap alle rasjonale tall har fra definisjonen at de kan skrives som en brøk. Andre rasjonale tall kan representeres som kjedebrøker ved eksakt samme prosedyre. For eksempel kan brøkene $\frac{12}{7}$ og $\frac{415}{92}$ noteres som henholdsvis $[1; 1, 2, 2]$ og $[4; 1, 1, 22, 2]$.

Kjedebrøker som har 1 som teller i alle nivåer kalles for *simple* kjedebrøker, og det kan utvikles kjedebrøker som ikke nødvendigvis har det, men i denne oppgaven vil kun simple kjedebrøker bli brukt. I generell forstand kan et rasjonelt tall A noteres ved kjedebrøker som $A = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$, som gir:

$$A = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

2.1.2 Irrasjonale tall og kjedebrøker

I forrige del ble det etablert at rasjonale tall har endelige kjedebrøker. Videre, kan alle endelige kjedebrøker omformes til en brøk ved bruk av samme prosedyre som ble brukt for å produsere dem i utgangspunktet, men motsatt (vises i 2.1.3). Dette forteller at gruppen endelige kjedebrøker er en bijeksjon til \mathbf{Q} .

Kjedebrøker kan heller ikke produsere imaginære tall, ettersom det er ingen deler av prosedyrene som tar for seg rotoperasjon. Dermed må *uendelige* kjedebrøker være de reelle tallene, \mathbf{R} , som *ikke* er rasjonale tall, altså $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. De uendelige kjedebrøker er dermed irrasjonale tall, og irrasjonale tall representert i kjedebrøker gir uendelige kjedebrøker.

Representasjon av kjente irrasjonale tall

Se på eksemplet med $\sqrt{2}$. Det er allerede etablert at dette er et irrasjonalt tall, ettersom 2 ikke er et kvadrattall. Ved utregningene under er intensjonen å få skrevet $\sqrt{2}$ på en form som kan brukes i kjedebrøker, altså få til å uttrykke $\sqrt{2}$ som summen av et heltall og en brøk med 1 som teller.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 2 &= \sqrt{2} + 2 \\ \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) &= 1 + \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{2} &= \frac{1 + \sqrt{2} + 1}{(1 + \sqrt{2})} \\ \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Herfra kan $\sqrt{2}$ substitueres i seg selv ved å sette inn $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{1+(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}})} \\ \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} \\ \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}} \\ \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}}}\end{aligned}$$

Denne kjedebrøken kan, som utregningene ovenfor viser, fortsette i det uendelige for å produsere stadig flere brøker med eksakt samme nevner. Legg merke til;

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= [1; 1, \sqrt{2}] = [1; 2, 1, \sqrt{2}] = [1; 2, 2, 1, \sqrt{2}] = [1; 2, 2, 2, 2, 1, \sqrt{2}] \\ &\Rightarrow \sqrt{2} = [1; \overline{2}]\end{aligned}$$

I dette tilfelle vil representasjonsformen gi et elegant resultat som definitivt er enklere å notere enn desimalrepresentasjonen. Det er allikevel ikke gitt at alle irrasjonale tall vil gi like enkle resultater, derimot kan interessante funn oppstå i kompleksiteten som ikke er like lett å se i andre representasjonsformer. I den anledning, la et kjent irrasjonalt tall som Eulers tall, e , grunntallet for naturlige logaritmer, skrives som kjedebrøk for å illustrere.

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots] = [2; \overline{1, 2n, 1}]$$

Det interessante her er at e viser ingen periode i sin desimalrepresentasjon, men ved bruk av kjedebrøker har e en distinkt periode som kan avsløre egenskaper ved tallets struktur. Dette er brukt kun som et eksempel på periodisk utvikling i kjedebrøker, og strukturen kommer ikke til å bli videre studert her. Andre irrasjonale tall er hverken særdeles elegante eller periodiske som simple kjedebrøker. Ta π som eksempel.

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 84, 2, \dots]$$

Som simpel kjedebrøk er det enda ikke oppdaget noen periode eller distinkt mønster i tallutviklingen (Posamentier & Lehmann, 2004).

Det gyldne snitt som kjedebrøk

Til å fremstille ϕ i representasjonsformen kjedebrøk brukes likning 1.1. Det er vist i introduksjonen at ϕ har den unike egenskap ved at den er sin egen invers addert med 1. Denne egenskapen brukes til å substitueres likningen i seg selv, og en kjent struktur fremtrer som vist under.

$$\begin{aligned}\phi &= 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}}} \\ \phi &= [1; \phi] = [1; 1, \phi] = [1; 1, 1, \phi] = [1; 1, 1, 1, \phi] \\ &\Rightarrow \phi = [1; \overline{1}]\end{aligned}$$

Utrekningen ovenfor viser at ϕ er den enkleste simple uendelige kjedebrøken som kan konstrueres av et irrasjonelt tall. Foruten at det er pent matematisk, er det av interesse å tyde hva det betyr. Altså, hva forteller det oss om tallet at komponentene i kjedebrøken består av små eller store tall?

2.1.3 Approksimasjoner av rasjonale tall

Rasjonale tall kan alltid presenteres presist og entydig ved å sette tall i forhold til hverandre som brøk. Rasjonale tall med store tall i nevner og/eller teller er ikke nødvendigvis lettvinte å arbeide med, det kan dermed være av interesse å uttrykke disse med enklere brøker som har en tilnærmet verdi. Altså, ved å approksimere rasjonale tall uttrykkes en tilnærmet verdi ved bruk av mindre tellere og nevner.

Et par rasjonale tall

Som nevnt innledningsvis om kjedebrøker kan de brukes til å approksimere rasjonale og irrasjonale tall. Det gjøres ved at kjedebrøken ved et punkt brytes opp og komponentene etter bruddpunktet forkastes. Hvor kjedebrøken brytes avgjør hvilken *konvergent* det er. Altså 0. konvergent vil være tallet om kjedebrøken brytes før kjedebrøken i starter, dermed kun heltallet. Videre, vil 1. konvergent være kjedebrøken brutt i den første nevneren, altså fjerne brøken i nevneren. Også videre. Ta for eksempel det rasjonale tallet tidligere presentert.

$$0. \text{ konvergent av } \frac{13}{9} : = 1$$

$$1. \text{ konvergent av } \frac{13}{9} : = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$2. \text{ konvergent av } \frac{13}{9} : = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}} = 1.\bar{4}$$

Her er det kun tre forskjellige mulige konvergenter, altså tre forskjellige steder å bryte kjedebrøken, hvorav den siste er den fullstendige kjedebrøken som gir den eksakte verdien av det rasjonale tallet. Fra dette er det verdt å notere at 0. konvergenten gir en forholdsvis svak approksimasjon, 1. er derimot forholdsvis god, og 2. konvergenten er eksakt. Det ser ut til at det er en trend i nøyaktigheten til approksimasjonene til konvergentene, at konvergentene stadig bedre approksimerer det eksakte tallet. To andre rasjonale tall tidligere brukt skal nå brukes for å undersøke at denne trenden også gjelder for andre tall.

$$B = \frac{12}{7} = [1; 1, 2, 2] = [b_0; b_1, b_2, b_3], \quad C = \frac{415}{92} = [4; 1, 1, 22, 2] = [c_0; c_1, c_2, c_3, c_4]$$

Se Tabell 2.1, tilsvarende trend gjelder altså for tallene $\frac{12}{7}$ og $\frac{415}{92}$. Det er i tillegg andre strukturer i tallene som er interessante å sammenlikne, men sammenlikning av to tilfeldig utvalgte tall med ulik lengde på kjedebrøkene kan by på utfordringer. Det er allikevel enkelte momenter her som er verdt å notere. En forskjell mellom tallene som fremtrer tidlig i tabellen er avviket ved første konvergent. For $\frac{12}{7}$ er $b_0 = 1$ og avviket nesten 43%, på den andre siden er $c_0 = 4$ og avviket er nær 11%, dette er naturlig i den forstand at B er lenger unna i tallverdi fra sitt heltall, b_0 , sammenliknet med C er fra c_0 . Altså:

$$|B - b_0| > |C - c_0|$$

n	b_n	Brøk	Desimaltall	Avvik, $\frac{12}{7}$	c_n	Brøk	Desimaltall	Avvik, $\frac{415}{92}$
0	1	$\frac{1}{1}$	1.00000	-42.67 %	4	$\frac{4}{1}$	4.00000	-11.32 %
1	1	$\frac{2}{1}$	2.00000	16.67 %	1	$\frac{5}{1}$	5.00000	10.84 %
2	2	$\frac{5}{3}$	1.66666...	-2.778 %	1	$\frac{9}{2}$	4.50000	-0.241 %
3	2	$\frac{12}{7}$	1.71429	0.000 %	22	$\frac{203}{45}$	4.51111...	0.005 %
4	-	-	-	-	2	$\frac{415}{92}$	4.51087...	0.000 %

Tabell 2.1: Konvergentenes nøyaktighet i prosent.

Dette er er svakhet med den 0. konvergenten som alltid kun viser heltallet. Det er allikevel ikke hele forklaringen. I tillegg er $c_0 = 4$ et større tall enn $b_0 = 1$, som gjør at desimaltallene i C vil ha betydelig mindre verdi i forhold til C eksakt, sammenliknet med B som har $b_0 = 1$. Prosentvis avvik vil dermed være misvisende i komparative approksimasjoner. For å unngå begge problemer nevnt ovenfor, bør det brukes en annen strategi for å undersøke avviksgraden. Heltallene er irrelevante i approksimasjonene ettersom de alltid entydig kan representeres ved bruk av et heltall, det er altså differansen mellom det eksakte tallets og approksimasjonens desimalrepresentasjoner som er interessante. Dermed er det mer demonstrativt å bruke differansen representert i desimaltall. Ettersom enhver konvergent har samme heltall som den eksakte verdien, vil det kunne generelt uttrykkes på følgende vis:

$$\Delta A_n = |A - A_n| \quad , \quad n > 0$$

hvor ΔA_n er approksimasjonsevnen til den n . konvergenten til A , A_n .

Med desimaldifferansen for hver konvergent vil det være enklere å se hvor god approksimasjon en konvergent er i forhold til den forrige konvergenten. I den sammenheng vil en faktor-sammenlikning være beskrivende; $\Delta A_{n-1}/\Delta A_n$ gir hvor mange ganger en konvergent går opp i den forrige, altså en multiplikativ faktor som viser hvor mange ganger bedre konvergenten approksimerer tallet enn forrige konvergent. La denne faktoren hete rekursiv approksimasjonsevne, definert ved approksimasjonsevnene til konvergentene tilhørende det eksakte tallet A :

$$R_{A_n} = \Delta A_{n-1}/\Delta A_n$$

Tabell 2.2 har noen interessante resultater, deriblant at 3. konvergenten til C er 6165 ganger bedre enn 2. konvergenten, altså at den rekursive approksimasjonsevnen til 3. konvergenten er 6165. Er det grunn til mistenke at dette har noe med størrelsen på tilhørende 3. komponent, $c_3 = 22$? Det er en liknende struktur i B som kan støtte under en sammenheng med komponentene, altså at 2. konvergenten til B er 6 ganger bedre enn 1. konvergenten, og tilhørende 2. komponent, b_2 , har en tallverdi høyere enn b_1 .

Med tilfeldig rasjonale tall med korte kjedebrøker, er det begrenset hvor mye informasjon som kan trekkes ut fra en komparativ undersøkelse av approksimasjoner gjennom kjedebrøker. Et sånt system er uansett et godt grunnlag for å undersøke

n	b_n	B_n	ΔB_n	R_{B_n}	c_n	C_n	ΔC_n	R_{C_n}
0	1	$\frac{1}{1}$	0.71429	—	4	$\frac{4}{1}$	0.51087	—
1	1	$\frac{2}{1}$	0.28571	2.50	1	$\frac{5}{1}$	0.48913	1.04
2	2	$\frac{5}{3}$	0.04762	6.00	1	$\frac{9}{2}$	0.01087	137.00
3	2	$\frac{12}{7}$	0.00000	—	22	$\frac{203}{45}$	0.00024	6165.00
4	—	—	—	—	2	$\frac{415}{92}$	0.00000	—

Tabell 2.2: Konvergentenes komparative nøyaktighet i faktorer.

om størrelsen på komponentene, altså generelt a_i fra kjedebrøken A , har noe å si for styrken på approksimasjonsevnen til tilhørende konvergent.

Konstruerte kjedebrøker

I forrige del ble det tatt utgangspunkt i et par rasjonale tall for å få innblikk i kjedebrøker og noen av strukturene i fremstillingen, da med hovedvekt på approksimasjonsevnen. Videre er det av interesse å istedenfor starte i motsatt ende; med å konstruere et par kjedebrøker som likner i struktur og innhold, men med bevisste forskjeller for å undersøke hva forskjellene har å si for brøk-representasjonen, desimalrepresentasjonen og hvor godt det kan approksimeres ved bruk av konvergentene. La verdiene D og E være definert ved:

$$D = [1; 1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1] \text{ og } E = [1; 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Disse to kjedebrøkene har lik lengde og like typer komponenter, men med den vesentlige forskjellen at 5 er plassert på forskjellige steder, henholdsvis $d_5 = 5$ og $e_3 = 5$. Kjedebrøkene kan regnes om til rasjonale tall, og vil da gi verdiene:

$$D = \frac{249}{155} \text{ og } E = \frac{245}{159}$$

Videre kan brøkene settes i samme tabell på likt vis som i tabell 2.2, resultatene i fra approksimasjonene vil da være mer sammenliknbare i den forstand at korrelasjonen med komponentene blir tydeligere.

Denne tabellen med konstruerte kjedebrøker, sammenliknet med tabell 2.2 med tilfeldige rasjonale tall, viser mer oversiktlig i strukturen. Før resultatene kommenteres videre, er det verdt å nevne et moment som ikke kommer frem i tabellene. Etersom ΔA_n betegner absoluttverdien av avviket mellom det eksakte generelle tallet A og n . konvergent, vil det ikke vises om approksimasjonen har for liten eller for stor verdi i forhold til det eksakte tallet. I alle approksimasjonsrekker til nå, er resultatene alternerende for en økende n , altså det er annenhvert positivt og negativt avvik, og det er en egenskap ved rasjonale approksimasjoner ved bruk av påfølgende konvergent i kjedebrøker.

Når komponentene er 1 i D og E vil ikke konvergentene i tallene ha en rekursiv approksimasjonsevne sterkere enn maksimalt 4 ganger bedre enn foregående konvergent, med ett unntak for hvert tall. Interessant nok er dette konvergentene som

n	d_n	D_n	ΔD_n	R_{D_n}	e_n	E_n	ΔE_n	R_{E_n}
0	1	$\frac{1}{1}$	0.60645	-	1	$\frac{1}{1}$	0.54088	-
1	1	$\frac{2}{1}$	0.39355	1.54	1	$\frac{2}{1}$	0.45912	1.18
2	1	$\frac{3}{2}$	0.10645	3.70	1	$\frac{3}{2}$	0.04088	11.23
3	1	$\frac{5}{3}$	0.06022	1.77	5	$\frac{17}{11}$	0.00457	8.94
4	1	$\frac{8}{5}$	0.00645	9.33	1	$\frac{20}{13}$	0.00242	1.89
5	5	$\frac{45}{28}$	0.00069	9.33	1	$\frac{37}{24}$	0.00079	3.08
6	1	$\frac{53}{33}$	0.00039	1.77	1	$\frac{57}{37}$	0.00034	2.31
7	1	$\frac{98}{61}$	0.00011	3.70	1	$\frac{94}{61}$	0.00010	3.30
8	1	$\frac{151}{94}$	0.00007	1.54	1	$\frac{151}{98}$	0.00006	1.61
9	1	$\frac{249}{155}$	0	-	1	$\frac{245}{159}$	0	-

Tabell 2.3: Komponenter, konvergener, differanse og rekursiv approksimasjonsevne.

hører til foregående komponenter, til tross for at de begge komponentene er 1. Altså, konvergent D_4 er 9.33 ganger sterkere enn foregående konvergent D_3 og konvergent E_2 er 11.23 ganger sterkere enn foregående konvergent i E_1 og komponenten ulik 1 er henholdsvis d_5 og e_3 .

Tallet D i tabellen viser flere interessante egenskaper. Det første iøynefallende er at verdiene på de rekursive approksimasjonsevnen til konvergenten er symmetrisk om radene, med symmetrilinje mellom $n = 4$ og $n = 5$. Denne lættis observasjonen vil ikke studeres videre og forblir en kuriositet da det ikke er direkte relevant. Men som mistenkt fra tallene B og C i Tabell 2.2, er det en tilsynelatende sammenheng mellom tallverdien på komponent a_i og den rekursive approksimasjonsevnen R_{A_i} til konvergent A_i . I dette tilfellet, for komponent d_5 er tilhørende konvergent D_5 9.33 ganger bedre enn forrige konvergent.

Sistnevnte strukturer opptrer også i E , hvor E_3 approksimerer E 8.94 ganger sterkere enn foregående konvergent. Allikevel er den rekursive approksimasjonsevnen enda sterkere i konvergenten som tilhører komponenten *før* komponenten som har en større tallverdi. Det er en forklarende faktor på hvorfor C_2 sin rekursive approksimasjonsevne er relativt stor, 137.00, til tross for at $c_2 = 1$, ettersom $c_3 = 22$.

Ut ifra disse to kjedebrøkene ser det ut som om størrelsen på en komponent påvirker den rekursive approksimasjonsevnen til tilhørende konvergent ved at større komponenter gir sterkere approksimasjonsevne – altså nærmere det eksakte tallet. I tillegg vil den tilsynelatende også påvirke den foregående konvergenten ved å gjøre den sterkere i samme størrelsesorden. Dette gir grobunn for flere videre spørsmål, viktigst hvordan og hvorfor en komponent ulik 1 påvirker den rekursive approksimasjonsevnen til foregående konvergent og om størrelsen på tallverdien vil ha en klar sammenheng med den rekursive approksimasjonsevnen.

I første omgang vil sistnevnte studeres videre, ettersom det til nå er det undersøkt hvorvidt komponenter større enn 1 påvirker approksimasjonsevnen, men ikke hvordan forskjellige størrelser på komponenter påvirker evnen. Det er grunn til å tenke

at det generelt sett er en monoton økning i rekursiv approksimasjonsevne som en funksjon av økende tallverdier på komponentene, på bakgrunn av funnene i Tabell 2.2 og 2.3.

For å undersøke dette konstrueres det nå fire nye kjedebrøker hvor, igjen, alle komponenter utenat én skal være lik 1. I tillegg skal komponenten $a_i \neq 1$ ha samme posisjon i hver kjedebrøk, men størrelsen skal variere. Ved å bruke D som utgangspunkt, la tallene F , G og H være definert ved:

$$\begin{aligned} D &= [1; 1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1] = \frac{249}{155} \approx 1.60645 \\ F &= [1; 1, 1, 1, 1, 25, 1, 1, 1] = \frac{1049}{655} \approx 1.60153 \\ G &= [1; 1, 1, 1, 1, 125, 1, 1, 1] = \frac{5049}{3155} \approx 1.60032 \\ H &= [1; 1, 1, 1, 1, 625, 1, 1, 1] = \frac{25049}{15655} \approx 1.60006 \end{aligned}$$

n	d_n	D_n	f_n	F_n	g_n	G_n	h_n	H_n
0	1	$\frac{1}{1}$	1	$\frac{1}{1}$	1	$\frac{1}{1}$	1	$\frac{1}{1}$
1	1	$\frac{2}{1}$	1	$\frac{2}{1}$	1	$\frac{2}{1}$	1	$\frac{2}{1}$
2	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
3	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$
4	1	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{8}{5}$
5	5	$\frac{45}{28}$	25	$\frac{205}{128}$	125	$\frac{1005}{628}$	625	$\frac{5005}{3128}$
6	1	$\frac{53}{33}$	1	$\frac{213}{133}$	1	$\frac{1013}{633}$	1	$\frac{5013}{3133}$
7	1	$\frac{98}{61}$	1	$\frac{418}{261}$	1	$\frac{2018}{1261}$	1	$\frac{10018}{6261}$
8	1	$\frac{151}{94}$	1	$\frac{631}{394}$	1	$\frac{3031}{1894}$	1	$\frac{15031}{9394}$
9	1	$\frac{249}{155}$	1	$\frac{1049}{655}$	1	$\frac{5049}{3155}$	1	$\frac{25049}{15655}$

Tabell 2.4: Kjedebrøkstrukturer tilhørende D, F, G, H .

Tabell 2.4 og Tabell 2.5 viser et spekter av interessante strukturer. D har, som tidligere vist, en symmetri i den rekursive approksimasjonsevnen til kjedebrøken, men her har også F , G og H samme symmetri. I tillegg går den rekursive approksimasjonsevnen vekselvis mot henholdsvis 1.50 og 4.00 når størrelsen på komponenten $a_i = 1$. Kolonnene i tabell 2.4 som viser den rekursive approksimasjonsevnen er avrundet til 2 desimaler, I H spesielt er dette misvisende da approksimasjonsevnen ikke er eksakt 4 og 1.5. For eksempel, er $\Delta H_1/\Delta H_2 = 3.9968... \approx 4.00$, som nevnt, nærmerer approksimasjonsevnen seg 4 når komponentens størrelse øker.

Overnevnte strukturer er interessante observasjoner som i denne oppgaven kun blir stående som eksempler på at egenskapene i kjedebrøksrepresentasjoner kan vise flere skjulte strukturer i tall som ikke er like åpenbare i andre representasjonsformer. Derimot, de mest interessante observerte egenskapene for denne oppgaven er, for det første, at absoluttverdien av differansen mellom det eksakte tallet, A , og konvergensten, A_n , er monotont minkende når n øker. For det andre, store komponenter gjør at

n	d_n	R_{D_n}	f_n	R_{F_n}	g_n	R_{G_n}	h_n	R_{H_n}
0	1	-	1	-	1	-	1	-
1	1	1.54	1	1.51	1	1.50	1	1.50
2	1	3.70	1	3.92	1	3.98	1	4.00
3	1	1.77	1	1.56	1	1.51	1	1.50
4	1	9.33	1	42.67	1	209.33	1	1042.67
5	5	9.33	25	42.67	125	209.33	625	1042.67
6	1	1.77	1	1.56	1	1.51	1	1.50
7	1	3.70	1	3.92	1	3.98	1	4.00
8	1	1.54	1	1.51	1	1.50	1	1.50
9	1	-	1	-	1	-	1	-

Tabell 2.5: Kjedebrøkstrukturer tilhørende D, F, G, H .

tilhørende konvergent og foregående konvergent sin rekursive approksimasjonsevne blir relativt sterkere.

Sistnevnte egenskap forteller lite i konteksten om endelige kjedebrøker, altså rasjonale tall, ettersom de på et tidspunkt vil avsluttes og det eksakte tallet nåes uavhengig av om det rasjonale tallets kjedebrøker inneholder mange små eller store komponenter. Det er allikevel en indikator på hvor likt det eksakte rasjonale tallet er et annet rasjonalt tall med nevner som har lavere tallverdi, som er et interessant moment til senere diskusjon. Det vil ha en annen betydning for irrasjonale tall, altså uendelige kjedebrøker.

2.1.4 Approksimasjoner av irrasjonale tall

I motsetning til rasjonale tall så vil irrasjonale tall ha uendelig lange kjedebrøker og den eksakte verdien vil aldri bli nådd ved hjelp av de rasjonale konvergentene, men heller være en grenseverdi for den uendelige kjedebrøkens konvergenter. I den forstand kan størrelsen på komponentene i kjedebrøker være indikatorer på i hvor stor grad et irrasjonalt tall lar seg approksimere med rasjonale tall, altså konvergentene i kjedebrøken.

Til nå har komponentene, konvergentene, differansen mellom eksakte verdier og konvergenter, og den rekursive approksimasjonsevnen blitt studert i et par tilfeldige utvalgte rasjonale tall og en rekke konstruerte kjedebrøker. Det er nå på tide å studere de samme egenskapene i kjente irrasjonale tall for å se om det kan fortelle oss noe om de irrasjonale tallenes egenskaper.

Kjente irrasjonale tall

For å studere egenskapene i noen irrasjonale tall, er det valgt å bruke tall som er kjente i den forstand at de er vanlige i bruk innenfor matematikk. De har ikke nødvendigvis noe til felles og har ikke blitt plukket ut med hensyn på noen av struk-

turene som skal undersøkes. Tallene som er valgt å bruke videre er e , π , $\sqrt{2}$ og ϕ . I anledninger irrasjonale tall med bestemte symbolnotasjoner kreves nye notasjonsformer for n . komponent. La, for eksempel, de forskjellige størrelsene relatert til e være notert på følgende vis:

$$\begin{aligned} n. \text{ komponent} &: e_n^k \\ n. \text{ konvergent} &: e_n \end{aligned}$$

Ellers er ΔA_n generelt sett definert på samme vis, ved at det er absoluttverdien til differansen mellom n . konvergent og den eksakte verdien, og den rekursive approksimasjonsevnen er enda definert på samme vis, som vist på tabell 2.6. I motsetning til Tabell 2.4, er siste rad i kolonnene med rekursiv approksimasjonsevne fylt i tabell 2.6. Det kommer av at irrasjonale tall har uendelige lange kjedebrøker, og dermed uendelige mange komponenter og tabell 2.6 representerer kun de 11 første komponentene og rekursive approksimasjonene til de irrasjonale tallene, mens i tabell 2.4 er de konstruerte kjedebrøkene avsluttet og den siste rekursive approksimasjonsevnen er uendelig, ettersom konvergenten er *eksakt*.

Samme observasjoner som tidligere notert i tabellene med rasjonale tall og deres rekursive approksimasjonsevne fremtrer også her med de irrasjonale tallene i Tabell 2.6. Det vises en klar sammenheng mellom tallverdien på komponenten og den rekursive approksimasjonsevnen til tilhørende og foregående konvergent. Dette forteller videre at irrasjonale tall med større tallverdi på komponentene lar seg bedre approksimere ved hjelp av de rasjonale approksimeringene, som tilsvarer konvergentene, ved n . konvergent. I tillegg ser det ut som om i tall med uendelig gjentakende komponenter i kjedebrøker vil den rekursive approksimasjonsevnen gå mot en bestemt verdi. I tabellen vises de avrundede verdiene henholdsvis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \sqrt{2}_{n-1}}{\Delta \sqrt{2}_n} \approx 5.83 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \phi_{n-1}}{\Delta \phi_n} \approx 2.62$$

Dette er kun de avrundede verdiene, og som en kuriositet kan det viser det seg at grenseverdien for den rekursive approksimasjonsevnen til det gyldne snitt når n går mot uendelig faktisk er ϕ^2 . Dette henger sammen med at konvergentene til det gyldne snitt alltid vil være forholdet mellom påfølgende *Fibonaccitall* og måten den rekursive approksimasjonsevnen er definert.

Rett fokus nå tilbake til den rekursive approksimasjonsevnen, sammenhengen mellom komponenter og konvergent, og at irrasjonale tall er uendelige kjedebrøker. En svakere rekursive approksimasjonsevne forteller at de rasjonale approksimeringene sakte vil gå mot det eksakte tallet når n øker, sammenliknet med irrasjonale tall med sterke rekursive approksimasjonsevner. Ettersom kjedebrøkene er uendelige, betyr det at et irrasjonelt tall med flere relativt store komponenter raskere vil la seg approksimere, og vil da ha verdier nærmere rasjonale tall. Så, hvis det skulle konstrueres et tall ved hjelp av kjedebrøker som dårligst lar seg approksimere ved hjelp av rasjonale tall, altså at det konstruerte tallet ligger lengst unna noe rasjonalt tall ved at konvergentene nærmer seg senest mulig, ville det hatt en kjedebrøk med lavest mulig tallverdi på alle komponentene.

Dermed er det to tall representert som kjedebrøker som er likeverdige kandidater til plassen som tallet som dårligst lar seg approksimere med rasjonale tall:

$$[1; \bar{1}] = \phi \quad \text{og} \quad [0; \bar{1}] = \frac{1}{\phi}$$

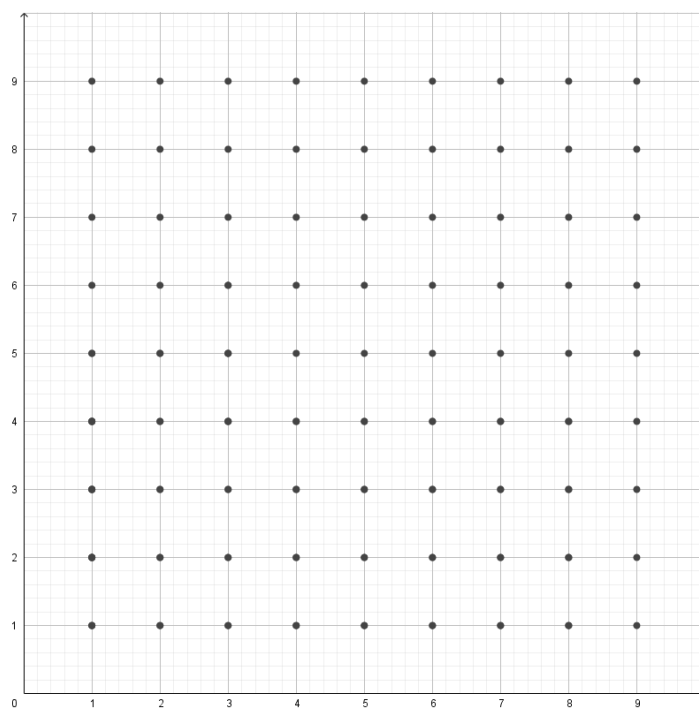
n	e_n^k	e_n	π_n^k	π_n	$\sqrt{2}_n^k$	$\sqrt{2}_n$	ϕ_n^k	ϕ_n
0	2	$\frac{2}{1}$	3	$\frac{3}{1}$	1	$\frac{1}{1}$	1	$\frac{1}{1}$
1	1	$\frac{3}{1}$	7	$\frac{22}{7}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{1}$
2	2	$\frac{8}{3}$	15	$\frac{333}{106}$	2	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{3}{2}$
3	1	$\frac{11}{4}$	1	$\frac{355}{113}$	2	$\frac{17}{12}$	1	$\frac{5}{3}$
4	1	$\frac{19}{7}$	292	$\frac{103993}{33102}$	2	$\frac{41}{29}$	1	$\frac{8}{5}$
5	4	$\frac{87}{32}$	1	$\frac{104348}{33215}$	2	$\frac{99}{70}$	1	$\frac{13}{8}$
6	1	$\frac{106}{39}$	1	$\frac{208341}{66317}$	2	$\frac{239}{169}$	1	$\frac{21}{13}$
7	1	$\frac{193}{71}$	1	$\frac{312689}{99532}$	2	$\frac{577}{408}$	1	$\frac{34}{21}$
8	6	$\frac{1264}{465}$	2	$\frac{833719}{265381}$	2	$\frac{1393}{985}$	1	$\frac{55}{34}$
9	1	$\frac{1457}{536}$	1	$\frac{1146408}{364913}$	2	$\frac{3363}{2378}$	1	$\frac{89}{55}$
10	1	$\frac{2721}{1001}$	3	$\frac{4272943}{1360120}$	2	$\frac{8119}{5741}$	1	$\frac{144}{89}$
n	e_n^k	$\frac{\Delta e_{n-1}}{\Delta e_n}$	π_n^k	$\frac{\Delta \pi_{n-1}}{\Delta \pi_n}$	$\sqrt{2}_n^k$	$\frac{\Delta \sqrt{2}_{n-1}}{\Delta \sqrt{2}_n}$	ϕ_n^k	$\frac{\Delta \phi_{n-1}}{\Delta \phi_n}$
0	2	-	3	-	1	-	1	-
1	1	2.55	7	111.98	2	4.83	1	1.62
2	2	5.46	15	15.19	2	6.04	1	3.33
3	1	1.63	1	311.96	2	5.79	1	2.43
4	1	7.94	292	461.62	2	5.83	1	2.67
5	4	8.54	1	1.74	2	5.83	1	2.59
6	1	1.41	1	2.71	2	5.83	1	2.63
7	1	11.88	1	4.20	2	5.83	1	2.61
8	6	12.41	2	3.34	2	5.83	1	2.62
9	1	1.29	1	5.41	2	5.83	1	2.62
10	1	15.92	3	3.99	2	5.83	1	2.62

Tabell 2.6: Kjedefrøkerstrukturert tilhørende $e, \pi, \sqrt{2}, \phi$.

2.2 Åkerproblem

I denne delen skal konseptet med irrasjonalitet og rasjonale approksimasjoner undersøkes på en annen måte ved å bruke et to-dimensjonalt plan i første kvadrant i et kartesisk koordinatsystem med punkter i hver koordinat med både heltall i x -koordinat og y -koordinat.

Motivasjonen bak denne måten å studere problemet på kommer fra det å kjøre forbi en åker plantet systematisk med frukttrær, hvor trærne er plantet i rekker som står vinkelrett på hverandre med konstant mellomrom. I det man passerer åkeren vil det iblant være mulig å se tvers gjennom hele åkeren, når man som observatør står mellom to rekker og har synsretning parallelt med respektive rekker. Andre ganger, for eksempel om man står på enden av en rekke med trær, da vil man kun se det første treet i rekken og det vil blokkere utsikten mot alle trærne bak. Studiet av problemer tilknyttet punkter fordelt på et to-dimensjonalt plan vil her kalles for nettopp *åkerproblemer*.



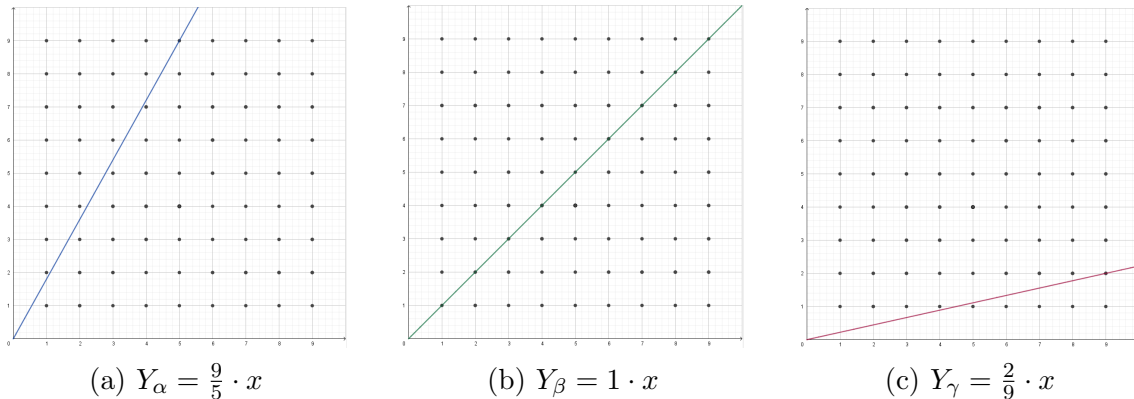
Figur 2.2: En 8×8 åker med trær i alle heltallspunkter.

For denne undersøkelsen antas det at observatøren som ser utover åkeren står i origo av koordinatsystemet, og det er vinkelen mellom x -aksen og synsretning som varierer. I alle punkter (x, y) , hvor x og y er heltall større enn null, er det plantet et frukttrø. Videre er hvert tre i plantasjen et punkt xy -planet, sånn at det ikke har noen bredde for observatøren. Åkeren er uendelig stor i både x - og y -retning, som igjen betyr at det er uendelig mange trær. Synsretningen til observatøren vil danne en linje fra origo som strekker seg utover planet, hvor denne linjen er definert ved gradienten, a , som danner en lineær funksjon Y_A :

$$a_A = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$Y_A(x) = a_A \cdot x$$

En gradient $a = 1$ vil da gi en synsretning som danner 45° med x -aksen, og observatøren vil kunne se treet som ligger i punktet $(1, 1)$, men det treet vil da blokkere for alle trærne som ligger direkte bak det, altså $(2, 2), (3, 3), \dots, (n, n)$. Hadde observatøren hatt et ønske om å observere treet i $(3, 3)$ ville han rettet blikket i retningen med gradient $\Delta y = 3, \Delta x = 3, a = \frac{3}{3} = \frac{1}{1} = 1$. Med andre ord, vil et tre i punktet (x_i, y_i) blokkere sikten for trær i punktene $(n \cdot x_i, n \cdot y_i)$, og hvis x_j og y_j har en felles faktor k , vil det treet være blokkert av treet i punktet $(x_j/k, y_j/k)$.



Figur 2.3: Eksempler på synsretninger.

2.2.1 Rasjonale tall i åkern

La to synsretninger være definert med gradientene og linjene:

$$a_B = \frac{y_B}{x_B} = \frac{12}{7} \quad \text{og} \quad a_C = \frac{y_C}{x_C} = \frac{415}{92}$$

$$y_B(x) = a_B \cdot x \quad \text{og} \quad y_C(x) = a_C \cdot x$$

For den første synsretningen, a_B , er det til nå etablert at observatøren ikke ville ha sett noen trær før treet i punkt $(7, 12)$. Videre defineres det første nærliggende treet til å være på første kolonne, $x = 1$, og nærmest på høyresiden i forhold til synsretning for observatøren. Altså, det første treet av interesse i synsretning a_B ligger i punktet (x_{b_0}, y_{b_0}) , $x_{b_0} = 1$ og $y_{b_0} = \text{trunc}(Y_B(1)) = 1$, hvor *trunc* trunkterer tallet, altså fjerner desimalene. Tilsvarende gjelder for synsretning a_C , hvor det første treet av interesse er i punktet (x_{c_0}, y_{c_0}) , $x_{c_0} = 1$ og $y_{c_0} = \text{trunc}(Y_C(1)) = 4$.

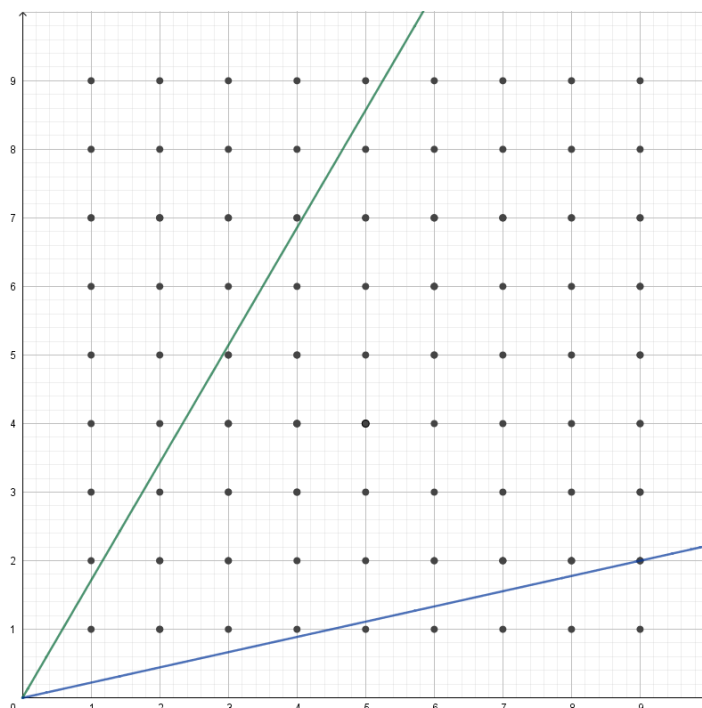
Ta utgangspunkt i synsretning med gradient a_B og det første treet i (x_{b_0}, y_{b_0}) . Herfra kan man spørre; hvilket tre er det neste som er nærmest mulig observatøren, men lenger unna observatøren enn det første treet og samtidig nærmere synsretningen enn det første treet? Det som spørres etter her stiller følgende kriterier for det neste treet (x_{b_1}, y_{b_1}) :

$$x_{b_1}^2 + y_{b_1}^2 > x_{b_0}^2 + y_{b_0}^2$$

$$d_{b_1} = \frac{|x_B \cdot y_{b_1} - x_{b_1} \cdot y_B|}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}} < \frac{|x_B \cdot y_{b_0} - x_{b_0} \cdot y_B|}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = d_{b_0}$$

Hvor d_{b_0} og d_{b_1} betegner avstanden fra henholdsvis punkt (x_{b_0}, y_{b_0}) og (x_{b_1}, y_{b_1}) til linja $Y_B(x)$

Den øverste likning betegner avstanden fra observatøren til punktene som markerer trærne via Pytagoras setning, mens formelen for avstanden fra punktene til linja er utledet ved bruk av ortogonale vektorer i vektorregning.



Figur 2.4: Grønn linje er $Y_B = a_B \cdot x$ og blå linje er $Y_C = a_C \cdot x$.

Tilsvarende kriterier videreføres fra treet i punkt (x_{b_1}, y_{b_1}) til treet i punkt (x_{b_2}, y_{b_2}) . Trærne som følgende kriteriene nevnt vil havne i punkter som gradvis kommer nærmere synsretningen og er gradvis lengre unna observatøren, gitt ved koordinatene:

$$(x_{b_0}, y_{b_0}) = (1, 1)$$

$$(x_{b_1}, y_{b_1}) = (1, 2)$$

$$(x_{b_2}, y_{b_2}) = (3, 5)$$

$$(x_{b_3}, y_{b_3}) = (7, 12)$$

Ved å anvende samme metode som brukt over i synsretning B på synsretning C vil trærne i følgende punkter være gradvis lengre unna observatøren og samtidig stadig nærmere linje $Y_C(x)$:

$$(x_{c_0}, y_{c_0}) = (1, 4)$$

$$(x_{c_1}, y_{c_1}) = (1, 5)$$

$$(x_{c_2}, y_{c_2}) = (2, 9)$$

$$(x_{c_3}, y_{c_3}) = (45, 203)$$

$$(x_{c_4}, y_{c_4}) = (92, 415)$$

Nå begynner konturene av en interessant struktur å tegne seg. Tallene i x - og y -koordinatene til trærne som gradvis er lengre unna observatøren og som samtidig

gradvis nærmerer synsretningen tilsvarende tellerne og nevnerne i konvergentene fra kjedebrøkene i tallene B og C fra Tabell 2.2. Denne observasjonen diskuteres videre i 2.3.

2.2.2 Åkertitting generalisert

Foregående delkapittel tok for seg et par rasjonale tall, tidligere brukt i delkapittelet om kjedebrøker, som gradienter for synsretning, og det ble undersøkt hvilke trær som gradvis hadde kortere distanse til synsretningen. Det naturlige neste steg vil være å generalisere strategien anvendt ovenfor og tilpasse bruken til irrasjonale tall, da gradient i forrige del ble definert ved et forhold, som per definisjon er umulig med irrasjonale tall.

For å løse dette problemet lar vi gradienten være det faktiske tallet. Altså, synsretningen for et reelt tall, A , er definert ved den lineære funksjonen:

$$Y_A(x) = A \cdot x$$

Videre, la det 0. treet være definert ved:

$$(x_{a_0}, y_{a_0}) = (1, \text{trunc}(y_A(1)))$$

For n . tre med koordinater (x_{a_n}, y_{a_n}) , hvor $n \geq 1$, gjelder følgende kriterier:

$$\begin{aligned} x_{a_n}^2 + y_{a_n}^2 &> x_{a_{n-1}}^2 + y_{a_{n-1}}^2 \\ d_{a_n} = \frac{|y_n - x_n \cdot A|}{\sqrt{1+A^2}} &< \frac{|y_{a_{n-1}} - x_{a_{n-1}} \cdot A|}{\sqrt{1+A^2}} = d_{a_{n-1}} \end{aligned}$$

Hvor $d_{a_{n-1}}$ og d_{a_n} betegner avstanden fra henholdsvis punkt $(x_{a_{n-1}}, y_{a_{n-1}})$ og (x_{a_n}, y_{a_n}) til linja $y_A(x)$. Til slutt, avbilder koordinatene (x_{a_n}, y_{a_n}) den n . konvergenten fra kjedebrøken til tallet A ved funksjonen:

$$f : (x_{a_n}, y_{a_n}) \rightarrow \frac{y_{a_n}}{x_{a_n}} = A_n$$

Hvor A_n er n . konvergenten til A .

Ved å knytte kjedebrøker sammen med åkerproblemer danner det et bilde på hva de forskjellige approksimeringene fra konvergentene faktisk betyr, samt det er mulig å få en visuell representasjon av den rekursive approksimasjonsevnen. Dette er da et verktøy til å vise hvor godt et irrasjonalt tall lar seg approksimere ved å visualisere avstanden med å spore trærne på høyre- og venstresiden av synsretningen til observatøren, som vist på grafen for tallene B og C .

Relasjonen mellom størrelsene

Ettersom en synsretning med gradienten det rasjonale tallet $Q = \frac{p}{q}$ vil treffe treet i koordinaten (q, p) , betyr det at alle rasjonale tall vil treffe et tre som blokkerer utsikten for observatøren, altså observatøren vil ikke kunne se gjennom åkeren. Finnes det da en retning som observatøren kan se mot hvor han kan se tvers igjennom åkeren, til tross for at åkeren er uendelig stor med uendelig mange trær?

Ettersom de irrasjonale tallene fra definisjon ikke kan representeres som brøk, vil det si at med en synsretning hvor gradienten er irrasjonal, vil observatøren aldri få

utsikten blokkert av et punkt-tre. Allikevel kan man spørre seg om det er noen av de irrasjonale synsretningene som får utsikten mer forstyrret ved at trærne som ligger nærmest synsretningen ligger nærmere enn hos andre irrasjonale synsretninger.

Ekvivalent; hvis trærne ikke lenger hadde vært punkter i xy -planet, men fått en infinitesimal tykkelse, hvilken synsretning hadde fått lengst sikt? En tykkelse ulik null vil tilsa at det er umulig å kunne se gjennom hele åkeren sett fra origo. Observasjonene fra analysene med den rekursive approksimasjonsevnen til kjedebrøksrepresentasjonen til de forskjellige tallene vil her være en indikator, og et resultat tidligere nevnt kan nå figurativt forklares. Nemlig at konvergenten som hører til komponenten *før* den store komponenten har en sterk rekursiv approksimasjonsevne

Observasjonene viser at tall med stor n . komponent lar seg approksimere relativt bra med $(n-1)$. konvergenten. Etersom det er før den store komponenten, vil $(n-1)$. komponent være relativt liten, og da produsere en konvergent med relativt lave tallverdier i teller og nevner, sammenliknet med n . konvergent med stor komponent. Dermed, vil $(n-1)$. konvergent approksimere det eksakte tallet bemerkelsesverdig godt, til tross for at brøken er forholdsvis liten. Det er ingen bedre rasjonal approksimasjon før neste konvergent, altså n . konvergent, som er en forholdsvis stor og komplisert brøk ettersom den er produsert fra den store komponenten i n . Analogt, sett fra åkeren, betyr det at et tre allerede tidlig i åkeren vil ligge veldig nært synsretningen og det er mye lengre før et tre vil ligge nærmere synsretningen, ettersom en liten brøk tilsvarer koordinatene nærme origo og en stor brøk tilsvarer koordinater langt unna origo fra avbildning f .

Resultatet sier altså at tall med store komponenter tidlig i kjedebrøken lar seg approksimere godt med enkle brøker.

Denne sammenhengen kan studeres i tråd med de matematiske fremstillingene av størrelsene tidligere presentert under kjedebrøker og åkerproblemer. Nedenfor er det implisitt at d -, x -, y - og R -notasjonene tilhører det generelle tallet A , så det vil ikke være senket skrift for å indikere dette på de forskjellige størrelsene. Først, differansen mellom det eksakte tallet A og den n . konvergenten A_n er gitt ved:

$$\Delta A = |A - A_n|$$

Videre kan konvergenten skrives om til brøkrepresentasjon for å tilpasse avbildningen i åkerproblemer, hvor y_n og x_n er henholdsvis n . teller og n . nevner i konvergenten.

$$\Delta A = |A - \frac{y_n}{x_n}| = |y_n - Ax_n|x_n^{-1}$$

x_n faktoriseres ut for å få det som er notert i absoluttverdi til å være det samme som er notert i d_n , som viser avstanden fra et av trærne i åkerproblemer til synsretningen $y_A(x)$. x_n er alltid positiv, ettersom det er fra en konvergent til kjedebrøkene og avbildes som x -koordinat i første kvadrant. Nå kan avstanden d_n skrives om:

$$d_n = \frac{|y_n - Ax_n|}{\sqrt{1+A^2}} \Rightarrow |y_n - Ax_n| = d_n \sqrt{1+A^2}$$

Definisjonen til den rekursive approksimasjonsevnen er gitt ved forholdet mellom differansen til den foregående konvergenten A_{n-1} og det eksakte tallet og differansen til konvergenten A_n og det eksakte tallet. Altså:

$$R_n = \frac{\Delta A_{n-1}}{\Delta A_n}$$

Ved å sette inn for differansen og avstanden, forkorte og gjøre litt algebraisk magi vil sammenhengen mellom størrelsene fremtre.

$$\frac{\Delta A_{n-1}}{\Delta A_n} = \frac{|y_{n-1} - Ax_{n-1}|x_{n-1}^{-1}}{|y_n - Ax_n|x_n^{-1}} = \frac{d_{n-1}\sqrt{1+A^2}\cdot x_n}{d_n\sqrt{1+A^2}\cdot x_{n-1}} = \frac{d_{n-1}}{d_n} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

Dette gir et tydelig bilde på hvordan den rekursive approksimasjonsevnen, avstanden til synsretningen og nevneren på konvergentene forholder seg til hverandre:

$$R_n = \frac{d_{n-1}}{d_n} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

Implikasjonene til denne sammenhengen diskuteres lengre ned under 2.3.2.

2.3 Graden av irrasjonalitet

Med utgangspunkt i at irrasjonale tall, fra definisjon, ikke kan representeres som en brøk bestående av heltall, gir det mening å spørre seg om et irrasjonalt tall er mer irrasjonalt enn et annet irrasjonalt tall? Rasjonale og irrasjonale tall er, selvsagt, distinkt forskjellige ved at de enten kan eller kan ikke representeres som brøk, allikevel går det an å approksimere alle irrasjonale tall så godt man ønsker ved hjelp av rasjonale tall.

Å definere en grad av irrasjonalitet på hvor godt det lar seg approksimere med rasjonale tall blir derfor meningsløst, da det alltid vil være mulig å produsere et rasjonalt tall som approksimerer et hvilket som helst irrasjonalt tall bedre enn et annet rasjonalt tall.

Ideen i denne sammenheng om å definere graden av irrasjonalitet vil derfor heller basere seg på hvor godt et irrasjonalt tall lar seg approksimere av enkle brøker med lave tallverdier i nevner.

2.3.1 Observasjoner

Likningen ovenfor impliserer at hvis det brukes tall som har store komponenter tidlig i kjedebrøkene, som igjen gir tidligere sterke rekursive approksimasjonsevner, som gradient for synsretningen i åkeren, vil synsretningen tidlig få sikten blokkert av trær med tykkelse ulik null. Ta for eksempel π , som har $R_1 \approx 112$, $x_1 = 7$ og $x_0 = 1$, settes disse tallene inn i likningen kan en konsekvens av sterk rekursiv approksimasjonsevne observeres.

$$112 = \frac{d_0}{d_1} \cdot \frac{7}{1} \Rightarrow d_1 = d_0/16$$

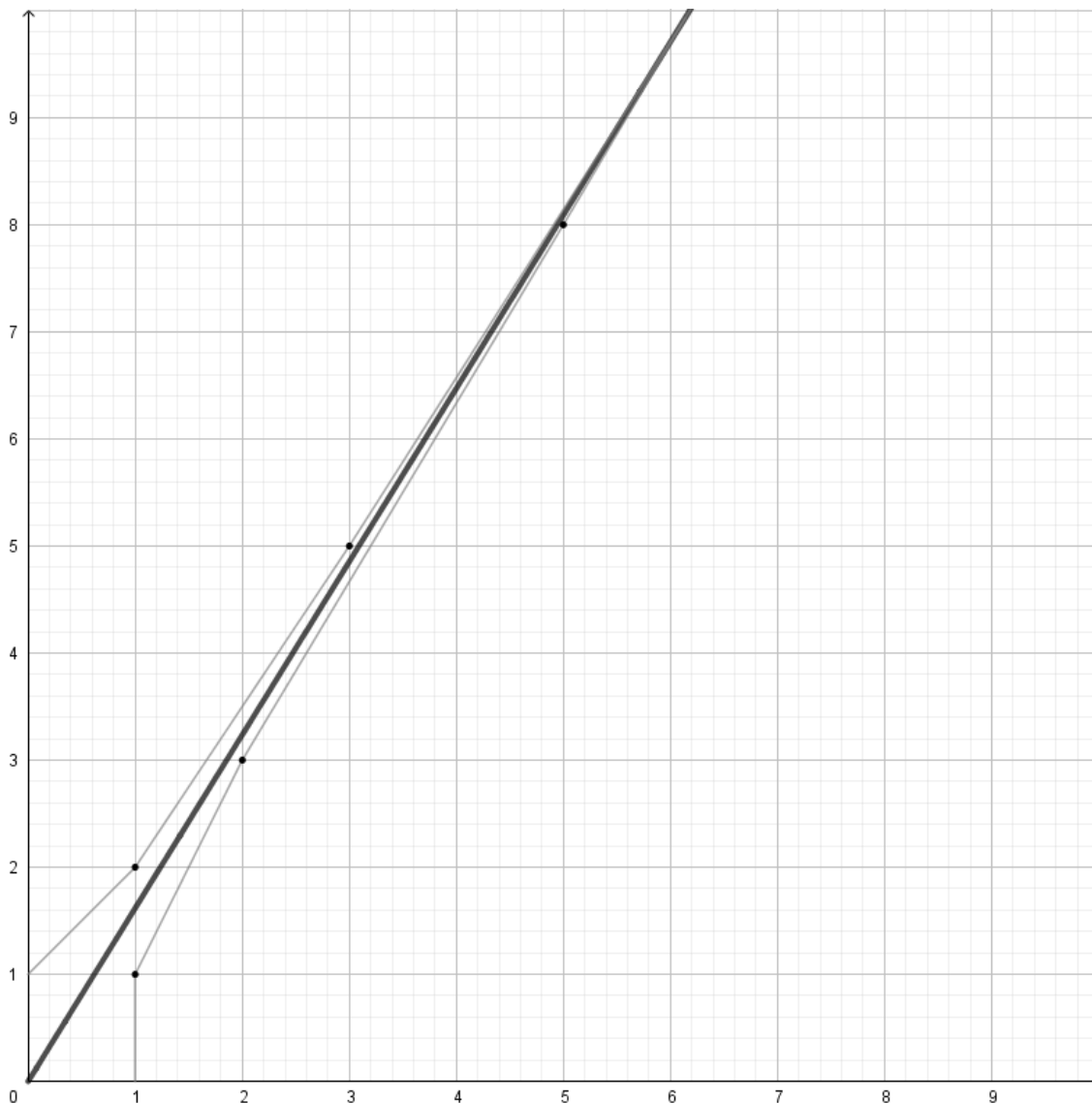
Avstanden mellom synsretningen og det 1. treet er altså omtrent $\frac{1}{16}$ av avstanden mellom det 0. treet og synsretningen. Sammenlikn det med, for eksempel ϕ , som har $R_1 \approx 1.62$, $x_1 = 1$ og $x_0 = 1$.

$$1.62 = \frac{d_0}{d_1} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow d_1 = d_0/1.62$$

Med ϕ som gradient vil det 1. treet kun være knapt en og en halv gang nærmere enn det 0. treet. Ved å undersøke konvergentene i tabell 2.6 for ϕ kan man observere at nevnerene øker jevnt som en rekursiv additiv følge mens den rekursive approksimasjonsevnen alternerer dempende mot en konstant verdi. Denne observasjonen

hos tall med lave tallverdier i kjedebrøkene tilsier at trærne gradvis nærmerer seg synsretningen med å være litt nærmere enn forrige tre. Ekvivalent, vil konvergentenes nevner som approksimerer det irrasjonale tallet bli stadig større mens evnen til å approksimere det irrasjonale tallet ikke blir oppsiktsvekkende mye sterkere, som demonstrert i form rekursiv approksimasjonsevne sammenliknet med andre tall.

Som en kontrast, vil irrasjonale tall med høye tallverdier tidlig i kjedebrøkene tidlig få et tre som ligger forholdsvis mye nærmere enn det forrige treet som blokkerer sikten langt frem. Som i approksimasjonsforstand betyr at i dette tallet vil konvergenter med lave tallverdier i nevneren vil approksimere det irrasjonale tallet veldig godt.



Figur 2.5: $Y_\phi(x) = \phi \cdot x$, punktene tilsvarer konvergentene til ϕ .

2.3.2 Implikasjoner

Oppsummert, vil store komponenter tidlig i kjedebrøkene til irrasjonale tall tilsi at de irrasjonale tallene lar seg approksimere godt ved hjelp av rasjonale tall med lave tallverdier i nevneren. La nå den $(n + 1)$. komponenten ha stor tallverdi, slik

at det er n . konvergent som har sterk rekursive approksimasjonsverdi R_n til tross for at n . komponent har lav tallverdi. Ved å se på relasjonen mellom størrelsene i kjedebrøker og åkerproblemer tilhørende n når a_{n+1} er en stor komponent, blir det tydelig i likningen under:

$$R_n = \frac{d_{n-1}}{d_n} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

Ettersom x_n ikke vil ha særlig mye høyere tallverdi x_{n-1} siden n . komponent har lav tallverdi, vil forholdet mellom de være ganske liten og nær 1. Da inneholder likningen komparativt stor R_n og liten $\frac{x_n}{x_{n-1}}$, som tilsier stor $\frac{d_{n-1}}{d_n}$. Altså at når dette er sant for et irrasjonalt tall, lar det seg approksimere bemerkelsesverdig mye bedre enn forrige konvergent ved hjelp av et rasjonalt tall med forholdsvis lav tallverdi på nevneren. Kort fortalt; En liten økning på tallverdien i nevneren, men mye kortere distanse mellom det eksakte tallet og konvergenten. Desto sterkere rekursiv approksimasjonsevne, vil derfor tilsi desto lavere grad av irrasjonalitet.

Dermed, vil et tall med svakest mulig rekursiv approksimasjonsevne ha størst mulig grad av irrasjonalitet. Videre, vil de svakest rekursive approksimasjonsevner bli produsert fra lavest mulig tallverdi på komponentene i kjedebrøken til tallet. Ergo, vil tallet med størst grad av irrasjonalitet være tallet med de minste mulig komponentene overalt i kjedebrøken; $[1; \bar{1}]$ og $[0; \bar{1}]$

Kapittel 3

Fordeling

Hvordan er det egentlig larest å plassere punkter på en linje? Altså, hvis man skulle ha interesse av å fordele punkter jevnest mulig sånn at det ikke blir større samlinger av punkter ved et område, mens andre steder er det forholdsvis store områder uten noen punkter. Med andre ord, mellomrommene mellom punktene bør være forholdsvis like, uten at noen er åpenbart større eller mindre enn andre.

Med et gitt antall punkter og en gitt lengde på for eksempel en linje, kan punktene lett fordeles langs linja med jevne mellomrom, faktisk med eksakt like store mellomrom. Ved å videreføre problemet til en system hvor det på forhånd ikke er gitt et antall punkter blir problematikken fremtredende. Med et ukjent antall punkter, hvordan bør man plassere dem for at de til slutt skal få jevnest mulig mellomrom? Altså at det ikke er noen mellomrom som åpenbart er mye større enn de andre. Plasserer man det første punktet midt på, og deretter halverer hver gang? Videre i denne delen skal det undersøkes systemer for hvordan dette kan gjøres.

3.1 Linjestykke

For denne delen brukes det et linjestykke med en gitt lengde som ikke endres. Videre, ønskes det å fordele flere punkter på denne linjen slik at det blir jevne mellomrom mellom punktene.

3.1.1 Halvering

I denne delen antas det at det allerede er to punkter på linja som er plassert i hver sin ende.

Man kan diskutere om det å halvere linjestykket hver gang er en intuitiv måte å gjøre det på. Det er en strategi som for all del fungerer veldig fint for de første punktene, og det er en strategi som fungerer *best* for noen gitte antall punkter. For eksempel, hvis kun ett punkt skal legges til linja, er den beste plassen nettopp der linja halveres, ettersom mellomrommene mellom punktene da vil være eksakt like store. For to punkter vil det være en ganske ugunstig måte å gjøre det på, ettersom det da vil produsere to mellomrom som er halvparten så stort som det siste. Men for tre punkter vil det igjen dannes eksakt like store mellomrom. Denne fremgangsmåten kan systematiseres forholdsvis enkelt ved å se på hvor mange mellomrom som skal deles, og det kan vises for hvilke antall punkter som gir eksakt like store mellomrom.

La linja være strippet for punkter foruten de i endene igjen. Ved første plassering av et punkt deles linja inn i to mellomrom som er eksakt like store. Nå er det to mellomrom som må deles, så da må det legges til to punkter til. Da har linja blitt delt inn i fire mellomrom som alle må deles for at mellomrommene skal være like store, totalt sett må det da til syv punkter for at det skal være like store mellomrom. Det begynner nå å tegne seg et mønster av når halveringen er den ideelle måten å dele opp linja på, for neste gang er det åtte mellomrom som skal halveres, så 16, så 32.

Dermed kan man se at første gang er det ett punkt som skal til for at halveringen skal gi like store mellomrom. Andre gang det er ideelt med halvering som deling er når de to nye mellomrommene er delt, altså $1 + 2 = 3$. Neste gang er det fire nye mellomrom, så $1 + 2 + 4 = 7$. Dette kan generaliseres til den n . gangen det går opp med halvering, er med $q(n)$ antall punkter, hvor $n \in \mathbf{N}$.

$$q(n) = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = \sum_{i=1}^n 2^{i-1}$$

For antall punkter som funksjonen $q(n)$ gir vil en halvering være den beste måten å dele linja på. På den andre siden, vil det for eksempel for to, fire eller åtte punkter være ikke bare en mindre god, men egentlig en dårlig måte å dele på ettersom det da vil være enkelte mellomrom som er dobbelt så store som andre. Under er det regnet ut hvilke antall punkter hvor en halvering er en god metode, og som nevnt tidligere kan det observeres at det fungerer forholdsvis ofte for et lavt antall punkter sammenliknet med når det blir flere punkter. Altså, at det blir bare sjeldnere og sjeldnere en god måte å gjøre det på for et økende antall punkter.

n	$q(n)$
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
⋮	⋮

Legg også merke til at $q(n)$ kan skrives på en enda enklere måte enn de to vist tidligere. Nemlig:

$$q(n) = 2^n - 1$$

Som en gøy kuriositet kan det forklares ved at det brukes rekursiv addisjon for å finne hvor mange punkter det skal til for at det går opp neste gang. Den første gangen det går opp er det kun ett punkt som skal til, og det er tilsvarende $(2 - 1)$, altså én unna to. Som forklart tidligere dobles også antall mellomrom som må deles for hver gang det går opp, videre er dobling tallet to opphøyd i antall doblinger. Men siden det kun trengtes ett punkt første gangen, arves dette avviket nedover den rekursive addisjonen.

$$\begin{aligned}
 q(1) &= (2 - 1) && = (2^1 - 1) \\
 q(2) &= (2 - 1) + 2 = 4 - 1 && = (2^2 - 1) \\
 q(3) &= (4 - 1) + 4 = 8 - 1 && = (2^3 - 1) \\
 q(4) &= (8 - 1) + 8 = 16 - 1 && = (2^4 - 1) \\
 \hline
 q(n) &= 2^n - 1
 \end{aligned}$$

Til tross for den enkle matematiske fremstillingen og at halveringen var den intuitive kandidaten til å være løsningen til problemet presentert i starten av denne delen, er nok ikke dette den optimale måten å gjøre det på. Det blir stadig forholdsvis færre tall som er forhøyelse av to, som vil resultere i at fordeling av punkter langs et linjestykke med en ukjent antall punkter med halvering som strategi vil sannsynligvis ende med en skjevhet hvor et eller flere av mellomrommene har dobbel størrelse sammenliknet med de andre.

3.1.2 Fordelingstall

Istedenfor å operere ved å dele linjestykker i bestemt forhold, for eksempel ved halvering, kan det brukes et bestemt tall, r , for å bestemme hvor neste punkt skal plasseres. Ta for eksempel en linje med lengde $l = 2$ som går langs en akse fra 0 til 2 og fordelingstall $r = 0.7$. På denne linjen er det ikke punkter i endene fra før, da vil det første punktets plassering, $p(1)$, være bestemt ved:

$$p(1) = r \cdot l = 0.7 \cdot 2 = 1.4$$

Dette punktet er ikke plassert i midten, og mellomrommene er ikke like, med henholdsvis størrelsene 1.4 og $2 - 1.4 = 0.6$. Plassering av det andre punktet finner man ved å gjøre samme operasjon og addere på forrige resultatet. Altså:

$$p(2) = 1.4 + r \cdot l = 1.4 + 0.7 \cdot 2 = 2.8$$

Resultatet er problematisk, ettersom verdien er utenfor linjestykket på aksene. Det løses ved å bruke modulær addisjon med modulo lik lengden til linjestykket, altså modulo 2 i dette tilfellet.

$$p(2) = 1.4 +_2 r \cdot l = 1.4 +_2 0.7 \cdot 2 = 0.8$$

Dette punktet vil definitivt være på linjen l . Denne strategien vil etterhvert være forholdsvis rotete og det kan være en utfordring å holde styr på hvilket punkt det gjelder, ettersom den hittil er beskrevet som en rekursiv addisjonsalgoritme. Dette kan gjøres til en forholdsvis enkel operasjon som vil være mer systematisk om man skriver om uttrykket ved å beholde variablene.

$$p(2) = r \cdot l +_2 r \cdot l = \text{mod}_2(2 \cdot rl) = \text{mod}_2(2 \cdot 0.7 \cdot 2) = \text{mod}_2(2.8) = 0.8$$

Herfra kan man se at for punkt nummer k vil plasseringen $p(k)$ være gitt ved:

$$p(k) = \text{mod}_2(k \cdot 0.7 \cdot 2) = \text{mod}_2(k \cdot 1.4)$$

Denne generaliseringen for fordelingen av punkter langs en linje ved bruk av fordelingsstall kan lettvis anvendes for spesifikke fordelingsstall. For eksempel, under er de første 15 punktene produsert av fordelingsstallet $r = 0.7$ langs en linje med $l = 2$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(k)$	1.4	0.8	0.2	1.6	1.0	0.4	1.8	1.2	0.6	0.0	1.4	0.8	0.2	1.6	1.0

Dette fordelingsstallet fungerer forholdsvis bra. Deler vi linja inn i 10 like tiendedelssegmenter, vil det for de ti første punktene ikke være to punkter innenfor samme segment, noe som tyder på at dette er en jevn fordeling. Utfordringen med dette fordelingsstallet er, som vises i tabellen, at etter de ti første punktene så begynner punktene å overlappe. Faktisk, så begynner de å repetere alle de ti første punktene både i verdi og rekkefølge. Dette er uønskede egenskaper til et fordelingsstall, da poenget i utgangspunktet var at antall punkter var ukjent og fordelingen skal ikke kun fungere for et gitt antall punkter før de gjentar seg selv. Plasseringer av punkter kan altså systematiseres annerledes for dette fordelingsstallet ettersom det begynner å gjenta seg selv. La n være et positivt heltall, da vil plasseringen, $p(k)$ til det k . punktet være blant én av disse ti:

k	$p(k)$
$1 \cdot n$	1.4
$2 \cdot n$	0.8
$3 \cdot n$	0.2
$4 \cdot n$	1.6
$5 \cdot n$	1.0
$6 \cdot n$	0.4
$7 \cdot n$	1.8
$8 \cdot n$	1.2
$9 \cdot n$	0.6
$10 \cdot n$	0.0

For å finne det ideelle fordelingsstallet for et ukjent antall punkter bør det avklares hvilke tall som *ikke* er kandidater. I den anledning, hvilke type tall er egentlig 0.7? Det er et rasjonalt tall representert som desimaltall. Egenskapen til tallet fremtrer tydeligere når representasjonsformen endres til brøk, hvor tallet på enklest vis kan skrives som $0.7 = \frac{7}{10}$. Her ligger også forklaringen til hvorfor det nettopp var ti forskjellige punkter som fremtrådte fra dette fordelingsstallet. Brøken avslører at tallet er i *tideler*, og uansett hvordan man kombinerer tideler ved addisjon vil man ikke kunne produsere et tall som befinner seg mellom noen tideler. Videre eksisterer det *ti* forskjellige tideler, og dette danner grensa for hvor mange forskjellige steder punktene kan eksistere. Dermed er det nevneren i den enkleste brøkrepresentasjonen til et rasjonalt fordelingsstall som bestemmer hvor mange distinkte punkter det fordelingsstallet kan produsere.

Før påstanden over drøftes videre, kan det være en fordel ordensmessig å først generalisere sammenhengen mellom størrelsene hittil nevnt ved hjelp av observasjonene som hittil er gjort. k viser hvilket punktnummer det er, og slik punktets plassering er definert her vil det fortelle hvor mange ganger fordelingsstallet r ganget med linjas lengde l skal adderes sammen. Ettersom punktets plassering må være på linja l , må addisjonen være under modulo l . Dette gir oss det generelle uttrykket $p(k)$ som viser punktets plassering:

$$p(k) = \text{mod}_l(krl)$$

Med det generelle uttrykket klarert, kan vi undersøke påstanden over om at det var nevneren i den enkleste brøkrepresentasjonen av et rasjonalt tall som avgjør hvor mange distinkte punkter et rasjonalt fordelingsstall kan produsere. For enkelt-hetsskyld, reduseres linjas lengde til $l = 1$. Videre bruker vi de to fordelingsstallene $r_1 = 0.5 = \frac{1}{2}$ og $r_2 = 0.4 = \frac{2}{5}$.

$$p_1(k) = \text{mod}_1(k \cdot 0.5) \quad \text{og} \quad p_2 = \text{mod}_1(k \cdot 0.4)$$

I denne sammenhengen vil det muligens være mer oversiktlig å bruke brøkrepresentasjon fremfor desimalrepresentasjon, da det også vil komme tydeligere frem hvordan tallene fordeler seg.

$$p_1(k) = \text{mod}_1(k \cdot \frac{1}{2}) \quad \text{og} \quad p_2 = \text{mod}_1(k \cdot \frac{2}{5})$$

Nedenfor kan man hvordan punktene fordeler seg for de to fordelingsstallene.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_1(k)$	1/2	0	1/2	0	1/2	0	1/2	0	1/2	0
$p_2(k)$	2/5	4/5	1/5	3/5	0	2/5	4/5	1/5	3/5	0

Påstanden det tidligere ble argumentert for viser seg å stemme også med disse to fordelingsstallene. r_1 har nevneren 2 og viste to distinkte plasseringer av punktene på linja, nemlig for på 1/2 og 0. For alle $k > 2$ endte punktet på en av disse plasseringene som da fører til overlapp. Tilsvarende observasjon gjelder for r_2 som har nevneren 5. Som en sideobservasjon kan man se at tellerens verdi ikke har noe å si for hvor mange distinkte det kan produseres hvis brøken ikke har noen fellesfaktor i teller og nevner. Fordelingsstallet r_2 vil da produsere fem distinkte punkter, 2/5, 4/5, 1/5, 3/5 og 0.

Motivasjonen som denne delen startet med, hvor antall punkter som skulle plasseres var ukjent, vil være utfordrende å tilfredsstille ved bruk av rasjonale tall som fordelingsstall. Selvfølgelig går det an å bruke rasjonale tall med store nevner, og i gitte praktiske situasjoner vil man ofte ha et anslag for et intervall hvor antall punkter kommer til å havne innenfor. Men uansett størrelse på det rasjonale tallet, vil det før eller siden produseres et punkt som ikke er distinkt og overlappet med et tidligere punkt.

I søken etter gode fordelingsstall er det nå tegnet konturer av kriterier som må ligge til grunn. Utgangspunktet er for det første at det må være jevnt fordelt, altså at det må være jevne mellomrom mellom punktene. For det andre, så må det fungere for et ukjent antall punkter, altså at for uansett hvor mange punkter det skal produseres,

må de ikke overlappe. For å fokusere på det siste punktet først, kan vi nå etter de enkle undersøkelsene avgjøre at rasjonale tall generelt ikke er gode kandidater her. Eksisterer det en brøk som kan representere fordelingsstallet, vil det ha en nevner og dermed også et gitt antall distinkte punkter langs en linje med lengden l .

3.2 Irrasjonale fordelingstall

Blant fordelingstall er de reelle tallene mest aktuelle å se på, og det er nå etablert at de rasjonale tallene ikke oppfyller ønskede kriterier for en ideell fordeling. Fortalt mer presist, hvor r er fordelingstallet som oppfyller kriteriene:

$$r \in \mathbf{R}, \quad r \notin \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad r \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{R}$$

Søken blant de irrasjonale tallene vil derfor være det neste naturlige steget. Tidligere i oppgaven under kapittelet om irrasjonalitet var noen irrasjonale tall utvalgt til videre undersøkelse. For å bygge videre på de, la de samme tallene bli brukt også i undersøkelsen om de egner seg som fordelingstall for punkter langs en linje. Linja vil fortsatt ha lengden $l = 1$ for enkelhetsskyld, resultatene vil kunne skaleres opp.

I første omgang vil de første ti punktene som produseres ved bruk av de irrasjonale tallene undersøkes for å se om de egner seg særlig. Om de første punktene alle havner rundt et forholdsvis lite begrenset område er det uheldig for kriteriene vi har stilt, og det de første punktene kan dermed være en indikator på hvor godt punktene lar seg fordele med gitte fordelingstall. Hvis tallene skulle vise seg å fungere tilfredsstillende i forhold til kriteriene eller viser interessante strukturer som kan fungere, vil det være grunn til videre undersøkelse.

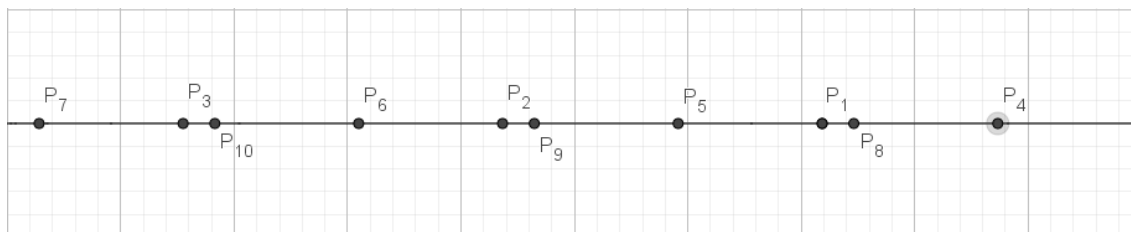
3.2.1 Eulers tall

Uten noen spesiell grunn, la Eulers tall e bli undersøkt først for å se hvordan irrasjonale tall lar seg fordele. Da irrasjonale tall ikke kan representeres som brøk, vil det aldri være punkter som overlapper. Dermed er det interessante hvordan punktene vil bli plassert i forhold til hverandre, og om det er struktur som kan avsløre hvordan mellomrommene vil være når antall punkter går mot uendelig.

$$p_e(k) = \text{mod}_1(ke)$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_e(k)$	0.718	0.437	0.155	0.873	0.591	0.310	0.028	0.746	0.465	0.183

Tabellen og Figur 3.1 viser en forholdsvis god fordeling for de første punktene, men legg merke til at hvis linja deles i ti like store segmenter, vil det være noen segmenter uten noen punkter. Mer eksakt, etter ti punkter vil det være tre segmenter uten punkter. Ved nærmere inspeksjon av plasseringen til punktene i forhold til hverandre, vil de syv første punktene produsere jevne gode mellomrom, men for $k > 7$ begynner punktene å legge seg inntil tidligere punkter. Denne trenden fortsetter også etter det tiende punktet. Men også at punktene med $k > 7$ ligger inntil punktene med $k - 7$, altså at det er en form for struktur for hvilke punkt de vil være plassert inntil.



Figur 3.1: Ti første punktene med e som fordelingstall. $p_e(k) = p_k$

Forklaringen til dette fenomenet finner vi i irrasjonaliteten til fordelingstallet, nærmere bestemte hvor godt det lar seg approksimere ved hjelp av rasjonale tall. Som nevnt, vil rasjonale fordelingstall produsere et antall distinkte punktplasseringer som korresponderer til nevneren i den enkleste brøkrepresentasjonen. Se tilbake til Tabell 2.6 hvor forskjellige rasjonale approksimasjoner av de irrasjonale tallene er listet opp. Den første gode rasjonale approksimasjonen til e er $19/7$, hvor differansen er omtrent fire tusendeler, altså $e - 19/7 \approx 0.003996$. Dermed vil hvert syvende punkt *nesten* overlappe, men de vil ikke faktisk overlappe ettersom det kun er en approksimasjon som har syv i neveren.

I tråd med denne observasjonene kan man forutse når et punkt vil ligge enda nærmere et annet punkt de vist ovenfor. Først, avstanden mellom punktene $p_e(1)$ og $p_e(8)$ er lik som avstanden mellom $p_e(2)$ og $p_e(9)$, altså:

$$p_e(8) - p_e(1) = p_e(9) - p_e(2) \approx 0.028$$

Generelt kan dette skrives som:

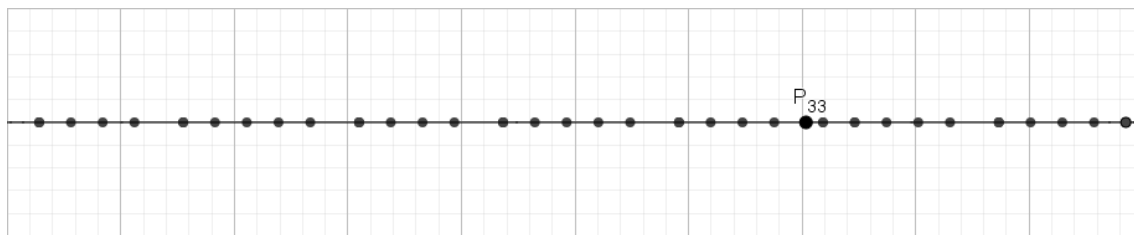
$$p_e(k) - p_e(k - 7) \approx 0.028 \quad \text{for } k > 7$$

Hvis foregående tallet havner helt på enden eller om det påfølgende havner helt på starten av linja vil det være andre lengder mellom endene og punkter som et resultat av moduloaddisjon. Her vil endesegmentene skjøtes sammen og telle som ett segment. Hensikten er å vise at den rasjonale approksimasjonen danner en struktur for det irrasjonale tallets fordeling.

Neste konvergent fra Tabell 2.6, altså rasjonale approksimasjon, av e har en rekursiv approksimasjonsevne på 8.54 som betyr at denne konvergenten er betydelig bedre enn forrige. Konvergenten har verdien $87/32$, som har differanse fra e på titusendels størrelsesorden, med tall er dette: $e - 87/32 \approx 0.00047$. Dette er, som den rekursive approksimasjonsevnen forteller, 8.54 ganger bedre enn forrige konvergent. Dette vil dermed dette antyde at punktet $p_e(33)$ ligger enda nærmere et allerede eksisterende punkt. Med samme argumentasjon gjort med forrige konvergent og avstanden til et tidligere punkt, vil det 33. punktet ligge nære det 1. punktet. Generelt kan man da si at $p_e(k) - p_e(k - 32)$ er liten for $k > 32$. Interessant for denne oppgaven er å undersøke om disse to punktene ligger nærmere hverandre enn $p_e(k)$ og $p_e(k - 7)$, og eventuelt hvor mye nærmere.

$$|p_e(33) - p_e(1)| \approx 0.015$$

Som antydnet er det 33. punktet plassert nærmere et tidligere punkt enn noen andre punkt. Det er et par andre interessante observasjoner som kan gjøres her. Først, at $p_e(33)$ er plassert til venstre for $p_e(1)$, mens punkt $p_e(8)$ var til høyre for $p_e(1)$. Dette



Figur 3.2: 33 første punktene med e som fordelingstall.

er i tråd med konvergentens approksimasjon, hvor $19/7$ avviker fra e ved å ha litt for høy verdi, mens $87/32$ har litt for lav verdi. Som nevnt tidligere i oppgaven, har påfølgende konvergenters nøyaktighet alternerende fortegn. Dette gjenspeiler seg i hvor punktene blir plassert i forhold til hverandre når samme tall blir brukt som fordelingstall.

Det er altså en sammenheng mellom konvergentene til de irrasjonale tallene og hvordan punktene plasseres. Det betyr at om man kjenner til konvergentene til et irrasjonalt tall, kan man si noe om hvor godt det lar seg bli brukt som et fordelingstall. Med observasjonene fra Eulers tall er det grunn til å mistenke at man kan forutsi hvilke punkter som vil ligge nærmere tidligere punkter sammenliknet med de foregående punktene, og i tillegg at det er en korrelasjon mellom approksimasjonsevnen til konvergenten og hvor nærme den er plassert et tidligere punkt. Hvis sistnevnte korrelasjon stemmer, betyr det at det også er en sammenheng mellom komponentene til et irrasjonalt talls kjedebrøk og punktenes plassering i forhold tidligere punkter. Det ville isåfall vært en god ledetråd for å finne det ideelle fordelingstallet.

Etter konvergenten $87/32$, som forøvrig er den femte konvergenten, kommer sjettede og syvende konvergent med henholdsvis verdiene $106/39$ og $193/71$. Begge disse konvergentene har tilhørende komponent med verdi 1, men den åttende komponenten er 6. Under kapitlet om irrasjonalitet ble det observert at en komponent med relativt høy verdi vil gjøre at både tilhørende og foregående konvergent vil få en sterk rekursiv approksimasjonsevne. I denne sammenheng betyr det at $106/39$ approksimerer ikke e særlig bedre enn forrige konvergent, men $193/71$ vil derimot approksimere e veldig godt, faktisk 11.88 ganger bedre. Hvis mistanken om at det er en korrelasjon mellom approksimasjonsevnen til konvergenter og avstanden mellom punkter stemmer, bør det 40. punktet være litt nærmere det første enn det 33. punktet og det 72. punktet bør være mye nærmere det første punktet enn 33. punktet. Under er avstandene regnet ut:

$$|p_e(40) - p_e(1)| \approx 0.013 \quad |p_e(72) - p_e(1)| \approx 0.002$$

Det ser altså ut som om mistanken stemmer. Det 40. punktet ligger knapt nærmere det første sammenliknet med det 33. punktet, dette var som mistenkt ettersom det var en svak rekursiv approksimasjonsevne på den sjette konvergenten. Den syvende konvergen har derimot en sterk rekursiv approksimasjonsevne og som forventet er det 72. punktet mye nærmere det 1. punktet enn det 40. punktet.

3.2.2 Relaterte størrelser

Med mistanken bekreftet for noen enkelte konvergenter og punkt plasseringer, legger det grunn til å undersøke om dette også stemmer i større sammenheng. I den

anledning, introduseres det et par nye størrelser.

Avstandsgrad

Først, *avstandsgrad*. Den n . avstandsgraden for e , $\Delta p_e(n)$, er definert ved avstanden mellom det første punktet og det x_n . punktet, hvor x_n er nevneren til den n . konvergenten.

$$\Delta p_e(n) = |p_e(x_n + 1) - p_e(1)| \quad n > 0$$

n	e_n^k	e_n	x_n
0	2	$\frac{2}{1}$	1
1	1	$\frac{3}{1}$	1
2	2	$\frac{8}{3}$	3
3	1	$\frac{11}{4}$	4
4	1	$\frac{19}{7}$	7
5	4	$\frac{87}{32}$	32
6	1	$\frac{106}{39}$	39
7	1	$\frac{193}{71}$	71
8	6	$\frac{1264}{465}$	465
9	1	$\frac{1457}{536}$	536
10	1	$\frac{2721}{1001}$	1001

Tabell 3.1: n . komponent, konvergent og nevner til e

Merk at n ikke er samme som k brukt i nummereringen av punkter, så det k . punktet er *ikke* nødvendigvis i den n . avstandsgraden. Senere i kapitlet vil det bli sett nærmere på korrelasjonen mellom k og n , men i første omgang må avstandsgrad som størrelse beskrives tydeligere. Tabellen ovenfor har kjente størrelser fra forrige kapittel, men her er nevneren til den n . konvergenten satt inn. Det er nettopp denne størrelsen som har sterk tilknytning til avstandsgrad.

For de første punktene vil avstandsgraden være problematisk for noen fordelings-tall, det avhenger av strukturen til de første konvergentene. For eksempel for e har den 0. og 1. konvergent begge 1 som nevner som betyr at den 0. og 1. avstandsgraden er begge lik avstanden mellom det 1. og det 2. punktet i Figur 3.1.

Den neste avstandsgraden etter det, den 2. avstandsgraden, vil være ulik fordi $x_2 = 3 \neq 1 = x_1 = x_0$. Den tilsvarer da avstanden mellom det 1. punktet og det 4. punktet av definisjonen til avstandsgrad. Se tilbake til Figur 3.1 igjen, legg merke til punktene som er plassert rundt $p_e(1)$. De korresponderer til nevnerene i

konvergentene pluss 1.

$$0. \text{ avstandsgrad : } |p_e(1+1) - p_e(1)| = |p_e(2) - p_e(1)|$$

$$1. \text{ avstandsgrad : } |p_e(1+1) - p_e(1)| = |p_e(2) - p_e(1)|$$

$$2. \text{ avstandsgrad : } |p_e(3+1) - p_e(1)| = |p_e(4) - p_e(1)|$$

$$3. \text{ avstandsgrad : } |p_e(4+1) - p_e(1)| = |p_e(5) - p_e(1)|$$

$$4. \text{ avstandsgrad : } |p_e(7+1) - p_e(1)| = |p_e(8) - p_e(1)|$$

Her kan man altså se at punktene som er plassert omkring det 1. punktet markerer de forskjellige avstandsgradene. Det kommer også frem ved å se på konvergentene. Den 3. konvergenten er $11/4$ og det tilsier at punkt $p_e(5)$ skal ha kortere avstand til det 1. punktet enn $p_e(4)$, og det stemmer, men ikke med mye. Det er allikevel den avstanden som blir den 3. avstandsgraden, selv om den bare er litt kortere enn den 2. avstandsgraden.

Først ved den fjerde avstandsgraden begynner strukturen å bli tydelig. For den fjerde konvergenten er, som mye omtalt hittil, $19/7$. I tillegg har denne konvergenten en sterk rekursiv approksimasjonsevne, som betyr at $p_e(8)$ skal være mye nærmere enn de andre punktene, og betegner også da den fjerde avstandsgraden.

Rekursiv avstandsgrad

Med avstandene som fremtrer av dette fordelingstallet systematisert, er det videre interessant å vite hvor mye kortere en avstandsgrad er i forhold til forrige. I den anledning defineres størrelsen *rekursiv avstandsgrad* ved bruk av størrelsesforholdet mellom påfølgende avstandsgrader.

$$R(n) = \frac{\Delta p_e(n-1)}{\Delta p_e(n)} = \left| \frac{p_e(x_{n-1}+1) - p_e(1)}{p_e(x_n+1) - p_e(1)} \right|$$

Størrelsen $R(n)$ forteller hvor mange av den n . avstandsgraden det er plass til i $(n-1)$. avstandsgraden. Desto større rekursiv avstandsgrad, desto ujevnere fordeling, ettersom det konstanterer stor forskjell på avstandsgradene.

3.2.3 Forente størrelser

For å se om det er noen korrelasjon mellom de forskjellige størrelsene definert både under kapitlet om irrasjonalitet og disse nye størrelsene settes de ved siden av hverandre i samme tabell.

Tabellen ovenfor viser flere sammenhenger om hvordan disse størrelsene henger sammen. Først og fremst er det verdt å nevne at den rekursive avstandsgraden alltid er større enn 1, som bekrefter at definisjonen av de siste introduserte størrelsene fungerer. Det forteller at den neste avstandsgraden alltid er kortere enn forrige. Videre, er det en snodig observasjon at det kun er for komponenten som kommer *før* en stor komponent som har en tilhørende høy verdi på den rekursive avstandsgraden. Altså;

$$e_n^k > 1 \Rightarrow R_e(n-1) \text{ blir relativt stor}$$

n	e_n^k	e_n	x_n	R_{e_n}	$R_e(n)$
0	2	$\frac{2}{1}$	1	-	-
1	1	$\frac{3}{1}$	1	2.55	1
2	2	$\frac{8}{3}$	3	5.46	1.82
3	1	$\frac{11}{4}$	4	1.63	1.22
4	1	$\frac{19}{7}$	7	7.94	4.54
5	4	$\frac{87}{32}$	32	8.54	1.87
6	1	$\frac{106}{39}$	39	1.41	1.15
7	1	$\frac{193}{71}$	71	11.88	6.53
8	6	$\frac{1264}{465}$	465	12.41	1.89
9	1	$\frac{1457}{536}$	536	1.29	1.12
10	1	$\frac{2721}{1001}$	1001	15.92	8.52

Tabell 3.2: Forente størrelser for e

Liknende sammenheng observeres også i den rekursive approksimasjonsevnen, R_{e_n} , men her er det også en forholdsvis stor verdi for den rekursive approksimasjonsevnen som tilhører komponenten større enn én. Det observeres ikke hos den rekursive avstandsgraden. Grunnen til at denne strukturen oppstår for den rekursive approksimasjonsevnen ble diskutert under kapitlet om irrasjonalitet, og tilsvarende argumenter gjelder for den rekursive avstandsgraden.

Kort repetert og kort fortalt om hvorfor strukturen oppstår, har med selveste verdien til det irrasjonale tallet å gjøre. Hvis et irrasjonalt tall lar seg approksimere veldig godt ved hjelp av et enkelt rasjonalt tall, betyr det at ikke er noen bedre rasjonal approksimasjon uten at brøken blir forholdsvis stor og komplisert. Ta for eksempel 4. konvergent til e , som er $19/7$. Den har en sterk rekursiv approksimasjonsevne, altså konvergenten approksimerer e mye bedre enn forrige konvergent. Ingen konvergent er bedre før nevner og teller blir forholdsvis store, i dette tilfellet $87/32$, og de blir større nettopp når kjedebrøken brytes der det er en stor komponent. Dermed er en stor komponent en indikator på at forrige konvergent var veldig god.

Fra observasjonene er det en sammenheng mellom konvergentene og avstandsgradene til punktenes plassering. Hvis det er en veldig god konvergent med, for eksempel 7 som nevner, vil neste punkt etter syv punkt ligge veldig nære det første, det blir altså en ny avstandsgrad. Ingen punkt vil ligge nærmere hverandre før punktnummeret som tilsvareer nevneren til neste konvergent pluss én og det første punktet, som gir avstandsgraden etter det igjen. Det kommer til uttrykk i slik avstandsgrad er definert i denne oppgaven.

Tilbake til komponenter og konvergenter. Hvis en komponent har verdien 1, vet man at forrige konvergent ikke nødvendigvis var så god, ettersom en brøk som ikke er så mye større vil approksimere den bedre. Dette vil komme til uttrykk i

avstandsgradene ved at avstandsgraden tilhørende komponenten med verdien 1 ikke er mye mindre enn den foregående.

Derimot, hvis komponenten er stor betyr det at den forrige konvergent approksimerte det irrasjonale tallet veldig godt. Da vil den forrige avstandsgraden bli veldig liten nettopp fordi det irrasjonale fordelingstallet likner veldig på et rasjonelt tall.

Derfor vil den rekursive avstandsgraden bli stor rett før en stor komponent, fordi det irrasjonale tallet ligner veldig på den forrige konvergenten som betyr at punktene nesten sammenfaller, men ikke helt som det ble observert at rasjonale tall gjør.

3.2.4 Generelt

I delene over er det blitt greid ut om nye størrelser, sammenhengen dem i mellom og hvordan de forholder seg til størrelser diskutert under Kapittel 2 samt hvordan man kan tolke korrelasjonene. Eulers tall er hittil eksplisitt brukt som eneste eksempel for ha et konkret tall å definere størrelsene etter og se korrelasjoner mellom dem.

Før størrelsene og sammenhengene for andre irrasjonale tall undersøkes, vil det for ordensskyld først generaliseres.

Utgangspunktet, det som i det hele tatt undersøkes her, er hvor godt forskjellige tall fungerer som fordelingstall. Det ideelle er et fordelingstall som fordeler punktene jevnt med at antallet øker, det innebærer at mellomrommene ikke bør være så store i forhold til hverandre og at de ikke bør være hakkvis uniforme. Det at mellomrommene ikke bør være så store i forhold til hverandre betyr at avstandsgradene bør være minst mulig. Det at noe er hakkvist uniformt vil si at det dannes mange mellomrom som er helt like, det vil da være problematisk i en gradvis vekst ettersom størrelsen på mellomrommene bør tilpasses antall punkter. Altså, den rekursive avstandsgraden bør være jevnest mulig.

Med fordelingstall r på en linje med lengde 1 som går fra 0 til 1, vil det k . punktet være plassert på verdien:

$$p_r(k) = \text{mod}_1(kr)$$

Avstandsgraden forteller hvor nære punktene ligger hverandre, og en ny avstandsgrad vil først forekomme når et nytt punkt ligger nærmere det første punktet enn alle de tidligere. Da blir avstanden mellom det nye punktet og det 1. punktet bli den nye avstandsgraden. Den n . avstandsgraden for fordelingstallet r er definert ved:

$$\Delta p_r(n) = |p_r(x_n + 1) - p_r(1)| \quad , \quad n > 0$$

Hvor x_n er nevneren til den n . konvergenten fra kjedebrøken til tallet r .

Avstandsgraden vil etterhvert bli veldig liten, ettersom avstandene blir stadig kortere og kortere. Det er derfor ofte mer oversiktlig å observere hvordan en avstandsgrad er i forhold til de tidligere. Rekursiv avstandsgrad er dermed forholdet mellom den $(n - 1)$. avstandsgraden og den (n) . avstandsgraden.

$$R_r(n) = \frac{\Delta p_r(n-1)}{\Delta p_r(n)} = \left| \frac{p_r(x_{n-1} + 1) - p_r(1)}{p_r(x_n + 1) - p_r(1)} \right|$$

Stor rekursiv avstandsgrad betyr altså at den nye avstandsgraden er mye kortere enn forrige.

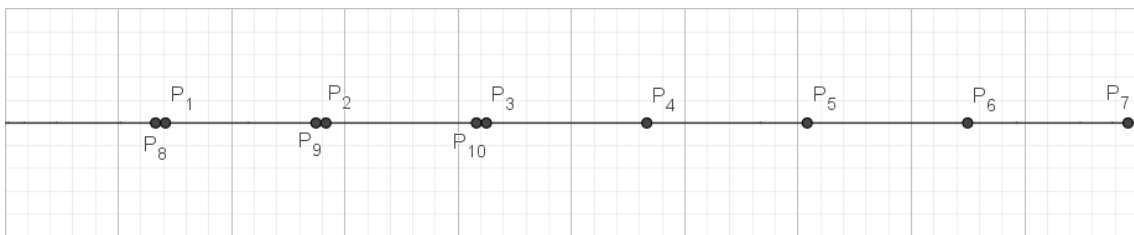
3.2.5 Pi

Tallet π ble dømt til å ha en forholdsvis lav grad av irrasjonalitet ut fra denne oppgavens størrelser, på bakgrunn av at den lar seg approksimere veldig godt av relativt små brøker. For eksempel er jo brøken $22/7$ en god approksimasjon til tallet, og blir noen steder brukt istedenfor desimaltallet 3.14 i enkle regnestykker. Siden dette er en god approksimasjon, betyr det at det åttende punktet vil ligge tett inntil det første, og det vil bli en ujevn fordeling av punkter i takt med økningen av antall.

Det sammen med at $\text{mod}_1(\pi) = 0.14$ ligger ganske nære null, vil si at de første punktene vil ligge ganske tett på rekke med et stort mellomrom i den andre enden.

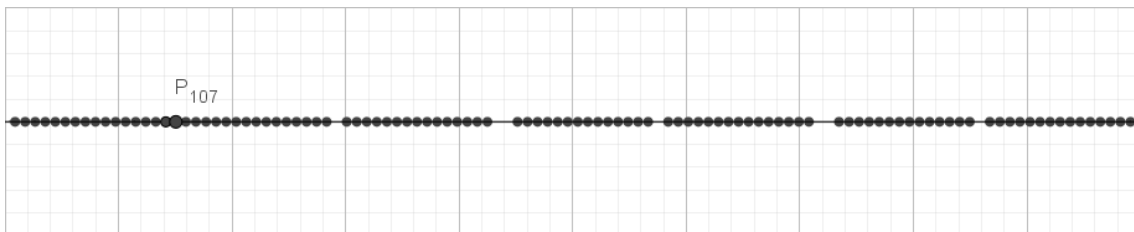
$$p_\pi(k) = \text{mod}_1(\pi k)$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_\pi(k)$	0.142	0.283	0.425	0.566	0.708	0.850	0.991	0.133	0.274	0.416



Figur 3.3: Ti første punktene med π som fordelingstall. $p_\pi(k) = p_k$

Blant de første ti punktene fremtrer mistankene ved å kjenne til de irrasjonale egenskapene til π . De første syv punktene er ikke en elendig fordeling, men når det åttende punktet skal plasseres, legges det veldig nært det første. Det niende vil ligge tilsvarende nære det andre punktet, og slik fortsetter det. Det er ingen rasjonal approksimasjon som er bedre enn $22/7$ før brøken $333/106$, som betyr at π likner veldig på $22/7$ og forklarer hvorfor punktet $p_\pi(k)$ legger seg så nære $p_\pi(k - 7)$.



Figur 3.4: 107 første punktene med π som fordelingstall. $p_\pi(k) = p_k$

Ettersom det ikke er noen rasjonale tall som fungerer bedre enn $22/7$, vil alle punktene før $p_\pi(107)$ legge seg som bånd på linja. Den neste rasjonale approksimasjonen er som nevnt $333/106$, og dermed vil det 107. punktet være nærmere det første punktet enn noen av de andre punktet før er hverandre. Det fascinerende med dette punktets plassering er at de viser ganske tydelig samspillet mellom avstandsgradene. Den første avstandsgraden er fortsatt i spill, ved at $p_\pi(107) - p_\pi(100) = p_\pi(k) - p_\pi(k - 7)$,

men nå er båndet blitt så langt at punktet som havnet på enden av båndet, altså $p_\pi(107)$, har kortere avstand til det 1. punktet enn noen andre punkt $k < 107$ har til hverandre. Andre avstandsgrad begynner altså her, men 1. avstandsgrad fortsetter i den forstand at avstanden mellom $p_\pi(107)$ og $p_\pi(100)$ fortsatt er 1. avstandsgrad.

Ut ifra punktenes plassering virker π som et ganske dårlig fordelingstall, og det er interessant at π også hadde en ganske lav grad av irrasjonalitet. Både evnen til å være et godt fordelingstall og graden av irrasjonalitet henger sammen med komponentene som fremtrer i kjedebrøkene, så en korrelasjon her er naturlig. Ut fra å studere punktenes plassering på Figur 3.3 og 3.4 kan man kjapt konkludere at den første rekursive avstandsgraden er veldig stor, altså at det åttende punktet var veldig mye nærmere det første punktet. Det er en egenskap som er uheldig om et tall skal fungere godt som et fordelingstall.

Observasjoner og analyse av sammenhengene tyder på at lavest mulig rekursiv avstandsgrad hos et fordelingstall gir jevnest mulig fordeling.

n	π_n^k	π_n	x_n	R_{π_n}	$R_\pi(n)$
0	3	$\frac{3}{1}$	1	-	-
1	7	$\frac{22}{7}$	7	111.98	16.00
2	15	$\frac{333}{106}$	106	15.19	1.00
3	1	$\frac{355}{113}$	113	311.96	292.63
4	292	$\frac{103993}{33102}$	33102	461.62	1.58
5	1	$\frac{104348}{33215}$	33215	1.74	1.74
6	1	$\frac{208341}{66317}$	66317	2.71	1.36
7	1	$\frac{312689}{99532}$	99532	4.20	2.80
8	2	$\frac{833719}{265381}$	265381	3.34	1.25
9	1	$\frac{1146408}{364913}$	364913	5.41	3.93
10	3	$\frac{4272943}{1360120}$	1360120	3.99	1.07

Tabell 3.3: Forente størrelser for π

Tabell 3.3 viser at π har flere lave verdier for rekursiv avstandsgrad blant de første ti komponentene. Men det er veldig ujevnt med at noen rekursive avstandsgrader er svært sterke, da helst den fjerde rekursive avstandsgraden som har en verdi $R_\pi(4) \approx 292.63$, når den helst skulle vært lavest mulig for en ideell fordelingsstruktur.

En annen fascinerende observasjon i tabellen, som også går igjen i Tabell 3.2 for Eulers tall, er at for eksempel den fjerde konvergenten, har den foregående rekursive avstandsgraden nesten samme verdi. Se på det konkrete eksempelet $\pi_4^k = 292$, da er $R_\pi(4 - 1) = R_\pi(3) = 292.63$. De er altså ganske like, og det gjelder for alle komponentene og de foregående rekursive avstandsgradene. Generelt, hvor r er fordelingstallet, observeres altså:

$$r_n^k \approx R_r(n - 1)$$

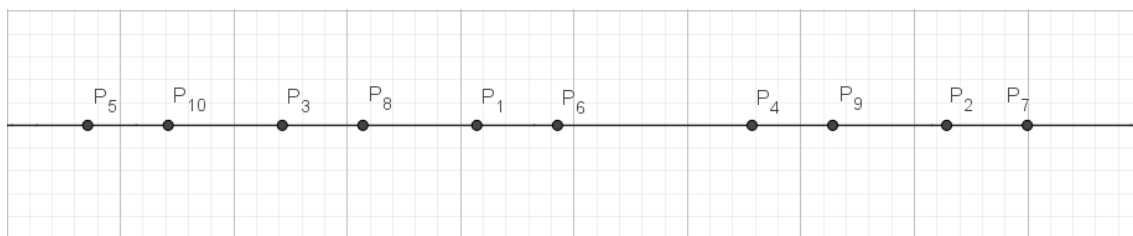
Denne størrelsen vil bli diskutert mer senere i kapittelet, men for π forteller dette oss at tallet fungerer dårlig som fordelingstall, basert på verdiene til de rekursive avstandsgradene som er både sporadiske og ikke særlig lave.

3.2.6 Kvadratrotta av 2

Basert på funnene under kapittelet om irrasjonalitet viste det seg at kvadratrotten av 2 har en forholdsvis høy grad av irrasjonalitet, og tallet har en uniform kjedebrøk med formen $[1, \bar{2}]$.

$$p_{\sqrt{2}}(k) = \text{mod}_1(k\sqrt{2})$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_{\sqrt{2}}(k)$	0.414	0.828	0.243	0.657	0.071	0.485	0.899	0.314	0.728	0.142

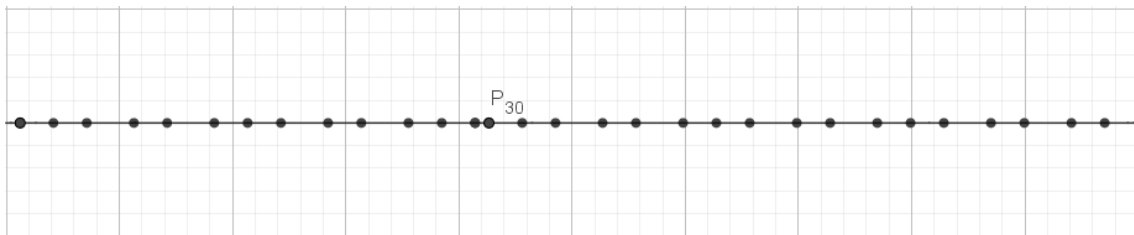


Figur 3.5: Ti første punktene med $\sqrt{2}$ som fordelingstall. $p_{\sqrt{2}}(k) = p_k$

Blant de første ti punktene kan man se at punktene holder en ganske jevn avstand fra hverandre, og ingen punkter har oppsiktsvekkende kort avstand mellom seg. På den andre siden, så er avstanden mellom $p_{\sqrt{2}}(6)$ og $p_{\sqrt{2}}(4)$ er merkverdig stor, men det kommer seg av $\sqrt{2}$ har konvergenten $17/12$ som betyr at det 11. og 12. punktet vil havne i det mellomrommet og det helt på enden før en ny avstandsgrad begynner. En indikator nevnt tidligere på om en tall fungerer godt som fordelingstall, er at det for de første ti punktene vil havne et punkt i hvert tiendedelssegment. Det er ikke tilfellet med $\sqrt{2}$, men ikke langt unna. Med det ellefte og tolvte punktet vil alle tiendedelssegmenter ha et punkt, og da er også avstandene jevne og gode.

Man observerer altså at $\sqrt{2}$ fungerer forholdsvis godt som fordelingstall. Dermed kan man bare ved observasjoner av fordelingen anslå at de rekursive avstandsgradene er ganske jevne og lave. Det stemmer med kjedebrøken til $\sqrt{2}$ og tidligere observerte korrelasjoner mellom komponenter og rekursiv avstandsgrad, da alle komponentene etter det nulte til $\sqrt{2}$ er 2. Altså; $\sqrt{2}_n^k = 2$ for $\forall n > 0$. Siden komponentene er like, kan man forvente en jevn rekursiv avstandsgrad ettersom det er argumentert for en korrelasjon mellom de to størrelsene.

Som observert i Figur 3.5 er fordelingen forholdsvis god, men det dannes mellomrom som er en del større enn andre når antall punkter ligger mellom grensene for nye avstandsgrader. Altså, den 2. avstandsgraden starter ved det 6. punktet og den 3. avstandsgraden starter ved det 13. punktet. Når antall punkter ligger i dette intervallet vil det være åpenbare forskjeller på størrelsen. Dette er et resultat fra en forholdsvis høy rekursiv avstandsgrad.



Figur 3.6: 30 første punktene med $\sqrt{2}$ som fordelingstall. $p_{\sqrt{2}}(k) = p_k$

Den fjerde avstandsgraden starter ved det 30. punktet ettersom 4. konvergenten har nevneren $x_4 = 29$. Figur 3.6 illustrerer samme moment beskrevet i avsnittet ovenfor, at når en ny avstandsgrad starter, i dette tilfellet den 4. avstandsgraden, er den nye avstandsgraden åpenbart mye kortere enn de tidligere avstandsgradene. Med andre ord, den fjerde rekursive avstandsgraden er for stor.

n	$\sqrt{2}_n^k$	$\sqrt{2}_n$	x_n	$R_{\sqrt{2}_n}$	$R_{\sqrt{2}}(n)$
0	1	$\frac{1}{1}$	1	-	-
1	2	$\frac{3}{2}$	2	4.83	2.41
2	2	$\frac{7}{5}$	5	6.04	2.41
3	2	$\frac{17}{12}$	12	5.79	2.41
4	2	$\frac{41}{29}$	29	5.83	2.41
5	2	$\frac{99}{70}$	70	5.83	2.41
6	2	$\frac{239}{169}$	169	5.83	2.41
7	2	$\frac{577}{408}$	408	5.83	2.41
8	2	$\frac{1393}{985}$	985	5.83	2.41
9	2	$\frac{3363}{2378}$	2378	5.83	2.41
10	2	$\frac{8119}{5741}$	5741	5.83	2.41

Tabell 3.4: Forente størrelser for $\sqrt{2}$

Under kapittel 2 viste uniforme kjedebrøker også en uniform utvikling av de rekursive approksimasjonsevnen. Mer presist, så alternerer den rekursive approksimasjonsevnen dempende mot en konstant. For $\sqrt{2}$ er det cirka 5.83, altså at $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\sqrt{2}_n} \approx 5.83$. Men denne uniforme kjedebrøken viser også at den rekursive avstandsgraden er uniform, fra allerede første avstandsgrad. Enda mer interessant, er at den rekursive avstandsgraden i Tabell 3.4 er avrundet til to desimaler, med eksakte verdier vil den faktisk bli $1 + \sqrt{2}$ for alle verdier av $n > 0$.

$$R_{\sqrt{2}}(n) = 1 + \sqrt{2}$$

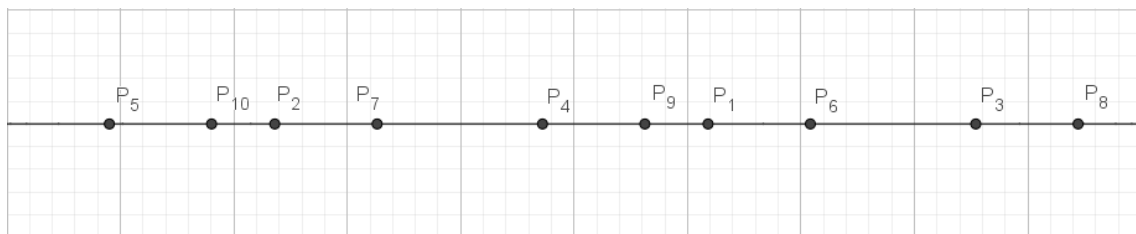
3.2.7 Det gyldne snitt

Som nevnt under delen om kvadratroten av 2, har det tallet noen av egenskapene som indikerer at det er et ideelt fordelingstall ved komponentene er konstante for $n > 0$. Mangelen for $\sqrt{2}$ er at selve verdien til komponentene kunne hatt lavere verdi.

I den anledning, hvilket tall er det som har en kjedebrøk bestående av komponenter hvor alle er like og verdien er lavest mulig? Her er virkelig godbiten spart til slutt, for det er selvfølgelig *det gyldne snitt*, $\phi = [1, \bar{1}]$.

$$p_\phi(k) = \text{mod}_1(k\phi)$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_\phi(k)$	0.618	0.236	0.854	0.472	0.090	0.708	0.326	0.944	0.562	0.180



Figur 3.7: Ti første punktene med ϕ som fordelingstall. $p_\phi(k) = p_k$

Ved å studere Figur 3.7 er det ikke åpenbart at ϕ fungerer bedre som et fordelingstall enn $\sqrt{2}$, om man sammenlikner med Figur 3.5. Forskjellene er subtile og fremtrer tydeligst når det blir satt tall på størrelsene. Det kommer frem av figurene, og det kan også påvises ved regning, at de største avstandene etter ti punkter for $\sqrt{2}$ og ϕ som fordelingstall er henholdsvis $p_{\sqrt{2}}(4) - p_{\sqrt{2}}(6)$ og $p_\phi(4) - p_\phi(7)$, som forøvrig tilsvarer avstandsgradene $\Delta p_{\sqrt{2}}(1)$ og $\Delta p_\phi(3)$.

$$\Delta p_{\sqrt{2}}(1) = |\text{mod}_1(3\sqrt{2}) - \text{mod}_1(\sqrt{2})| \approx 0.1716$$

$$\Delta p_\phi(3) = |\text{mod}_1(4\phi) - \text{mod}_1(\phi)| \approx 0.1459$$

Ved utregningene kommer det frem at den største avstanden med $\sqrt{2}$ som fordelingstall altså er større enn den største avstanden med ϕ som fordelingstall. Det som setter et lite hakk i stoltheten til ϕ som fordelingstall er at den korteste avstanden hos ϕ for de ti første punktene er kortere enn den hos $\sqrt{2}$. Så mye kortere at blant de 10 første punktene så er det mistanke om at $\sqrt{2}$ som fordelingstall produserer jevnere mellomrom enn ϕ . Dette må undersøkes nærmere.

Legg merke til hvilke avstandsgrader som er de største udelte segmentene for fordelingstallene med ti punkter. $\sqrt{2}$ har fortsatt den 1. avstandsgraden intakt, altså $|p_{\sqrt{2}}(6) - p_{\sqrt{2}}(4)|$ er et udelte segment med den 1. avstandsgraden. Derimot har ϕ har den 0., 1. og 2. avstandsgraden blitt delt av andre punkter så den 3. avstandsgraden er den lengste.

Hvilken avstandsgrad et gitt punkt tilhører finner man ved å sjekke nevnerene til konvergentene i tilhørende tabeller, for eksempel for ϕ er nevneren til den 5.

konvergenten 8, og nevneren til 6. konvergenten er 13. Tallet 10 befinner seg i dette intervallet, altså er det tiende punktet til ϕ i den 5. avstandsgraden. Tilsvarende, er det tiende punktet til $\sqrt{2}$ i den 2. avstandsgraden. Generelt kan man si at det k . punktet er i den n . avstandsgraden hvis $k \in (x_n, x_{n+1}]$.

$$p_r(k) \in \Delta p_r(n) \iff k \in (x_n, x_{n+1}]$$

Det er altså kun to forskjellige udelte avstandsgrader i spill samtidig med ti punkter for $\sqrt{2}$, men for ϕ er det tre udelte avstandsgrader. Allikevel er det tre forskjellige størrelser på mellomrommene blant de ti første punktene for $\sqrt{2}$, og det stemmer ifølge Dunlap (1997) som viser at det vil være tre forskjellige lengder for et irrasjonalt fordelingstall. Så hva foregår her?

For alle andre irrasjonale fordelingstall enn ϕ , er det kun de to nyeste avstandsgradene som fortsatt har hele segmenter uten at det er havnet punkter på dem, den 3. størrelsen på mellomrommet kommer fra delingen av den nest nyeste avstandsgraden som resultat av plasseringen av punktet med den nyeste avstandsgraden. ϕ er annerledes fordi tallet har den unike egenskapen at det er selvreplikerende ved deling, som det kommer frem av definisjon av tallet. Så en deling av et segment ved bruk av ϕ vil produsere to nye segmenter som står i det gyldne snitt i forhold til hverandre, og da vil segmentene tilsvare tidligere gitte avstandsgrader for ϕ .

For å få noen konkrete tall på dette her, bruker vi Tabell 3.4 med observasjoner og ser at den rekursive avstandsgraden er $R_{\sqrt{2}}(n) = 1 + \sqrt{2}$. Men mellom avstandsgradene dannes det en deling av segmentet som tilsvare den største avstandsgraden. Avstandsgraden som deles danner to nye segmenter, den ene er den nye avstandsgraden, og den andre er differansen mellom de to avstandsgradene, m . Altså;

$$R_{\sqrt{2}}(n) = \frac{\Delta p_{\sqrt{2}}(n-1)}{\Delta p_{\sqrt{2}}(n)} = 1 + \sqrt{2} \quad , \quad m = \Delta p_{\sqrt{2}}(n-1) - \Delta p_{\sqrt{2}}(n)$$

ved å substituere inn m får man sammenhengene:

$$\frac{m + \Delta p_{\sqrt{2}}(n)}{\Delta p_{\sqrt{2}}(n)} = 1 + \sqrt{2} \quad , \quad \frac{\Delta p_{\sqrt{2}}(n-1)}{\Delta p_{\sqrt{2}}(n-1) - m} = 1 + \sqrt{2}$$

Litt algebraisk magi, og forholdet mellom avstandsgradene og den delte avstandsgraden m fremtrer:

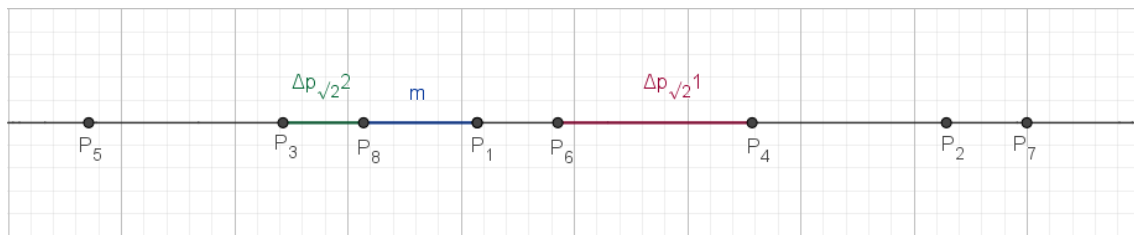
$$\frac{m}{\Delta p_{\sqrt{2}}(n)} = \sqrt{2} \quad , \quad \frac{\Delta p_{\sqrt{2}}(n-1)}{m} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

For å klarere lengdene til avstandsgradene og segmentet m :

$$\Delta p_{\sqrt{2}}(n-1) > m > \Delta p_{\sqrt{2}}(n)$$

Det er kun 1. og 2. avstandsgradene som fortsatt er udelte etter 8 punkter med $\sqrt{2}$ som fordelingstall. Den tredje lengden er resten av forrige avstandsgrad etter den er blitt delt av et senere punkt.

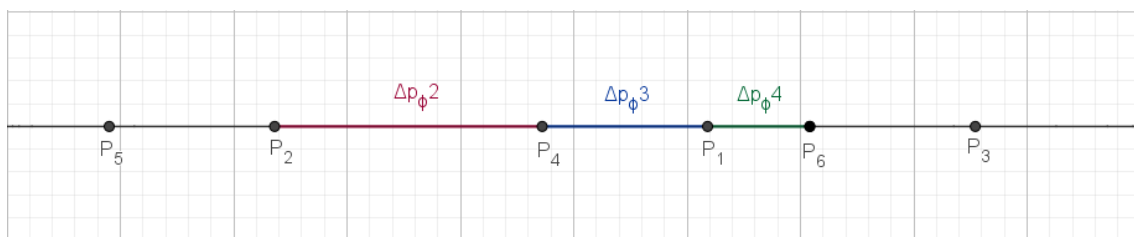
m er altså mindre enn avstandsgraden som ble delt, naturligvis, og større enn den nye avstandsgraden. Det kommer fra at den rekursive avstandsgraden er større enn 2, som betyr at den nye avstandsgraden er under halvparten av størrelsen til den forrige.

Figur 3.8: 1. og 2. avstandsgrad med fordelingstall $\sqrt{2}$.

Det gylne snitt sin m vil derimot være den forrige avstandsgraden, dermed vil den rekursive avstandsgraden være misvisende for å sammenlikne ϕ og andre irrasjonale fordelingstall når det kommer til lengdeforholdene mellom de tre forskjellige segmentene, for alle andre irrasjonale tall har en skjult m mellom avstandsgradene som deler segmentene i en mellomlengde. Så for å sammenlikne forholdet mellom alle tre lengdene, må man undersøke forholdet mellom nevnte forhold. Altså, sjekke hvordan forholdet mellom de påfølgende lengdene forholder seg til hverandre;

$$\frac{\Delta p_{\sqrt{2}}(n-1)/m}{m/\Delta p_{\sqrt{2}}(n)} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1.207$$

Så hvis det gylne snitt skal ha en jevnere fordeling enn $\sqrt{2}$, så må forholdet mellom forholdene til tre påfølgende lengder være mindre enn $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Som nevnt, vil det gylne snitt dele hvert segment sånn at de nye lengdene står i det gylne snitt i forhold til hverandre, som vist på figuren under. Der kan man se at den 1. avstandsgraden, altså segmentet fra $p_\phi(2)$ til $p_\phi(1)$, er blitt delt av $p_\phi(4)$. Delingen er både starten på den 3. avstandsgraden $\Delta p_\phi(3)$ og resten av segmentet er eksakt den 2. avstandsgraden $\Delta p_\phi(2)$. Det er nettopp det som er unikt med delinger ved bruk av det gylne snitt.

Figur 3.9: 1., 2. og 3. avstandsgrad med ϕ som fordelingstall.

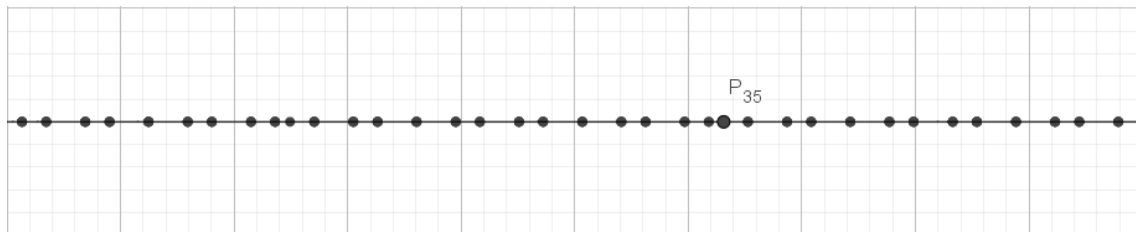
Dermed vil det være tilstrekkelig å bruke forhold mellom to rekursive avstandsgrader. Ved å bruke definisjonen for rekursiv avstandsgrad, kommer det frem at den rekursive avstandsgraden for det gylne snitt er konstant for $n > 1$, med verdien;

$$R_\phi(n) = \phi$$

Utenom at dette er et utrolig vakkert resultat, atter igjen, gjør det neste prosess lettere. Forholdet mellom hvordan tre påfølgende lengder forholder seg til hverandre med ϕ som fordelingstall er da gitt ved:

$$\frac{R_\phi(n)}{R_\phi(n-1)} = \frac{\phi}{\phi} = 1$$

Dermed, til tross for at differansen mellom det lengste og korteste segmentet for ϕ var større, sørger tallets unike selvreplikerende egenskap for at mellomdelingen også blir stående i det gyldne snitt. Dermed ender forholdet mellom lengdeforholdene på 1, som er mindre enn tilsvarende størrelse for $\sqrt{2}$. ϕ har altså en jevnere fordeling.



Figur 3.10: 36 første punktene med ϕ som fordelingstall. $p_\phi(k) = p_k$

På Figur 3.10 kommer det frem at punktene plasseres utmerket fint og jevnt langs linja uten noen åpenbare store eller små mellomrom. Det er tre forskjellige lengder til stede, og de forskjellige lengdene står i det gyldne snitt i forhold til hverandre, den korteste mot den lengste står i forholdet ϕ^2 .

n	ϕ_n^k	ϕ_n	x_n	R_{ϕ_n}	$R_\phi(n)$
0	1	$\frac{1}{1}$	1	-	-
1	1	$\frac{2}{1}$	1	1.62	1
2	1	$\frac{3}{2}$	2	3.33	ϕ
3	1	$\frac{5}{3}$	3	2.43	ϕ
4	1	$\frac{8}{5}$	5	2.67	ϕ
5	1	$\frac{13}{8}$	8	2.59	ϕ
6	1	$\frac{21}{13}$	13	2.63	ϕ
7	1	$\frac{34}{21}$	21	2.61	ϕ
8	1	$\frac{55}{34}$	34	$\approx \phi^2$	ϕ
9	1	$\frac{89}{55}$	55	$\approx \phi^2$	ϕ
10	1	$\frac{144}{89}$	89	$\approx \phi^2$	ϕ

Tabell 3.5: Forente størrelser for ϕ

Tabellen kan fungere som et sammendrag for hva som er funnet ut om det gyldne snitt. Transformerer ϕ til en kjedebrøk, vil komponentene for alle n være 1. Dette sørger for at alle konvergentene har et fibonaccitall som både nevner og teller. Det at nevnerene til konvergene er fibonaccitall, gjør at antall punkter mellom hver avstandsgrad tilsvarer differansen mellom to fibonaccitall. Forholdene mellom fibonaccitallene approksimerer det gyldne snitt, omtrent ϕ^2 ganger bedre enn foregående forhold mellom fibonaccitallene.

Til slutt, under delkapittelet om π , ble sammenhengen $r_n^k \approx R_r(n-1)$ observert, hvor r_n^k er den n . komponenten til det irrasjonale fordelingstallet r og $R_r(n-1)$

er den foregående rekursive avstandsgraden. Videre, var lavest mulig verdi for den rekursive avstandsgraden et kriterie for det best mulige fordelingstallet. Dermed vil lavest mulig verdi på kjedebrøkskomponentene til et tall produsere de laveste verdiene for rekursiv avstandsgrad.

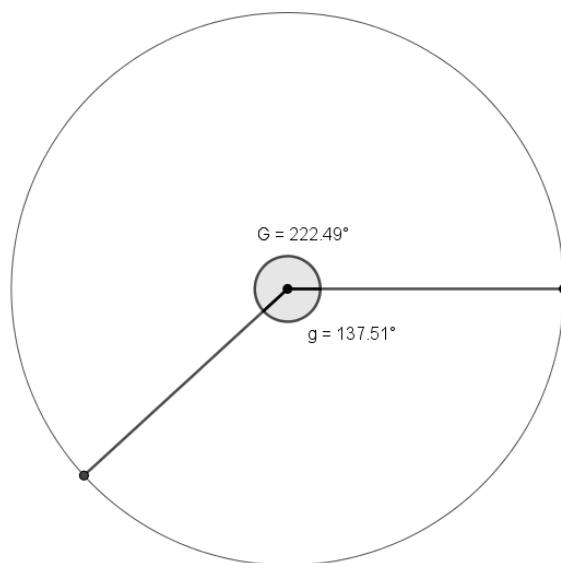
Det gyldne snitt har altså jevnest fordeling og gjennomgående lavest verdi for den rekursive avstandsgraden, med verdien ϕ .

3.3 Sirkulær fordeling

Som noen avsluttende kuriositeter til kapitlet, overføres funnene gjort om fordeling på et linjestykke til fordeling på sirkulære overflater. Ettersom det er argumentert for at det gyldne snitt sørger for ideelle fordelinger av punkter på en linje, vil kun det bli brukt som fordelingstall langs sirkelperiferien og på en spiral.

3.3.1 Sirkelperiferi

Å fordele punkter langs en sirkelperiferi er forholdsvis analogt med å fordele langs en linje, da periferien i utgangspunktet ikke er noe annet enn en linje som går i ring. Dermed er det kun endringer i hvor et gitt punkt blir plassert som skal til, og et fordelingstall vil ha eksakt samme egenskaper på en sirkelperiferi som langs en linje.



Figur 3.11: De gyldne vinklene produsert av punktene $p_\phi(0)$ og $p_\phi(1)$.

Først, la sirkelen ha sentrum i origo med en radius på $r = 1$ og et punkts plassering er definert av en vinkel fra foregående punkt og radiusen til sirkelen, r . I stedet for modulo 1 som ble brukt for en linje, vil det derfor her brukes modulo 2π for vinkelen. Et fordelingstall vil dermed definere en fordelingsvinkel, som forteller hvor stor del av helheten, 2π , unna forrige punkt det kommende punktet skal plasseres. Med det, er vinkelen $v_\phi(k)$ for det k . punktets plassering definert ved:

$$v_\phi(k) = \text{mod}_{2\pi}(k\phi \cdot 2\pi)$$

Da vil det k . punktet være plassert på koordinatene:

$$p_\phi(k) = [r \cdot \cos(v_\phi(k)), r \cdot \sin(v_\phi(k))]$$

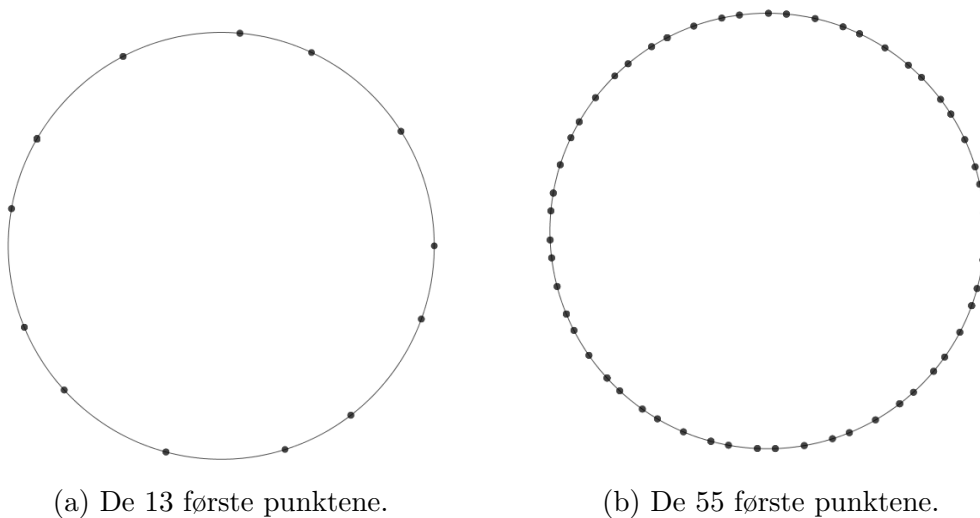
Det nulte punktet vil havne langs x -aksen til høyre på sirkelen og det første punktet vil være plassert ved vinkelen;

$$v_\phi(1) = \text{mod}_{2\pi}(\phi \cdot 2\pi) \approx 222.49^\circ$$

Vinklene som blir spent mellom disse punktene er ofte kalt de gylne vinklene, og det er ikke entydig enighet om hvilken vinkel som er *den* gylne vinkel. I denne oppgaven vil det ikke legges noe vekt på videre undersøkelse av disse vinklene, foruten at de eksisterer med en direkte korrelasjon til det gylne snitt. I deres sparsomme opptreden vil begge vinklene bli likestilt og få tildelt bokstavene G og g .

$$G \approx 222.49^\circ \quad \text{og} \quad g \approx 137.51^\circ$$

Den direkte korrelasjonen til det gylne snitt gjør at vinklene arver de irrasjonale egenskapene. Den viktigste at påfølgende addisjon av vinklene vil aldri resultere i at noen punkter som blir plassert på bakgrunn av dette overlapper, til tross for at plasseringene går i ring.



Figur 3.12: Fordeling langs et sirkelperiferi

Langs en sirkelperiferi vil punktene, noe som forventet, fordele seg på likt vis. Det at fordelingen går i sirkler fremfor at det blir sprang over endene på en linje gjør at denne fordelingen i større grad kan beskrives som kontinuerlig. Tilsvarende som for når ϕ ble brukt som fordelingstall for en linje, vil de ti første punktene havne på hvert sitt tiendedelssegment på sirkelperiferien. Figur 3.12a viser ikke de ti, men de 13 første punktene. Grunnen kommer fra verdien den sjette konvergenten til ϕ , $\phi_6 = 21/13$, da vil det trettende punktet være det siste plassert i den femte avstandsgraden før den sjette avstandsgraden begynner. Det betyr at med dette antall punkter vil fordelingen være jevnere enn ved for eksempel ti punkter, for det tiende punktet er plassert mellom to avstandsgrader og ikke ved enden. Det åttende, tjuelførste, trettifjerde og femtifemte punktet, som Figur 3.12b viser, vil

ha tilsvarende jevnhet ved at de alle er det siste punktet før en ny avstandsgrad begynner.

Akkurat som med en linje, vil det etterhvert bli tett med punkter på sirkelperiferien i takt med økende antall punkter, naturligvis. Et ideelt fordelingstall vil sørge for at punktene blir spredt bedre fremfor at tall som fungerer dårlig som et fordelingstall, men problemet med plassmangel vil uansett oppstå med nok punkter.

3.3.2 Spiral

Det som er blitt drøftet så langt angående fordeling legger grunn for en videre utvidelse av fordelingsstrukturer. I første omgang ble det undersøkt hvordan punkter fordelte seg endimensjonalt med forskjellige fordelingstall, altså på en linje. En sirkelperiferi kan virke som en todimensjonal fordeling, og i kartesiske koordinater så er de per definisjon det, men selve sirkelperiferien er egentlig en krum linje. Det betyr at den også kan sees på som endimensjonal, med kun én tillat retning.

Det er flere måter å utvide fordelingen til å bli todimensjonal, i denne oppgaven vil det bygges videre på det hittil sett på. Dermed er en naturlig videreføring av fordeling langs en sirkelperiferi til to dimensjoner å la sirkelperiferien gradvis utvide radiusen med økende antall punkter. Altså, å la det første punktet være i sentrum. Det neste punktet, i tillegg til å roteres en vinkel tilsvarende den gyldne vinkel, vil bli plassert med litt større radius fra sentrum av sirkelen. Radiusen skal videre være proporsjonal med nummeret på punktet.

Direkte proporsjonal radius

For å formulere dette matematisk, den k . vinklen er definert, som før, ved:

$$v_\phi(k) = \text{mod}_{2\pi}(k\phi \cdot 2\pi)$$

Til forskjell fra sirkelperiferien, er ikke radiusen konstant, men proporsjonal med k . Denne kan selvfølgelig skaleres med koeffisienter, men for enkelhetsskyld er radiusen her definert ved:

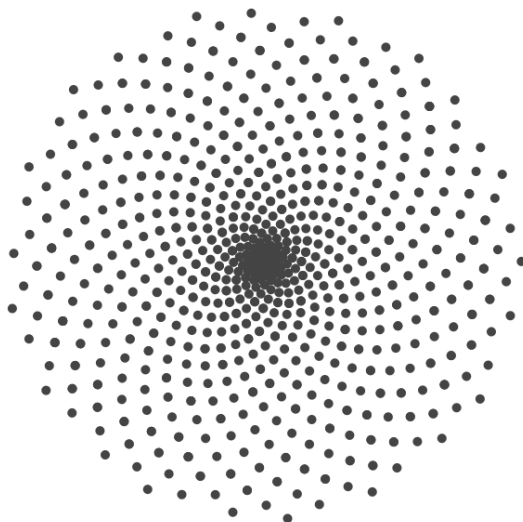
$$r(k) = k$$

Det er at radiusen varierer som gjør fordelingen todimensjonal. I tillegg til å bevege seg på en bestemt sirkelperiferi, vil de bevege seg utover og bre seg i et todimensjonalt rom. Dermed, er det k . punktets plassering gitt ved:

$$p_\phi(k) = r(k) \cdot [\cos(v_\phi(k)), \sin(v_\phi(k))]$$

Ved valg av antall punkter har det tidligere blitt brukt forholdsvis lave tall. Etter som punktene nå brer seg i to dimensjoner brukes et større antall for å visualisere fordelingen bedre. Det er brukt et fibonaccitall med samme argument som tidligere, at det vil være det siste punktet før en ny avstandsgrad og vil vise en jevn fordeling. Figuren under viser de 610, som forøvrig er det femtende fibonaccitallet, første punktene ved bruk av fordelingen beskrevet over.

Det kommer frem av Figur 3.13 at de første punktene, altså de i midten, plasseres betydelig tettere enn de senere punktene som er nærmere periferien til figuren. Det er altså noe med proporsjonaliteten til radiusen som ikke er optimal for fordelingen. I denne oppgaven vil ikke optimalisering av radiusens proporsjonalitet studeres i like stor grad som mange av de andre størrelsene, men den kommer heller til å bli justert og drøftet noe kvalitativt.

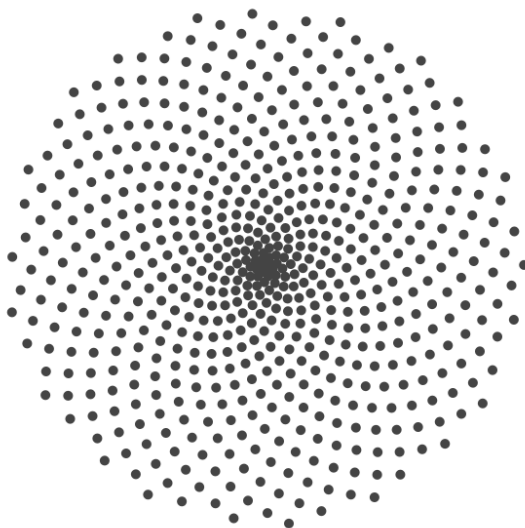


Figur 3.13: 610 første punktene med direkte proporsjonal radius.

Radius som potensfunksjon

Fra figuren antydes det at radiusen øker for tregt i starten og for raskt mot slutten. Dermed bør radiusen ha en synkende stigning for en økende k . La dermed radiusen $r(k)$ proporsjonal med k , gitt ved:

$$r(k) = k^{0.8}$$



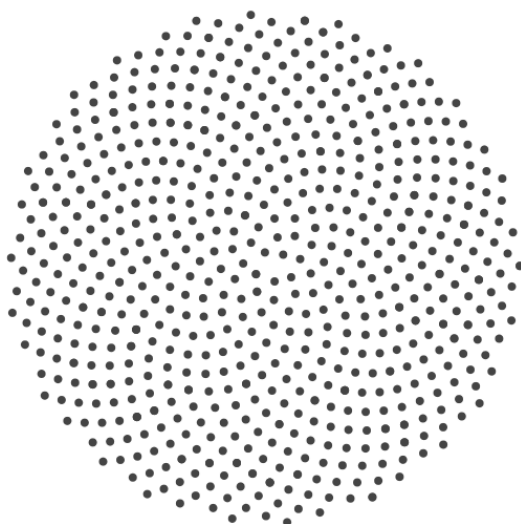
Figur 3.14: 610 første punktene med radius $r(k) = k^{0.8}$.

Sammenliknet med Figur 3.13 som har en direkte proporsjonalitet, har denne betydelig bedre fordeling ved at punktene ikke er like tette i midten og det er litt jevnere avstander. Det virker dermed som at radiusen kan med fordel defineres som en potensfunksjon av k . Før radiusens proporsjonalitet justeres videre, bør det dannes et bilde av hva som er bra i denne sammenhengen. For hvis det skal plasseres noe på punktene, og det som skal plasseres på de første punktenes posisjon er mindre i areal

enn det som skal plasseres på de siste, kan for eksempel Figur 3.14 fungere veldig godt. Nettopp det momentet vil bli tatt opp senere i oppgaven, for nå antas det at alle punktene er punkter i den matematiske forstand. I to dimensjoner tilsvarer det et punkt uten bredde eller lengde.

Funksjonen $r(k) = k^{0.8}$ fordelte som nevnt punktene bedre, men basert på observasjonen om hvor tett punktene er plassert i midten av figuren er funksjonen for svak. Dette, kombinert med at radiusen i utgangspunktet er en endimensjonal størrelse og at punktene skal fordeles i en todimensjonal flate, altså et areal, kan det tenke seg at en kvadratisk proporsjonalitet vil fungere bra. Ettersom areal for en sirkel er definert ved radiusen kvadrert, er radiusen proporsjonal med kvadratroten av arealet. La dermed radiusen nå være definert ved:

$$r(k) = \sqrt{k}$$



Figur 3.15: 610 første punktene med radius $r(k) = \sqrt{k}$.

Med radius proporsjonal med kvadratroten av k ser det altså ut til at punktene tilsynelatende har fordelt seg veldig jevnt, som forventet. Disse punktene danner til sammen nesten en sirkel med omtrent areal $A(k) = \pi \cdot (r(k))^2$. Dette sirkelarealet vokser altså proporsjonalt med kvadratet av radiusen, og antall punkter innenfor sirkelen vokser direkte proporsjonalt med k . Dermed;

$$\left. \begin{array}{l} A(k) \propto (r(k))^2 \\ k \propto (r(k))^2 \end{array} \right\} A(k) \propto k$$

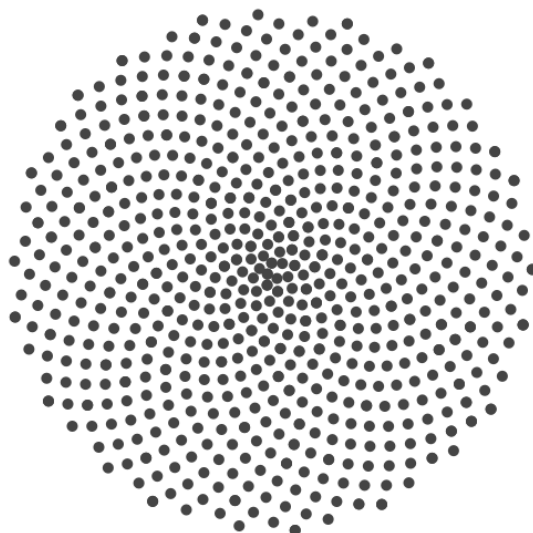
Sammenhengen over forteller at for hvert nye punkt som plasseres øker arealet til sirkelen som omskriver punktene med en konstant størrelse. Altså hvert punkt har til enhver tid like mye areal hver, uavhengig av antall punkter.

For å komme frem til denne fordelingen brukes det ideelle fordelingstallet for et linjestykke, og da også for en sirkelperiferi, kombinert med variabel radius modellert for å gi hvert punkt like mye areal i den omskrevne sirkelen. Dette vil fungere veldig godt for punkter uten bredde og lengde, men om arealet på det som skal plasseres i hvert punkts plassering varierer, vil det være annerledes.

En siste gylden fordeling

For å avslutte kapitlet med en spiral hvor det gyldne snitt er satt inn et ekstra unødvendig sted uten noen spesiell grunn, er radiusfunksjonen til denne spiralen definert ved:

$$r(k) = \sqrt[k]{\phi}$$



Figur 3.16: 610 første punktene med radius $r(k) = \sqrt[k]{\phi}$.

Kapittel 4

Konklusjon

Det gyldne snitt har mye av sin popularitet fra bruken innenfor arkitektur, skjønnhet og tilsynelatende mystiske sammenhenger, hvorav et par av disse sammenhengene har blitt studert i denne oppgaven. Med en forståelse for den underliggende matematikken i sammenhengene, er de ikke egentlig så mystiske, men heller en demonstrasjon av matematisk eleganse. Mystikken kan dermed fint erstattes av en meningsfull forklaring ved hjelp av systematisk nysgjerrighet

Irrasjonalitet

Begrepet om irrasjonalitet har de aller fleste som har gjennomgått ordinær skolegang hørt om. Man sitter ofte med den forståelse at et irrasjonalt tall er et tall som ikke kan representeres som brøk og har en uendelig lang ikke periodisk desimalutvikling. Og det stemmer. Videre kan man spørre seg om det er nyanser av irrasjonalitet, og i denne oppgaven er det konstruert et begrepsapparat for å kunne diskutere grad av irrasjonalitet. For som det ble vist i Kapittel 3 om fordeling, er at irrasjonale tall har et vidt spekter av forskjellige egenskaper, og graden av irrasjonalitet vil kunne avsløre noen av disse.

Ettersom de irrasjonale tallene ikke lar seg representere som brøk og har en uendelig ikke periodisk desimalutvikling er tallene noe utfordrende å la seg studere i disse vanlige formen. I den anledning ble kjedebrøker introdusert for å kunne ha en bedre måte å kunne representere de på. Kjedebrøkene til irrasjonale tall er alle uendelige, men fordelingen med kjedebrøker i forhold til irrasjonale tall er at noen av de har en periodisk eller veldig regulær utvikling. Så for et hvilket som helst irrasjonalt tall A , så vil kjedebrøken kunne representeres på de to følgende måtene:

$$A = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$
$$A = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

hvor a_n er den n . komponenten til tallet A .

Tidligere i teksten har den n . komponenten til irrasjonale tall med fått betegnelsen a_n^k , hvor k i dette tilfellet bare står for ordet *komponent* for å skille mellom konvergerer og komponenter. Merk at det er snakk om en annen k når det gjelder fordeling.

Med riktig begreper kan disse komponentene fortelle mye om de irrasjonale tallene. Som argumentert for under 2.1.3 viser det seg at komponentene til kjedebrøkene forteller noe om hvor godt et tall lar seg approksimere av rasjonale tall. Dette er ekstra interessant for irrasjonale tall, da et irrasjonelt tall som lar seg veldig godt approksimeres av et rasjonelt tall får *nesten* noen av de samme egenskapene som den rasjonale approksimasjonen. Et eksempel på dette ble vist i Kapittel 3, hvor de irrasjonale tallene som lot seg approksimere godt ved bruk av et rasjonelt tall fikk nesten samme fordelingsmønster som den rasjonale approksimasjonen. Dermed kan man argumentere for at desto bedre et irrasjonelt tall lar seg approksimere, desto mindre irrasjonelt er tallet.

I den anledning brukes størrelsene *approksimasjonsevne* og *rekursiv approksimasjonsevne* for å måle hvor godt et irrasjonalt kan approksimeres ved bruk av rasjonale tall. Størrelsene er henholdsvis definert ved:

$$\Delta A_n = |A - A_n|$$

$$R_{A_n} = \Delta A_{n-1} / \Delta A_n$$

hvor A_n er den n . konvergenten ΔA_n er approksimasjonsevnen til A_n og R_{A_n} er den rekursive approksimasjonsevnen.

Den rekursive approksimasjonsevnen viser hvor mye bedre den n . konvergenten approksimerer det eksakte tallet enn den forrige konvergenten. Enhver konvergent er det rasjonale tallet som best approksimerer det eksakte tallet av alle rasjonale tall med en nevner av tilsvarende eller mindre verdi enn konvergenten.

Med dette som utgangspunkt viser det seg at irrasjonale tall med store komponenter lar seg bedre approksimere enn irrasjonale tall med mindre komponenter, de har da en høyere rekursiv approksimasjonsevne. Altså vil et tall med lave verdier på de rekursive approksimasjonsevnene ha en høyere grad av irrasjonalitet. Så for at et tall skal ha lavest mulig verdi på de rekursive approksimasjonene, må komponentene ha lavest mulig verdi. Dermed, må kjedebrøkene til de mest irrasjonale tallene være enten $[1; \bar{1}]$ eller $[0; \bar{1}]$. Dette er kjedebrøkene til henholdsvis ϕ og $\frac{1}{\phi}$.

En god måte å få illustrert grader av irrasjonalitet er gjennom åkerproblemer som er beskrevet i 2.2. Koordinatene som har både x - og y -koordinatene som positive heltall fungerer som en representasjon på de rasjonale tallene, hvor y -koordinaten representerer telleren på det rasjonale tallet og x -koordinaten representerer nevneren. Videre kan en lineær funksjon, $Y_A(x)$, være definert av et reelt tall A som gradient:

$$Y_A(x) = A \cdot x$$

I denne sammenheng er det mest aktuelt at A er et irrasjonalt tall. Hvis A er et irrasjonelt tall, vil linja aldri treffe noen av punktene ettersom punktene er en bijeksjon av et rasjonalt tall.

Om et irrasjonalt tall lar seg godt approksimere av et rasjonalt tall med verdien $q = \frac{y}{x}$, vil punktet (x, y) ligge veldig nærme linja $Y_A(x)$ til tross for at gradienten A er irrasjonal og linja aldri faktisk treffer noen punkter. Dermed vil da linja som til enhver x -verdi har størst avstand til den nærmeste punktet være det mest irrasjonale tallet. Siden det er etablert at ϕ har den svakeste rekursive approksimasjonsevnen, vil linja som har størst avstand til punktene i koordinatsystemet være $Y_\phi(x) = \phi \cdot x$.

Med en forståelse for irrasjonalitet i den forstand at et tall som har høy grad av irrasjonalitet om det i minst mulig grad lar seg approksimere ved rasjonale tall,

vil altså irrasjonaliteten gjenspeiles gjennom åkerproblemer ved at graden av irrasjonalitet til gradienten avgjør hvor nær heltallspunkter linja med nevnte gradient er.

Fordeling

De irrasjonale egenskapene vil også fremtre andre steder man kanskje ikke skulle forvente det, men de aller fleste har nok sett steder hvor irrasjonaliteten spiller en stor rolle uten at man nødvendigvis har tenkt over det. For eksempel ved fordeling av punkter langs en linje ved bruk av fordelingstall. Med fordelingstall r vil det k . punktet på en linje med lengde $l = 1$ langs en akse med verdien 0 til 1 plasseres på følgende verdi:

$$p_r(k) = \text{mod}_1(kr)$$

Problemet med å bruke rasjonale fordelingstall er at punktene vil etterhvert begynne å overlape. Det vil altså kunne produsere et gitt antall distinkte punkter. Antallet distinkte punkter tilsvarer verdien på nevneren, og som sett under Kapittel 3 vil for eksempel $1/7$ produsere 7 distinkte punkter før det begynner å overlape. Så hvilke type fordelingstall vil produsere uendelig mange distinkte punkter sånn at de aldri vil overlape uansett hvor mange punkter det blir? Faktisk vil alle irrasjonale tall tilfredsstillte dette kriteriet.

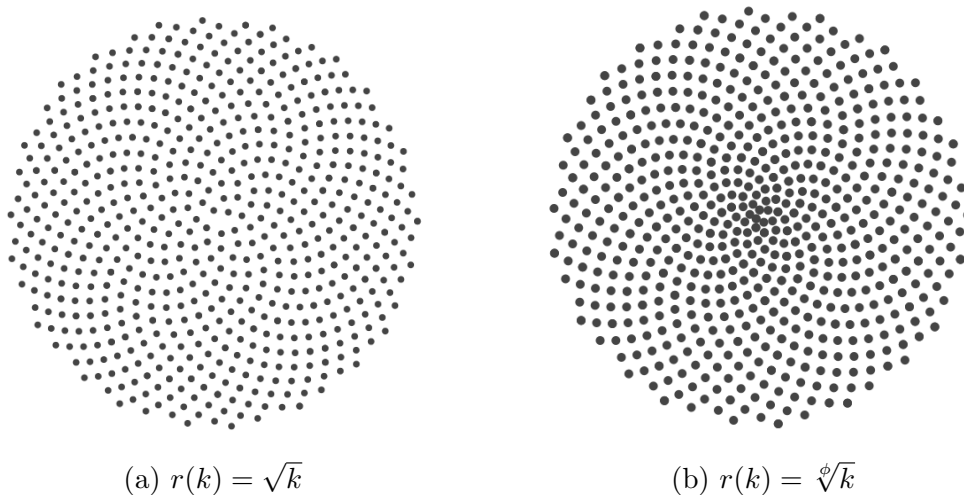
Spørsmålet herfra blir dermed om graden av irrasjonalitet vil ha noe å si for fordelingsegenskapene til irrasjonale fordelingstall. Og som observert og argumentert for under 3.2.1, vil tall som lar godt approksimere av rasjonale tall *nesten* overlape likt som den rasjonale approksimasjonen. Dermed vil da irrasjonale tall som minst lar seg approksimere av rasjonale tall ha fordelingen som er lengst unna å overlape, og dermed også den jevneste fordelingen. For at et tall i minst mulig grad skal la seg approksimere av rasjonale tall, må konvergentene fra kjedebrøken til tallet ha svakest mulig approksimasjonsevne og svakest mulig rekursiv approksimasjonsevne. Som argumentert for under 2.1.4 må et sånt tall ha lavest mulig verdier på komponentene i kjedebrøken.

Dermed vil det ideelle fordelingstallet for en jevnest mulig fordeling med et ukjent antall punkter opp mot uendelig være $\phi = [1; \bar{1}]$, som har verdien 1 på alle komponenter. Med ϕ som fordelingstall ble det under Kapittel 3 vist hvordan punktenes jevnhet utfolder seg med forskjellige antall punkter både langs en linje og langs en sirkelperiferi. I utgangspunktet er det stilige observasjoner og en fin visualisering av en konsekvens av høy grad av irrasjonalitet, men det er først når fordelingen skjer i 2 dimensjoner at den tar kjent form.

Som diskutert i delkapittelet 3.3.2 om fordeling ble flere forskjellige måter å modellere radiusfunksjonen presentert. Ettersom vinkelfordelingen er lik som i en sirkelperiferi og sirkelperiferien igjen er analogt med linjestykket, er det interessante å finne en radiusfunksjon som sørger for at fordelingen skjer jevnest mulig i to dimensjoner. For problemet med et definert linjestykke eller en definert sirkelperiferi er at det etterhvert vil punktene være veldig tett pakket. Dermed vil det å definere en varierende radiusfunksjon sørge for at punktene også fordeler seg jevnt utover fra sirkelsentrum.

Med radiusfunksjonen $r(k) = \sqrt{k}$ vil det til enhver tid være like mye areal per punkt innenfor sirkelen som punktene har dannet, uavhengig av antall punkter. Så

hvis punkter skal fordeles jevnest mulig innenfor en sirkel, vil dette være den ideelle måten å gjøre det på. Hvis punktene har ulike arealbehov kan radiusfunksjonen justeres deretter, om arealbehovet har sammenheng med punktnummeret k . For eksempel, hvis de første punktene har mindre arealbehov enn de siste, må eksponenten x i $r(k) = k^x$ være i intervallet $(0.5, 1.0)$. Dette fremtrer i spiralene vist i 3.3.2, hvorav én av dem med radiusfunksjonen $r(k) = \sqrt[k]{k}$ også er vist under.



Figur 4.1: 610 første punktene for to spiralfordelinger

Disse mønstrene har en viss matematiske eleganse over seg, og de fleste har nok sett dem før. Muligens ikke nødvendigvis i matematisk kontekst, men kanskje stående i en åker eller plantet i et blomsterbed. En tilnærming at dette mønsteret kan blant annet observeres i kongler og fruktemnet til solsikker og andre blomster.

I denne oppgaven har begrepet om irrasjonalitet blitt videre utforsket ved å forsøke å definere graden av irrasjonalitet og undersøke forskjellige egenskaper som medfølger graden av irrasjonalitet. I henhold til disse undersøkelsene og størrelsene som er blitt studert fikk det gyldne snitt, ϕ , tittelen som det mest irrasjonale tallet, for sin elendige evne til å bli approksimert av rasjonale tall.

Det er kanskje nettopp derfor det gyldne snitt er blitt kjent og vidt brukt i forskjellige felt. Ikke direkte fordi det er det mest irrasjonale tallet, men på grunn av egenskapene det innebærer å være det mest irrasjonale. Som for eksempel at det er det ideelle fordelingstallet. Innledningsvis var det nevnt at det gyldne snitt er et tall som er blitt brukt til å beskrive for eksempel plantevekst. Uten å trekke noen konklusive slutninger, er fordelingsmønsteret beskrevet den mest arealeffektive over en todimensjonal flate og liknende mønster opptrer i mange planter. I tilfellet med fruktemnet i solsikker er det frø som skal stables på en tilnærmet todimensjonal flate.

Dermed kan det være at ϕ opptrer mange flere steder i naturen som en underliggende matematisk struktur grunnet tallets irrasjonale egenskaper. Kanskje er det derfor det gyldne snitt er blitt brukt innenfor estetikk også, fra at det er et forholdstall som er *naturlig*?

Referanser

- Dunlap, R.A. (1997). *The golden ratio and fibonacci numbers*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Gardner, M. (1992). *Mathematical circus*. Mathematical Association of America,.
- Geelmuyden, A. (2013). *Det gyldne snitt: Historien om et magisk tall*. Oslo: Kagge Forslag AS.
- Kepler, J. (1966). *A new year gift: On hexagonal snow*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Kepler, J. (1997). *The harmony of the world* (vol. 209). Philadelphia: American Philosophical Society.
- Posamentier, A.S. & Lehmann, I. (2004). *Pi: A biography of the world's most mysterious number*. New York: Prometheus Books.
- Posamentier, A.S. & Lehmann, I. (2007). *The (fabulous) fibonacci numbers*. New York: Prometheus Books.
- Singh, P. (1985). The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval india. *Historia Mathematica*, 12(3), 229–244.