Tallene 0.999… og 1.

Matematikklærerstudenters forståelse av grenseverdibegrepet.

FREDRIK PETTERSEN

VEILEDER
Olav Kristian Gunnarson Dovland

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Helt siden jeg var 15 år og gikk i 9. klasse har jeg hatt et ønske om å bli lærer. Det er mange år siden den gang, og det har vært flere omveier. Å skrive en masteroppgave var også noe jeg alltid har tenkt at jeg skulle klare. Med det sagt vil jeg veldig gjerne si at dette semesteret med skriving av masteroppgave har vært den tøffeste akademiske utfordringen jeg noen sinne har begitt meg ut på. Til tross for det har denne opplevelsen vært lærerik for meg. både som student av matematikk og som fremtidig lærer.

Jeg vil veldig gjerne takke min veileder Olav Kristian Gunnarson Dovland for hjelp og tilbakemeldinger gjennom dette prosjektet. En stor takk til studentene som deltok i dette prosjektet er også på sin plass. Uten deres velvilje til å stille opp til intervjuer hadde jeg ikke hatt en oppgave. Jeg vil også takke min kone, Jennifer, for all den støtten jeg har fått og som jeg ikke hadde klart meg uten. Takk til mamma og pappa som er to store grunner til at jeg er her jeg er nå. Og sist, men ikke minst, vil jeg takke vår ufødte datter, Sofie, som var snill nok til å vente med å bli født til etter jeg leverte denne oppgaven.

Fredrik Pettersen
Kristiansand, mai 2019

Sammendrag

Grenseverdibegrepet er et sentralt begrep i matematikken, spesielt i kalkulus. En god forståelse av dette begrepet er viktig for å kunne forstå andre konsepter slik som derivasjon og integrasjon. Likevel varierer elevers og studenters forståelse av begrepet fra den matematiske definisjonen, og kan noen ganger virke kontraproduktivt. Det blir derfor både interessant og viktig å få en oversikt og forståelse for hvordan elevers og studenters begrepsverden kan se ut, slik at man kan undervise deretter. Like viktig blir det da å få innsikt i hvordan begrepsverdenen til lærerstudenter kan se ut fordi den vil i stor grad påvirke hvordan og hva man underviser til elever. Derfor vil jeg i denne oppgaven prøve å svare på følgende forskningsspørsmål:

- Hva tenker matematikklærerstudenter om tallene $0.999\ldots$ og 1?
- Hvordan forstår matematikklærerstudenter grenseverdibegrepet?
- Hvilke oppfatninger, og eventuelt hva slags misoppfatninger, har de?

Som et overordnende rammeverk for oppgaven bruker jeg teorien til D. Tall & Vinner (1981) om begrepsbilde og begrepsdefinisjon for å forklare hva det innebærer å ha en god matematisk forståelse. Dubinsky et al. (2005a, 2005b) sin APOS-teori blir også brukt til å forklare oppfatninger av tall med uendelig desimalutvikling. For å kunne klassifisere ulike deler av studentenes begrepsbilde bruker jeg funn fra Davis & Vinner (1986) og Williams (1991) som har identifisert vanlige oppfatninger av grenseverdibegrepet.

Data ble innsamlet ved bruk av både spørreundersøkelse og kvalitative intervjuer. Spørreundersøkelsen ble utført i en klasse med matematikklærerstudenter. Tre studenter som stilte opp frivillig ble intervjuet i etterkant.

Resultatene fra spørreundersøkelsene viste at flesteparten av studentene mente at $0.999\ldots < 1$, men av ulike grunner. Det var primært tre oppfatninger som var utbredt blant studentene. Samtlige studenter brukte en metode for å sammenlikne to desimaltall som førte til en avvisning av tallenes likhet. Andre brukte approksimasjonsargumenter til å argumentere for at tallene var nesten like, men ikke helt. En annen oppfatning som gikk igjen hos studentene var grenseverdiens uoppnåelighet. Slike argumenter involverte også ideen om infinitesimaler. Resultatene viser også at studentene ofte brukte språk som var dynamisk i natur.

Abstract

The limit concept is a central concept in mathematics, especially in calculus. A good understanding of this concept is therefore important in order to understand other concepts like differentiation and integration. Despite this, students' understanding og this concept often vary from the formal mathematical definition. It is therefore interesting and important to gain an overview and understanding of how students' concept image may look like, that you may teach accordingly. Just as important is it to gain insight into how the concept images of pre-service mathematics teachers may look like, because it will to a large degree affect how and what they will teach their students. Therefore, in this thesis, I will try to answer the following research questions:

- What does pre-service mathematics teachers think about the numbers $0.999\ldots$ an 1?
- How do they understand the limit concept?
- What conceptions, and potential misconceptions, do they have?

As a theoretical framework for the thesis I will use the theory of concept definition and concept image by D. Tall & Vinner (1981) to explain what it means to ahve a good mathematical understanding. I will also use APOS theory from Dubinsky et al. (2005a, 2005b) to explain conceptions of numbers with infinite decimals. In order to classify the different of the students I will use findings from Davis & Vinner (1986) and Williams (1991) who have identified common conceptions of the limit concept.

Data was collected using both questionaires og qualitative interviews. The questionaire was given to a class of pre-service mathematics students. Three students was selected from a group of volunteers and they were subsequently interviewed.

The results from the questionaire showed that the majority of the students claimed that $0.999\ldots < 1$, but with differing opinions as to why. Several students used a method of comparing two decimal numbers that led to a rejection of the idea that the two numbers were equal. Other used approximationarguments to argue that the numbers were almost equal, but not quite. Another recurring conception that the students had was that limits were unreachable. Such arguments also involved the idea of infinitesimals. The results also show that the students often used language that was dynamic in nature.

Innhold

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

I mitt første år på universitetet, i et algebra-kurs, hadde jeg mitt første møte med en velkjent matematisk problemstilling: er tallet $0.999\ldots$ det samme som tallet 1? Hittil hadde jeg aldri reflektert over problemstillingen, men min første tanke var at de to tallene var forskjellige. Et enkelt og smart bevis senere var jeg overbevist om det motsatte. Tallene måtte være like. Jeg var overbevist, men jeg visste ikke helt hvorfor. Andre var ikke overbeviste men heller tviholdt på sin tidligere overbevisning at tallene måtte være forskjellige. En del år senere forstår jeg endelig hvorfor det må være slik, og det viser seg at grenseverdibegrepet står sentralt i denne problemstillingen.

Allerede relativt tidlig i deres skolegang vil elever støte på grenseverdibegrept. Det er ikke før på VG2 i matematikk R1 at det står eksplisitt i læreplanen at elevene skal kunne gjøre rede for grenseverdibegrepet (Utdanningsdirektoratet, 2019c, s. 7). Likevel, selvom ikke alle elever kommer så langt med matematikken, vil elever komme borti grenseverdibegrepet, indirekte, allerede i grunnskolen når de skal kunne sammenligne og omregne mellom brøker og desimaltall (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s. 9), eller på VG1 i matematikk 1T når man skal kunne gjøre greie for definisjonen av den deriverte til en funksjon (Utdanningsdirektoratet, 2019b, s. 10).

Grenseverdibegrepet ligger til grunn for mange andre komplekse matematiske begreper som elever ofte møter på i høyere utdanning, slik som derivasjon, integrasjon, og kontinuitet. Mange elever som da tar realfagsmattematikk på videregående skole og/eller går videre til universitet eller høyskole vil allerede ha oppfatninger av hva grenseverdibegrepet innebærer.

1.2 Forskningsspørsmål

Et forslag fra veileder var å undersøke hva studenter tenker om tallene $0.999\ldots$ og 1 Selv var jeg svært interessert i hvilke ulike oppfatninger rundt problemstillingen, og rundt grenseverdibegret, som fantes. Siden lærereren er en av hovedformidlerne av kunnskap i skolen var jeg spesifikt interessert i å begrense målgruppen for denne oppgaven fra studenter til matematikklærerstudenter. Med dette i tankene utarbeidet jeg følgende forskningsspørmål:

Hva tenker matematikklærerstudenter om tallene $0.999\ldots$ *og* 1*?*

Hvordan forstår matematikklærerstudenter grenseverdibegrepet?

Hvilke oppfatninger, og eventuelt hva slags misoppfatninger, har de?

For å kunne svare på disse spørsmålene må man først avklare hva de diverse ordene i formuleringene skal bety. Ord som *forståelse*, *oppfatning*, og hva som ligger i grenseverdibegrepet vil avklares i teori-delen. I samme delen av oppgaven vil det diskuteres om problemstillingen rundt tallene $0.999\ldots$ og 1.

Neste steg var å utvikle en metode for datainnsamling og analyse. For å få den nødvendige informasjonen som trengtes for å besvare forskningspørsmålene ble et sett spørreskjema brukt for å få innsikt i hva en større mengde matematikklærerstudenter tenkte. Deretter ble tre av dem intervjuet. Innsamlet data ble analysert ved hjelp av resultater fra tidligere studier (Davis & Vinner, 1986; Williams, 1991) som blir diskutert i teori-delen av oppgaven.

1.3 Oppgavens struktur

Denne oppgaven er bygd opp av seks hovedkapitler. Først en innledningsdel hvor forskningsspørsmål og bakgrunn for oppgaven presenteres. Deretter en del hvor relevant teori presenteres. I dette kapittelet vil det bli redegjort for tidligere forskning som er blitt gjort innenfor temaet grenseverdi, begreper fra forskningsspørsmålene vil bli avklart, og analyseverktøy blir presentert. I denne delen vil det også diskuteres rundt selve problemstillingen: tallene $0.999\ldots$ og 1 og den matematiske teorien rundt grenseverdibegrepet.

Det tredje kapittelet i oppgaven omhandler metoden som er blitt brukt for datainnsamling. Her diskuteres forskningsdesign, bruk av spørreskjema og intervjuer, samt etiske betraktninger. Etterfulgt av dette kommer hoveddelen som består av en presentasjon av de innsamlede dataene. En diskusjon av resultatene følger i femte kapittel.

Avslutningsvis vil det være en konklusjon, didaktiske implikasjoner, og egenrefleksjon over oppgaven.

Kapittel 2

Teoretisk rammeverk

Dette kapittelet inneholder den relevante teorien for oppgaven. Her presenteres tidligere forskning, begrepsavklaringer, grunnlaget for et analyseverktøy, og matematisk teori rundt problemstillingen og grenseverdibegrepet.

2.1 Tidligere forskning

Det finnes en rekke tidligere forskning på studenter og lærereres oppfatninger om grenseverdier. Problemstillingen om $0.999\ldots = 1$ dukker opp i flere av disse. Temaet belyses fra forkskjellige vinkler av forskjellige forfattere. Noen forfattere diskuterer problemstillingen ved hjelp av tallfølger og diskuterer kognitive konflikter rundt disse temaene (D. Tall & Vinner, 1981; D.O. Tall & Schwarzenberger, 1978). Mange av disse forfatterne har også kartlagt ulike oppfatninger hos studenter og lærere når det gjelder grenseverdibegrepet (Davis & Vinner, 1986; Williams, 1991; Szydlik, 2000).

Andre ser på problemstillingen med tanke på uendelighetsbegrepet (Dubinsky et al., 2005a, 2005b) og diskuterer $0.999\ldots$ som et matematisk kognitivt objekt. Disse har også utviklet en teori, APOS-teorien, som ser på overgangen fra å betrakte $0.999\ldots$ som en prosess til å betrakte det som et objekt.

Det er også blitt sett på hvordan språk kan henge sammen med oppfatninger av grenseverdibegrepet (Monaghan, 1991). Uttrykk som ofte blir brukt om hverandre i matematikken og utenom kan anta ulike betydninger ettersom hvordan de blir brukt i forskjellige situasjoner. Dette er uttrykk som ”går mot”, ”nærmer seg”, ”konvergerer”, og ”grense”.

Gjennom intervjuer av lærere ser Yopp, Burroughs & Lindaman (2011) på problemstillingen i lys av deres tanker som i hovedsak består av ideer om approksimasjonsmatematikk og at tall på relateres til fysiske erfaringer.

2.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

I mattematikken finner man som oftest, hvis ikke alltid, rigide definisjoner av begreper. Selv om hjernen vår har kapasitet til å tenke logisk er det ikke alltid at våre oppfatninger av et begrep samsvarer med den matematiske definisjonen av begrepet. For å forstå hvor ulike oppfatninger kommer fra må man skille mellom matematiske begrepers formelle definisjon og de kognitive prosessene hvorav begrepene forståes.

Begrepsbilde referer til den totale kognitive strukturen som er assosiert med et begrep, og inkluderer mentale bilder, egenskaper og prosesser. Denne strukturen er i stadig forandring og forandrer seg hver gang man får nye inntrykk (D. Tall & Vinner, 1981).

Under denne utviklingen trenger ikke begrepsbildet være sammenhengene. Ulike deler av det kan utvikles uavhengig av hverandre, avhengig av hvilke inntrykk man møter. I en bestemt situasjon vil bare en del av begrepsbildet fremkalles, og i en annen situasjon vil muligens en annen del av begrepsbildet fremkalles. Dette medfører at bilder som er i konflikt med hverandre kan eksistere samtidig. Først når motstridende bilder fremkalles samtidig kan det oppstå en kognitiv konflikt.

Det kan også oppstå en kognitiv konflikt når deler av et individs begrepsbilde er i strid med et begreps *begrepsdefinisjon*. En begrepsdefinisjon kan betraktes som et sett med ord som spesifiserer begrepet. En begrepsdefinisjon kan læres av et individ ord for ord eller man kan konstruere sin egen definisjon. Derfor skiller man mellom *personlig* definisjon og *formell* definisjon, hvor den sistnevnte er en definisjon som er akseptert av profesjonelle matematikere (D. Tall & Vinner, 1981). En begrepsdefinisjon kan bli en del av et individs begrepsbilde.

2.3 Oppfatninger

I forrige delkapittel så vi at for et bestemt grep kan det finnes flere forskjellige oppfatninger av begrepet som ikke nødvendigvis samsvarer med begrepets definisjon, men som har oppstått gjennom individets egen erfaring. Grenseverdibegrepet er ikke et unntak. Det er blitt gjort mye forskning på hvilke oppfatninger elever og studenter har av begrepet og det kan være interessant å se hvilke oppfatninger som er vanlige. Davis & Vinner (1986) har kartlagt en del oppfatninger hos kalkulus-studenter som dukker opp igjen i annen forskning (Williams, 1991; Szydlik, 2000). Selv om disse oppfatningene vil danne grunnlaget for den senere analysen av studentenes spørrskjema og intervjuer, er de ikke begrenset til bare disse hvis det skulle dukke opp oppfatninger som ennå ikke er kartlagt eller definert.

1. **Uoppnåelig.** En tallfølge kan ikke eller må ikke anta sin grenseverdi. Med andre ord, det finnes ikke et ledd $a_n = L$, hvor L er tallfølgens grenseverdi.

En slik oppfatning kan i mange tilfeller være produktiv ettersom man i skolen møter på mange tallfølger der grenseverdien aldri nås. Likevel kan en slik oppfatning være uproduktiv i tilfeller hvor man betrakter en tallfølge som er konstant, det vil si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, og man kan derfor risikere å konkludere med at tallfølgen ikke konvergerer eller har en grenseverdi selvom den oppfyller kravene gitt av den formelle definisjonen.

2. **Implisitt monotonitet.** Hvert element a_n i tallfølgen *går mot* grenseverdien, eller kommer nærmere og nærmere. Matematisk kan man si at $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < L$ eller tilsvarende $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > L$.

I et slikt tilfelle vil man også kunne risikere å konkludere med at en konstant tallfølge ikke konvergerer, eller har en grenseverdi fordi hvert ledd aldri blir større eller mindre enn det neste leddet.

3. **Begrensning.** Grenseverdien er et tall som hvert element i en tallfølge ikke må gå over eller under. Altså, $a_n < L$ eller $a_n > L$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Her forveksler man grenseverdi med det at et følge er opptil eller nedentil begrenset. I likhet med oppfatning 1. vil en slik oppfatning ofte være produktiv ettersom de fleste tallfølgene man møter i skolen oppfører seg slik, men hvis man for eksempel ser på en tallfølge som oscillerer og hvor avstanden mellom hver a_n og L blir mindre, eller etter hvert lik 0, vil man kunne se at denne oppfatningen også kan være uproduktiv.

4. **Uendelig ledd.** Man antar at tallfølgen har et siste ledd, et slags a_∞.

I denne oppfatningen ligger også tanken om at man på en eller annen måte kan 'bla gjennom' uendelig mange ledd og til slutt nå ledd nummer uendelig, eller at man en eller annen gang får lagt på uendelig mange desimaler bak komma.

5. **Approksimasjon.** Grenseverdien er en approksimasjon man kan gjøre så nøyaktig som man ønsker.

Her oppfattes grenseverdien som en approksimasjon av tallet som tallfølgen kommer nærmere og nærmere. Denne oppfatningen er nokså lik oppfatning 1., men er forskjellig i at man her bruker begrepet approksimasjon.

6. **Formell Definisjon.** Grenseverdien er et tall man kan komme vilkårlig nærme ved å velge et element langt nok ut i tallfølgen.

Denne oppfatningen innlemmer den formelle matematiske definisjonen av grenseveridibegrepet som sier at gitt en $\varepsilon > 0$ så finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ er $|a_n - L| < \varepsilon$ hvor L er tallfølgens grenseverdi.

2.4 APOS-teori

APOS-teorien er et teoretisk rammeverk som er utviklet for å kunne analysere forholdet mellom matematiske konsepter og deres utvikling hos individer (Dubinsky et al., 2005a), og bygger på Piagets prinsipp om at det finnes et tett forhold mellom de to. Ifølge APOS-teorien håndterer individet en matematisk situasjon ved hjelp av mentale mekanismer og kognitive strukturer. Disse mekanismene blir på engelsk kalt *interiorization* og *encapsulation* og har ikke en god norsk oversettelse. Med mangel på gode ord vil jeg refere til disse mentale mekanismene som, henholdsvis, internalisering og innkapsling. De relaterte strukturene APOS-teorien tar for seg er *action*, *process*, *object*, og *schema*. Disse vil herav omtalen som handling, prosess, objekt, og skjema. Teorien foreslår at når man først utfører en transformasjon på et objekt er man på handlingsnivå. På dette stadiet utfører man transformasjonen eksplisitt, steg for steg. Når dette repeteres og reflekteres over blir handlingen internalisert i en mental prosess. Ved dette stadiet er det ikke lengre nødvendig å utføre transformasjonen eksplisitt, man kan gjøre det i hodet. Hvis man blir klar over prosessens helhet og er i stand til å utføre transformasjoner på selve prosessen i sin helhet sier teorien at man har innkapslet prosessen til å bli et kognitivt objekt. I matematikk må man ofte utføre mange slike transformasjoner samtidig. På grunn av dette kommer man til å befinne seg på flere av de forskjellige nivåene samtidig. Derfor organiseres alle de kognitive strukturene i et slags mentalt nettverk, som kalles skjema.

Denne teorien bruker Dubinsky et al. (2005b) til å analysere ulike matematiske paradokser når det gjelder uendelighetsbegrepet. Et av disse paradoksene som analyseres er problemstillingen i denne oppgaven, tallene $0.999\ldots$ og 1. I lys av APOS-teorien foreslår forfatterne to mulige forklaringer på hvorfor så mange studenter oppfatter $0.999\ldots$ som mindre enn 1, og ikke lik.

Et av forslagene som Dubinsky et al. foreslår er at studentene forstår $0.999\ldots$ som en prosess i stedet for et objekt. Siden prosessen $0.999\ldots$ ikke produserer 1 direkte kan de derfor ikke være like. Hvis man hadde en objektforståelse av $0.999\ldots$ ville det gitt mening å knytte en verdi til det og man ville kunne enkelt sammenlikne $0.999\ldots$ og 1.

Det andre forslaget er at studentene enda ikke har internalisert prosessoppfattelse av tall med uendelige desimaler helt. Man vil se på $0.999\ldots$ som et tall med endelige mange 9-tall bak komma, det er bare ikke bestemt hvor mange.

Dubinsky et al. sammenligner studenters vanskeligheter når det gjelder $0.999\ldots = 1$ med deres forståelse av $0.333\ldots = \frac{1}{3}$. Artikkelforfatterne mener at det er mulig at studenter forstår $\frac{1}{3}$ som en prosess, en delt på tre, i stedet for det rasjonale tallet $\frac{1}{3}$. I dette tilfellet leder denne prosessen til $0.333\ldots$. I tilfellet med $0.999\ldots$ og 1 leder ikke prosessen $\frac{1}{1}$ til $0.999\ldots$. Dette kan være en forklarende grunn til at studenter ofte aksepterer at $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, men ikke at $1 = 0.999\ldots$.

2.5 Tallene $0.999\ldots$ og 1

Problemstillingen rundt tallene 0.999... og 1 er en velkjent problemstilling som er blitt behandlet mange ganger (D.O. Tall & Schwarzenberger, 1978). Spesifikt handler problemstillingen om tallene er like eller ikke. Altså om

$$0.999\ldots < 1 \quad \text{eller} \quad 0.999\ldots = 1$$

De fleste elever og studenter har en tendens til å svare det første alternativet med én gang. At $0.999\ldots$ er mindre enn 1. Likevel finnes det flere matematiske argumenter for det motsatte. Nedenfor følger en oversikt over de vanligste av disse argumentene.

Algebraisk argument

Én måte å gjøre det på er ved å sette opp en likning. La $x = 0.999...$ slik at

$$x = 0.999\ldots$$

Multipliser begge sider med 10 slik at man får det nye uttrykket

$$10x = 9.999\ldots$$

Subtraher det første uttrykket fra det nye slik at man får

$$\begin{aligned} 10x - x &= 9.999\ldots - 0.999\ldots \\ 9x &= 9.000\ldots = 9 \end{aligned}$$

Deretter løser man likningen med hensyn på x og får at

$$x = 1$$

Siden $x = 0.999\ldots$ og $x = 1$ må altså $0.999\ldots = 1$.

Argument med bruk av $\frac{1}{3}$

En annen måte å vise at $0.999\ldots$ og 1 er like er ved å bruke $\frac{1}{3}$. Man kan vise at $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ ved å bruke divisjonsalgoritmen.

$$
\begin{array}{l}
1 : 3 = 0.333\ldots \\
\underline{0} \\
10 \\
\underline{9} \\
10 \\
\underline{9} \\
10 \\
\underline{9} \\
1
\end{array}
$$

Siden

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

har vi også at

$$0.333\ldots + 0.333\ldots + 0.333\ldots = 1$$

men

$$0.333\ldots + 0.333\ldots + 0.333\ldots = 0.999\ldots$$

Derfor må også $0.999\ldots = 1$.

Argument med geometrisk rekke

Tallet $0.999\ldots$ kan også representeres som summen av en uendelig geometrisk rekke på følgende måte:

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$$

Summen av en uendelig geometrisk rekke er endelig og er mulig å regne ut.

$$\begin{aligned}
0.999\ldots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{\frac{9}{10}}\right) \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{10}{9}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Siden tallet $0.999\ldots$ kan skrives som summen av en uendelig geometrisk rekke, og denne summen er 1, da $0.999\ldots = 1$.

Aritmetisk argument

Dersom to tall er like, vil differansen mellom disse to tallene være lik 0. Hva er da differansen mellom 1 og $0.999\ldots$?

$$\begin{aligned}
1.000\ldots - 0.9 &= 0.1 \\
1.000\ldots - 0.99 &= 0.01 \\
1.000\ldots - 0.999 &= 0.001 \\
&\vdots \\
1.000\ldots - 0.999\ldots &= 0.000\ldots \\
&= 0
\end{aligned}$$

Siden differansen mellom de to tallene blir en uendelig desimalutvikling med nuller, må differansen være lik null, og derfor må tallene $0.999\ldots$ og 1 være like.

Filosofisk argument

Stapel (u.d.) foreslår også et filosofisk argument der det stilles spørsmål om hvilket tall som finnes mellom $0.999\ldots$ og 1. For hvis disse to tallene er forskjellige, må det finnes et tall mellom dem. Sagt på en annen måte: Hvis 0.999... kommer *før* 1 på den reelle tall-linjen, hvilket tall finnes da mellom dem? Siden dette er et filosofisk spørsmål finnes det ikke en konklusjon annet enn at det vanskelig, hvis ikke umulig, å tenke seg til et tall som er en mulig kandidat.

2.6 Grenseverdibegrepet

I grunnskolen lærer man at brøker kan skrives som desimaltall, og at desimaltall kan skrives som brøker. Vår tallinje i titallssystemet er bygd opp slik at linjestykket mellom, for eksempel 0 og 1, kan deles i ti like store linjestykker som er mindre enn det første. Man har, for eksempel, det nye linestykket mellom 0 og 0.1. Dette linjestykket kan igjen deles i ti like store linjestykker som er mindre enn det forrige. Denne prosessen kan gjentas uendelig. Endepunktene på hvert slikt linjestykke kalles et *tidelingspunkt*. Hvis man lar m og n være positive heltall tall så gjelder følgende (Dovland & Pettersen, 2018):

$$\text{Desimaltall er et tidelingpunkt} \iff \text{Brøk har nevner på formen } 2^m \cdot 5^n$$

Dette medfører at enhver brøk på formen ovenfor kan representeres med et desimaltall med *endelig desimalutvikling*. Man kan også si at slike desimaltall er en *endelig sum* av tideler, hundredeler, tusendelere, og så videre.

Ikke alle brøker kan skrives med nevner på formen $2^m \cdot 5^n$, og ikke alle desimaltall er tidelingspunkter. Det vil si, de aller fleste er ikke det. Slike brøker, for eksempel, $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, kan fortsatt representeres som desimaltall, men deres desimaltallsrepresentasjoner har en *uendelig desimalutvikling*, eller de kan skrives som en *uendelig sum* av tideler, hundredeler, tusendeler, og så videre.

Et hvert rasjonalt tall kan skrives som et *rasjonalt tallfølge* $\{a_n\}$, hvor n er et naturlig tall og $\{a_n\}$ er alle leddene i tallfølgen.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Slik vil da a_1 representere det rasjonale tallet med ett desimal, a_2 med to desimaler, a_3 med tre desimaler, og så videre. Hvis man kan finne en $K \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k \geq K$ er $a_k = 0$, så har desimaltallet den rasjonale tallfølgen representer en endelig desimalutvikling. Hvis ikke så har det en uendelig desimalutvikling. Om man har et desimaltall med uendelig desimalutvikling kan man gjøre avstanden mellom a_n og brøken desimaltallet representerer vilkårlig liten bare man velger n stor nok. Mer formelt kan man si:

La $\varepsilon > 0$ og q være et rasjonalt tall. Hvis det eksisterer en $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ er avstanden fra det n-te leddet i den rasjonale tallfølgen til det rasjonale tallet mindre enn ε, eller $|a_n - q| < \varepsilon$, da *konvergerer* den rasjonale tallfølgen mot q. Man sier at q er grenseverdien til den rasjonale tallfølgen. Dette skriver man ofte som

$$\lim_{n\to\infty} a_n = q \quad \text{eller} \quad a_n \to q$$

En grenseverdi trenger ikke være et rasjonalt tall men kan også være et reelt tall. Et hvert reelt tall kan representeres som en uendelig rasjonal tallfølge, hvilket betyr at et hvert reelt tall er en grenseverdi til et rasjonalt tallfølge Burn (2015). Som følge av dette betyr det at $0.999\ldots$ er grenseverdien til denne rasjonale tallfølgen:

$$\{0.9, 0.99, 0.999, \ldots\}$$

Dette stemmer godt overens med definisjonen av konvergens ovenfor, men definisjonen tillater også at 1 er grenseverdien til tallfølgen. Et konvergent tallfølge har alltid en entydig grenseverdi (Dovland & Pettersen, 2018; Burn, 2015), og siden både $0.999\ldots$ og 1 er grenseverdier til den samme tallfølgen må

$$0.999\ldots = 1$$

Kapittel 3

Metode

I dette kapittelet presenteres oppgavens forskningsdesign og metoder for datainnsamling og analyse. Det vil diskuteres om bruken av spørreskjemaene, intervjuene, samt etiske betrakninger.

3.1 Forskningsdesign

For å kunne besvare forskningspørsmålet om hvordan mattematikklærerstudenter forstår grenseverdibegrepet vil det være mest hensiktsmessig å bruke en kvalitativ metode for datainnsamling. Intervju som datainnsamlingsmetode er godt tilpasset en slik problemstilling ettersom man i et intervju søker individet sine tanker og synspunkter (Wellington, 2015). For å finne aktuelle intervjukandidater og for å få et generelt overblikk over ulike oppfatninger hos mattematikklærerstudenter, ble et to-delt spørreskjema utdelt til en klasse hvor hver student kunne krysse av om de ønsket å stille opp til intervju. Totalt 62 studenter svarte på spørreundersøkelsen. Deretter ble studenter som hadde sagt seg villig til å stille opp til intervju kontaktet. Totalt 3 studenter ble intervjuet. Det er i hovedsak deres besvarelser og oppfatninger som vil bli behandlet i denne oppgaven, men andres besvarelser vil også bli analysert og presentert.

3.2 Spørreskjema

To forskjellige spørreskjema ble brukt til datainnsamlingen og ble gitt til klassen med mattematikklærerstudenter. Begge spørreskjemaene inneholdt to spørsmål. Det første spørsmålet var et avkrysningsspørsmål der man måtte avgjøre hvilken, eventuelt hvilke, påstander som var riktig. Deretter, i det andre spørsmålet, måtte man begrunne svaret sitt i det første spørsmålet. Spørreskjema 1 spurte om hvilke av de følgende påstandene studentene mente var riktige:

1. $0.999\ldots$ er mindre enn 1
2. $0.999\ldots$ er lik 1
3. $0.999\ldots$ er lik 0.999
4. $0.999\ldots$ er større enn 1
5. Ingen av påstandene ovenfor er sanne.

Spørreskjema 2 tok for seg de samme påstandene men med tallene $0.333\ldots$ og $\frac{1}{3}$ i stedet for $0.999\ldots$ og 1:

1. $0.333\ldots$ er mindre enn $\frac{1}{3}$
2. $0.333\ldots$ er lik $\frac{1}{3}$
3. $0.333\ldots$ er lik 0.333
4. $0.333\ldots$ er større enn $\frac{1}{3}$
5. Ingen av påstandene ovenfor er sanne.

Begge spørreskjemaene ble utdelt av foreleser som en del av forelesning, men på to forskjellige dager. Først ble Spørreskjema 1 utdelt og samlet inn, og deretter ble Spørreskjema 2 utdelt og samlet inn påfølgende dag.

I begge spørreskjemaene ble det også avklart at med "..."mener man at tallet har en uendelig desimalutvikling.

3.3 Intervju

Etter innsamlingen av spørreskjemaene ble studenter som hadde sagt seg villig til å stille opp til intervju kontaktet. Det gikk omtrent én til én og en halv måneder mellom utdeling av spørreskjemaene og intervjuene. I mellomtiden presenterte foreleser argumenter for at $0.999\ldots = 1$ som en del av sitt eget undervisningsopplegg. Derfor ble studentene oppfordret til å tenke tilbake hvordan de tenkte før dette i intervjuene. Av åtte studenter som meldte seg frivillig svarte to av dem på forespørsel om å stille opp. En tredje student, som ikke var en del av den opprinnelige klassen men som også er mattematikklærerstudent, ble kontaktet og stilte til intervju. Disse tre studentene vil bli referert til, henholdsvis, Anne, Roar, og Gaute.

Anne er student ved grunnskolelærerutdanningen og har valgt matematikk som ett av hennes fordypningsfag. Fra tidligere av har hun hatt matematikk 1P og 2P på videregående skole. Det betyr at Anne ikke har formelt vært borte i grenseverdibegrepet ettersom det ikke inngår i pensum i de fagene hun har hatt.

Roar er også student ved grunnskolelærerutdanningen og har også valgt matematikk som ett av hans fordypningsfag. Fra før av har Roar hatt matematikk 1P og 2PY, samt et introduksjonskurs i fysikk. Han har heller ikke, formelt sett, vært borte i grenseverdibegrepet.

Gaute er lektorstudent med matematikk som masterfag. På videregående skole har han hatt matematikkfag som tilsvarer R1 og R2, i tillegg til å ha tatt samtlige matematikkfag ved universitetet. I disse fagene, i tillegg til dem han hadde på videregående skole, har Gaute møtt på grenseverdibegrepet flere ganger. Han har til og med vært borte i problemstillingen om 0.999... og 1 er like i et kurs i matematisk analyse hvor blant annet den formelle definisjonen av konvergens er pensum. Gaute tilhørte ikke den opprinnelige klassen med studenter. Det medførte at han ikke hadde fått utdelt spørreskjemaene slik som de andre. I stedet for fikk han utdelt spørreskjemaene rett etter hverandre, i samme rekkefølge, på samme dag som han ble intervjuet.

De tre studentene ble spurt om, blant annet, å utdype deres resonnementer fra spørreskjemaene i løpet av de 20-30 minutters lange intervjuene. Intervjuene var semi-strukturerte; hovedspørsmål ble stilt, men samtidig var det frihet til å stille oppfølgingsspørsmål. Intervjuene ble spilt inn ved hjelp av lydopptaker, transkribert, og etterpå analysert i lys av teorien.

Det kan være verdt å nevne at jeg ikke er en erfaren intervjuer.

(Bryman, 2016, s. 472) siterer en studie av Roulston et al. (2003) som kom frem til fem utfordringer hos førstegangsintervjuere. Disse inkluderer blant annet uforutsette svar fra respondenten, at egne verdier kommer frem i spørsmålene man stiller (for eksempel i form av ledende spørsmål), og å holde fokus på forskningsspørsmålet når man stiller oppfølgningsspørsmål. Andre utfordringer kan være å håndtere sensitive tema og transkripsjon. Disse utfordringene har jeg vært klar over på forhånd, og jeg har prøvd å tatt høyde for disse utfordringene gjennom utarbeiding av intervjuguide, men - som førstegangsintervjuer - er det uunngåelig at jeg kan ha gått i disse fallgruvene.

3.4 Etiske betraktninger

Etikk er viktig i forskning slik at resultatene fremstår som troverdige. Wellington (2015)mener at hovedkriteriet for pedagogisk forskning er at den skal være etisk. Siden bruk av lydopptak var hovedmetoden for datainnsamling var det nødvendig å søke om godkjenning av prosjektet for å være i tråd med personopplysningsloven. Det ble sendt inn en søknad om godkjenning til NSD (Norsk senter for forskningsdata) med prosjektbeskrivelse, informasjon om datainnsamlingsmetode, vedlagt spørreskjema og intervjuguide.

Deltakende studenter ble også informert om prosjektet og til hvilket formål deres besvarelser skulle brukes. De tre studentene som ble intervjuet ble også videre informert om behandlingen av lydopptakene og deres rettigheter når det gjaldt deres involvering i prosjektet. Skriftlig samtykke ble hentet fra alle tre.

Slik at ingen av deltakerne i prosjektet vil kunne identifiseres har deres egne navn blitt anonymisert. Navn på personer eller institusjoner nevnt i intervjuene har også blitt anonymisert eller generalisert slik at det ikke er mulig å gjenkjenne personene.

Kapittel 4

Resultater

I dette kapittelet presenteres empiriske data. Dette inkluderer både utdrag fra og analyse av besvarelsene fra spørreskjemaene og intervjuene. Først vil besvarelsene til alle deltakerne sees på som en helhet etterfulgt av en mer detaljert analyse av Anne, Roar, og Gaute sine besvarelser og oppfatninger.

4.1 Resultater fra spørreskjemaene

Svarene fra spørreskjemaene er organisert i to tabeller. I tabell 4.1 er besvarelsene organisert etter hvor mange studenter som krysset av for hvert alternativ i de to spørreskjemaene. Ettersom de to spørreskjemaene ble delt ut og samlet inn igjen på to forskjellige dager vil antall besvarelser ikke stemme overens på grunn av studenter som var borte en av de to dagene skjemaene ble utdelt. tabell 4.2 viser en oversikt over antall studenter med ulike svarkombinasjoner. Bare de aktuelle kombinasjonene er inkludert i tabellen. For eksempel, kombinasjonen (4,4) er ikke inkludert ettersom ingen av studentene krysset av for alternativ 4 på noen av spørreskjemaene.

Kategorien "Andre" referer til ufullstendige svarkombinasjoner eller kombinasjoner hvor studenten har krysset av for flere enn ett svar på én eller begge spørreskjemaene. For eksempel, hvis en student ikke var til stede da Spørreskjema 1 ble delt ut, men var til stede da Spørreskjema 2 ble delt ut, vil studentens besvarelse falle inn under "Andre". Alle besvarelsene i "Andre" kategorien er begrenset til kombinasjoner som inneholder svaralternativ 1, 2 og 3. Det fantes tre tilfeller hvor studenter, for eksempel, hadde krysset av for både alternativ 1 og 3 i Spørreskjema 1 og krysset av for alternativ 2 og 3 i Spørreskjema 2. Disse besvarelsene er også kategorisert under ”Andre”. Alle som har krysset av for alternativ 3 har gjort det i kombinasjon med alternativ 1 på Spørreskjema 1 og alternativ 2 på Spørreskjema 2.

Svaralternativer	1	2	3	4	5
Spørreskjema 1	52	3	3	0	0
Spørreskjema 2	9	48	2	0	0

Tabell 4.1: Besvarelser ut fra alternativer

Tabell 4.1 viser at 52 studenter mente at svaralternativ 1 på Spørreskjema 1 er riktig. Altså, et flertall mener at $0.999\ldots$ er mindre enn 1. At mange har en slik oppfatning er ikke overraskende i seg selv. Det som kanskje er overraskende er at en så stor del av deltakerne hadde denne oppfatningen. I tillegg svarer flertallet at $0.333\ldots$ er like $\frac{1}{3}$, som er matematisk korrekt. Fra tabell 4.2 kan man se at flertallet av studenter svarer at $0.999\ldots$ er mindre enn 1, samtidig som at $0.333\ldots$ må være lik $\frac{1}{3}$.

Svarkombinasjoner	Antall
1,1	8
1,2	37
2,2	3
Andre	14

Tabell 4.2: Besvarelser ut fra svarkombinasjoner

Disse to oppfatningene kan være i direkte konflikt med hverandre om disse delene av begrepsbildet aktiveres samtidig. Om det har oppstått en kognitiv konflikt blant disse studentene er vanskelig å si.

Én grunn til at det kan være vanskelig å avgjøre om det har oppstått en kognitiv konflikt hos studentene er at studentene ikke hadde mulighet til å gå tilbake å forandre deres svar i Spørreskjema 1 etter å ha svart på Spørreskjema 2. Hvis studentene hadde hatt mulighet til det kunne det muligens ha gitt mer innsikt i om Spørreskjema 2 faktisk skapte en kognitiv konflikt og, som følge av det, at studentene endret svar i Spørreskjema 1. Alternativt kunne man has delt ut spørreskjemaene i motsatt rekkefølge for å se om man ville ha fått et annerledes resultat.

4.2 Resultater fra intervjuene

Nedenfor presenteres utdrag fra intervjuene av de tre studentene Anne, Roar og Gaute. De tre intervjuene vil bli behandlet separate. Fellestrekk i besvarelsene vil bli diskutert i neste kapittel.

4.3 Anne

Anne var en av de mange studentene som svarte at $0.999\ldots$ er mindre enn 1 og at $0.333\ldots$ er lik $\frac{1}{3}$. Hun har altså svarkombinasjonene (1,2).

Det første hun sier når hun blir spurt om hva hun tenkte da hun svarte at $0.999\ldots$ er mindre enn 1 er at tallene ikke kunne være like på grunn av likhetstegnet.

Anne: Det er jo liksom alltid det at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sidene. Og hvis det ikke står et likt tall eller et regnestykke som kommer frem til et tall, så tenker jeg at jo da er det ikke samme svar.

Intervjuer: Så det var det, på en måte, du tenkte her da du … her har du besvarelsen din … det var det du tenkte da du svarte at det var mindre enn 1 at på grunn av det ikke så likt ut?

Anne: Ja, både det og at jeg tenker at, ja, når det er under 0 så er det jo ikke 1.

Sannsynligvis har Anne forsnakket seg her og mente når tallet er under 1, i stedet for ”under 0”. Dette er oppfatningen, som deles av mange av de andre studentene, om at siden 0 står på enerplassen må tallet være mindre enn 1 uansett hvor mange desimaler som kommer etter komma. I tilfeller hvor man har sifferet 0 på enerplassen etterfulgt av et endelig antall 9-tall etter komma vil man selfølgelig være helt korrekt i å argumentere slik. Problemet kan ligge i at man ikke ser på $0.999\ldots$ som et objekt, eller som et tall, men ser på det som en prosess.

Anne nevnte også at hun ikke tenkte at tallene var like siden de ikke visuelt så like ut, eller at det fantes et regnestykke som kom frem til et tall som så likt ut. Denne oppfatningen kommer kanskje ikke tydelig frem i utdraget ovenfor, men støttes av et senere utsagn etter hun hadde blitt forklart likhetstegnets betydning i denne sammenhengen.

Anne: Nei, nei, men sant og da var det liksom ... Da synes jeg det er veldig merkelig at skolen har lært at, i alle fall slik som jeg tolker det at skolen har, det at er lik skal bli det samme på begge sidene, sånn tallet skal være det samme, og, ja.

Siden $0.999\ldots$ er grenseverdien til tallfølgen $0, 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$, hvor denne tallfølgen konvergerer mot 1, skal i følge Burn (2015) likhetstegnet bety i denne sammenheng at man kan gjøre avstanden mellom det $n$te leddet i taltallfølgen og 1 vilkårlig liten ved å bare velge n stor nok.

I etterkant har Anne blitt forklart betydningen av likhetstegnet, men det kan se ut som at hennes begrepsbilde ennå ikke har fått tid til å modnes. Det kan derimot virke som om det fortsatt pågår en kognitiv konflikt. Når Anne blir bedt om å definere, med hennes ord, hva som menes med grenseverdibegrepet svarer hun følgende:

Anne: Hmm, jeg tenker og når det er, slik som jeg skjønte, at hvis det er, eh, ikke-endelige tall vil det på en måte være det kan komme etter der. Sånn som, ja, i dette tilfellet der jeg trodde at 0,999... ikke var 1, men at jo flere desimaler man legger på så blir det 1, eller at det er 1 til slutt da.

Anne sier her at hun tenker at grenseverdien (tallet 1) kommer etter $0.999\ldots$ når man bare har lagt på flere og flere desimaler. Det kan se ut som at hun har en oppfatning om at det finnes et "uendelig-ledd"og at $0.999\ldots$ på en eller annen måte blir 1 til slutt. Når hun blir spurt oppfølgingsspørsmål innrømmer hun at hun egentlig ikke har forstått begrepet.

Intervjuer: Ok. Så du ser for deg i det eksempelet med $0.999\ldots$

Anne: Ja.

Intervjuer: Så ser du for deg at tallet 1 kommer etterpå?

Anne: Mhm.

Intervjuer: Men, hvis to tall er like, kan da, liksom, det ene komme etter det andre?

Anne: Hva da?

Intervjuer: Altså, vi har jo nettopp, på en måte, sagt at $0.999\ldots$ er det samme som 1. Men kan da 1 komme etter $0.999\ldots$ hvis det er det samme tallet?

Anne: Nei, jeg synes det er litt vanskelig. Jeg har egentlig ikke helt skjønt det, men det er nærmere og nærmere også er vel, eh, det skal jo på en måte tilsvare det tallet. Med tanke på at når man tar en tredjedel og ganger med tre ... [Uklart] ... da ga det mye mer mening men igjen så gir det ikke helt mening.

Selv om Anne i utgangspunktet ble overbevist om at $0.999\ldots$ må være lik 1 gjennom matematiske argumenter, er det tydelig at argument og forklaring ikke var nok til å fostre forståelse. Hun har oppfattet at likhetstegnet har en mer nyansert betydning enn det som hun har lært i skolen, men det er fortsatt usikkert om hun har forstått betydningen fullstendig.

4.4 Roar

Roar var også en av studentene som mente at $0.999\ldots$ var mindre enn 1, og som svarte at $0.333\ldots$ var lik $\frac{1}{3}$. Han har også svarkombinasjonen $(1, 2)$. Han blir spurt om hva han tenkte da han svarte på Spørreskjema 1 og svarer følgende:

Roar: Jo, jeg tenkte at det er jo uendelig med 9-tall også uansett så vil det jo alltid være en, altså en del, altså en uendelig del mindre. En X-del mindre da. For det vil jo aldri komme til 1.

Intervjuer: Ok.

Roar: Det er jo egentlig det jeg tenker, altså hvis ... ja ... det er så vanskelig å sette ord på det men den vil jo aldri bli 1. Den vil alltid komme nærmere 1, altså mer nøyaktig, men det vil alltid være en brøkdel mindre, eller en del mindre. Det er logisk.

Det kan se ut som Roar har en dynamisk oppfattelse av $0.999\ldots$. Dette kommer til syne i uttryk som komme til 1"og kommer nærmere 1". Ved å beskrive tallet $0.999\ldots$ med dynamiske uttrykk kan det tyde på at Roar forstår tallet som en prosess enn et objekt. Man kan også se at Roar har en oppfattelse av uoppnåelighet; 0.999 . . . vil alltid være en X-del mindreeller en brøkdel mindre". Her er Roar inne på tanken om infinitesimaler, enten det er ubevisst eller bevisst.

Det finnes selvfølgelig tallfølger som konvergerer og som kan anta sin grenseverdi i sitt $n$te ledd. Etter å ha blitt presentert 0.999 . . . som et rasjonalt tallfølge blir Roar vist en annen tallfølge der $a_n = 5$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Intervjuer: Greit. Hvis du har dette følgen her da? [Skriver]

Roar: Mhm.

Intervjuer: 5, 5, 5, 5, og så videre og si at dette følgen følger det mønsteret der. Vil du si . . . har dette følgen noen grenseverdi?

Roar: Ja.

Intervjuer: Ok. Hva tenker du ... hvordan, på en måte, tenker du da?

Roar: Det kan ikke plutselig bli 6. For det er 5 som er grenseverdien. Hvis eneren er 5, toeren er 5, treeren er 5, fireren er 5, femmeren er 5 så kan det ikke plutselig bli 6 eller 10 eller noe. For det er jo ikke noe komma eller desimaltall eller noe bak, og det har du jo ikke. Som er uendelig, som jeg er vant med å se på det. Så det er bare et tall, i alle retninger. Det kan ikke bli mindre. Det kan ikke bli mer.

Her er oppfatningen at grenseverdier er uoppnåelige ikke en aktiv del av Roars begrepsbilde. Han antar at 5 er grenserverdien til denne konvergerende tallfølgen, og han ser ut til å ha en annen oppfatning av grenseverdier. Det kan se ut til at Roar, i dette tilfellet, oppfatter grenseverdier som et tall man ikke kan overskride - eller en øvre grense. Også i et tidligere eksempel kan det virke som at Roar sliter med å finne grenseverdien til tallfølgen $0.3, 0.33, 0.333, \ldots$ på grunn av denne oppfatningen. Han kommer med flere forslag slik som 0.4 og 0.34 fordi han muligens tenker på grenseverdien som et høyere tall et hvert ledd i rekken ikke kan bli. Når han blir spurt om han kan forklare med sine egne ord hva som menes med grenseverdi svarer han følgende:

Roar: Grenseverdi er det høyest mulige tallet . . . som noe kan bli. I forhold til det, men det blir jo ikke . . . det blir jo litt sånn . . .

det blir ikke generelt for en grenseverdi til en funksjon kan jo bli høyere, selv om det ikke er relevant, men den kan jo bli det. Hvis du tenker på at du får oppgaver og sånn ... nei ... eh ...

Mot slutten av besvarelsen ovenfor nevner han at en funksjon må være et unntak fordi den kan bli høyere enn sin grenseverdi. Da han ble spurt om han kunne utdype dette mintes Roar om en oppgave fra tidligere fag hvor han skulle regne på en funksjon som modellerte en fiskebestand. Han påpeker at funksjonen kun var gyldig innenfor et bestemt område og at den sannsynligvis ikke var nøyaktig utenfor de grensene som hadde blitt satt. Det ser ut som at Roar har forvekslet grenseverdibegrepet med gyldighetsområde.

Etter å ha gått gjennom Roar sine svar fra spørreskjemaene sier han at han nå er overbevist om at $0.999\ldots = 1$ fordi hans lærer har forklart det for klassen. Roar blir spurt om han kan forklare, i lys av denne nye kunnskapen, hvorfor $0.999\ldots = 1$. Hans nye begrunnelse er i hovedsak en gjengivelse av argumentet som bruker $\frac{1}{3}$.

Etter å ha blitt spurt om argumentasjonene hans på spørreskjemaene sier Roar selv at han opplevde en kognitiv konflikt.

Roar: Så da har du alt. Sånn hadde jeg konklu ... altså sånn hadde jeg ville vist det. Og det synes jeg var litt voldsomt, at vi måtte høre på. Og det var det som var for min del og, var at, okay, her ... her skjer det en kognitiv konflikt for å si det sånn. Ja.

Siden Roar er fortrolig med at $0.999\ldots = 1$ og kan argumentere for det, kan det tyde på at han har løst den kognitive konflikten han opplevde og på veien tatt med seg nye oppfatninger om grenseverdibegrepet.

4.5 Gaute

Av de tre studentene som ble intervjuet er Gaute den med mest skoleerfaring i matematikk. På spørreskjemaene svarer han at $0.999\ldots = 1$ og at $0.333\ldots = \frac{1}{3}$. Han er derfor én av de tre studentene med svarkombinasjonen $(2, 2)$. Gaute tilhørte heller ikke den opprinnelige klassen med studenter og har derfor ikke fått forklart problemstillingen av læreren, men han sier at problemstillingen har vært en del av pensum i et kurs i matematisk analyse som han har tatt og er derfor allerede kjent med problemstillingen. På grunn av dette argumenterer Gaute litt utenom det som var typisk for de andre studentene.

På spørreskjemaet skriver han at $0.99999\ldots9 + 0.00000\ldots0 = 1$ etterfulgt av $x + 0 = 1$ og konkluderer med at $x = 1$. I intervjuet etterpå utdyper han hvordan han har tenkt:

Gaute: Og det hjalp meg litt når jeg kom til spørsmål 2 egentlig, ditt andre spørreskjema, for da kom jeg litt ... jeg vet, eh, vi gikk jo gjennom dette at 0,999 med uendelig 9-tall er det samme som 1. Og det jeg tenkte nå før jeg ble påminnet litte det er da på en måte at hvis du skal plusse på noe for å få det til å bli 1, så må du plusse på 0,0000... også må du ha like mange 0-tall som det er 9-tall, også må du ha 1 til slutt. Men når det er uendelig med 9-tall så blir det også uendelig med 0-tall. Og hvis du tar 0 og plusser på et tall og får 1, så må jo det være det samme som 1. Det var det jeg tenkte da.

Gaute argumenterer at for å få $0.999\ldots$ med X antall 9-tall bak komma til å bli 1, må man legge til $0.000\ldots1$ med $X - 1$ antall 0-tall etter komma og et 1-tall på slutten. Men, argumenterer han, siden det er uendelig mange 9-tall etter komma må det nødvendigvis også være uendelig mange 0-tall i tallet man skal legge til. Siden tallet man skal legge til er lik 0, påpeker Gaute at det er den additive identiteten hvis egenskaper leder han til å konkludere at $0.999\ldots = 1$. Dette argumentet er en annen versjon av det aritmetiske argumentet nevnt tidligere i teoridelen.

På det andre spørreskjemaet blir Gaute påminnet om argumentet som ble presentert til den andre gruppen med studenter. Han har sett dette argumentet før.

Intervjuer: Skjønner hva du mener. En ting som jeg lurte på var ... for når du så skjema 2, kan jeg forstå det slik at du ble på en måte minnet på det beviset da, for at det må være slik? For du har skrevet her at 1/3 er 0,333... og at 3/3 må da være 0,999...

Gaute: Yes. Og det var liksom det som ... for da så jeg med en gang den kombinasjonen der: 0,333... og 0,999... Og da ble jeg påminnet dette med ... åja, denne brøkvarianten. For 3/3 er ... det er ikke så vanskelig å forstå at det er 1, for det er tre av tre, alle tre delene. Så lenge man er enig i at 0,333... er 1/3

> så, på en måte kan man bruke det ... så hvis man beviser at 0,333... er lik 1/3 så har man egentlig bevist at 0,999... er 1. Det blir på en måte en følge av det.

Gaute argumenterer for at hvis man er enig i at $0.333\ldots = \frac{1}{3}$ kan man vise at $0.999\ldots = 1$. Svaret hans på Spørreskjema 2 er altså bare en antakelse som han tar for gitt er riktig. Da han blir spurt om hvordan han kunne ha vist at $0.333\ldots = \frac{1}{3}$ blir Gaute forvirret et øyeblikk og lurer på hvilke av påstandene i spørreskjemaene som leder til hvilke.

Gaute: Jeg kan ikke bevise det med å bruke det der (referer til Skjema 1), eller kan jeg det? Disse, på en måte, prater jo sammen. Jeg tror kanskje, at det er lettere å vise den der egentlig (referer til Skjema 1). Men jeg er litt usikker.

Som oppfølging på dette blir det klart at Gaute antar at $0.333\ldots = \frac{1}{3}$ basert på erfaring. Om man antar at én av påstandene i spørreskjemaene er rett vil dem naturligvis lede til hverandre. Problemet er at dette blir et sirkulært argument hvor man starter med det man ønsker å bevise. Gaute har glemt, men blir påminnet senere, at man kan vise at $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ ved å bruke divisjonsalgoritmen.

Til tross for at Gaute har vært borte i problemstillingen før er han likevel ikke helt sikker på at han forstår alt. Han innrømmer selv at han mangler "den totale konseptuelle forståelsen", men at han "kjøper alle argumentene". Om denne konflikten har Gaute følgende å si:

Gaute: Ja, det er liksom ... det er likevel noe rart med dette, men det bunner sikkert ut i hvordan jeg har holdt på med matte i 20 år. Så har jeg liksom tenkt at vi runder av 0,999... til 1, fordi det er så å si det samme, men det er ikke det samme. Jeg har gjort det i 20 år også plutselig kommer noen og forteller meg at, jo, det er det samme. Det er litt sånn hvis noen sier ... at du har kalt en banan en banan i 20 år også sier noen, nei vet du hva, det er et eple. Også skal du ... nei. Så det er liksom det å få omvendt den ... ja, tenker jeg kanskje.

Det kommer veldig tydelig frem i Gautes ord hvordan han har opplevd, og fortsatt opplever, denne kognitive konflikten. En annen ting som kommer frem er en oppfatning Gaute hadde før han ble kjent med problemstillingen.

Han sier at han alltid tenkte at man rundet $0.999\ldots$ opp til 1 fordi tallene er så og si det samme og har drevet på slik i 20 år. Flere av de andre studentene deler denne oppfatningen.

Videre blir Gaute spurt hva han tenker om at det finnes flere representasjoner for samme tall innenfor desimaltallene. Han mener at flere representasjoner for samme tall er uproblematisk, og han bruker brøker som argument. Det er først når man befinner seg blant desimaltallene at det blir problematisk for ham.

Gaute: Det er på en måte når du er innenfor dette desimalsystemet for der har jeg en oppfatning, tror jeg, at det er liksom en tallinje. Så er det uendelig mange streker. Og her blir det på en måte litt for meg når du bruker dette 0,999… så er det streken rett før 1. Ikke sant? Det er kanskje der det henger litt fast. At jeg tenker at den … hvis du tar ett 9-tall til, ett 9-tall til, ett 9-tall til, så er det et eget hakk for hvert 9-tall, ikke sant? Også er det det med uendelighet inne i dette som jeg ikke klarer å bli helt overbevist om, men da … hvor starter den uendelige? For man kan jo skrive så mange 9-tall du vil, men når … hvilket er det uendelige 9-tallet?

Gaute har allerede nevnt at han har problemer med å forstå uendelighetsbegrepet. At Gaute lurer på hvilket som er det ”uendelige 9-tallet” kan tyde på at Gaute oppfatter $0.999\ldots$ som en prosess og lurer på hvor prosessen skal stoppe.

Etterfulgt av dette ble Gaute presentert med tre tallfølger hvor han ble spurt om å avgjøre om tallfølgene hadde en grenseverdi, og hva denne eventuelle grenseverdien var. Det var ingen problem for ham å avgjøre grenseverdien for den rasjonale tallfølgen $0.6, 0.66, 0.666, \ldots$, men da han ble presentert med et konstant tallfølge mente han at det ikke hadde en grenseverdi.

Intervjuer: Ok. Eh, jeg har en tallfølge til. Hvis du har dette tallfølgen her som består av 5, 5, 5, 5, … og så videre. Altså bare 5-tall. Konvergerer dette tallfølgen? Og hvis ja, har det en grenseverdi?

Gaute: Nei. For dette her er det ingen bevegelse i. Dette vil jeg sett på som en lineær … eller, ja, det er ikke lineært, men det er …

Intervjuer: Konstant?

Gaute: Det er en konstant. Ja, for det er jo ikke noe … det beveger seg jo ingenting. Det er ikke noe bevegelse i det.

Intervjuer: Hva mener du med bevegelse?

Gaute: Bevegelse er at det kommer ikke noe nytt for hvert ledd. Det er alltid det samme. Det er liksom ikke noen endring. For når noe konvergerer mot noe, mot en grenseverdi, så er det hele tiden en endring. Du kommer nærmere, og nærmere, og nærmere noe. Mens her så er det på en måte … du står stille.

Gaute argumenterer for at tallfølgen $5, 5, 5, \ldots$ ikke har en grenseverdi, og konvergerer derfor ikke, med at det ikke finnes noen bevegelse. Med mangel på bevegelse mener han at det ikke skjer noen endring fra ledd til ledd og har en oppfatning av at hvis en tallfølge konvergerer må det komme nærmere og nærmere grenseverdien. Denne oppfatningen, at det må skje en forandring i fra hvert ledd for at en tallfølge skal konvergere, er det ingen av de andre studentene som uttrykker, på grunn av Gaute er sannsynligvis den av de som har hatt mest om konvergensbegrepet i skolen.

At den formelle definisjonen er en del av Gautes begrepsbilde er sannsynlig med tanke på at han har tatt fag hvor denne definisjonen har vært kjernen i pensum. Men under intervjuet husket ikke Gaute definisjonen og den var derfor ikke til hjelp for ham.

Et alternerende tallfølge, $1, -1, 1, -1, \ldots$, ble presentert for Gaute og denne gangen medfører hans oppfatning, med bevegelser, at han trekker riktig konklusjon.

Gaute: Gaute: Nei for den beveger seg ikke mot noe. Det er en konstant bevegelse. Det er alltid ned to, opp to, ned to, opp to. Og da, hvis for eksempel det hadde vært ned to, opp 1.9, ned 1.8, at den beveget seg mot 0, men her er på en måte bevegelsen konstant. For slik som den første her, så blir bevegelsen mindre og mindre, for tallet kommer ett hakk lengre bak i desimalrekka. Så den beveger seg mindre og mindre og da vil det bevege seg mot noe. Men når bevegelsen er, eller endringen er, konstant så vil det ikke endre noe på rekka uansett hvor langt ut man går, så vil det fortsatt være ned to, opp to, ned to, opp to. Uendelig langt borte.

Kriteriet for Gaute er altså ikke bevegelse i seg selv. Han argumenterer for at denne tallfølgen ikke konvergerer på grunn av konstant bevegelse. Derimot sier han at tallfølgen hadde vært konvergent om bevegelsen hadde avtatt for hvert ledd

Kapittel 5

Diskusjon

I dette kapittelet diskuteres resultatene fra forrige kapittel. Trender som går igjen hos flere av studentene blir diskutert i lys av teorien. Det er flere forskjellige oppfatninger som går igjen i besvarelsene. Spesielt tre oppfatninger skiller seg ut og er mest forekommende.

5.1 Desimalplass- og tallinjeargument

En av oppfatningene som mange av studentene hadde går ut på at $0.999\ldots$ ikke kan være lik 1 fordi tallet $0.999\ldots$ har sifferet 0 på enerplassen, mens tallet 1 har sifferet 1 på enerplassen.

> *Tallet består av en null på enerplassen og har ingen andre tall på plassene over enerplassen. Da blir aldri tallet høyere enn 1 selv om tallet bak komma går mot uendelig.*

En annen variant av dette argumentet bruker tallinjen til å forklare hvorfor $0.999\ldots$ er mindre enn 1:

> *fordi* $0,999\ldots$ *kommer før 1 i tallrekka. dermed er* $0,999\ldots$ *mindre enn 1*

I intervjuene kommer det frem at både Anne og Gaute hadde varianter av denne oppfatningen.

Det er mulig at studentene som argumenterte på denne måten ikke oppfattet betydningen av tegnet "..." selv om det sto eksplisitt på spørreskjemaene. Hvis dette er tilfellet så er man matematisk berettiget å argumentere slik. Det endelige desimaltallet $0.999\ldots$ er mindre enn 1.

En annen mulighet er at studentene tenker på desimalutviklingen til $0.999\ldots$ som en prosess, at det hele tiden legges til et desimal. Prosessen vil da tidvis stoppe og man kan begynne å tenke på $0.999\ldots$ som et desimaltall med endelig mange desimaler, som for eksempel 0.999 eller 0.999999. Disse tallene er helt klart mindre enn 1 (Date-Huxtable et al., 2018).

Reinholdtsen (2016) forklarer at en grunn til at studenter konkluderer med at $0.999\ldots < 1$ er på grunn av at studenter utvikler seg et kriterium for at et tall skal være større en et annet. Dette kriteriet kaller han for desimalposisjonskriteriet. Det går ut på at når man sammenligner to desimaltall sammenligner man sifferene på enerplassene med hverandre, sifferene på tidelsplassene med hverandre, sifferene på hundredelsplassen med hverandre osv. Første forskjell i sifferene man oppdager gjennom denne prosedyren vil avgjøre hvordan tallene skal ordnes. Reinholdtsen mener denne prosedyren blir "terpet på" i grunnskolen fordi den er effektiv i forhold til å unngå vanlige misoppfatninger om desimaltall. Han mener også at denne prosedyren er uforenlig med det faktum at tallene man sammenligner er reelle tall. Dette begrunner han med tetthetsegenskapen til reelle tall (en egenskap som man også lærer om i grunnskolen). Tetthetsegenskapen går ut på at et reelt tall $a > b$ hvis og bare hvis det finnes et reelt tall c slik at $a = b + c$. Med andre ord: det eksisterer et reelt tall mellom to ulike reelle tall. I Annes intervju ble hun utfordret på dette faktumet da hun argumenterte for at tallet 1 på en eller annen måte kom etterpå $0.999\ldots$, hun ble mer forvirret etter det. Likt som Reinholdtsen konkluderer med sine studenter kan det her også virke som at studentene ikke er oppmerksomme på denne uforeneligheten og velger å holde seg til prosedyren som de er mest komfortabel med.

5.2 Approksimasjonsoppfatninger

Approksimasjon ble hyppig brukt både i argumenter for at $0.999\ldots$ er mindre enn 1, og imot. To av studentene som svarte at $0.999\ldots$ var lik 1 brukte approksimasjon som argument. Følgende er én av disse besvarelsene:

> $0,999\ldots$ *er tilnærmet lik 1, og i praksis er det umulig å skille mellom 0,999 og 1. Forskjellen mellom* $0,999\ldots$ *og 1 er så marginal at jeg ikke vil kalle det for en forskjell.*

Den andre besvarelsen bruker et helt likt argument. Selv om disse to studentene svarte at $0.999\ldots = 1$ er argumentet basert på en antakelse om at hvis bare noe er marginalt nok forskjellig så kan man kalle det likt.

Andre argumenter ved bruk av approksimasjon ble brukt for å argumentere mot at $0.999\ldots = 1$:

> $0,999\ldots$ *er mindre enn 1 uansett hvor mange desimaler det er etter komma. Det er tilnærmet lik 1, men ikke lik 1.*

Igjen, her, tenker man muligens på $0.999\ldots$ som en prosess i stedet for et objekt og derfor tenker at det er tilnærmet lik, og ikke lik.

Det finnes også forskning som viser at denne oppfatningen også deles av lærere i skolen og kan dermed bli overført videre til elevene. I Yopp, Burroughs & Lindaman (2011) blir en lærer i femteklasse intervjuet angående identiteten$0.999\ldots = 1$. Det kommer frem at læreren i dette forsøket har en del misoppfatninger om desimaltall med repeterende desimaler. Blant disse oppfatningene fantes blant annet ideen om at approksimasjoner var gode nok, og at små forskjeller ikke betydde noe. Læreren argumentererte for denne oppfatningen ved å knytte tall til fysiske, eller hverdagslige, opplevelser. Det vil si, grunnen til at man runder av er slik at tallene gir mening i et fysisk målesystem. Et eksempel som læreren oppga var hvis hun skulle ha kjøpt tre sjokolader for 1 dollar. Hun visste godt at hver sjokolade kostet en tredjedel av en dollar, men siden det ikke eksisterer noen tredjedels-dollar rundet hun av til 33 cents. Det blir også nevnt at en grunn til å avrunde $0.999\ldots$ kan være for å unngå den kognitive konflikten. I stedet for å konfrontere faktumet at $0.999\ldots = 1$ bruker man approksimasjon for avlede den kognitive konflikten. Man sier altså at forskjellen er så liten at tallene er omtrent like, men de er egentlig ikke det. På denne måten kan man på et vis beholde begge synene, at $0.999\ldots < 1$ og at $0.999\ldots = 1$ Siden slike oppfatninger finnes blant lærere er det sannsynlig at disse oppfatningene også finnes blant elever og lærerstudenter. Det kan forklare hvorfor en del av studentene forklarer at $0.999\ldots$ ikke er lik 1 med å bruke avrunding som argument.

5.3 Uoppnåelighet

En tredje oppfatning som gikk igjen flere ganger var tanken at 0.999... aldri når, eller rekker frem til, 1.

> *Tallet* $0,999\ldots$ *er*
> *- ikke større enn 1 fordi det vil aldri nå helt opp til tallet 1. Desimalene fortsetter og vi nærmer oss tallet 1, men vil aldri nå tallet eller gå over.*
> *- ikke lik 1 pga. overnevnte resonnement*
> *- ikke like 0,999 fordi tallet* $0,999\ldots$ *er større fordi det får med seg flere desimaler som øker verdien kontinuerlig*
> *- mindre enn 1 fordi det nærmer seg hele tiden verdien 1, men vil aldri krysse den magiske grensen*

Flere besvarelser ligner på denne, men denne studenten er kanskje en av dem som uttrykker denne typen oppfatning best. Det er rimelig klart at studenten tenker på 0.999... som en prosess. Hvis man oppfatter 0.999... som en prosess så er det forståelig at oppfatningen om at grenseverdier er uoppnåelige blir en del av begrepsbildet. Tallfølgen som konverger til 0.999... antar aldri verdien 1 i noe som helst $n$te ledd. Studenten nevner også "den magiske grensen". Her kan man se at selv om studenten kanskje ikke har vært borte i grenseverdibegrepet formelt sett gjennom skolegangen, så har studenten fortsatt dannet seg et begrepsbilde av det. Et lignende begrepsbilde kommer til syne i en annen besvarelse, men denne studenten bruker et annet ord for grenseverdi.

> *Dersom* $0,9999\ldots$ *går uendelig vil vi ha en asymptote på 1. Dvs. den nærmer seg men vil aldri nå tallet 1. Dersom* $0,99999\ldots$ *er* ≈ 1 *men matematisk er det ikke det samme uansett hvor mange desimaler som er bak vil det alltid mangle ett tilsvarende tall* $0,00000\ldots1$

Studenten bruker ordet "asymptote", som er et begrep ofte brukt når man har med funksjoner å gjøre. Siden 0.999... alltid "nærmer seg" 1 argumenteres det for, i besvarelsen ovenfor og i andre besvarelser, at det finnes alltid et vilkårlig lite tall man kan legge til 0.999... for å få 1. I Reinholdtsen (2016) utfordret læreren studentene sine til å prøve å finne differansen mellom 1 og 0.999.... Det ble gjort forsøk av studentene på å

”tallfeste” denne differansen, på lik måte som besvarelsen ovenfor. Det ble påpekt av medstudenter at $0.000\ldots 1$ kunne ikke være differansen siden det var uendelig mange 0-sifre før man kom frem til plassen hvor tallet 1 sto. Dette er lignende på hvordan Gaute argumenterer. I samme klassediskusjon prøvde studentene å stille opp tallene slik man ville ha subtrahert to tall. Svaret dem kom frem til ble $0.000\ldots$ som er lik 0. Det finnes ingen tall som er differansen mellom 1 og $0.999\ldots$ i vårt tallsystem, altså blant de reelle tallene. Det finnes, derimot, slike infinitesimaler blant de hyperreelle tallene. De hyperreelle tallene er en utvidelse av de reelle tallene og inkluderer ”uendelig store” tall og ”uendelig små tall”. Disse tallene vil ikke bli diskutert videre i denne oppgaven, men det er viktig å vite at dem finnes.

5.4 Språk

Flere av studentene i undersøkelsen uttrykte sine argumenter gjennom dynamisk språk. Roar og Gaute gjorde dette ved å bruke uttrykk som nærmer seg"og bevegelse". Bruk av dynamisk språk er vanlig blant kalkulusstudenter og kan virke både produktivt og uproduktivt avhengig av stiuasjonen (Davis & Vinner, 1986). At Gaute bruker ordet bevegelse viser at han har et dynamisk språkbruk likt som studentene i Williams (1991) og Reinholdtsen (2016). Studentene som ble intervjuet i Williams (1991) ble primært spurt angånde grenseverdier i forhold til funksjoner. De dynamiske oppfatningene av grenseverdien ble tolket på to forskjellige måter av studentene. Én av betydningene av språkbruken var relatert til den fysiske prosessen å evaluere funksjonen i forskjellige punkter ligger nærmere og nærmere grenseverdien. Den andre betydningen var relatert til den mentale visualiseringen av av et punkt som nærmer seg grenseverdien. Det er muligens denne siste tolkningen Gaute har om problemet med den konstante tallfølgen. Tidligere med tallfølgen $0.6, 0.66, 0.666, \ldots$ var det, med denne dynamiske oppfatningen, ikke vanskelig å se at jo lengre mot høyre man går ut i tallfølge jo nærmere kommer man $0.666\ldots$. I tilfellet med $5, 5, 5, \ldots$ opplever man ikke en slik ”bevegelse”. Med den formelle definisjonen av konvergens vil man enkelt se at den konstante tallfølgen også konvergerer.

Språket man bruker kan også føre til misoppfatninger. Monaghan (1991) sier at matematikere bruker dagligdagse ord som i matematikken kan ha helt andre betydninger. Ordet ”limit” blir brukt på engelsk for det norske ordet ”grenseverdi”. På engelsk har ordet en konnotasjon av å bety noe som er statisk, eller umulig å krysse. På norsk har ordet ”grense” lignende konnotasjoner. For Roar førte dette til en oppfatning om at grenseverdien var et tall som begrenset en tallfølge. Ingen av leddene kunne plutselig bli grenseverdien, mente han. En slik oppfatning vil være produktiv i mange tilfeller, men man kan komme til å møte på problemer når man møter alternerende tallfølger.

Kapittel 6

Avslutning

Dette kapittelet inneholder en oppsummering av arbeidet jeg har gjort sammen med en konklusjon, didaktiske implikasjoner, og egenrefleksjon.

6.1 Konklusjon

Denne oppgavens mål har vært å besvare følgende forskningsspørsmål:

- *Hva tenker matematikklærerstudenter om tallene* $0.999\ldots$ *og 1?*
- *Hvordan forstår matematikklærerstudenter grenseverdibegrepet?*
- *Hvilke oppfatninger, og eventuelt hva slags misoppfatninger, har de?*

De 62 deltakende studentene mottok spørreskjema som hadde til hensikt å få frem deres tanker om tallene $0.999\ldots$ og 1 sammen med deres argumenter. Etterfulgt av dette ble 3 studenter intervjuet for å få bedre innsikt i deres tanker.

Av de 62 studentene som tok spørreundersøkelsen mente 52 av dem at $0.999\ldots$ var mindre enn 1. Bare 3 studenter mente at $0.999\ldots$ hvorav én av dem argumenterer for det formelt matematisk. Studentene viste i argumentene sine ulike oppfatninger av tallene $0.999\ldots$ og 1. I intervjuene kom det frem at disse oppfatningene var veldig sammensatte.

Flere av studentene hadde oppfatninger av grenseverdibegrepet som kartlagt i Davis & Vinner (1986), mens andre hadde mer uforventede oppfatninger. I hovedsak var det tre ulike oppfatninger som dominerte.

Den ene var oppfatningen av at en grenseverdi er uoppnåelig. Samtlige studenter argumenterte med at det manglet et liten bit for at $0.999\ldots$ skal bli lik 1, eller at $0.999\ldots$ kommer nærmere og nærmere 1 men vil aldri nå dit.

Et annet syn på tallene $0.999\ldots$ og 1 involverte approksimasjonsargumenter. Disse argumentene varierte. Noen argumenterte med approksimasjon at tallene var like. Det finnes en differanse mellom de to tallene men den er så ubetydelig liten at man kan se bort fra det. Andre argumenterte motsatt. Differansen er veldig liten, men siden den eksisterer kan man ikke si at tallene er like.

Det mest dominerende argumentet var at $0.999\ldots < 1$ fordi $0 < 1$. Studentene som argumenterte slik brukte mest sannsynligvis prosedyrer for sammenlikning av desimaltall.

Grunnen til samtlige av disse oppfatningene kan være at studentene forstår $0.999\ldots$ som en prosess i stedet for et matematisk objekt. Oppfatningen av uoppnåelighet og argumentasjon med desimalsammenlikning kan forklares hvis studentene har dette nivået av forståelse. Bruk av approksimasjonsargumenter kan bunne ut i fysiske og konkrete erfaringer, enten det er i eget opplevd yrkesliv eller fra sin egen skolegang. Språket man bruker når man snakker om grenseverdier kan også være avgjørende for ulike oppfatninger man danner seg. Uttrykk som ”beveger seg mot” eller ”kommer nærmere og nærmere” kan lede til oppfatninger om at konstante tallfølger ikke har en grenseverdi. Ord som ”grense” har også en hverdagslig betydning som er forskjellig fra ordets matematiske betydning og kan også bidra til å forme studentenes begrepsbilde.

Det kan være vanskelig å si basert på bare spørreundersøkelsene om hvordan studentene forstår grenseverdibegrepet. Det er mulig at flere av de ikke har blitt formelt introdusert til begrepet. Til tross for dette underligger grenseverdibegrepet problemstillingen og studenters tanker rundt identiteten $0.999\ldots = 1$ kan gi oss innsikt i deres begrepsbilde for grenseverdier.

6.2 Didaktiske implikasjoner

Målet med denne oppgaven har vært å kartlegge oppfatninger og prøve å beskrive hvordan studenter forstår grenseverdibegrepet. Denne oppgaven har ikke hatt som hensikt å forbedre studentenes forståelse eller å utvide deres begrepsbilde på noen måte. Tidligere forskning har hatt fokus på dette med varierene grad av suksess (Davis & Vinner, 1986; D. Tall & Vinner, 1981; Monaghan, 1991; Williams, 1991). Nyligere studier (Cory & Garofalo, 2011) har hatt noe mer suksess ved å bruke digitale hjelpemidler til å øke forståelse av grenseverdibegrepet.

Ved å ha kartlagt studenters ulike begrepsbilder av grenseverdier kunne det videre ha vært interessant å se på andre begreper som kan være vanskelige å forstå. Mulige begreper kan være kontinuitet, grenseverdi i forhold til funksjoner, derivasjon/integrasjon m.fl.

Når man er klar over hvilke ulike oppfatninger som kan finnes hos studenter om et tema, vil jeg påstå at man vil få en fordel i å undervise om temaet. Ved å forstå hvordan begrepsbilder til enkeltelever blir til, og hvilke oppfatninger det består av, vil man kunne tilpasse undervisningen sin til den personen. Man vil også kunne peke på styrker og svakheter til hver enkelt oppfatning og derfor bevisstgjøre elevene på dette.

6.3 Egenrefleksjon

Gjennom å ha arbeidet med denne oppgaven har jeg ikke bare blitt bevisst på ulike oppfatninger av grenseverdier hos andre, men også hos meg selv. Som lærerstudent kjenner jeg meg igjen i mange av oppfatningene som studentene uttrykker. Det kan være oppfatninger som jeg er klar over at jeg en gang hadde, eller det kan være oppfatninger som jeg fortsatt har. Man kan si at mitt eget begrepsbilde av grenseverdier har utvidet seg i løpet av arbeidet med denne oppgaven.

Det er diverse ting jeg muligens ville ha gjort annerledes hvis jeg skulle ha gjort dette igjen. Jeg ville blant annet ha gitt spørreskjemaene i motsatt rekkefølge, muligens til en annen klasse. Det kunne ha vært interessant å se om resultatene hadde blitt annerledes. En annen ting jeg skulle ha ønsket og gjort var å intervjue flere studenter. Mesteparten av oppfatningene kom frem gjennom de kvalitative intervjuene og med flere intevjudeltakere kunne datamaterialet muligens blir mer variert samtidig som at jeg selv ville fått mer trening i å utføre intervjuer. Siden deltakelse på intervju var frivillig, og arbeidsperioden med denne oppgaven var kort, lot det seg ikke gjøre.

Referanser

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5. utg.). Oxford University Press.

Burn, R.P. (2015). *Numbers and functions : Steps into analysis* (3. utg.). Cambridge: Cambridge University Press.

Cory, B.L. & Garofalo, J. (2011). Using dynamic sketches to enhance preservice secondary mathematics teachers' understanding of limits of sequences. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(1), 65–96.

Date-Huxtable, E., Cavanagh, M., Coady, C. & Easey, M. (2018, 01. Dec). Conceptualisations of infinity by primary pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(4), 545–567. Hentet fra `https://doi.org/10.1007/s13394-018-0243-9` doi: 10.1007/s13394-018-0243-9

Davis, R.B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*(3), 281–303.

Dovland, O. & Pettersen, P. (2018). *Begreper i analyse* (Foreløpig utgave 2018 utg.). Bergen: utgis på Fagbokforlaget 2019.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M.A. & Brown, A. (2005a, 01. Mar). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335–359. Hentet fra https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z doi: 10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A. & Brown, A. (2005b, 01. Oct). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253. Hentet fra https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0 doi: 10.1007/s10649-005-0473-0

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20–24.

Reinholdtsen, L. (2016). Lærerstudenters oppfatninger om 0.999... I E.K.H. og Bodil Kleve (red.), *Undervisningskunnskap i matematikk* (s. 137-160). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Roulston, K., deMarrais, K. & Lewis, J.B. (2003). Learning to interview in the social sciences. *Qualitative Inquiry*, *9*(4), 643-668. Hentet fra https://doi.org/10.1177/1077800403252736 doi: 10.1177/1077800403252736

Stapel, E. (u.d.). *How can 0.999... = 1?* Hentet 22. mars 2019 fra https://www.purplemath.com/modules/howcan1.htm

Szydlik, J.E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 258–276.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Tall, D.O. & Schwarzenberger, R.L.E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44–49.

Utdanningsdirektoratet. (2019a). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/

Kompetansemaal/kompetansemal-etter-1t---vg1-studieforebuande-utdanningsprogram

Utdanningsdirektoratet. (2019c). *Læreplan i matematikk for realfag-programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01).* Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-r1

Wellington, J. (2015). *Educational research: Contemporary issues and practical approaches* (2. utg.). Bloomsbury Academic.

Williams, S.R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219–236.

Yopp, D.A., Burroughs, E.A. & Lindaman, B.J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999... =1. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 304 - 318. Hentet fra http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S073231231100037X doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.007

Tillegg A

Vedlegg

NSD Personvern
29.01.2019 11:10

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 790513 er nå vurdert av NSD.

Følgende vurdering er gitt:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 29.01.2019. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.05.2019.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Dersom du benytter en databehandler i prosjektet må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Tallene 0.999… og 1.
Matematikklærerstudenters forståelse av grenseverdier»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å få en bedre innsikt i matematikklærerstudenters forståelse av grenseverdier. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Gjennom denne oppgaven vil jeg prøve å besvare **hva matematikklærerstudenter tenker om grenseverdier? Hva slags oppfatninger og eventuelle misoppfatninger finnes det?**

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Agder

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi du er matematikklærerstudent og inngår derfor i målgruppen til denne oppgaven.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du fyller ut et spørreskjema. Det vil ta deg ca. 20-30 minutter. Spørreskjemaet inneholder spørsmål om grenseverdier. Dine svar fra spørreskjemaet vil bli behandlet manuelt.

Du vil også kunne bli spurt om å delta i et personlig intervju slik at det kan samles mer spesifikk data. Et slikt intervju vil typisk ta 20-30 minutter og det vil bli tatt lydopptak.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Bare jeg, Fredrik Pettersen, skriver av oppgaven vil ha tilgang til innsamlet data.
- Alle svar vil bli anonymisert og vil ikke kunne gjenkjennes.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. mai 2019. Lydopptak vil da bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og

- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Agder har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Agder ved Fredrik Pettersen (fredrp14@uia.no), eller ved veileder Olav Kristian Gunnarson Dovland, (olav.nygaard@uia.no)
- Vårt personvernombud: Ina Danielsen (ina.danielsen@uia.no)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Olav Kristian Gunnarson Dovland	Fredrik Pettersen
Prosjektansvarlig (Forsker/veileder)	Eventuelt student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *(sett inn tittel)*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i spørreundersøkelsen
☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. *(oppgi tidspunkt)*

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Intervjuguide

Før intervjuet

- Small talk
- Informere om temaet for intervjuet. At intervjuet handler om å få innsikt i intervjukandidatens forståelse av grenseverdier og at spørsmål vil basere seg i stor grad i spørreundersøkelse utført i forkant av intervju.
- Informere om lydopptak, sørge for samtykke, samt informere om at all data vil bli anonymisert.

Intervjuspørsmål

- Start lydopptak
- Hva slags erfaringer har du med dette temaet, grenseverdier?
  - Hvilken matematikkbakgrunn har du? (fag fra VGS, emner tatt ved Universitet)
- Spørsmål 1 fra Spørreundersøkelse: Kryss av for hva som er riktig i forhold til tallene 0,999… og 1?
  - Spør oppfølgingsspørsmål for å få klarhet i hva intervjukandidaten mener.
- Spørsmål 2 fra Spørreundersøkelse: Kryss av for hva som er riktig i forhold til tallene 0,333… og 1/3?
  - Spør oppfølgingsspørsmål for å få klarhet i hva intervjukandidaten mener.

Er du kjent med eller har vært borte i begrepene tallfølger? Grenseverdi? Konvergens?

- Spørsmål 2 c): Har tallfølget 0,0.3,0.33,0.333,… en grenseverdi?
  - **Hvis ja:** Hva er en mulig kandidat for denne verdien? Hvorfor det?
  - **Hvis nei:** Hvorfor tenker du at den ikke har en grenseverdi?
- Spørsmål 2 d): Har tallfølget 5,5,5,5,… en grenseverdi?
  - **Hvis ja:** Hva er en mulig kandidat for denne verdien? Hvorfor det?
  - **Hvis nei:** Hvorfor tenker du at den ikke har en grenseverdi?
- Hvordan ville du definert hva en grenseverdi er?
  - Spør oppfølgingsspørsmål for å få klarhet i hva intervjuobjektet mener.

Avslutningsvis

- Spør om det er noe intervjuobjektet vil legge til.
- Stopp lydopptak

Spørsmål om desimaltall

Svarene på disse spørsmålene vil bli brukt som datagrunnlag til masteroppgave. Det ønskes også at noen kandidater stiller opp til intervju på ca. 20-30 minutter. Kryss av hvis du kunne tenke deg å hjelpe med å stille opp til intervju. Ja ☐ Nei ☐

Med $0.999\ldots$ menes tallet med uendelig mange 9-tall som desimaler.

1. Kryss av for hva du mener er riktig:

   ☐ $0.999\ldots$ er mindre enn 1

   ☐ $0.999\ldots$ er lik 1

   ☐ $0.999\ldots$ er lik 0.999

   ☐ $0.999\ldots$ er større enn 1

   ☐ Ingen av påstandene ovenfor er sanne.

2. Begrunn svaret ditt i spørsmål 1.

Spørsmål om desimaltall

Svarene på disse spørsmålene vil bli brukt som datagrunnlag til masteroppgave. Det ønskes også at noen kandidater stiller opp til intervju på ca. 20-30 minutter. Kryss av hvis du kunne tenke deg å hjelpe med å stille opp til intervju. Ja ☐ Nei ☐

Med 0.333... menes tallet med uendelig mange 3-tall som desimaler.

1. Kryss av for hva du mener er riktig:

   ☐ 0.333... er mindre enn $\frac{1}{3}$

   ☐ 0.333... er lik $\frac{1}{3}$

   ☐ 0.333... er lik 0.333

   ☐ 0.333... er større enn $\frac{1}{3}$

   ☐ Ingen av påstandene ovenfor er sanne.

2. Begrunn svaret ditt i spørsmål 1.

Besvarelser fra spørreundersøkelsen

1. 0.999 er mindre enn 1
   $0.1_{\to \text{minst}}, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1_{\to \text{størst}}$
   0.999 er lik 0.999 fordi det er helt like tall
   I butikken runder vi 0.9 til 1, så hvis du handler mat runder matbutikken av, og 0.9 blir. Men det er ikke lik 1

   $\frac{1}{3} = 0,3 \quad \frac{1}{3} = 0,33$
   0.333 er også lik 0.333
   $\left.\begin{array}{l} 0,333 \\ 0,333 \end{array}\right\} \text{ helt like}$

2. 0 er mindre enn 1, og alle tall bak komma har andre verdier enn de før. Så uansett hvor høyt tall bak komma vil (0, noe) være mindre enn 1.

   Jeg ser på brøkstreken som et deletegn og $1 : 3 = 0,333\ldots$ derfor er $0.333\ldots = \frac{1}{3}$

3. $0.999\ldots$ med uendelig mange 9-tall som desimal er mindre enn 1 da det mangler 1 $n$te-del for å komme opp til 1
   Det er mindre enn 1, men veldig nært

   Om man deler 1 på 3 får man $0.333\ldots$ med uendelig mange 3-tall som desimaler.
   Tallet vil aldri gå opp.

4. $1000 > 999 \quad \text{og} \quad 0,999 + 0,001 = 1$
   $x =$ antall siffer
   om $x = 4$ får vi, $0,9999 + 0,0001$
   som til sammen er 1
   (Hvordan formelen blir skjønner jeg ikke)

   $1 : 3 = 0,3333\ldots$

5. det er mindre enn 1, det er heler ikke større.
   det er ikke det samme som 1.
   grunnen til at jeg valgte det jeg valgte er at det er det eneste som er rett
   $0,999$ og $0,99999999\dots$ er forskjellig da den første sier $0,99900000$, altså mindre. ikke mye mindre, men mindre.

   å dele 1 på 3 går hvis du lager mange desimaler: $0,33333\dots$ dette fordi tall linja er delt opp i uendeligt mange tiere. da vil svaret bli derom
   Litt dårlig forklart.

6. Så lenge det er $0,\dots$ så vil det uansett være mindre enn 1, selv om man kan skrive $0,999\dots$

   $\frac{1}{3}$ er 1 delt på tre, altså $0,333\dots$
   Det er også uendelig. Ergo $0,333\dots = \frac{1}{3}$

7. tallet $0,999\dots$, betyr at det er mindre enn 1 for det er ikke oppgitt et helt tall og det første sifferet er 0. Når det første sifferet er 0, vil det si at det ligger i mellom 0 og 1 hvis ikke tallet er "0,0".
   $0,999\dots$ er ikke lik $0,999$ fordi $0,999\dots$ har flere desimaler

   Det er ikke lik, fordi tallet går ikke opp. $0,333\dots+0,333+0,333 = 0,999 \rightarrow$ mindre enn 1

8. Det er mindre enn 1 fordi ... betyr at det fortsetter i samme mønster altså med sifferet 9 flere ganger og ikke blir rundet opp.
   $0,x < 1$
   $0,999\dots \neq 0,999$ fordi det ville blitt rundet opp til 1

   $\frac{1}{3} > \frac{33}{100} \rightarrow \frac{33}{99} > \frac{33}{100}$
   $0,33333\dots \approx \frac{33}{100}$

9. $0,999$ er mindre enn 1. Grunnen til det er plasseringen av sifrene. Tidelsplassen har lavere verdi enn enerplassen, så uansett hvor høyt siffer det står på tidelsplassen, vil verdien være lavere enn tallet på enerplassen, med mindre tallet er 0.
   $0,999 > 0,000$
   $0,999 > 1,000$

   10 delt på 3 er $3,333$
   1 delt på 3 er derfor $0,333$
   Desimaltallene går uendelig, så $\frac{1}{3}$ blir ikke større eller mindre enn $0,33$

10. $0,999$ er mindre enn 1 fordi det er en 0 foran komma.
    $0,999$ er lik $0,999$ fordi det er et helt likt tall

    $\frac{1}{3} = 0,333$

11. $9,999\ldots$ er tilnærmet lik 1, og i praksis er det umulig å skille mellom 0,999 og 1.
    Forskjellen mellom $0,999\ldots$ og 1 er så marginal at jeg ikke vil kalle det for en forskjell.

    $0,333\ldots$ er det mest nøyaktige desimaltallet vi kan bruke for å beskrive $\frac{1}{3}$, altså er $0,333\ldots = \frac{1}{3}$

12. Selv om det er uendelig mange 9-tall, er det fortsatt mindre enn 1, siden det er $\underline{0},999\ldots \quad$ 0 på enerplassen.

    $\frac{1}{3}$ i desimaltall er $0,333\ldots$, man vil aldri få et tall, bare uendelig med 3-tall hvis man tar $\frac{1}{3}$

13. Uansett hvor mange 9-tall du setter på vil $0,999\ldots$ være mindre enn 1 fordi 0, som står på enerplassen er mindre enn tallet 1.

    Fordi $\frac{1}{3}$ i desimaltall er $0,333\ldots$

14. Det går an å runde av, slik at $0,999 \approx 1,0$, men $0,999\ldots$ vil alltid være mindre enn 1.
    Det er fordi 1 står på ener-plassen og $0,\underline{9}99$ står på tidelsplassen.

    Når man deler 1 på 3 vil svare bli $0,3333\ldots$
    dermed vil det være det samme.

15. $1,000 = 1$ altså en hel
    $0,999\ldots =$ mindre enn 1, altså mindre enn en hel
    $0,999\ldots > 0,999$ fordi de fortsetter
    altså $0,9999 > 0,9990$

    $\frac{1}{3}$ betyr at du deler en hel i tre like store deler. $0,333\ldots + 0,333\ldots + 0,333\ldots = 0,999\ldots$, og det er fortsatt ikke en hel.

16. Fordi $(\ldots)$ betyr fortsettelse av 9-tallet som en desimal.
    Tallet vil derfor aldri komme opp på 1-er plassen.
    Og tallet er derfor mindre enn 1.

    [*Uleselig*]

17. 0,999 er mindre enn 1 på grunn av at sifrene "999er plassert bak komma.
    Altså handler det om hvilken plass de står på.

    $1:3 = 0,3333\ldots$
    1 dele på tre gir svaret 0,333, som betyr at $\frac{1}{3}$ er lik 0,333.

18. Fordi det i 0,999, mandler 0,001 for å få 1.
    $1000 > 999$
    $0,999 + 0,001 = 1$

    Fordi $\frac{1}{3} = 33\%$, som kan omregnes til $0,33\ldots$

19. 0,999 er mindre enn et fordi tallene står bak komma. Derfor kan vi se at det er et desimaltall.

    Når du deler 100:3 blir svaret $0,333\ldots$
    Dette viser at det er en 3del

20. $0,999\ldots$ er mindre enn 1 fordi med et uendelig antall 9-tall som desimaler vil det aldri nå helt opp til 1 med mindre man avrunder.
    $0,999\ldots$ er heller ikke lik 0,999, da ... tilsier at desimalene fortsetter, og ikke stopper etter tre 9-tall.

    $0,333\ldots$ er lik $\frac{1}{3}$, da du får et uendelig antall 3-tall som desimaler ved å dele $\frac{1}{3}$

21. $0,999\ldots$ vil alltid være mindre enn 1, uansett hvor mange desimaler som brukes.
    Dersom man runder opp/ned vil $0,999\ldots$ være lik 1 eller 0,999, men det kommer an på hvor nøyaktig man skal være.

    $\frac{1}{3}$ er $0,333\ldots$
    0,333 vil ikke være det samme hvis man skal være helt nøyaktig, men dersom det er greit"å runde av, vil 0,333 være tilnærmet likt $0,333\ldots$

22. $0,999\ldots$ er mindre enn 1 uansett hvor mange desimaler det er etter komma. Det er tilnærmet lik 1, men ikke lik 1.

    Dele 1 på 3, da får man $0,333\ldots$
    $0,333\ldots = \frac{1}{3}$

23. 0,999 er mindre en 1. Når det er evig 9 tall, kan det aldri bli 1.

    $0,\overline{333} + 0,\overline{333} + 0,\overline{333} = 1$
    $\frac{1}{3} = 0,\overline{333} + 0,\overline{333} + 0,\overline{333}$

24. Uansett hvor stort tallet er bak (0,), vil det være mindre enn 1, og det er heller ikke likt 0,999 for der vil det være uandelig med 0 bak.

    Hvis man deler 1 på 3 vil man få uandelig med $0,333\ldots$ og det er $\frac{1}{3}$

25. Tallet vil uansett være lavere enn 1.

    1 delt på 3 blir $0,3333\ldots$
    $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$

26. Tallet $0,999\ldots$ har jeg begrunnet som et tall mindre enn 1. Fordi tallet 1 uten bruk av andre tegn kan forklares som en ener. I tallet 0,999 er det null enere, men det er 9 tideler, 9 hundredeler, og 9 tusendeler, det er defor mindre enn 1. Samtidig blir ikke 0,999 satt til å være en bestemt mengde tall, siden ... betyr fortsettelse og tallet kan da være uendelig. Men en ting som er sikkert er at tallet uansett ikke overstiger 1.

    $\frac{1}{3}$ går ikke opp til å bli hele desimaltall, derfor fortsetter rekka uendelig gjennom $0,333\ldots$

27. Tallet består av en null på enerplassen og har ingen tall andre tall på plassene over enerplassen. Da blir aldri tallet høyere enn 1 selv om tallet bak komma går mot uendelig.

    $\frac{1}{3}$ ganger 3 er lik 1 hel
    $0,333\ldots$ ganger 3 er lik $0,999\ldots$ som ikke vil bli en hel uansett hvor mange 9 tall en vil få bak komma.

28. Tallet $0,999\ldots$ er
- ikke større enn 1 fordi det vil aldri nå helt opp til tallet 1. Desimalene fortsetter og vi nærmer oss tallet 1, men vil aldri nå tallet eller gå over.
- ikke lik 1 pga. overnevnte resonnement
- ikke like 0,999 fordi tallet $0,999\ldots$ er større fordi det får med seg flere desimaler som øker verdien kontinuerlig
- mindre enn 1 fordi det nærmer seg hele tiden verdien 1, men vil aldri krysse den magiske grensen

Deler $\frac{1}{3}$ opp i tall $\rightarrow\ 0,333\ldots$

29. Uansett hvor mange desimaler som blir satt bak, vil det aldri bli lik 1 eller er. Tallet er mindre enn 1.

$x = 0,333\bar{3}$
$10x = 3,33\bar{3}$
$10x = 3 + 0,33\bar{3}$
$10x = 3 + x$
$10x - x = 3$
$\frac{9x}{9} = \frac{3}{9}$
$x = \frac{1}{3}$

30. fordi $0,999\ldots$ kommer før 1 i tallrekka.
dermed er $0,999\ldots$ mindre enn 1

dersom du deler 1 på 3 blir svaret $0,333\ldots$

31. Det er mindre enn 1 fordi det ikke har noen tall på enerplassen eller høyere.

Fordi det er $\frac{1}{3}$

32. Er mindre enn 1 fordi du kan plusse på et veldig lite tall og så få 1.

Når du skal finne $\frac{1}{3}$ av 1 vil det bli $0,333\ldots$ fordi det er ikke mulig og finne et helt for det $\left(\frac{1}{3}\right)$ og det nærmeste vil bli $0,333\ldots$

33. Det er mindre enn 1 fordi tallet før komma, tallet på enerplassen, er mindre enn 1, det vil si at det ikke har blitt 1 enda. Tallet på enerplassen er 0.

    $0,333\ldots$ er mindre enn $\frac{1}{3}$ pga. $333\ldots+333\ldots+333\ldots$ blir $999\ldots$, som blir $0,999\ldots$ og er mindre enn en hel.

34. $0,999\ldots$ er forskjellig fra 1.
    Tallet er mindre enn 1 fordi det er $\underline{0},99\ldots$ som er mindre enn 1 uansett hva som står bak komma.

    $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333\ldots$
    $\frac{1}{3}$ vil få uendelig mange 3-tall som desimaler, og er derfor det samme som $0,333\ldots$

35. Men tanken på at $0 < 1$, vil dermed også tallet ovenfor være mindre enn 1. Man kan tilføre så mange desimaltall man vil, men tallet blir aldri 1. Man kan godt tenke seg at $0,999 \approx 1$, men siden svarene ikke spurte om $0,999\ldots$ er tilnærmet lik 1, så vil jeg bare sette kryss på det som er riktig. Altså det første svaret.

    Dersom vi ser på $\frac{1}{3}$, så vil $0,333\ldots$ komme så nærme som mulig, men aldri treffe. Akkurat som forrige oppg.ark. Så her vil jeg også si at det blir ukorrekt dersom vi sier at $0,333\ldots = 0,3$ men egentlig bør være $0,333\ldots \approx 0,333$

36. Hadde $0,999\ldots$ vært lik 1 hadde det stårr slik $1 = 1$. Hadde $0,999\ldots$ vært lik 0,999 hadde det stått 0,999 = 0,999. Hadde $0,999\ldots$ vært større enn 1 hadde det stått 1 på enerplassen.
    Dermed er $0,999\ldots < 1$ fordi det er den eneste sanne løsningen. Det er sant fordi det er et desimaltall med 0 enere.

    Fordi $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$
    Det er fordi at $\frac{1}{3}$ består av uendelig mange 3 tall etter komma. Dermed ikke mindre enn $\frac{1}{3}$, ikke lik 0,333 som stopper der og ikke større enn $\frac{1}{3}$

37. Tallet 0,999 som er et desimaltall vil være mindre enn 1 som står på tier-plassen i vårt tallsystem som utgjør et helt tall. Uansett hvor mange 9 ere som legges til i desimaltallet 0,999 avgjør kommaet at det fremdeles er og vil være mindre enn det hele tallet 1.

    0,333 som desimaltall er det samme som $\frac{1}{3}$ skrevet som brøk.
    0,333 kan også anses å være lik $0,333\ldots$, men sistnevnte er skrevet opp som et tall med påfølgende rekke av uendelige mange 3-tall som desimaler.

38. Tallet er veldig nærme 1. Men ikke nærme nok tilå ha same verdi som 1 eller være større enn 1.

    Fordi $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$

39. Kommer an på om man skal/vil runde av.

    Det vil aldri bli helt riktig
    Kan ta så mange 3 tall bak komma man vil, men vil fortsatt ikke bli helt 100% riktig.

40. Tallet 0,999 er mindre enn 1 fordi tallet forran komma er 0 og derfor mindre enn 1.

    $1 : 3 = 0,333\ldots$
    $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ fordi når du deler 1 på 3 vil det være mindre en 0,4 og mere enn 0,2

41. Tallet $0,999\ldots$ er mindre enn 1, ettersom det er et desimaltall som aldri vil bli 1,0 uansett hvor mange 9-tall som er bak.
    Alt. 2 er ikke riktig for $0,999\ldots \neq 1,0$
    Alt. 3 er ikke riktig for $0,999\ldots$ har flere enn 3 nitall bak komma

    Fordi $\frac{10}{3} = 3,333\ldots$ altså $\frac{1}{3}$

42. Tallet $0,999\ldots$ er mindre enn 1. Det vil aldri bli 1,0 uansett hvor mange desimaler vi skriver.

    Fordi $1:3$ blir $0,333\ldots$

43. $0,999\ldots \neq 1$
    $0,999\ldots$ er uendelig likt 1
    Det er en uendelig liten forskjell mellom $0,999\ldots$ og 1

    $1:3 = \frac{1}{3} = 0,333\ldots$
    Kommer ikke på noe begrunnelse, tenker at det er opplagt
    $0,333\ldots \cdot 3 = 1$
    $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

44. 0,99 er lik 1 fordi i $0,999\ldots$ så blir det 9 uendelig og det er umulig å si hvilket tall du må addere for å få 1. Derfor runder man opp til 1.

    $0,333\ldots$ er lik $\frac{1}{3}$ fordi $1:3 = 0,333\ldots$

45. Dersom $0,9999\ldots$ går uendelig vil vi ha en asymtote på 1. Dvs. den nærmer seg men vil aldri nå tallet 1. Dersom $0,99999\ldots$ er ≈ 1 men matematisk er det ikke det samme uansett hvor mange desimaler som er bak vil det alltid mangle ett tilsvarende tall $0,00000\ldots 1$
    Litt samme som ideen når man deler en brøk i 2 og 2 i uendeligheten vil det alltid være noe igjen.

    F.eks. En pizza med 10 stykker delt på 3 personer.
    Hver av dem vil få 3 hver og siste stykket må igjen deles i tre. Denne prosessen vil gjentas i det uendelige.

46. $0,999\ldots$ er mindre enn 1 fordi alle tallene står etter komma, altså det <u>mangler</u> noe for å bli lik eller større enn 1.

    $0,333\ldots = \frac{1}{3}$ fordi $\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{3}{3}$
    $0,333\ldots$ tilsvarer brøken $\frac{1}{3}$ og da må de også være like.

47. $0,999\ldots$ er mindre enn en. Hjelper ikke med flere tall bak komma. $0,999\ldots$ er større enn 0,999. Fordi neste tallet på 0,999 vil være 0 og ikke 9.

$\frac{1}{3}$ vil også være 0,3 med flere desimaler. Men $\frac{1}{3}$ har desimaler som er høyere enn 3.

48. Fordi $0,999\ldots$ kan aldri bli 1.

Hvis du deler $\frac{1}{3}$ vil du også få uendelig mange 3ere. Derfor er de like.

49. $0,999\ldots$ er mindre enn 1. 1 kan skrives som 1,000 og er et helt tall.

$\frac{1}{3}$ blir også $0,333\ldots$ med uendelig mange 3-tall.

50. $0,999\ldots$ er mindre enn 1, men større enn 0,999. Da dette tallet er avrundet. Det vil altså si at $0,999\ldots$ har uendelig mange 9-tall som desimaler. Tallet er heller ikke likt som 1 eller større enn 1, da det er et desimaltall og ikke en hel ener.

Fordi $\frac{1}{3}$ er det samme som $\frac{3}{10}$, som er $0,333\ldots$. Det er dessuten ikke det samme som 0,333 eller større eller mindre.

51. Jeg mener nr. er mindre enn 1 fordi det er mindre enn en hel, tallene er bak kommaet - desimaltall. Det bikker ikke over kommaet.

$[IngenSvar]$

52. Dette er et mindre tall enn 1. $0,999 < 1$
Men runder vi av er den lik 1. ≈ 1

$[IngenSvar]$

53. $[IngenSvar]$

$[IngenSvar]$

54. $0,999\ldots$ er mindre enn 1 fordi det består av uendelig mange 9-tall som desimaler. Det overstiger aldri 1.

$[IngenSvar]$

55. $[IngenSvar]$

$1,00 : 3 = 0,33\ldots$
$\underline{0}$
$-\,9$
$\underline{10}$
1 i rest

56. $[IngenSvar]$

Avrunde bak komma med 3 siffer.

57. $[IngenSvar]$

Dersom man gjør $\frac{1}{3}$ om til desimaltall får man $0,333\ldots$ med uendelig mange 3-tall som desimaler.

58. $[IngenSvar]$

Deler man 1 på 3 blir svare $0,333\ldots$ derfor mener jeg at $\frac{1}{3}$ er lik $0,333\ldots$

59. $[IngenSvar]$

Hvis man ganger 0,333 med 3 så vil man få et tall som er mindre enn 1, ergo så er tallet mindre enn $\frac{1}{3}$

60. $[IngenSvar]$

$\frac{1}{3}$ vil bli det samme som $0,333\ldots$

61. $[IngenSvar]$

$\frac{1}{3}$ er det samme som 1:3, som gir oss $0,333\ldots$

62. Pensum fra Begreper i Analyse.
$0.99999\ldots9 + 0.000000\ldots0 = 1$
$x + 0 = 1$
$x = 1$

$\frac{1}{3} = 0.33\ldots3$
$\frac{3}{3} = 0.999\ldots9 = 1$

Transkripsjoner

Anne

Intervjuer: Bare sånn innledningsvis, du går på … du er lærerstudent

Anne: Ja

Intervjuer: Ehm … er det sånn da at dere har egne fag som dere spesialiserer dere i, eller bare generelt alle fag.

Anne: Akkurat nå er det jo de ulike fagene vi velger, jeg har jo matte nå.

Intervjuer: Du har matte.

Anne: Ja.

Intervjuer: Bare for å få en litt sånn bakgrunn, hva slags matematikkfag har du tatt fra før av, sånn helt tilbake fra videregående?

Anne: Da hadde jeg P-matte. Tror jeg det kalles. Jeg gikk Media og kommunikasjon så det var liksom ikke den vanskeligste avanserte matten.

Intervjuer: Men 1P også 2P da?

Anne: Ja, tror det.

Intervjuer: Også på universitetet så har du … hatt litt forskjellig?

Anne: Det er jo litt forskjellig. Det er jo litt vanskeligere enn det jeg har hatt også er det liksom mye didaktikk og.

Intervjuer: Det er det du har nå?

Anne: Litt didaktikk, mye sånn forklaringer og sånn.

Intervjuer: Ja, ok. Jeg forstår det også slik at læreren har egentlig gått igjennom med dere forklaringen på denne …

Anne: Ja, veldig nøye.

Intervjuer: Ja, ok. Men det kan kanskje være litt vanskelig, men jeg vil at du skal prøve å tenke på liksom hvordan du forsto temaet før det ble forklart til deg.

Anne: Det er liksom ikke så vanskelig. Det er jo liksom alltid det at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sidene. Og hvis det ikke står et likt tall eller et regnestykke som kommer frem til et tall, så tenker jeg at jo da er det ikke samme svar. Men så har jo han gått gjennom dette her veldig grundig så jeg har jo skjønt det.

Intervjuer: Så det var det, på en måte, du tenkte her da du … her har du besvarelsen din … det var det du tenkte da du svarte at det var mindre enn 1 at på grunn av det ikke så likt ut?

Anne: Ja, både det og at jeg tenker at, ja, når det er under 0 så er det jo ikke 1.

Intervjuer: Ok. Også fikk dere en sånn oppfølgingsoppgave hvor dere skulle, på en måte … samme oppgaven da, men med 0,333…

Anne: Ja.

Intervjuer: Også en tredjedel.

Anne: Mmm.

Intervjuer: Også har du svart at det er lik en tredejdel.

Anne: Ja.

Intervjuer: Hva tenkte du der?

Anne: Der vet jeg jo at en tredjedel er 0,333 og så videre, så, det sa meg ingenting at 0,999 … var 1 da, på en måte, hvis det gir mening. Kanskje.

Intervjuer: Ja. Du sier at du visste at en tredjedel var 0,333…, det visste du fra … hvordan, på en måte, har du tilegnet deg den kunnskapen?

Anne: Gjennom erfaring. For eksempel 100/3 så er det 33,333… og da vet jeg at det fortsetter sånn. Og da vet jeg at det er en tredjedel. Så det er kanskje noe jeg bare tok for gitt, kanskje.

Intervjuer: Men det er jo, det stemmer jo at hvis du tar … Du sier at det er en delt på tre, og hvis du utfører divisjonsalgoritmen, også får du jo 0,333… men da stopper ikke den, den repeteres jo.

Anne: Mmm.

Intervjuer: Hva tenker du nå da, etter du har blitt forklart? Altså hvis du hadde fått denne oppgaven igjen da. Hva ville du ha svart da og hvordan ville du ha forklart det?

Anne: Jeg ville nok forklart at når det er, sånn som jeg skjønte det, at tall som på en måte ikke har en … eller tall som ikke er endelige, de som er uendelige. Da vil det si at jo flere desimaler du legger på, jo nærmere kommer du det hele tallet, som i dette tilfellet er 1. Det er bare sånn jeg tolker det og det synes jeg var litt dumt for det har vi jo ikke lært noe av. Ingen i klassen skjønte jo. I alle fall, tror det var en som hadde svart riktig, eller var det ikke det?

Intervjuer: Eh, det var nok to eller … to eller tre.

Anne: Ja, så alle var jo veldig forvirret.

Intervjuer: Men ikke nødvendigvis riktig forklaring.

Anne: Nei, nei, men sant og da var det liksom … Da synes jeg det er veldig merkelig at skolen har lært at, i alle fall slik som jeg tolker det at skolen har, det at er lik skal bli det samme på begge sidene, sånn tallet skal være det samme, og, ja.

Intervjuer: Ok.

Anne: Det er jo merkelig. Jeg var veldig forvirret den dagen.

Intervjuer: Jeg skjønner. Ehm, med liksom, med den forståelsen nå av det likhetstegnet, eh, hvordan ville du da forklart, eller ville du ha forklart annerledes på den oppgave 2.

Anne: Eh, ja kanskje. Fordi han viste et eksempel med en delt på tre hvor man, liksom, ganger med tre på begge sidene så blir det en hel. Så blir det 0,999… Og da så jeg tydelig at, denne her, den 0,999… oppgaven. Det ga egentlig mer mening.

… Pause …

Intervjuer: Når du har hatt matematikk før … du har kanskje ikke vørt borti dette i P-matten, men har du vært, altså er du kjent … Nei. Jeg skal si noen begreper nå, i matematikk også bare spør om du er kjent med dem.

Anne: Ok.

Intervjuer: Har du vært borti tallfølger før?

Anne: Sånn, tallrekkefølge?

Intervjuer: Ja.

Anne: Ja.

Intervjuer: Ok.

Anne: Jeg tror det.

Intervjuer: Ja, på universitetet eller på videregående?

Anne: Jeg tror begge.

Intervjuer: Ok, ehm … bare sånn for å dobbeltsjekke da, kunne du ha skrevet opp et eksempel på et tallfølge?

Anne: Tallrekkefølge, liksom?

Intervjuer: Ja, eller, det du tenker når jeg spør deg om tallfølger.

Anne: Nei, da tenker jeg liksom at det er en sammenheng mellom ting, altså dette er jo en veldig enkel en, også fortsetter den videre.

Intervjuer: Ja. Ehm, veldig fint. Hva med … altså, selve oppgaven handler jo om grenseverdier.

Anne: Mhm.

Intervjuer: Har du vært borti det i matematikken?

Anne: Nei, egentlig ikke.

Intervjuer: Ikke i det hele tatt?

Anne: Nei.

Intervjuer: Ehm, og konvergens?

Anne: Det hørtes litt kjent ut men jeg kommer ikke på hvor det er fra.

Intervjuer: Nei. Ok. Nei, jeg må bare spørre. Ehm, for det kan hende studenter er på forskjellige nivåer så jeg må bare vite om, på en måte … det er ikke vits å spørre om noe som du ikke kan, eller ikke har vært borte i.

Anne: Ja.

Intervjuer: Ehm, men det virker som at du kjenner til tallfølger da.

Anne: Mhm.

Intervjuer: Som egentlig bare er en opplisting av tall.

[Pause]

Intervjuer: Altså, læreren har jo forklart at det likhetstegnet betyr at … noe sånn som at jo flere desimaler du velger på venstre side, hvis vi setter opp 0,999… på venstre side, og sier at det er lik 1, så har vel læreren, slik som jeg forsto det da, forklart at jo flere desimaler, eller man kan komme så nærme man bare vil tallet på høyre side bare man velger mange nok …

Anne: Ja, sant, eller det vil jo på en måte aldri komme der, men på en måte jo nærmere og nærmere kommer du.

Intervjuer: Ja. Ehm … og da, altså det jeg mener med grenseverdi da …

Anne: Mhm.

Intervjuer: Ehm … at … begge disse to er jo det samme tallet, og de er grenseverdier til dette tallfølget her.

[Skriver ned tallfølget: 0, 0.9, 0.99, 0.999, …]

Intervjuer: Og så videre.

Anne: Mhm.

Intervjuer: Det er på en måte det som er blitt sagt nå, at du kan komme så nærme 1 du vil hvis du velger mange nok desimaler. Og på samme måte kan man si at jo lengre ut … altså, man kan komme så nærme 1 eller 0,999… man vil bare man går langt nok ut i den, eh, det tallfølget.

Anne: Ja.

Intervjuer: Og da kaller vi den, eh, det 1-tallet da, for grenseverdien.

Anne: Åja, ok.

Intervjuer: Ehm, jeg har noen spørsmål da, eh, men det blir mer for gøy at jeg spør. På grunn av du har jo på en måte ikke vært borti grenseverdier, eller det er jo blitt forklart nå. Men jeg vil gjerne spør om dette tallfølget her … har en grenseverdi?

[Skriver ned tallfølget: 0, 0.3, 0.33, 0.333, …]

Intervjuer: Altså 0, 0.3, 0.33, 0.333 og så videre. Har det tallfølget en grenseverdi?

Anne: Det blir jo litt som i oppgaven, blir det ikke det? At det er en tredjedel, eller en delt på tre da.

Intervjuer: Ja. Ok.

Anne: Det ville jeg i så fall ha skrevet.

Intervjuer: At en tredjedel er grenseverdien?

Anne: Mhm.

Intervjuer: Og hvis du skulle forklart det da, med ord, hvorfor er en tredjedel grenseverdien?

Anne: Hmm. Nei, eh, fordi for å finne en delt på tre så er det jo jo flere treere du legger på jo nærmere kommer du det svaret.

Intervjuer: Ok.

Anne: Fordi hvis du ganger det med tre så vil du igjen få 0,999… og det vil tilsvare en hel.

Intervjuer: Ok. Ehm, jeg har et sånn tallfølge til som jeg vil vise og spørre om det tallfølget har en grenseverdi?

[Skriver ned tallfølget 5,5,5,5,5, …]

Intervjuer: Det er altså fem, fem, fem, fem, og så videre. Dette er altså et tallfølge hvor hvert ledd, eller hvert element i tallfølget er et [uklart]. Vil du si det følget har en grenseverdi?

Anne: Ikke på samme måte som de andre. For det er jo på en måte bare ett tall, som er et heltall.

Intervjuer: Ok.

Anne: Men ja. Det er bare fem. Jeg føler ikke den har samme betydning som de andre. For det er et endelig tall.

Intervjuer: Jeg bryr meg ikke hva som er riktig eller galt, egentlig.

Anne: Nei, nei. Jeg skjønner det.

Intervjuer: Det er liksom … det er din tankeprosess som jeg er interessert i.

Anne: Ja, ja.

Intervjuer: Ok, men da har du svart der. Ok, så etter alt dette så vil jeg spør deg et siste spørsmål.

Anne: Mhm.

Intervjuer: Ehm, hvis du bare nå skulle definere hva en grenseverdi er.

Anne: Hmm, jeg tenker og når det er, slik som jeg skjønte, at hvis det er, eh, ikke-endelige tall vil det på en måte være det kan komme etter der. Sånn som, ja, i dette tilfellet der jeg trodde at 0,999… ikke var 1, men at jo flere desimaler man legger på så blir det 1, eller at det er 1 til slutt da.

Intervjuer: Ok.

Anne: [Uklart] … tallet etterpå på en måte.

Intervjuer: Ok.

Anne: Ja, som liksom ikke er en fortsettelse på det da.

Intervjuer: Ok. Så du ser for deg i det eksempel med 0,999…

Anne: Ja.

Intervjuer: Så ser du for deg at tallet 1 kommer etterpå?

Anne: Mhm.

Intervjuer: Men, hvis to tall er like, kan da, liksom, det ene kommer etter det andre?

Anne: Hva da?

Intervjuer: Altså, vi har jo nettopp, på en måte, sagt at 0,999… er det samme som 1. Men kan da 1 kommer etter 0,999… hvis det er det samme tallet?

Anne: Nei, jeg synes det er litt vanskelig. Jeg har egentlig ikke helt skjønt det, men det er nærmere og nærmere også er vel, eh, det skal jo på en måte tilsvare det tallet. Med tanke på at når man tar en tredjedel og ganger med tre … [Uklart] … da ga det mye mer mening men igjen så gir det ikke helt mening.

Intervjuer: Ok.

Anne: Jeg synes det er vanskelig.

Intervjuer: Så du føler fortsatt at det er litt forvirrende?

Anne: Mhm. Jeg synes det er veldig merkelig, men ja, det er kanskje litt sånn som jeg er lært opp til på vanlig grunnskole og videregående.

Intervjuer: Ok. Men takk. Et helt siste spørsmål som jeg må spørre på slutten og det er om du har noe å legge til?

Anne: Nei. Jeg vet ikke. Jeg synes bare merkelig at vi ikke har lært noe sånn før nå hvis det faktisk er sånn i så fall. Det er litt merkelig. At vi ikke har lært om grenseverdier i så fall. At det er en [Uklart] i så fall.

Intervjuer: Nei. Det jo faktisk pensum, i følge læreplanen da, så er ikke det pensum før på R1. At man faktisk skal da kunne definere hva grenseverdi betyr. Så det er jo ikke rart at du ikke har vært borti det, men man er jo på en måte borti det likevel for man har jo om desimaltall helt nede i, ja, barneskolen. Alle har jo vært borti det.

Anne: Ja. Vi har vel egentlig det, men da har vi alltid brukt den der tilnærmet. Den har alltid vært løsningen. Så det er på en måte å forstå forskjellen. Det er det vi ikke har helt lært, tror jeg.

Intervjuer: Vel, takk.

Roar

Intervjuer: Ok, ehm, jeg tenker først at jeg er litt interessert i hva slags matematikkbakgrunn du har fra før av, fra videregående, typisk, også hvilke emner du har tatt på universitetet.

Roar: Eh, ja. Jeg har jo … jeg hadde [Uklart] så da tok jeg P-matte, P1. Også tok jeg påbygg i fjor, som da er 2PY. Også nå har jeg introduksjonskurs i matte.

Intervjuer: Ok.

Roar: [Uklart] … naturfag og fysikk, hvis det hadde vært.

Intervjuer: Fysikk 1, da? Eller er det en annen type fysikk?

Roar: Nei, jeg vet ikke hva det går under, men det er fysikk som vi må ha for å bestå naturfagen da. Det er en del av det i alle fall.

Intervjuer: Okay, så du har hatt 1P og 2PY?

Roar: Mhm.

Intervjuer: På universitetet, har du hatt noen emner i matematikk da?

Roar: Nei, jeg har bare hatt det som jeg har nå. Introduksjonskurs

Intervjuer: Ok. Ehm, hva er det som er noen av temaene i det introduksjonskurset?

Roar: Eh, det som jeg har nå?

Intervjuer: Ja.

Roar: Eh, det er jo algebra, likninger, tallforståelse, eh, ja også er det geometri og sannsynlighet, for eksempel.

Intervjuer: Så litt av hvert?

Roar: Ja.

Intervjuer: Ehm, jeg vil spørre deg litt om det spørreskjemaet som dere svarte på i klassen. Ehm, så er det jo sånn at du nevnte jo at du har blitt forklart det av læreren.

Roar: Ja.

Intervjuer: Men jeg vil at du skal prøve å tenke på hva du tenkte før. Det står jo her hvordan du har tenkt. Det kan kanskje være litt vanskelig, men jeg vil at du skal prøve i alle fall.

Roar: Ja.

Intervjuer: Så, når du svarte her at 0,999… er mindre enn 1, hva tenkte du da? Eller hvordan, på en måte, begrunnet du at det var mindre enn 1.

Roar: Jo, jeg tenkte at det er jo uendelig med 9-tall også uansett så vil det jo alltid være en, altså en del, altså en uendelig del mindre. En X-del mindre da. For det vil jo aldri komme til 1.

Intervjuer: Ok.

Roar: Det er jo egentlig det jeg tenker, altså hvis … ja … det er så vanskelig å sette ord på det men den vil jo aldri bli 1. Den vil alltid komme nærmere 1, altså mer nøyaktig, men det vil alltid være en brøkdel mindre, eller en del mindre. Det er logisk.

Intervjuer: Ja, okay. Ehm …

Roar: Ja, jo flere 9-tall man har da så blir den mindre, altså da blir den ikke mye mindre, men den blir mindre og mindre hele veien liksom. Ja, det er vanskelig å forklare.

Intervjuer: Ja, det er jo klart at hvis man legger på flere desimaler så blir jo dette tallet mindre og mindre og mindre.

Roar: Mhm.

Intervjuer: Eller … det du legger til blir mindre og mindre, men tallet blir jo egentlig større og større.

Roar: Ja. Det blir … eh, altså … det blir mindre unøyaktig.

Intervjuer: I forhold til 1 tenker du?

Roar: I forhold til 1.

Intervjuer: Jeg skjønner.

Roar: Ja.

Intervjuer: Også, som oppfølging da til den oppgaven så ble dere presentert med denne oppgaven.

Roar: Ja.

Intervjuer: Hvor du har svart at 0,333… , altså uendelig mange desimaler, er lik en tredjedel.

Roar: Mhm.

Intervjuer: Ehm, hvordan tenkte du da, eller hvordan begrunnet du det svaret?

Roar: Det … når du tar, altså … en tredjedel, hvis du tar en delt på tre så får du 0 … da får du 0,33, altså uendelig med 3-tall. Det er ikke større. Og det er ikke mindre. Men … [Liten Pause] … ja, det er jo det jeg tenker at du har den der kunnskapen fra skolen at en delt på tre er 0,33 … altså en tredjedel er 0,333…, to tredjedeler er 0,666…, og tre tredjedeler er jo da 0,999…, men hvis ikke jeg hadde tenkt meg om så vet jeg jo at en tredjedel pluss en tredjedel pluss en tredjedel, de har fellesnevner, og er tre tredjedeler. Og tre tredjedeler er en. Det er jo fantastisk at ikke jeg har tenkt på det der og da.

Intervjuer: Så, tenkte du på det da du fikk den oppgaven?

Roar: Nei, i etterkant.

Intervjuer: I etterkant.

Roar: Fordi jeg var uenig med læreren jeg har da, men når han satte det opp på den måten da, så var jeg jo enig. Da begynte jeg jo å tvile på om det var rett [refererer til svaret i Spørreskjema 2], men problemet ligger jo i likhetstegnet.

Intervjuer: Ja.

Roar: Som jeg har fått beskjed om nå.

Intervjuer: Ja, nå som du nevner det da. At læreren har forklart deg det, hva er din forståelse av det første spørsmålet nå, men også det andre.

Roar: Altså det er jo lik 1. Det er jo lik 1.

Intervjuer: At 0,999… er lik 1?

Roar: 1, ja.

Intervjuer: Hvordan begrunner du det nå?

Roar: Det at … jeg hadde … da hadde jeg begrunnet det med at … en mening om at en tredjedel er 0,333…, og ja, en mening om at to tredjedeler er 0,666…, ja, en meninger om a tre tredjedeler er da 0,999…, ja, men tre tredjedeler er jo en hel.

Intervjuer: Ok.

Roar: Så da har du alt. Sånn hadde jeg konklu … altså sånn hadde jeg ville vist det. Og det synes jeg var litt voldsomt, at vi måtte høre på. Og det var det som var for min del og, var at, okay, her … her skjer det en kognitiv konflikt for å si det sånn. Ja.

Intervjuer: Ja. Okay. Det er interessant at du har hatt en kognitiv konflikt, som vi kaller det. Det var, på en måte, litt det som var meningen med oppgaven.

[Pause]

Intervjuer: Kan jeg spørre deg nå om, eh … jeg har noen begreper her. Matematiske begreper.

Roar: Mhm.

Intervjuer: Jeg er egentlig bare interessert om, litt først om du har vært borti noen av disse begrepene før i den matematikken du har hatt.

Roar: Ja, okay. Ja.

Intervjuer: Har du vært borti begrepet tallfølge?

Roar: Tallfølge?

Intervjuer: Ja. Eller tallrekkefølge kaller noen det.

Roar: Altså, tenker du da, for eksempel, at det er et mønster? Er det liksom det tallrekkefølge … altså hvis du har 1, 2, ja så kommer 3, men så kommer 2, 4, 6, ja da får du partall. Også 3, 5, 7. Da vet jeg.

Intervjuer: Ja, for eksempel. Det du sier nå er jo eksempler på tallfølger.

Roar: Jeg har aldri hørt om ordet tallfølge.

Intervjuer: Nei.

Roar: Men ordet i seg selv er jo, på en måte, tenker jeg, logisk. Hvis det er det du vil frem til da.

Intervjuer: Ja, altså, tallfølger er jo en liste, hvis du vil det, eller en, ja … hvor på en måte du har distinkte elementer som følger hverandre.

Roar: Vi har hatt oppgaver som er sånn … tilfeldige tall, så skal du fylle inn de tallene som mangler da, altså du skal finne mønsteret. Det har jo aldri ordet tallfølge, men jeg har … vi har hatt oppgaver der du skal finne tall da.

Intervjuer: Ja, okay.

Roar: Finne mønsteret. Finne en formel for mønsteret.

Intervjuer: Ehm, hva med … Har du vært borti begrepet grenseverdi?

Roar: Grenseverdi?

Intervjuer: Ja.

Roar: Eh, med tanke på dette faget?

Intervjuer: Ja.

Roar: Utenom det så … Jo med den 2PY-en så var det, så hadde vi om funksjoner og da må du ha en grenseverdi.

Intervjuer: Ok.

Roar: For at en funksjon skal ha … for at, hvis den er uendelig da så vil den på en måte være uendelig, men du ser innenfor et … på et tidsperspektiv da innenfor den grensen da, hvis det …

Intervjuer: Mhm, ja. Okay.

Roar: Ja.

Intervjuer: Ja, absolutt så er grenseverdi noe man kommer borti i funksjoner.

Roar: [Tegner graf] For det som vi vil vise er at den er representativ etter det, eller før det, for da blir det enda litt urealistisk.

Intervjuer: Ja, okay.

Roar: Hvis det er det da.

Intervjuer: Altså, det er vanskelig å definere grenseverdi med matematisk språk da. Det er pensum på et høyere nivå, men man er jo borti det i skolen. Helt nede i ungdomsskolen. Så dette er det underliggende begrepet her, men, altså, desimaltall som er … har uendelig mange desimaler. Eh, det underliggende begrepet er jo grenseverdi.

Roar: Ja.

Intervjuer: Ehm, men det er jo ikke før i R1, på videregående, som man faktisk skal kunne definere hva grenseverdi er. Eh, har du vært borti konvergens?

Roar: Hva kalte du det for?

Intervjuer: Konvergens.

Roar: Ikke som jeg … ikke som jeg … konvergens? Nei.

Intervjuer: Nei.

Roar: Det nærmeste vi var … holdt på å si, det som skjer nå … [Uklart] … Nei.

Intervjuer: Nei, nei. Det går helt fint. Jeg må bare spørre.

Roar: Jeg ble jo nysgjerrig på hva det er da.

[Pause]

Intervjuer: Sånn som jeg har forstått det da, at læreren deres har forklart det med likhetstegnet. Du nevnte det tidligere. Kan du huske hva han forklarte da? Dette med likhetstegn.

Roar: Det er vel at er lik betyr at jo flere desimaler du har, jo mer tilnærmet kommer du svaret. Lurer jeg på, med forbehold om feil.

Intervjuer: Okay, ehm, jeg har lyst til å spørre deg om noen … om to, på en måte, andre oppgaver, men bare for å, på en måte, forklare litt om det som læreren har forklart da, at dette likhetstegnet … 0,999… = 1. Ehm, det er jo slik at det det skal bety er at du kan kommer så nærme 1 som du bare vil, hvis du velger mange nok desimaler. Ikke sant? At hvis du kan gjøre det, så kan vi sette likhetstegn. Og hvis man har da et tallfølge som på en måte følger det mønsteret som 0,999… for eksempel.

Roar: Mhm.

Intervjuer: Så har du … første tallet er 0. Andre tallet er 0,9. Neste tallet er 0,99.

Roar: Også neste er 0,999.

Intervjuer: Ja. Også fortsetter dett tallfølget ut i det uendelige, ikke sant? Og da sier vi at det tallfølget konvergerer til 1. Det er rett og slett det konvergens betyr, at du kan komme så nærme et tall du bare vil, bare du går langt nok ut i denne … i dette følget.

Roar: Ja.

Intervjuer: Og i dette tilfellet så er det tallet 1. Og da er det grenseverdien for det følget.

Roar: Grenseverdien er 1?

Intervjuer: Ja. Ehm, så nå har jeg lyst til å spørre deg om … hvis du har et tallfølge som ser slik ut. Det er altså 0, 0.3, 0.33, 0.333 også videre. Vil du da si at dette tallfølget har en grenseverdi?

[Pause]

Roar: En grenseverdi må den jo ha uansett.

Intervjuer: Ok.

Roar: Først må vi bare finne den. Jeg tenker i alle fall det.

Intervjuer: Mhm.

[Pause]

Roar: 0,34?

Intervjuer: Ok. 0,34? Ok. Ehm, jeg har lyst til å gi deg et tallfølge til.

Roar: Ja.

Intervjuer: Ehm … kan jeg forresten spørre om hvorfor du svarer 0,34?

Roar: Altså, nieren er jo logisk fordi den blir 1, sant? Tenker jeg. 0,3 det kan ikke bli 1 plutselig. Fordi det går ikke. Og 0,333 … altså det nærmeste er bare … jeg kan ikke helt sette ord på det, men det kan ikke bli 1,3 eller 1,4, den nullen må endre uansett fordi da blir verdien for langt borte til at det er realistisk, tenker jeg.

Intervjuer: Ok.

Roar: Og 0, … altså … det er ikke 0 og det er ikke 0.3, men her da så blir det 0,33 så kan … [Pause] … nei jeg vet ikke hvordan jeg tenkte. Jeg tenker vel det at det må være noe med 3 og da går det på neste desimal og da er det … alle 3-tallene kan i verste fall ha 0,34.

Intervjuer: Ok. Så det du sier er at jo lengre ut i dette følget du går, jo nærmere 0,34 kommer man? Så hvis … hvis vi sier at dette er element nummer en, og dette er element nummer to, og så videre. Hvordan vil element nummer ti se ut? [Pause] Hvis det følger mønsteret.

Roar: Det må ha ni 3-tall da.

Intervjuer: Ja.

Roar: Altså en mindre enn … for element en har jo ingen.

Intervjuer: Ja. Så det at hvilket som helt element nummer da vil ha ett mindre 3-tall.

Roar: Ett mindre ja.

Intervjuer: Og da hvis man går langt nok ut i rekka, eller i følget, finnes det et tall som man kommer nærmere?

[Pause]

Roar: Det er sikkert 0,4. Jeg tenker at 0,4 er jo fremdeles [Uklart] for alt jeg vet. For jeg tenker … med den logikken som jeg prøver å forklare det til deg så tenker jeg at hvis den kan bli 4, så hvorfor kan ikke den heller bli 4, tenker jeg da. Er du med på den? Hvis min logikk er da at i element tre så kan den, eller så kan den andre desimalen bli 4. Da, med samme logikken, da må jo den og bli altså element to blir … da må det bli 4 da. Ehm, nei, jeg vet ikke. Pass.

Intervjuer: Det er helt greit.

Roar: Jeg må være inne på noe i alle fall.

Intervjuer: Kan jeg vise deg et følge til og spørre deg det samme spørsmålet, om følget har en grenseverdi?

Roar: Mhm.

Intervjuer: Altså, hvis du går langt nok ut i følget, blir det nærmere et eller annet.

Roar: [Uklart] … det må jo ha en grenseverdi. For det kan ikke plutselig bli 500.

Intervjuer: Nei.

Roar: Altså 0,3 da kan ikke plutselig bli 500. Så det må ha en grenseverdi. Og den grenseverdien er noe med 0,34 eller 0,4, eller noe nærme det for den kan ikke bli … [Uklart] … det må være i nærheten der.

Intervjuer: Greit. Hvis du har dette følget her da?

[Skriver]

Roar: Mhm.

Intervjuer: 5, 5, 5, 5, og så videre og si at dette følget følger det mønsteret der. Vil du si … har dette følget noen grenseverdi?

Roar: Ja.

Intervjuer: Ok. Hva tenker du … hvordan, på en måte, tenker du da?

Roar: Det kan ikke plutselig bli 6. For det er 5 som er grenseverdien. Hvis eneren er 5, toeren er 5, treeren er 5, fireren er 5, femmeren er 5 så kan det ikke plutselig bli 6 eller 10 eller noe. For det er jo ikke noe komma eller desimaltall eller noe bak, og det har du jo ikke. Som er uendelig, som jeg er vant med å se på det. Så det er bare et tall, i alle retninger. Det kan ikke bli mindre. Det kan ikke bli mer.

Intervjuer: Jeg skal ikke si om noe er riktig eller galt. Jeg er bare interessert i hvordan du tenker. Men etter alt vi har snakket om nå, så er det på en måte dette begrepet grenseverdi som underligger alt. Hvis du nå skulle, på en måte, forklare til meg da hva grenseverdi er …

Roar: Med tanke på det her?

Intervjuer: Med tanke på alt vi har snakket om. Hvordan ville du forklart grenseverdi til meg?

Roar: Grenseverdi er det høyest mulige tallet … som noe kan bli. I forhold til det, men det blir jo ikke … det blir jo litt sånn … det blir ikke generelt for en grenseverdi til en funksjon kan jo bli høyere, selv om det ikke er relevant, men den kan jo bli det. Hvis du tenker på at du får oppgaver og sånn … nei … eh …

Intervjuer: Hjelper det å tegne et bilde?

Roar: Ja, det var det jeg satt å tenkte på. Hvis du har en funksjon da. Altså vil den gå sånn som det, på en måte, sant? [Tegner en graf] Så, bestanden av fisk da, for eksempel den begynner, den går jo opp … den må jo begynne på 0. Også får de masse fisker … den begynner her også får de masse fisker. Den begynner her og de begynner med noen fisker. Også øker den, litt dårlig tegnet, men du forstår poenget.

Intervjuer: Jeg forstår poenget.

Roar: Den øker. Men så vil den jo gå … Du har en fiskebestand. Også vil den gå oppover også vil den nå et topp-punkt. Også er det en sykdom, så vil den gå ned igjen. Ehh … så er det noen få da som overlever. De er friske og alt går bra. Så vil den øke. Så til slutt vil jo den øke hele veien, så lenge du ikke vet noe annet, men det blir på en måte en urealistisk måte å se på det fordi grenseverdien for denne troverdigheten da til funksjonen på en måte.

Intervjuer: Ok.

Roar: Vil jo på en måte være innenfor her, altså innenfor et punkt. For ovenfor der vil det bare være urealistiske signinger på grunn av de ikke vil ha kapasitet til å håndtere fisken. Ja, hvis du forstår hva jeg mener?

Intervjuer: Jeg skjønner hva du mener.

Roar: Og grenseverdien for dens troverdighet, eller dens … det er der formelen faktisk fremdeles er god eller, ja, det vil jo være her.

Intervjuer: Ok.

Roar: Og det blir for enkelt å si at grenseverdien er noe et tall ikke kan bli for den kan jo bli høyere men det vil jo gå på kostnad av troverdighet eller, ja, … jeg vet ikke hvordan jeg kan si det generelt. Men grenseverdien er jo ... Jeg kommer ikke frem til noe mer korrekt enn det. Jeg vet hva jeg forstår, men …

Intervjuer: Det kan være vanskelig å uttrykke det, men det er veldig fint. Jeg har ikke noen flere spørsmål.

Roar: Nei.

Intervjuer: Annet enn å spørre deg om det er noe du vil legge til?

Roar: Nei. Jeg gleder meg til fasiten på dem etter det. Den må jeg få. Men …

Intervjuer: Ja, jeg kan forklare deg etterpå.

Roar: Ellers så har jeg ikke så mye mer egentlig. Det tyder jo på at det er noen hull en annen plass som ikke henger sammen. Eller om jeg overtenker. Eller … og på den siste her så kan det jo hende at plutselig kan grenseverdien være 6 fordi får så trodde jeg at 0,999… aldri kunne være 1. Så det finnes sikkert noe som kan overbevise meg om at grenseverdien til 5-tallene plutselig kan være noe annet. Jeg kan ikke forstå hvorfor nå, men det kunne jeg jo ikke når jeg ble forklart at 0,999… var 1. Så alt er mulig, tenker jeg. Men det er egentlig bare det jeg kan legge til.

Intervjuer: Ja, takk for det.

Gaute

Intervjuer: Før vi, på en måte, begynner å snakke om spørreskjemaene, så er jeg interessert i å vite hva slags matematikkbakgrunn du har?

Gaute: Ehh, jeg har … fra videregående har jeg vel 3 … eller R2 blir det vel nå. Også har jeg lærerskolen. Også har jeg et år i utlandet med diverse fag, litt matematisk og litt pedagogisk. Også har jeg 30 studiepoeng på sånn der etterutdanning samlingsbasert greie, som var på en måte funksjoner, derivasjon, talllære, litt sånn … litt grunnleggende. Litt sånn som Kalkulus 1 hvis man kan sammenligne.

Intervjuer: Ja.

Gaute: Også har jeg tatt etterpå den master … det er jo alle de forskjellige.

Intervjuer: Ja, altså de fagene på masternivå?

Gaute: Ja, de som ligger i den matematikkmasteren for lærere. Og det er noe kalkulus og noe abstrakt algebra og tallteori.

Intervjuer: Også nevner du jo har hatt begreper i analyse.

Gaute: Begreper i analyse ligger jo i den.

Intervjuer: Ja, da kan vi egentlig begynne med skjema nummer 1.

Gaute: Ja.

Intervjuer: Hvis du kan forklare hvordan du tenkte der?

Gaute: Ja, dette er jo egentlig bare en sånn repetisjon fra eksamen … dette lærte jeg jo i begreper i analyse.

Intervjuer: Ja.

Gaute: Og det hjalp meg litt når jeg kom til spørsmål 2 egentlig, ditt andre spørreskjema, for da kom jeg litt … jeg vet, eh, vi gikk jo gjennom dette at 0,999 med uendelig 9-tall er det samme som 1. Og det jeg tenkte nå før jeg ble påminnet litte det er da på en måte at hvis du skal plusse på noe for å få det til å bli 1, så må du plusse på 0,0000… også må du ha like mange 0-tall som det er 9-tall, også må du ha 1 til slutt. Men når det er uendelig med 9-tall så blir det også uendelig med 0-tall. Og hvis du tar 0 og plusser på et tall og får 1, så må jo det være det samme som 1. Det var det jeg tenkte da.

Intervjuer: Men så sier du at du fikk skjema nummer 2.

Gaute: Skjema nummer 2 så kom det litt tilbake det at [Uklart] Du kan jo … hvis du velger plass nummer 18, hvis du vil ha den til å kikke opp så putter du høyere enn 5 på desimal nummer 19. Da vil den rundes opp, også runder det opp hele veien bortover. Ehh, så det vil på en måte rundes … hvis du skal runde den alltid opp, hvis du skal runde den av til 1, så du kan alltid i og med at det er uendelig … det er liksom en never-ending story med 9-tall. Så jeg vil alltid bare kunne legge på et 9-tall, legge på et 9-tall. Jeg tenker … jeg satt og tenkte litt på samme måten med antall partall, naturlige tall, oddetall. Man kan alltid legge på en til. Da tenker jeg litt samme når det er uendelig mange 9-tall. Så hvis det hadde vært nitten 9-tall så det ikke det, men i og med at det er uendelig så kan man alltid … man kan alltid komme nærmere 1 på et eller annet vis. Man kan jo sammenligne med litt sånn grenseverdi-tankegang, kom jeg på nå.

Intervjuer: Nå som vi snakker om grenseverdier da … det har du vært borti før?

Gaute: Det har jeg vært borti før, ja.

Intervjuer: Eh, husker du definisjonen på grenseverdi?

Gaute: Eh, definisjon på grenseverdi? [Pause] Nei, ikke sånn rett opp av hatten.

Intervjuer: Men hvis du da skulle ha forklart for meg da hva grenseverdi er, hvordan ville du da ha forklart?

Gaute: Forklare grenseverdi? Eh, da ville jeg nok ha tenkt som brøkform. At du har, for eksempel, hvis du øker nevneren mer og mer og mer og mer, også har du alltid 1 opp hele veien, så vil jo på en måte nevneren bli så stor at den brøken vil bli ubetydelig i det lange løp.

Intervjuer: Ok.

Gaute: For … når du regner grenseverdi så prøver du å finne ut hvilke ledd som … eh, for det handler jo om x-verdier og y-verdier. Og da, hvis du setter x til å bli uendelig, ikke sant, hvis x går mot uendelig. Og hvis da x er under brøkstreken og 1 oppå brøkstreken, så vil det bli 1 delt på uendelig. Og det kan man tenke at det er lik 0 … [Uklart] … x + 1/x da vil på en måte x-en, da vil den + 1/x bli såpass ubetydelig for det er x-en på en måte som styrer hele uttrykket. Ehh, så da er det på en måte den som er … den som lager tyngden i uttrykket. For den 1 over uendelig blir så forsvinnende liten at den regner du ikke med. Det var jo ikke noen definisjon på grenseverdi dette her.

Intervjuer: Det går helt fint.

Gaute: Det er på en måte det jeg forbinder med grenseverdi. Hvis du har 2x/x + 1/x. Det er på en måte 2 som blir grenseverdien for den 1/x blir så forsvinnende liten når x går … for 2x/x det vil uansett være 2 samme hvor stor x er, så jo lengre ut du går, jo nærmere 2 vil du komme og vil alltid liksom … du kan alltid komme nærmere 2, men du vil aldri komme til 2. For du vil alltid ha den bitte lille bak der, 1 delt på uendelig. For det vil jo være noe, men du vil alltid, liksom, komme nærmere.

Intervjuer: Skjønner hva du mener. En ting som jeg lurte på var … for når du så skjema 2, kan jeg forstå det slik at du ble på en måte minnet på det beviset da, for at det må være slik? For du har skrevet her at 1/3 er 0,333… og at 3/3 må da være 0,999…

Gaute: Yes. Og det var liksom det som … for da så jeg med en gang den kombinasjonen der: 0,333… og 0,999… Og da ble jeg påminnet dette med … åja, denne brøkvarianten. For 3/3 er … det er ikke så vanskelig å forstå at det er 1, for det er tre av tre, alle tre delene. Så lenge man er enig i at 0,333… er 1/3 så, på en måte kan man bruke det … så hvis man beviser at 0,333… er lik 1/3 så har man egentlig bevist at 0,999… er 1. Det blir på en måte en følge av det.

Intervjuer: Og hvordan kunne du ha vist at 0,333… er lik 1/3?

[Pause]

Gaute: Jeg kan ikke bevise det med å bruke det der (referer til Skjema 1), eller kan jeg det? Disse, på en måte, prater jo sammen. Jeg tror kanskje, at det er lettere å vise den der egentlig (referer til Skjema 1). Men jeg er litt usikker.

Intervjuer: Ok. Men du vet at 1/3 er 0,333… på grunn av? Erfaring?

Gaute: Det er på grunn av tidligere erfaringer ja.

Intervjuer: Ja, okay.

Gaute: Det er det absolutt.

Intervjuer: Hvis du tenker at man kan se på 1/3 som en brøk, men man kan jo også se på det som et delestykke.

Gaute: Ja, en delt på tre.

Intervjuer: Og ved å bruke den divisjonsalgoritmen så vil man …

Gaute: Ja, da vil det fortsette og fortsette til det uendelige også alltid ende om med 3-tall.

Intervjuer: Riktig. Så man vil enkelt få kunne produsert 0,333… Mens i dette tilfelle, skjema nummer 1, så kan man ikke få produsert 0,999… ved å ta tre delt på tre. Det går jo ikke.

Gaute: Nei.

Intervjuer: Men likevel så viser dette, skjema nummer 2, at de må være like. Men du nevner at …

Gaute: Jeg er litt usikker på hvilken som fører til den andre.

Intervjuer: Ok.

Gaute: Om det er den som beviser den, eller den som beviser den. Kanskje begge veier. Jeg er ikke sikker.

Intervjuer: Du nevnte helt i begynnelsen, før vi begynte lydopptaket, at du egentlig ikke var helt overbevist. Kan du si noe om det?

Gaute: Ja. For når vi hadde faget så hadde jeg veldig vanskelig for å bli enig om at 0,999… er det samme som 1. For hvis det hadde vært det samme som 1 … Men det er på en måte noe med å forstå disse uendelighetene. At noe er mer uendelig enn annet. Det er også litt vrient for meg å forstå. For du har transendentale tall, eller noe sånn, som liksom er mer uendelig enn … at det er forskjellige typer uendelighet det tror jeg er liksom noe med den uendelighetsgreia som jeg ikke har helt … jeg er ikke helt overbevist inni mitt eget hodet om at uendelig er uendelig. Jeg tror kanskje det bunner litt ut i det. At det uendelighets … jeg er ikke 100 % overbevist om at det liksom er forskjellige uendeligheter. For da er det jo utrolig mange forskjellige uendeligheter. For du har disse transendentale … disse tallene der som er mer uendelig enn heltall for eksempel. Du kan alltid finne så mange heltall du vil. Og hvis det er forskjellige uendeligheter så vil jo heltall og partall være to forskjellige typer uendeligheter, i mitt hode. For jeg vet det er dobbelt så mange, men så er det ikke det. Tuller oppi hodet. Så jeg har nok ikke helt den der totale konseptuelle forståelsen. Den kan det hende at ikke er helt der. Men jeg kjøper alle argumentene som folk forklarer til meg, det gjør jeg. Jeg klarer å følge stegene og tankegangen og alt sånn, men … eh, jeg vet ikke.

Intervjuer: Men du føler at det er et eller annet som …

Gaute: Ja, det er liksom … det er likevel noe rart med dette, men det bunner sikkert ut i hvordan jeg har holdt på med matte i 20 år. Så har jeg liksom tenkt at vi runder av 0,999… til 1, fordi det er så å si det samme, men det er ikke det samme. Jeg har gjort det i 20 år også plutselig kommer noen og forteller meg at, jo, det er det samme. Det er litt sånn hvis noen sier … at du har kalt en banan en banan i 20 år også sier noen, nei vet du hva, det er et eple. Også skal du … nei. Så det er liksom det å få omvendt den … ja, tenker jeg kanskje.

Intervjuer: Nå ser vi at 0,999… er lik 1. Og det, på en måte, fører til en slags konsekvens da. For det er ikke bare 0,999… som kan være lik 1, men du har og, egentlig, alle desimaltall som slutter på uendelig 9-tall blir jo likt et eller annet endelig desimaltall. For eksempel 2,4999… blir jo lik 2,5. Hva tenker du om det? At, på en måte, slike endelige tall kan ha to representasjoner?

Gaute: Ehh, ja. Nei, jeg synes jo det er litt vrient. Det er nok den der … eh … tanken om det uendelighetsaspektet, som liksom stepper inn. Men det har jo på en måte … det er mange ting som kan være representasjoner. Det er sånn som 1, det kan jo skrives på mange forskjellige måter det og. Så akkurat det … jeg vet ikke om det er det at det er forskjellige representasjoner, men jeg tror at det er spesifikt at det er de to representasjonene. At 3/3 er 1 er helt innafor av hva jeg skjønner. Men det er på en måte når du har innenfor samme typen tall. Hvis du har to brøker som … ja, brøker, det er jo litt dumt da for der har du ½ og 2/4. Hvis du liksom skriver to forskjellige tall i brøker, 1/1 og 1/0,999… Det er på en måte når du er innenfor dette desimalsystemet for der har jeg en oppfatning, tror jeg, at det er liksom en tallinje. Så er det uendelig mange streker. Og her blir det på en måte litt for meg når du bruker dette 0,999… så er det streken rett før 1. Ikke sant? Det er kanskje der det henger litt fast. At jeg tenker at den … hvis du tar ett 9-tall til, ett 9-tall til, ett 9-tall til, så er det et eget hakk for hvert 9-tall, ikke sant? Også er det det med uendelighet inne i dette som jeg ikke klarer å bli helt overbevist om, men da … hvor starter den uendelige? For man kan jo skrive så mange 9-tall du vil, men når … hvilket er det uendelige 9-tallet?

Intervjuer: Eller finnes det i det hele tatt.

Gaute: Eller finnes det … ja, ikke sant. Men når vi nå jo snakker om uendelig så må det kanskje finnes. Det er akkurat det.

Intervjuer: Jeg har noen få spørsmål til slutt.

Gaute: Ja.

Intervjuer: Da regner jeg egentlig med at du har vært borti begreper slik som tallfølger, konvergens og grenseverdi?

Gaute: Ja. Jeg har hørt ordene i alle fall.

Intervjuer: Eh, du er kjent med tallfølger?

Gaute: Ja.

Intervjuer: Eh, hvis jeg tar også skriver opp et tallfølge nå, så vil jeg spørre deg om det tallfølget har en grenseverdi og om det konvergerer. Og hvis det gjør det så vil jeg at du skal prøve å forklare til meg hva grenseverdien er.

Gaute: Ja.

Intervjuer: Hvis du har tallfølget 0, 0.6, 0.66, 0.666 … og så videre. Så vil jeg spørre deg om dette tallfølget konvergerer. Og hvis det gjør det, har det en grenseverdi? Eller har det et tall det konvergerer til.

Gaute: Eh, det ser jo veldig ut som 2/3. Ut ifra tidligere. Så jeg ville jo tenkt at dette var noe som konvergerer mot 2/3.

Intervjuer: Ok.

Gaute: Absolutt.

Intervjuer: Fordi?

Gaute: Fordi du vil komme … for 2/3 er det samme som 0,666… uendelig. Og her ser du at du legge på et 6-tall bak komma hele veien. Og det vil si at, det er jo på en måte definisjonen av 2/3. Så da tenker jeg at den konvergerer mot 2/3.

Intervjuer: Ok. Eh, jeg har et tallfølge til. Hvis du har dette tallfølget her som består av 5, 5, 5, 5, … og så videre. Altså bare 5-tall. Konvergerer dette tallfølget? Og hvis ja, har det en grenseverdi?

Gaute: Nei. For dette her er det ingen bevegelse i. Dette vil jeg sett på som en lineær … eller, ja, det er ikke lineært, men det er …

Intervjuer: Konstant?

Gaute: Det er en konstant. Ja, for det er jo ikke noe … det beveger seg jo ingenting. Det er ikke noe bevegelse i det.

Intervjuer: Hva mener du med bevegelse?

Gaute: Bevegelse er at det kommer ikke noe nytt for hvert ledd. Det er alltid det samme. Det er liksom ikke noen endring. For når noe konvergerer mot noe, mot en grenseverdi, så er det hele tiden en endring. Du kommer nærmere, og nærmere, og nærmere noe. Mens her så er det på en måte … du står stille.

Intervjuer: Et siste tallfølge. Hvis du har 1, -1, 1, -1, 1, … og så videre. Dette tallfølget her, konvergerer det?

Gaute: Nei.

Intervjuer: Og hvis det gjør det, har det en grenseverdi.

Gaute: Dette er en alternerende, er det ikke det det heter? Jeg tror det er det det heter … alternerende tallrekke, som bare vil gå sikk-sakk. Det vil bli sånn sikk-sakk mønster hele veien. Fra 1 til -1 til 1 til -1. Litt sånn som en sagblad. Den konvergerer ikke mot noe.

Intervjuer: Fordi?

Gaute: Nei for den beveger seg ikke mot noe. Det er en konstant bevegelse. Det er alltid ned to, opp to, ned to, opp to. Og da, hvis for eksempel det hadde vært ned to, opp 1.9, ned 1.8, at den beveget seg mot 0, men her er på en måte bevegelsen konstant. For slik som den første her, så blir bevegelsen mindre og mindre, for tallet kommer ett hakk lengre bak i desimalrekka. Så den beveger seg mindre og mindre og da vil det bevege seg mot noe. Men når bevegelsen er, eller endringen er, konstant så vil det ikke endre noe på rekka uansett hvor langt ut man går, så vil det fortsatt være ned to, opp to, ned to, opp to. Uendelig langt borte.

Intervjuer: Jepp. Det var de tallfølgene jeg hadde å spørre noe om. Så helt avslutningsvis så må jeg spørre om det er noe du vil legge til?

Gaute: Nei. Det er egentlig ikke det. Jeg vet jo ikke om jeg husker alt helt riktig. Det kan jo hende jeg har sett beviser på alt dette konvergerer mot et eller annet, men det husker jeg ikke. Det er i alle fall slik jeg tenker.

Intervjuer: Ok. Fint.