S1 elevers bruk av fortegnsskjema som medierende redskap i arbeid med andregradsulikheter og polynomfunksjoner

En case-studie

IDA SYNNØVE LOHNE

VEILEDER
Martin Carlsen

Universitetet i Agder, 2019
Fakultet for teknologi realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Det har vært svært lærerikt, og også krevende å kombinere livet som småbarnsmor og mastergradsstudent. Jeg er svært takknemlig til alle som har støttet meg i prosessen. Takk til veileder Martin Carlsen for presise og nyttige tilbakemeldinger. Takk til familie og venner for oppmuntring og støtte. Og takk til elevene som er med i studien. Jeg håper jeg kan inspirere mine barn til å våge å gå i gang med prosjekter de på forhånd er usikre på om de vil klare å gjennomføre. Lyngdal, mai 2019.

Sammendrag

Dette er en studie av S1-elevers bruk av fortegnsskjema som medierende redskap. Målet med studien er å finne ut hvilke utfordringer og hvilken nytte S1-elevene har ved bruk av fortegnsskjema. For å oppnå dette har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

Hva karakteriserer fire S1-elevers bruk av fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner?

Jeg forholder meg til et sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling. Fra dette perspektivet er fortegnsskjemaet som elevene bruker å betrakte som et medierende redskap. Ifølge et sosiokulturelt perspektiv er redskaper og deres medierende funksjoner avgjørende for læring.

Som metodisk tilnærming har jeg valgt en kvalitativ forskningsstrategi. Forskningsdesignet er case-studie, og jeg har utført en inngående studie av fire S1-elever og deres bruk av fortegnsskjema. Metodene som er brukt for å samle inn data er observasjon av gruppearbeid, individuelle intervju og innsamling av elevsvar fra både gruppearbeid og intervju. Det er blitt gjort lydopptak under gruppearbeidet og intervjuene. Lydopptakene er transkribert og nøye gjennomgått.

For å videre nærme meg en analyse av forskningsspørsmålet, har jeg valgt å anvende Sfards (2007, 2008) perspektiv kalt Commognition. I dette perspektivet blir matematikk sett på som en form for diskurs, en form for kommunikasjon, skapt av ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. Ved hjelp av disse fire begrepene vil jeg beskrive hva som karakteriserer elevenes bruk av fortegnsskjema.

Det fremkom av analysen av gruppearbeidet at elevenes bruk av fortegnsskjema var preget av misvisende ordbruk og ulik begrepsbruk elevene imellom. Dette utfordret samarbeidet. Elevene hadde nytte av fortegnsskjema som visuell mediator i arbeid med andregradsulikheter. Derimot var rutinene deres for drøfting av polynomfunksjoner lite fleksible. Fra analyse av intervjuene viste en elev en større grad av individualisering av begrepet *den deriverte* og en annen elev en større grad av individualisering av rutine for drøfting av polynomfunksjoner enn det som kom frem fra gruppearbeidet.

Implikasjoner for matematikkundervisning fra denne studien er som følger: For at elevene skal bli i stand til å bruke fortegnsskjema på en hensiktsmessig måte til å drøfte polynomfunksjoner, er det avgjørende at elevene har tilegnet seg en matematisk riktig mening bak begrepet *den deriverte*. Utforskende rutiner bør etterstrebes. Ritualer kan være forgjengere for utforskninger. Fra å bruke abc-formelen som ritual til faktorisering av andregradsuttrykk, kan elevene utvikle mer fleksible rutiner.

Summary

This is a study of S1-students' use of sign-chart as a mediating tool. The aim of the study is to determine the challenges and the benefits S1-students have with the use of sign-chart. To accomplish this goal, I have formulated the following research questions:

What characterizes four S1-students' use of sign-chart in the resolution of second-degree inequalities and discussion of polynomial functions?

I relate to a sociocultural perspective on learning and development. From this perspective, the sign-chart that students use is considered a mediating tool. According to a sociocultural perspective, tools and their meditating functions are essential for learning.

As a methodical approach, I have chosen a qualitative research strategy. The research design is case study, and I have conducted an in-depth study of four S1-students and their use of sign-chart. The methods used to collect data are observation of teamwork, individual interviews and the collection of pupil responses from both group work and interview. Audio recordings have been made during the group work and interviews. The sound recordings are transcribed and carefully reviewed.

To further approach an analysis of the research question, I have chosen to apply the Sfards (2007, 2008) perspective called Commognition. In this perspective, mathematics is seen as a form of discourse, a form of communication, created by word use, visual mediators, narratives and routines. Using these four terms, I will describe what characterizes students' use of sign-chart.

It emerged from the analysis of the group's work that the pupils' use of sign form was characterized by misleading word use and different terminology among pupils. This challenged cooperation. The pupils benefited from sign form as visual mediator in working with second-degree inequalities. However, their routines for the discussion of polynomial functions where inflexible. From the analysis of the interviews, one student demonstrated a greater degree of individualization of the concept of *the derivative*, and another student a greater degree of individualization in the routine when discussing polynomial functions than what was visible from the group work.

Implications for mathematics teaching from this study are as follows: In order for students to be able to use a sign-chart appropriately to discuss polynomial functions, it is essential that pupils have acquired a mathematically correct meaning behind the concept of the derivative. Explorational routines should be strived for. Rituals can be the predecessor for explorations. From the stage of using the abc-formula as a ritual to factor second-degree polynomial, students can develop more flexible routines.

Innhold

1 Innledning

Jeg har så lenge jeg kan huske hatt en interesse for algebra. Så når jeg skulle skrive en masteroppgave visste jeg fra starten at det skulle være innenfor dette feltet. Jeg har jobbet to år som lærer i videregående skole og blant annet undervist i faget S1. S1 er koden som brukes om et matematikkfag i andre klasse på videregående skole der elevene tar mer matematikk enn det som kreves for generell studiekompetanse. I lærebøkene til S1 møter elevene redskapet fortegnsskjema. Fortegnsskjema er en måte man bruker i matematikk for å komme frem til løsninger på problemstillinger knyttet til ulikheter av andre grad og drøfting av polynomfunksjoner. Fortegnsskjema kan gi mye informasjon hvis elevene har tilstrekkelig matematisk innsikt og matematisk erfaring til å se det. Jeg har lagt merke til at elevene gjerne er usikre på bruken av dette redskapet. Dette har gjort meg nysgjerrig på hva som gjør bruken av dette redskapet utfordrende. Jeg bestemte meg for at bruk av fortegnsskjema skulle være studiens tema.

Faget S1 er et programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering og det har et omfang på 5 timer per uke. Det har fire hovedområder: algebra, funksjoner, sannsynlighet og lineær optimering. Temaene andregradsulikheter og polynomfunksjoner er sentrale i matematikk-kurset S1 og nevnes eksplisitt i to av kompetansemålene i læreplanen for faget, under hovedområdet Algebra:

> Mål for opplæringen er at eleven skal kunne
> - løse likninger, *ulikheter* og likningssystemer av første og *andre grad*, (…)

Under hovedområdet Funksjoner står det blant annet:

> Mål for opplæringen er at eleven skal kunne
> - (…), regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å *drøfte polynomfunksjoner*

(Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 7).

Jeg har kursivert de begrepene i kompetansemålene over, som er mest sentrale i denne studien. For å undersøke S1-elevers bruk av fortegnsskjema som medierende redskap i matematikk, vil jeg gjøre en case-studie av en gruppe S1-elevers arbeid med andregradsulikheter og polynomfunksjoner. Jeg har vært innom ulike formuleringer av forskningsspørsmål, både delt i to spørsmål og samlet i ett. Jeg endte opp med å samle det til ett spørsmål. Forskningsspørsmålet mitt er:

Hva karakteriserer fire S1-elevers bruk av fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner?

Jeg forholder meg til et sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling (Vygotsky, 1978, 1986 i Sfard 2008). Ut fra et sosiokulturelt perspektiv er fortegnsskjemaet som elevene bruker å betrakte som et medierende redskap. Ifølge et sosiokulturelt perspektiv er redskaper og deres medierende funksjoner avgjørende for læring. For å videre nærme meg en analyse av forskningsspørsmålet over, har jeg valgt å anvende Sfards (2007, 2008) perspektiv Commognition. Med dette perspektivet blir matematikk sett på som en form for diskurs, en form for kommunikasjon, skapt av ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. Sosiokulturell teori og perspektivet Commognition presenteres i kapittel 2. I dette kapittelet presenteres også tidligere forskning som er relevant for min studie, samt en oversikt over det matematiske innholdet i denne studien.

Som metodisk tilnærming har jeg valgt en kvalitativ forskningsstrategi. Forskningsdesignet er case-studie, og jeg har utført en inngående studie av fire S1-elever og deres bruk av fortegnsskjema. Metodene som er brukt for å samle inn data er observasjon av gruppearbeid, individuelle intervju og innsamling av elevsvar fra både gruppearbeid og intervju. Det er blitt gjort lydopptak under gruppearbeidet og intervjuene og dette er transkribert. Valg av strategi, design og metoder presenteres nærmere i kapittel 3.

Kapittel 4 inneholder analysen av dataene som er samlet inn under gruppearbeidet og intervjuene. Jeg ønsker her å presentere resultater for å besvare forskningsspørsmålet ved hjelp av begrepene fra Commognition. Det som karakteriserer elevenes bruk av fortegnsskjema beskrives ved hjelp av de fire delene som utgjør en matematisk diskurs, elevenes ordbruk, bruk av visuelle mediatorer, narrativer og rutiner.

I kapittel 5 vil jeg diskutere mine funn opp mot teori og tidligere forskning. Til slutt, i kapittel 6, ønsker jeg å si noe om hva lærere kan gjøre for å legge til rette for at elevene skal være i stand til å bruke fortegnsskjema som visuell mediator på en hensiktsmessig måte. Endelig vil jeg også komme med en egenrefleksjon rundt studien.

2 Teoretisk perspektiv og litteraturgjennomgang

I denne studien har jeg valgt et sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling. Sosiokulturell teori passer min studie fordi den legger vekt på bruken av redskaper. Fra dette perspektivet er fortegnsskjemaet som elevene bruker å betrakte som et medierende redskap. I delkapittelet 2.1 vil jeg presentere sosiokulturell teori og termen mediering. Delkapittel 2.2 omhandler rammeverket Commognition, Sfard (2007, 2008), og de fire delene som sammen utgjør en matematisk diskurs ut fra dette perspektivet, ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. I 2.3 refererer jeg til tidligere forskning som er relevant for min studie. Endelig vil jeg i 2.4 gjøre rede for den matematikken elevene arbeider med i denne studien, også ut fra læreplanens læringsmål.

2.1 Sosiokulturelt perspektiv

Vygotsky (1896 – 1934) er opphavsmannen til sosiokulturell teori. Hans teorier har hatt enorm betydning for nyere perspektiver på læring og utvikling. Sosiokulturelle perspektiver på læring legger vekt på at samspill er avgjørende for læring. Tanken utvikles gjennom deltakelse og ved å lære å ta i bruk nye redskaper. Språket vårt er det viktigste redskapet vi har. Språk og tanke kan ikke skilles fra hverandre. Vi tenker ved hjelp av språket vårt. Når vi bruker språket vårt kan vi uttrykke vår tenking, og når andre setter ord på deres tanker så får vi tilgang til deres tenking (Wittek, 2012).

Innenfor sosiokulturell teori er termen *mediering* sentral. Vi mennesker bruker ulike redskaper som er utviklet innenfor en kultur, til å utføre bestemte oppgaver. Redskapene kan mediere omverdenen for oss. De gjør det mulig å oppfatte og å kommunisere om sider ved den (Säljö, 2002). Wittek (2012) skriver at: «ressurser overføres gjennom det redskapet vi benytter» (Wittek, 2012, s. 78). Disse ressursene kan være tanker eller innvendige bilder som medieres gjennom en penn og et papir når eleven skisserer en graf. Pennen og papiret er medierende redskaper som medierer bildet eleven har av grafen i hodet. Når elevene diskuterer hvordan de skal løse en oppgave, bruker de språket som medierende redskap for å formidle tankene sine.

Redskapene kan deles i to typer, intellektuelle og fysiske. Intellektuelle redskap er eksempelvis språk og ulike typer symbolsystemer, som fortegnsskjema eller tallsystemet vårt. Vi kan bruke de intellektuelle redskapene på to nivåer, når vi kommuniserer med oss selv (tenker), og når vi kommuniserer med andre (Säljö, 2002). Fysiske redskaper kalles også artefakter, eksempler er linjal og kalkulator. Fra et sosiokulturelt ståsted skal artefakter: «ses på som menneskelige ideer og tanker (…) som er transformert til materiell form, og som er integrert i menneskelige handlinger» (Säljö, 2002, s. 38). Det at artefaktene er integrert i menneskelige handlinger gjør at intellektuelle og fysiske redskaper ikke kan skilles helt. I en linjal eller andre måleinstrument, som er artefakter, er måleenhetene, som er intellektuelle redskaper, lagt inn (Säljö, 2002). Linjalen er et fysisk redskap som kan brukes til å tegne rette streker, eller til å måle lengder. Samtidig inneholder linjalen informasjon som hvor mange millimeter det er i en centimeter og hvor lang en centimeter er.

Hva eleven lærer og presterer har stor sammenheng med hvilke muligheter og begrensninger som kjennetegner de redskapene de har tilgang til (Wittek, 2012). Fortegnsskjema oppfattes som et medierende redskap. Dersom en ikke har digitale hjelpemidler tilgjengelig, er fortegnsskjema en løsningsmetode som anbefales i lærebøker for S1 (Heir, Engeseth, Moe & Borgan, 2015; Karlson, 2014; Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl & Hals, 2013) i arbeid med andregradsulikheter og polynomfunksjoner. Jeg kommer tilbake til bruk av fortegnsskjema senere i dette kapittelet (se 2.4).

I Gade (2007) sin studie av en klasseromskultur med førsteårs videregående elever i Norge, undersøker hun hvordan redskaper mediert i matematikklasserommet bidrar til problemløsning. Hun definerer artefakter som kunstige aspekter ved kulturen som er laget for målrettet menneskelig aktivitet. Artefaktene kan deles i fysiske og intellektuelle. Hun fant at fysiske artefakter som tavlen fungerte som medierende redskap. Og ved at elevene i studien satte ord på tankene sine ble intellektuelle artefakter som språk medierende redskap i problemløsningen (Gade, 2007).

2.2 Kommognitivt perspektiv

Sfard (2007, 2008) har ut fra sosiokulturell teori utviklet perspektivet *Commognition.* Commognition kombinerer termene cognitive og communication. Begrepet er ment å omfatte tenking og kommunikasjon, og å understreke enheten i disse to prosessene (Sfard, 2008). Jeg har valgt å bruke et kommognitivt perspektiv i analysen fordi dette perspektivet tilbyr et nyttig begrepsapparat for å kunne svare på forskningsspørsmålet.

Diskurser er typene av kommunikasjon som fører noen mennesker sammen, samtidig som de ekskluderer andre. Fra et kommognitivt perspektiv blir matematikk sett på som diskurs i seg selv. Matematisk diskurs blir ikke sett på som et middel til læring, men som selve objektet som læres. Tenking og mellommenneskelig kommunikasjon blir sett på som ulike versjoner av samme fenomen. Å lære matematikk blir sett på som individualisering av matematisk diskurs, prosessen der en blir i stand til å ha matematisk kommunikasjon med andre, og også med seg selv. Å spørre hva elevene ikke har lært ennå blir ensbetydende med å spørre hvilke endringer de må gjøre i måten de kommuniserer (Sfard, 2007). Matematisk diskurs er ut fra dette perspektivet satt sammen av ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. Jeg vil videre definere disse fire begrepene.

2.2.1 Ordbruk

Ordbruk omhandler nøkkelord og meningen deres. Det er helt nødvendig å kunne bruke nøkkelord for å kunne delta i en diskurs. Sfard sier det på denne måten: «Word use is an all-importaint matter because, being tantamount to what others call ‘’word meaning,’’ it is responsible for what the user is able to say about (and thus to see in) the world» (Sfard, 2008, s. 133). Det er en dobbelthet i dette. Vi trenger nøkkelordene for å kunne se, samtidig som det er vanskelig å få tak i en mening bak ordene som en ennå ikke har sett. Det vi kan snakke om og det vi kan se, utvikler seg i takt. Mens en blir en deltaker i skolens matematiske diskurs, lærer en nye bruksområder for ord en tidligere har møtt utenfor matematikken, som for eksempel *funksjon* eller *ledd*, men en lærer også nye ord, som er unike for matematikk, som *monotoniegenskaper* (Sfard, 2007).

I arbeid med *ulikheter* møter vi ord om ulike mengder og situasjoner som er vanlige i hverdagsdiskurs. Termer som *minst, mer enn, mindre enn, lengre enn, kortere enn, eldre* eller *yngre enn*, brukes om nesten alle områder i livet (Vaiyavutjamai & Clements, 2006). For eksempel bruker man ofte setninger som: «Arbeidet tok *mindre enn* en time».

2.2.2 Visuelle mediatorer

Mens vi kommuniserer, bruker vi ifølge Sfard visuelle mediatorer. De visuelle mediatorene er midler vi som deltakere i diskursen identifiserer det vi snakker om med. Mediatorene er ofte symbolske artefakter som er laget spesielt for denne formen for kommunikasjon, for eksempel formler og uttrykk, grafer, tabeller eller skjema, som fortegnsskjema. De er ikke bare midler for å formidle eller gi uttrykk for tidligere eksisterende tanker. Mer enn det så er de en del av kommunikasjonen og spesielt tankeprosessene (Sfard, 2007). Kommunikasjonsrelaterte operasjoner med visuelle mediatorer vil ofte bli automatisert, for eksempel ved løsning av en likning med algebraisk notasjon, eller bruk av ulikhetstegn. Med en viss erfaring vil en kunne skanne de visuelle mediatorene med øynene og automatisk kunne kommunisere med dem (Sfard, 2008).

2.2.3 Narrativer

Narrativer er en fornorsking av det engelske nøkkelordet *narratives.* Narrativer er ordrekker, muntlige eller skriftlige, som beskriver objekter, som for eksempel ulikheter eller funksjoner, forhold mellom disse, eller aktiviteter utført med eller av objekter. Man kan dele narrativer inn i to nivåer, objekt-nivå og meta-nivå (Sfard, 2007). Narrativer på objekt-nivå kan bli godkjent eller avvist ved hjelp av matematiske prosedyrer. Godkjente narrativer blir oppfattet som sanne. I vitenskapelig matematisk diskurs er disse godkjente narrativene kjent som matematiske teorier, definisjoner, bevis og teoremer. Narrativer kan være formler, som faktoriseringsformelen for andregradsuttrykk: «$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ hvor x_1 og x_2 er løsning 1 og 2 som gjør at uttrykket blir 0». Det kan også være en beskrivelse av monotoniegenskapene til en funksjon eller gyldig område til en ulikhet. Narrativer på metanivå handler om hvordan matematikk blir gjort (Sfard, 2007). Et eksempel på denne regelen om hvordan vi multipliserer to parenteser med hverandre: «$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.» Denne narrativen bruker elevene i arbeidet med å løse en ulikhet.

2.2.4 Rutiner

Begrepet *rutiner* refererer i denne sammenheng til repeterende mønstre i samtalepartneres handlinger, som karakteriserer diskursen. De inneholder hva vi ser etter, og hvordan vi løser og svarer på en oppgave. Vi følger repeterende mønstre når vi bruker matematiske ord og mediatorer, eller følger prosessen med å skape og underbygge narrativer (Sfard, 2008). Dermed er rutine en altomfattende kategori som delvis overlapper med de tre foregående. Rutiner kan ses i nesten alle aspekter av matematisk diskurs. De forteller om diskursen, snarere enn om dens objekter (Sfard, 2007). Regler bestemmer i de fleste tilfeller ikke rutineforløpet, men begrenser det og gir det generell retning. Det er vanskelig å få regelmessige handlingsmønstre til å gi mening ved å se på enkeltmennesker alene. De blir meningsfulle i samspill med andre. I følge Sfard (2008) har vi tre typer rutiner: Deeds, rituals og explorations, her oversatt med gjerninger, ritualer og utforskninger. Gjerninger er rutiner som involverer praktiske handlinger. Ritualer har liten grad av fleksibilitet og godkjenningen av operasjonene som blir gjort er avhengige av andre. Ritualer kan være forgjengere for utforskninger. En rutine vil bli kalt utforskning dersom bruken bidrar til en godkjent narrativ. En utforskning kan utføres individuelt, den er fleksibel og kan overføres til andre oppgaver. Likningsløsning eller drøfting av monotoniegenskaper kan være utforskninger. (Sfard, 2008). Sfard antar at: «as long as school teaching focuses on the issue of *how* routines should be performed to the almost neglect of the question of *when* this performance would be most appropriate, it is more likely to result in the discourse of rituals than of explorations» (Sfard, 2008, s. 223). Vi leser implisitt at utforskende rutiner er å foretrekke. Et eksempel som blir flittig brukt i elevenes rutiner er å finne nullpunktene til et uttrykk ved hjelp av løsningsformelen for andregradslikninger:

La a, b og c være reelle tall, der $a \neq 0$. Likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

forutsatt at $b^2 - 4ac \geq 0$. Dersom $b^2 - 4ac < 0$ har likningen ingen reelle løsninger (matematikk.org).

I resten av denne oppgaven blir formelen referert til som abc-formelen. Boaler (1998) beskriver to ulike tilnærminger til matematikken som foregår på de to skolene Amber Hill og Phoenix Park. Elevene på Amber Hill har tilegnet seg en regel-følgende oppførsel. I møte med et problem, prøver de å huske en regel eller metode de hadde brukt før i en lignende situasjon. Elevene ved Phoenix Park har blitt vant til å bruke matematikken på en mer fleksibel, utforskende måte. Hun mener grunnen til at elever ofte ikke er i stand til å bruke regnemetodene de har gjennomgått, er fordi de ikke forstår dem ordentlig (Boaler, 1998). I lys av Sfards rammeverk kan det som Boaler beskriver som regel-følgende oppførsel og fleksibel, utforskende fremgangsmåte, leses som to ulike rutiner, nemlig ritualer og utforskninger. Viirman og Nardi (2018) undersøkte biologistudenters diskurs i arbeid med matematisk modellering. De brukte rammeverket kommognisjon i analysen. Viirman og Nardi undersøkte hvilke belegg for ritualisert og utforskende arbeid med hypotesebygging som kunne spores i biologistudenters arbeid med matematisk modellering. De testet utviklingen av 12 førsteårs biologistudenters matematiske diskurs mens de arbeidet med matematiske modelleringsoppgaver over fire økter. Analysen viste et samspill mellom rutiner som ble definert som ritualer og de som ble definert som utforskninger. Forfatterne mente derfor at det var problematisk å snakke om ritualer og utforskninger som to fraskilte elementer (Viirman & Nardi, 2018). I denne studien blir heller ikke ritualer og utforskninger sett som to fraskilte elementer. Rutinene som følges når elevene jobber med å løse en oppgave kan bære preg av både ritual og utforskning. Utforskning bli her sett som en nyttigere rutine enn et ritual.

2.3 Tidligere forskning

Det har vært vanskelig å finne studier som har undersøkt bruk av fortegnsskjema. Jeg har funnet noen studier som studerer arbeid med andregradslikninger. Løsning av andregradslikninger er et viktig ledd i elevenes rutiner for løsning av andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner.

Kadija (2010) studerte albanske videregåendeelevers arbeid med likninger, deriblant kvadratiske. Hun gjennomførte en case-studie basert på oppgavebaserte intervju enkeltvis med seks elever på ulikt nivå. Elevene løste oppgaver og ble bedt om å svare på spørsmål mens de jobbet med å løse dem. Hun fant at elevene generelt visste hvordan de skulle løse likninger (Kadija, 2010).

I samme år studerte Masson (2010) studerte videregåendeelevers arbeid med andregradspolynomer. Han ønsket blant annet å undersøke hvor fortrolige elevene var med algoritmene knyttet til problemløsning der andregradspolynomer inngår. Hiebert og Lefevre (1986) sine definisjoner av begrepskunnskap og prosedyrekunnskap ble brukt. Data ble samlet ved at 25 elever gjennomførte en skriftlig test og fire elever ble så valgt ut til individuelle intervju. Av analysen av dataene framkom det at eleven hadde varierende forståelse av relevante prosedyrer, og at få av elevene var i stand til å bruke prosedyrene effektivt. Et eksempel er en elev som i løsning av ulikheten $(x - 2)(x - 1) \leq 0$, først velger å multiplisere sammen parentesene (Masson, 2010).

Vaiyavutjamai og Clements (2006) studerte effekten av klasseromsundervisning på elevers forståelse av kvadratiske likninger. Målet med studien var å undersøke hvordan tradisjonell undervisning om kvadratiske likninger påvirket elevenes utvikling av ferdigheter og forståelse på temaet. 231 elever i 9. klasse i Thailand tok en test med 18 kvadratiske likninger, før og etter 11 ukers undervisning om kvadratiske likninger. Data fra elevenes skriftlige besvarelser ble studert. I tillegg ble det gjennomført 36 intervju før og etter undervisningen med 18 elever. De så at elevene presterte bedre og hadde en større forståelse for temaet etter undervisningen. Mange syntes likevel at det var forvirrende med konseptet variabel, og «løsningen» til en kvadratisk likning. Forfatterne brukte Skemp (1976) sitt rammeverk, der «instrumentell» og «relasjonell» forståelse blir definert (Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Det fire intervjuspørsmålene var som følger:

1. $(x - 3)(x - 5) = 0$
2. $x^2 - x = 12$
3. $x^2 = 9$
4. $2x^2 = 10x$.

I intervjuene ble elevene bedt om å løse likningene, vise fremgangsmåte og svare på spørsmål underveis. Ut fra svarene i intervjuene ble de 18 elevenes forståelse kategorisert. To av elevene hadde utviklet en forståelse som ble sett på som relasjonell. Fire av elevene som ble intervjuet så ikke ut til å ha lært noen ting i løpet av perioden. Tolv av elevene klarte å svare riktig på minst to av intervjuspørsmålene, men viste ikke relasjonell forståelse slik forfatterne definerte det. I min studie har elevene jobbet med lignende uttrykk i ulikheter, og jeg har gjort lignende intervju der elevene får tildelt en oppgave og svarer på noen spørsmål mens de jobber med å løse oppgaven.

2.4 Matematisk innhold

Emnene som jeg har valgt å forske på er *andregradsulikheter* og drøfting av *polynomfunksjoner*. Jeg har valgt disse emnene fordi jeg personlig synes at det er spennende emner. Emnene har en del felles i matematikken som blir brukt i løsningsmetodene. Jeg ønsker derfor å studere de side om side. Bruken av fortegnsskjema som medierende redskap er sentral i arbeidet med både andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner. Jeg har valgt å studere elevenes bruk av dette redskapet spesielt. Andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner er emner som er sentrale for faget S1 og som vi finner i kompetansemålene i læreplanen, under hovedområdet Algebra:

> Mål for opplæringen er at eleven skal kunne
> - løse likninger, *ulikheter* og likningssystemer av første og *andre grad*, (…)

Også under hovedområdet Funksjoner:

> Mål for opplæringen er at eleven skal kunne
> - (…), regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å *drøfte polynomfunksjoner*

(Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 7)

Begrepene som er mest sentrale i denne studien er kursivert. Å drøfte polynomfunksjoner handler om å finne monotoniegenskapene. Monotoniegenskapene til en funksjon defineres slik:

> La *f* være en funksjon definert på et intervall [*a,b*]. Vi sier at
> *f* er voksende i [a,b], dersom for alle x_1, x_2 ∈ [a,b], så gjelder $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
> *f* er avtagende i [a,b], dersom for alle x_1, x_2 ∈ [a,b], så gjelder $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
>
> Dersom $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ for alle x_1, x_2 ∈ [*a,b*], sier vi at *f* er strengt voksende i [*a,b*].
> Tilsvarende er *f* strengt avtagende i [a,b] hvis $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(www.matematikk.org)

Den deriverte til en funksjon *f(x)* i et punkt a er stigningen til tangenten til *f(x)* i dette punktet. Der den deriverte er positiv, er funksjonen strengt voksende. Der den deriverte er negativ, er funksjonen strengt avtagende. Dette kan oppsummeres i teorem om monotoniegenskapene til en funksjon:

> Anta at *f* er kontinuerlig og deriverbar på intervallet [a,b]. Da gjelder
> $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b] \Leftrightarrow f$ er voksende på [*a,b*],
> $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in [a,b] \Leftrightarrow f$ er avtagende på [*a,b*].

(www.matematikk.org)

Ut fra dette teoremet har vi at monotoniegenskapene til en funksjon kan leses ut fra fortegnslinja til den deriverte. En polynomfunksjon av tredje grad er på formen: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Ulikheter brukes når vi vil sammenligne størrelser. Vi har fire ulikhetstegn:

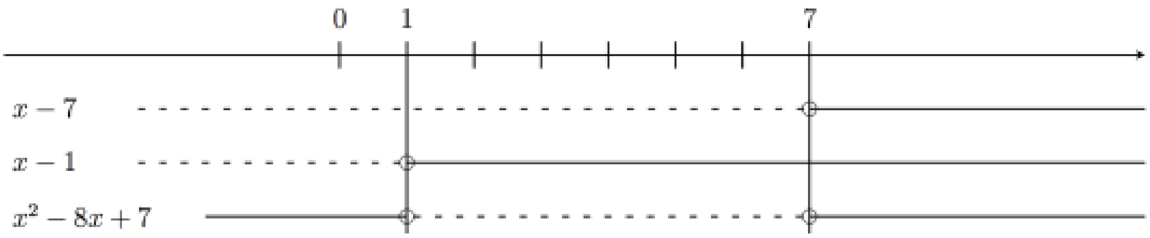
- >, større enn
- ≥, større enn eller lik
- <, mindre enn
- ≤, mindre enn eller lik

Med andregradsulikheter menes oppgaver som inneholder uttrykk av typen: $ax^2 + bx + c < 0$. De inneholder en av de fire ulikhetstegnene over. Løsningen til en ulikhet kan være ett, to, eller ingen intervaller.

Læreboka elevene bruker (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl, & Hals, 2013) legger opp til at en skal bruke fortegnsskjema til å finne gyldige områder for en andregradsulikhet og til å kunne beskrive monotoniegenskapene til polynomfunksjoner, hovedsakelig av tredje grad. Et fortegnsskjema er et skjema der en samler fortegnslinjene til de lineære faktorene til et uttrykk under hverandre, og til slutt utnytter fortegnsreglene til tallregning til å finne fortegnene til uttrykket for alle intervall. Vi kan bruke skjemaet for å finne ut for hvilke intervaller av *x* et uttrykk er positivt, lik null eller negativt. Hvis ikke uttrykket allerede er på faktorisert form, faktoriseres det først i lineære faktorer. Nedenfor tegner vi fortegnsskjema for å løse denne ulikheten: $x^2 - 8x + 7 < 0$. På faktorisert form blir andregradsuttrykket $x^2 - 8x + 7$: $(x - 7)(x - 1)$.

Faktoren $x - 7$ er lik 0 for $x = 7$, positiv for $x > 7$ og negativ for $x < 7$
Faktoren $x - 1$ er lik 0 for $x = 1$, positiv for $x > 1$ og negativ for $x < 1$

Vi kan tegne et fortegnsskjema for uttrykket på denne måten:



(www.matematikk.org)

De stiplede linjene markerer i hvilket intervall faktoren skrevet til venstre er negativ, mens den heltrukne linja markerer i hvilket intervall faktoren skrevet til venstre er positiv. Når vi finner produktet til faktorene oppstilt til venstre, får vi at utrykket blir positivt dersom vi har et partall antall negative linjer, mens uttrykket er negativt dersom vi har et odde antall negative linjer. Fra fortegnslinja til polynomuttrykket kan vi lese at $x^2 - 8x + 7$ er mindre enn null når $1 < x < 7$. Dersom vi i stedet skulle finne for hvilke intervaller av *x* grafen til følgende tredjegradsfunksjon stiger eller synker: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x - 3$, så kan vi bruke det samme skjemaet siden den deriverte til funksjonen *f* er $f'(x) = x^2 - 8x + 7$. Ut fra fortegnsskjemaet kan vi da lese at *f* er voksende for $x \leq 1 \cup x \geq 7$, mens *f er* avtagende for $1 \leq x \leq 7$. Ut fra definisjonen av monotoniegenskaper skal endepunktene i tas med i intervallene (www.matematikk.org).

3 Metode
Jeg har valgt å bruke en kvalitativ forskningsstrategi og case-studie som forskningsdesign. Som metode for å samle data har jeg brukt observasjon av gruppearbeid og oppgavebaserte intervju med enkeltelever. Det har blitt tatt lydopptak og notatene til elevene har blitt kopiert ved både gruppearbeid og intervju. I 3.1 vil jeg gjøre rede for case-studie som design. Jeg vil også gi en beskrivelse av casen min, en gruppe på fire S1-elever. Hvordan elevene bruker fortegnsskjema vil ut fra et kommognitivt perspektiv karakteriseres ved hvordan de bruker ord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner (Sfard, 2007, 2008). For å få tak i hvordan elevene bruker disse fire delene av matematisk diskurs, er det nyttig å studere elevene i samhandling. 3.2 handler om arbeidet med å samle inn data ved hjelp av observasjon av gruppearbeid. Jeg har valgt å intervjue elevene enkeltvis som et supplement til dataene samlet inn under gruppearbeidet. Intervjuene kan gi enda flere detaljer om elevenes matematiske diskurs i arbeid med oppgavene enn de som fremkom under gruppearbeidet. Disse to metodene vil kunne støtte opp om hverandre og sammen med analysen av elevsvar gjøre studien mer pålitelig. Intervjuene er oppgavebaserte fordi fokuset i studien er på S1-elevenes bruk av fortegnsskjema. I 3.3 presenteres arbeidet med innsamling av data ved hjelp av oppgavebaserte intervju. Under gruppearbeidet er jeg til stede, og min tilstedeværelse har en effekt. 3.4 handler om *Hawthorne effekten.* Til sist i kapittelet vil jeg beskrive hvilke utfordringer jeg møtte i arbeidet med å samle inn data.

3.1 Case-studie
En case-studie er en kvalitativ studie. Kvalitative studier er opptatt med ord, heller enn tall. De er opptatt med dybde fremfor bredde. Casen er et objekt av interesse i seg selv, og jeg ønsker å gi en grundig belysning av den. Casen er ikke valgt fordi den er ekstrem eller uvanlig, men fordi den vil gi en passende kontekst for å besvare forskningsspørsmålet (Bryman, 2012).

3.1.1 Pålitelighet og gyldighet
Ekstern pålitelighet er vanskelig for en case-studie (Bryman, 2012). Studien kan ikke kopieres fordi den sosiale settingen ikke kan fryses. Intern pålitelighet er lettere. For at det skal være intern gyldighet må det være kongruens mellom observasjoner og konklusjoner (Bryman, 2012). Det er viktig at argumenter har god støtte i data. Her har case-studier en fordel av at de gir muligheten for å gå i dybden. Når det gjelder ekstern gyldighet, om funn kan generaliseres på tvers av sosiale settinger, er dette også vanskelig for en case-studie. Det er ulikt hvor strengt dette tolkes. Funnene i kvalitativ forskning kan generalisere teori, heller enn sosiale settinger (Bryman, 2012). Hensikten med denne studien er ikke å kunne generalisere funn, men å på en god måte analysere data ut fra et kommognitivt perspektiv. En case-studie kan i begrenset grad sees som et eksempel fra en større populasjon med lignende kontekst. Hvis det blir presentert en detaljert beskrivelse av konteksten, kan leseren selv avgjøre om funn kan overføres til andre miljø med lignende forutsetninger. En begrenset grad av generalisering kan gjøres ved å trekke linjer til funn fra tidligere sammenlignbare studier. For å øke intern gyldighet er det viktig med åpenhet rundt prosessene i studien. Jeg vil underveis i metodedelen komme innom ulike endringer og tilpasninger som ble gjort underveis. Det er også viktig å unngå at egne verdier og overbevisninger styrer utførelsen av forskningen og presentasjon av funnene. For å øke studiens pålitelighet har jeg valgt triangulering av data. Jeg studerer samme fenomen gjennom ulike forskningsmetoder; observasjon av gruppearbeid, intervju med enkeltelever og innsamling av elevbesvarelser (Bryman, 2012).

3.1.2 Utvalget
S1-klassen som elevene går i består av 15 elever som nå går på sitt andre år i videregående skole. Klassen er, ifølge matematikklæreren deres, en klasse med flinke elever. Klassen er relativt homogen, og inneholder elever med middels eller høy måloppnåelse i faget. De fire elevene som er med i studien ble valgt ved at jeg ba matematikklæreren deres om å foreslå fem elever som han mente

kunne fungere godt sammen i en gruppe og som var gode til å sette ord på hva de tenkte. Jeg ønsket data som var rikt på ordbruk og samarbeid. Matematikklæreren foreslo da fem elever ut fra hvilke elever han tenkte kunne være villige til å bli med. I tillegg trodde han de kunne fungere greit sammen. Disse fem elevene ble spurt om de ville bli med på prosjektet. Alle de fem foreslåtte elevene svarte først ja til å bli med. En elev valgte å trekke seg noen dager etter. Jeg valgte da å gå videre med de fire andre. Gruppa bestod av to jenter og to gutter med middels eller høy måloppnåelse i faget.

Elever som velger faget S1 har hatt ett av fagene 1P eller 1T året før. Alle elevene som tok S1 dette året har hatt 1T. 1T er koden som brukes om det mest teoretiske matematikkemnet som elevene kan velge første året på videregående skole. Elevene som velger dette faget har gjerne med seg en interesse for matematikk fra ungdomsskolen, eller de trenger faget som grunnlag for videre studier på høgskole og universitet. De er dermed gjerne relativt motiverte og arbeidsomme. 1T er et fag som inneholder hovedemnene: Tall og algebra, Geometri, Sannsynlighet og Funksjoner (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 10). Hovedemnene i faget S1 er Algebra, Funksjoner, Sannsynlighet og Lineær optimering (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 7). Mye av innholdet i S1 overlapper med innholdet i 1T. Elevene får derfor jobbet med flere av emnene for andre gang. Andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner er pensum i begge fag. Tidspresset i S1 er, ifølge faglærer, lavere enn i 1T. Jeg valgte derfor å bruke elever fra S1 i min studie for å lettere få samtykke av faglærer og elever til å utføre studien. Selv om elevene har vært innom emnene som de arbeider med i denne studien både i 1T og S1, så var det noen måneder siden sist de hadde jobbet med dette på det tidspunktet studien ble gjennomført. Datainnsamlingen ble gjennomført i mars. Elevene hadde gjennomgått andregradsulikheter tidlig på høsten, og drøfting av polynomfunksjoner rett før jul.

3.2 Observasjon av gruppearbeid

Gruppa på fire S1-elever ble studert i to skoletimer, mens de jobbet med et oppgavehefte som jeg hadde designet for å kunne samle data til å besvare forskningsspørsmålet mitt. Grunnen til at jeg valgte observasjon av gruppearbeid som metode for å samle data er at jeg ønsket å få et nærblikk av elevenes arbeid og ut fra dette beskrive hva som karakteriserer elevenes bruk av fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner. Dataene skulle analyseres ut fra et kommognitivt perspektiv. Samhandling er svært sentralt ut fra dette perspektivet (Sfard, 2008). Jeg tenkte det ville være hensiktsmessig for å få frem elevenes ordbruk, bruk av visuelle mediatorer, narrativer og rutiner, å samle data mens elevene jobber sammen i en gruppe. Observasjonen kan kategoriseres som strukturert, fordi elevene er klar over hvor lenge de blir observert og de får utdelt oppgavene de jobber med (Bryman, 2012). Jeg er ikke-deltagende observator. Med det mener jeg at jeg ikke gir hint eller kommenterer noe av det elevene gjør eller sier underveis (Bryman, 2012). Det er ett unntak. I starten av andre time gir jeg en kommentar: Jeg sier at de kan gå tilbake til oppgave 2, og se om den er ferdig løst.

Elevene fikk sitte på et eget grupperom. Jeg satt i et hjørne og observerte. I starten av den første timen fikk elevene utdelt oppgaveheftet med oppgaver de skulle forsøke å løse i fellesskap. Jeg fortalte dem at jeg var mer interessert i veien mot svaret, enn svaret i seg selv. De fikk ikke lov til å bruke kalkulator eller andre digitale hjelpemidler. De hadde heller ikke tilgang på bok. Grunnen til dette er hovedsakelig fordi det passer bedre til å samle data til det jeg ønsker å besvare, nemlig hva som karakterer elevenes bruk av fortegnsskjema. Dersom elevene hadde kunnet bruke graftegner, ville fortegnsskjema vært overflødig. Med bok tilgjengelig ville elevene hatt muligheten til å finne eksempler i boka på lignende oppgaver som de i oppgaveheftet. Jeg ønsket å finne ut hva elevene klarte å løse kun ved hjelp av hverandre. I eksamensoppgavene som blir laget til S1-faget skal tre femdeler av eksamen besvares uten bruk av hjelpemidler som kalkulator, bok eller graftegner. Det gjør at elevene er trent i å jobbe på denne måten. De er vant til å måtte huske formler i hodet fordi de ikke har mulighet til å slå dem opp. Det ble tatt lydopptak av gruppejobbingen og notatene deres ble kopiert. Dette har jeg fått godkjenning til av NSD referansekode 964057. Alle elevene har gitt sitt samtykke til å bli med på gruppejobbing med lydopptak, kopiering av notater og intervju med lydopptak. Lyd opptakene ble transkribert. Noe ble utelatt fordi det var vanskelig å transkribere fordi elevene snakket i munnen på hverandre eller mumlet, og noe er utelatt fordi de snakker om ting som ikke er direkte knyttet til oppgaveløsningen. Der jeg har utelatt noe er det markert med tre prikker. Utdrag fra transkripsjonene blir presentert i analysen, mens resten ligger som vedlegg. Utdragene som jeg har valgt å analysere er valgt for å kunne demonstrere hva som karakteriserer disse elevenes ordbruk, bruk av visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. For at elevene ikke skal kunne kjennes igjen, har de fått navnene Ola, Per, Liv og Ane. Det er heller ikke tatt med andre personlige opplysninger om elevene.

3.2.1 Oppgaveheftet

Oppgavene i heftet er designet for kunne svare på forskningsspørsmålet. Med unntak av oppgave 1, er de laget med utgangspunkt i tidligere eksamensoppgaver for S1, nærmere bestemt oppgaver gitt til eksamen Høst 2018, Vår 2018 og Høst 2017 (matematikk.net, 2019). Noen av oppgavene er direkte kopi, andre er brukt som inspirasjon. Dette gjør at jeg er overbevist om at de passer til innholdet i faget. Det gjør også at oppgavene er direkte nyttige å jobbe med for elevene med tanke på å tilegne seg pensum i emnet.

Oppgave 1 består av tre tekstsvarsoppgaver. Oppgavene er laget for å høre hvilke narrativer elevene har om fortegnsskjema, ulikheter og monotoniegenskaper. Femte og sjette spørsmål er laget for å høre hva elevene legger i begrepet monotoniegenskapene til en funksjon, og hva slags løsningsmetoder de tenker de kan bruke.

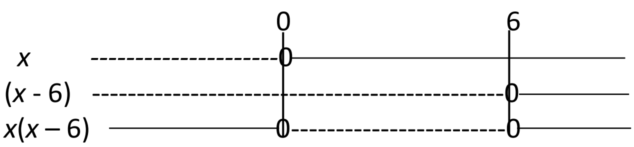
1. Hva er et fortegnsskjema?
2. Når bruker man det?
3. Hva er en ulikhet?
4. Hvordan kan løsningene til en ulikhet være?
5. Hva menes med monotoniegenskapene til en funksjon?
6. Hvordan kan vi finne disse egenskapene?

Oppgave 2 består av fire ulikheter som skal løses. Nedenfor er oppgavene og løsningsforslag.

a) $x^2 - 6x < 0$

Løsningsforslag:

$x^2 - 6x = x(x - 6)$



Løsning: $0 < x < 6$

Oppgaven er laget for å se om elevene faktoriserer ved å sette felles faktor utenfor en parentes, eller om de går en omvei med abc-formel. Dette er en standard oppgave, så den ønsker å få frem om elevene har tilegnet seg automatiserte ferdigheter til bruk av fortegnsskjema som visuell mediator, hvilke ord de bruker og hvilket mønster de følger i oppgaveløsningen.

b) $(x-1)(x-2) > 0$

Løsningsforslag:

		1		2	
$(x-1)$	------------------	0	————————		————————
$(x-2)$	------------------		------------------	0	————————
$(x-1)(x-2)$	————————	0	------------------	0	————————

Løsning: $x < 1 \cup x > 2$

I denne oppgaven er uttrykket på faktorisert form. Her ønsker jeg å finne ut om elevene bruker faktorene direkte, eller om de også her går omveien om abc-formel. Løsningen til denne oppgaven er to intervaller. Jeg ønsker å høre hvordan elevene ordlegger seg når de snakker om løsningsintervallene, og hvordan de skriver opp løsningen.

c) $-x^2 - 6x \geq 9$

Løsningsforslag:

Samle leddene på venstre side og løs den tilhørende andregradslikningen.

$-x^2 - 6x - 9 = 0$

$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} \text{ gir } x_1 = -3$$

Faktoriseringsformelen for andregradsuttrykk: «$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ hvor x_1 og x_2 er løsning 1 og 2 som gjør at uttrykket blir 0 gir $-x^2 - 6x - 9 = -(x + 3)^2$

		-3	
-1	----------------------		----------------------
$(x+3)$	----------------------	0	————————
$(x+3)$	----------------------	0	————————
$-(x+3)^2$	----------------------	0	----------------------

Løsning: $x = -3$

Oppgaven gir ingen intervaller i løsningen, kun en x-verdi som gir likhet. Jeg ønsker med denne oppgaven å se hvordan elevene tolker oppgaven når det er 9 på høyre side i stedet for 0. Jeg ønsker også å se om elevene klarer å faktorisere uttrykket og om de lager et fortegnsskjema. Til slutt er jeg spent på hvordan de konkluderer, hvis de gjør det.

d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

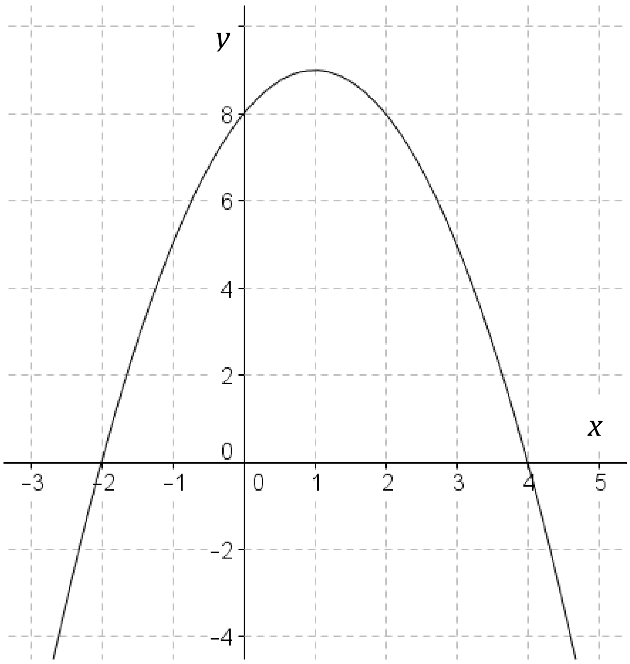
Løsningsforslag:

Uttrykket gir negativ verdi i diskriminanten $(b^2 - 4ac) = ((-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4) = 9 - 16 = -7$

Løsning: Fordi koeffisienten til andregradsleddet har positivt fortegn (smilende graf), og uttrykket ikke har nullpunkter, har uttrykket ingen løsning.

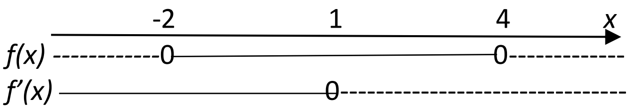
Denne oppgaven kan ikke løses ved hjelp av fortegnsskjema. Jeg legger derfor liten vekt på denne i analysen. Oppgaven er med i settet for å se hvordan elevene forholder seg til ulikheter uten løsning.

Oppgave 3
Figuren viser grafen til en funksjon *f.*



Tegn fortegnslinja til *f(x)* og *f'(x).*

Løsning:



I denne oppgaven skal elevene tegne fortegnslinjene til *f(x)* og *f'(x).* Jeg vil se hvordan de velger å gjøre det.

Oppgave 4
Nedenfor ser du fortegnslinja til *f'(x)*, for en funksjon *f.*

Lag en skisse som viser hvordan grafen til *f* kan se ut.

Løsning:
Grafen til *f* er voksende for $x < 1$, og avtagende for $x > 1$. Grafen har et terrassepunkt når $x = -2$.

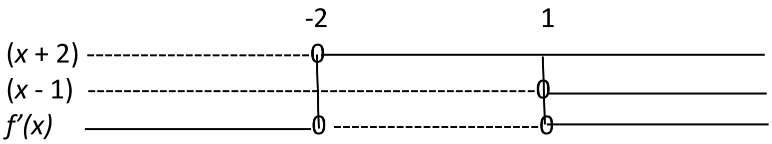
Oppgaven er laget for å vise hva elevene klarer å lese ut fra fortegnslinja til *f'(x).*

Oppgave 5
Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene.

a) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Løsningsforslag:
$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$6x^2 + 6x - 12 = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$(x + 2)(x - 1) = 0$

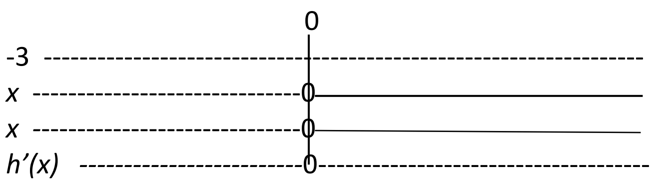


Løsning: f er voksende for $x < -2 \cup x > 1$ og avtagende for $-2 < x < 1$

I denne oppgaven er det hensiktsmessig med bruk av visuelle mediatorer som skisser og fortegnsskjema. Elevene trenger kjennskap til begrepene den deriverte og monotoniegenskaper for å kunne løse denne oppgaven.

b) $h(x) = -x^3$

Løsningsforslag:
$h'(x) = -3x^2$



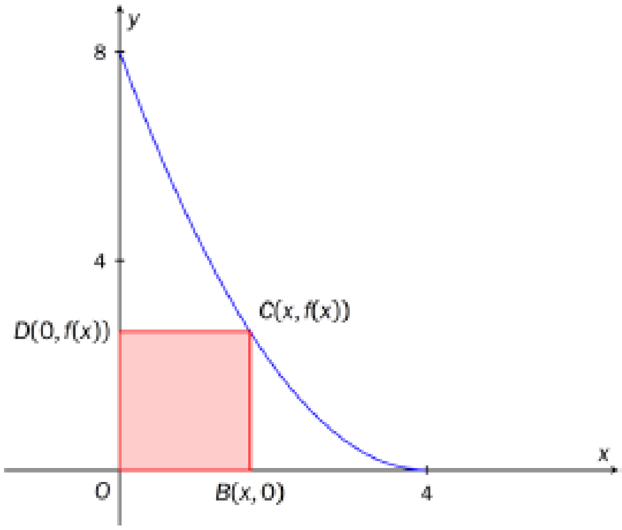
Løsning: h er avtagende for alle verdier av x.

I denne oppgaven møter elevene et terrassepunkt. Jeg ønsker å se hvordan de forholder seg til dette og om de tegner et fortegnsskjema i løsningsprosessen.

Oppgave 6

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 \qquad 0 < x < 4$

Under grafen til *f* er det tegnet inn et rektangel ABCD, slik som figuren nedenfor viser.



Bestem *x* slik at arealet til rektangelet blir størst mulig.

Løsningsforslag:

Arealet til rektanglet er gitt ved

$A(x) = \frac{1}{2}x(x-4)^2$

$A'(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + \frac{1}{2}x2(x-4)^2$

$A'(x) = \frac{1}{2}(x-4)((x-4) + 2x)$

$A'(x) = \frac{1}{2}(x-4)(3x-4)$

		$\frac{4}{3}$		4	
$\frac{1}{2}$	———		———		———
$(x-4)$	- - - - -		- - - - -	0	———
$(3x-4)$	- - - - -	0	———		———
$A'(x)$	———	0	- - - - -	0	———

Løsning: $A'(x)$ har et toppunkt for $x = \frac{4}{3}$, dermed har rektangelet sitt største areal når $x = \frac{4}{3}$.

Denne oppgaven er laget med utgangspunkt i en tidligere eksamensoppgave for S1 på del 2, ikke del 1 som de andre. Det vil si at den opprinnelige oppgaven var tenkt løst ved hjelp av digitale hjelpemidler. Jeg ønsket å ha med en oppgave der elevene kunne bruke fortegnsskjema til å løse en tekstoppgave. Det viste seg at oppgaven var for vanskelig, og ble misforstått. Jeg har derfor utelatt denne oppgaven fra analysen.

3.3 Oppgavebaserte intervju

Jeg valgte å gjennomføre intervju med de fire elevene som et supplement til dataene som ble samlet under gruppearbeidet. Intervjuene brukes til å kryssjekke funn fra gruppearbeidet og øke studiens pålitelighet (Bryman, 2012). Intervjuene var oppgavebaserte. Det vil si at elevene under intervjuet jobbet med oppgaver og svarte på spørsmål mens de jobbet med å løse oppgaven. Intervjuene ble gjennomført to uker etter observasjonen av gruppejobbingen. Elevene ble intervjuet enkeltvis i omtrent 20 minutter hver. Intervjuene var semi-strukturerte. Det vil si at jeg hadde en intervju-guide som inneholdt en liste med spørsmål som jeg hadde tenkt å komme innom og rom for å stille andre spørsmål underveis (Bryman, 2012). Intervju-guiden ble ikke strengt fulgt. Hvis elevene stilte meg spørsmål så prøvde jeg å unngå og svare. Elevene fikk utdelt heftet fra gruppejobbingen. Jeg hadde planlagt en av ulikhetene som jeg ville be elevene løse, og en funksjon som jeg ville be elevene drøfte. Gruppeoppgavene var valgt ut fra at det var interessante diskusjoner rundt disse oppgavene under gruppejobbingen, og at jeg ønsket mer detaljerte svar om hvordan de gikk fram for å løse dem. Midtveis i andre intervju valgte jeg å tilpasse intervjuet til situasjonen. Ulikheten jeg hadde valgt at elevene skulle jobbe med var denne: $-x^2 - 6x \geq 9$. Ulikheten gir ingen løsning, kun en x-verdi med likhet. Elevene klarte ikke å løse denne oppgaven. Jeg ville at elevene skulle få jobbe med oppgaver der de fikk til mer. Jeg valgte derfor i stedet å be dem velge en av ulikhetene fra gruppearbeidet, og løse den. Ulikhetene de kunne velge fra var disse:

a) $x^2 - 6x < 0$
b) $(x - 1)(x - 2) > 0$
c) $-x^2 - 6x \geq 9$
d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

Hvis det ble ekstra tid, fikk elevene velge en ulikhet til som de forsøkte å løse. Funksjonen som de jobbet med å drøfte under intervjuet, var $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$. Strukturen av intervjuene var inspirert av studien til Kadija (2010), der hun gjennomførte oppgavebaserte intervju (Kadija, 2010).

3.4 Hawthorne effekten

Hawthorne-effekten er en feilkilde i forskning. Den sier at det å bli undersøkt i seg selv frembringer en endring. De som studeres endrer atferden fordi de blir studert. I den opprinnelige studien som begrepet kommer fra, begynte fabrikkarbeidere å jobbe hardere når de visste at noen studerte dem (snl.no). Det ble utført en studie på Hawthorne-effekten i 2013. Denne studien ønsket å avklare om Hawthorne-effekten eksisterer, undersøke under hvilke forhold, og estimere størrelsen på en slik eventuell effekt. Studien konkluderte med at konsekvensene forskningsdeltakelse har for atferden til de som undersøkes eksisterer, selv om det er lite vi kan vite sikkert om hvordan de påvirker, hvilken effekt eller i hvilken grad (McCambridge, Witton, & Elbourne, 2013).

Året før denne datainnsamlingen ble gjennomført, var jeg innom klassen disse elevene går i, som vikar i 1T i en periode på to måneder. Dette spilte kanskje inn på hvordan elevene forholdt seg til meg som observatør. Muligens så elevene på meg mer som en lærer enn som en forsker. Jeg antar at dette fører til at effekten av at jeg observerer er mindre enn den ville være ved observasjon av en forsker de ikke hadde sett før. Oppgavesettet inneholder oppgaver som ligner prøveoppgaver og blir kanskje oppfattet nesten som en prøve. Det fører gjerne til at elevene besvarer oppgavene på samme måte som de ville gjort på en prøve. Lydopptakeren vil gjerne også ha innvirkning på elevenes arbeid. Jeg vil tro at både lydopptakeren og meg som observatør gjør at elevene blir ekstra skjerpet og jobber så godt de kan. Elevene så ut til å jobbe veldig fokusert det aller meste av tiden.

3.4 Tilpasninger

På grunn av overlappingen i pensum mellom 1T og S1 valgte faglærer å gjennomgå pensum ganske raskt, og lage god plass til repetisjon i slutten av skoleåret. Den originale planen min var å følge klassen mens de jobbet med derivasjon og drøfting av polynomfunksjoner. Planen var da at elevene i gruppa mi skulle være sammen med klassen mens læreren gjennomgikk nytt stoff, og at elevene så skulle arbeide med oppgaver på grupperom mens resten av klassen arbeidet med oppgaver i klasserommet. Jeg ville da ta lydopptak av gruppejobbingen. På grunn av det høye tempoet ble klassen ferdige med temaet derivasjon og drøfting av polynomfunksjoner allerede før jul, og var kommet til sannsynlighet på det tidspunktet jeg hadde planlagt å foreta datainnsamling. Jeg valgte derfor å vente et par uker, til de var ferdige med pensum, før jeg gjennomførte en revidert datainnsamling med elevene. Siden elevene som skulle være med i min studie skulle bruke av matematikktimene sine, så var det viktig for meg at deltakelsen ikke skulle være et hinder for dem, men heller en nyttig del av forberedelsen til tentamen og eventuell eksamen senere på våren. Jeg forberedte derfor et oppgavehefte som var designet for å kunne gi svar på forskningsspørsmålene mine, samtidig som oppgavene i seg selv skulle være direkte nyttige å jobbe med for elevene.
Jeg forberedte også en intervjuguide til individuelle intervju for å samle data som kunne utfylle dataene samlet under gruppearbeidet. Tanken var at intervjuene skulle bygge på det elevene hadde gjort i gruppa og få mer informasjon om hva de tenkte mens de jobbet. Av ulike årsaker ble det ikke mulig å gjennomføre intervjuene tidsmessig nærmere gruppejobbingen. Jeg hadde ønsket at det bare skulle gå få dager mellom, så elevene hadde husket mer av hva de tenkte mens de jobbet med oppgavene i gruppa. For at det skulle bli litt lettere å tenke tilbake satt vi i samme grupperom, og vi brukte samme oppgavehefte som elevene hadde brukt i gruppejobbingen. Spørsmålene ble laget sånn at det gikk an å jobbe med oppgavene selv om de ikke husket så mye fra gruppearbeidet

4 Analyse

I kapittel 4.1 vil jeg presentere en analyse av dataene som er samlet inn under gruppearbeidet og intervjuene. Målet med analysen er å besvare forskningsspørsmålet: *Hva karakteriserer fire S1-elevers bruk av fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner?* Dataen analyseres ut fra et kommognitivt perspektiv. Derfor har jeg valgt å dele kapittelet inn etter de fire delene matematisk diskurs ut fra dette perspektivet er satt sammen av, nemlig ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. Disse fire kapitlene viser fire sider ved hva som karakteriserer elevenes bruk av fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter og polynomfunksjoner. Delkapitlene er lagt opp slik at gruppearbeidet analyseres først og suppleres med eksempler på intervjuene.

4.1 Elevenes ordbruk

I dette delkapittelet vil jeg presentere utdrag fra elevenes diskurs som eksemplifiserer bruk av utrykk og begreper som karakteriserer ordbruken deres. Disse ordene er uttrykket *x, stiger* og *synker,* og *den deriverte.*

Utdrag 1 Bruk av uttrykket *x* I

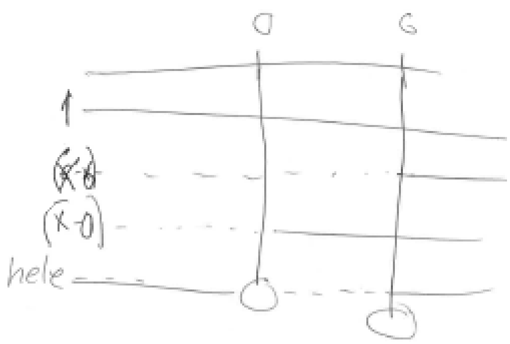
I dette utdraget arbeider elevene med følgende oppgave:

Oppgave 2a Løs ulikheten: x^2 - 6x < 0

For å lettere kunne følge diskursen under, er det en fordel å vite hva som er den matematiske løsningen på oppgaven. Oppgavens matematiske løsning er: 0 < x < 6

Elevene jobbet med denne oppgaven i første time. Da løste de likningen x^2 - 6x = 0 ved hjelp av abc-formelen. Etter å ha funnet to x-verdier som gir uttrykket lik null, gikk elevene videre til neste oppgave. Før elevene begynte å jobbe igjen i andre time fikk elevene beskjed om at de kunne gå tilbake til oppgave 2 og se om oppgavene er ferdig løst. Da elevene gikk tilbake til oppgaven kom de på at de skulle finne intervaller. Der utdraget er hentet fra har elevene tegnet et fortegnsskjema som de bruker til å formulere en svarsetning. Utdraget eksemplifiserer hvordan elevene bruker uttrykket x mens de jobber med å skrive opp intervallet der ulikheten er gyldig.

Pers fortegnsskjema:



Figur 1: Pers tegning av fortegnsskjema tilknyttet oppgave 2a.

Elevenes diskurs, utdrag:

259. Liv: x er negativ når den er mindre enn 6 og så er x negativ når den er større enn null.
260. Per: Vi bare skriver det med ord. Det er vel ikke så farlig med de tegnene.

261. Ane: Da er jo *x* mindre enn 6 og *x* større enn null.
262. Ane: *x* er jo mindre enn 6 og større enn 0.
263. Liv: Nei, vi skriver det med ord.
264. Per: Når *x* er mindre enn null så…
265. Liv: Er det ikke mer enn 0 og mindre enn 6? Ok, ja.
266. Liv: For vi skal jo finne ut når *x* er mindre enn 0.

Ane skriver ned gruppas svar:

x er mindre enn 6 og
større enn 0

Det ser ut til at Liv sier *x* når hun snakker om uttrykket til venstre for ulikhetstegnet (utsagn 259, 266). Ane ser derimot ut til å snakke om variabelen *x* (utsagn 261, 262). Det er usikkert hva Per snakker om når han sier *x* i utsagn 264. Jeg antar ut fra Liv sine utsagn før og etter, at han snakker om uttrykket x^2 - 6*x.* Elevene velger å ikke bruke «de tegnene» (utsagn 260). Jeg antar Per snakker om ulikhetstegn. Elevene bruker i stedet ordene *mindre enn* og *større enn*. Dette er ord som er vanlige i hverdagsdiskurs, så elevene er gjerne mer komfortable med dem enn ulikhetstegnene.

Utdrag 2 Bruk av uttrykket *x* II
I dette utdraget arbeider elevene med følgende oppgave:

Oppgave 2b) Løs ulikheten: $(x-1)(x-2) > 0$

Den matematiske løsningen til oppgaven er: $x < 1 \cup x > 2$

Det følgende utdraget er hentet fra elevenes diskurs mens de formulerer en svarsetning til oppgaven. I elevsvaret blir elevenes bruk av uttrykket *x* enda tydeligere. De bruker *x* både om variabelen *x* og om uttrykket til venstre for ulikhetstegnet.

Elevenes diskurs, utdrag:
269. Liv: Ok, og vi skulle finne ut når x er større enn 0. x er jo større enn 0 når
270. Per: Mindre enn 1 og mer enn 2.

Ane skriver svarsetningen:

X er større enn 0 når x er mindre enn 1
og større enn 2

Det ser ut til at Liv også i dette utdraget sier *x* når hun snakker om uttrykket (utsagn 269). Per snakker antagelig om variabelen x i utsagn 270. I elevsvaret ser det ut til at *x* brukes først om uttrykket og så om variabelen *x*.

Utdrag 3 Bruk av uttrykket *x* III

I oppgave 2a og b har ikke ordbruken til elevene ført til synlige problemer. Elevene ser ut til å tenke på uttrykket selv om det er *x* som blir sagt. Ordbruken ser derimot ut til å lage forvirring i neste utdrag. Utdraget er hentet fra elevenes arbeid med følgende oppgave:

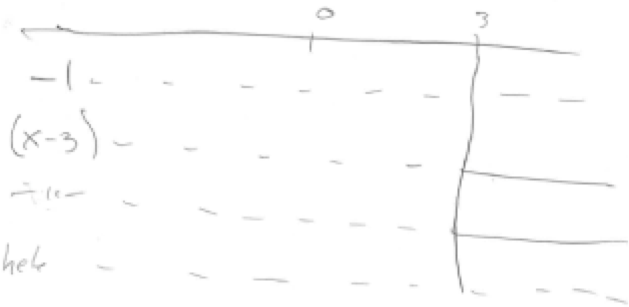
Oppgave 2c) Løs ulikheten: $-x^2 - 6x \geq 9$

Uttrykket $-x^2 - 6x - 9$ faktorisert: $-(x + 3)^2$

Oppgavens matematiske løsning: $x = (-3)$

I dette utdraget er vi i andre time. Elevene har hentet frem nullpunktet til uttrykket som de fant i første time. De har brukt dette nullpunktet til å faktorisere uttrykket, og Per har tegnet et fortegnsskjema for uttrykket. Elevene diskuterer fortegnslinja som Per har tegnet.

Pers fortegnsskjema:



Figur 2: Pers tegning av fortegnsskjema tilknyttet oppgave 2c.

Elevenes diskurs, utdrag:

280. Per: Jeg tror det er noe som er feil her.
281. Ane: Det tror jeg også.
282. Per: Hvis vi bare stryker den?
283. Liv: Nei, nei, nei, det kan jo være rett. For er *x* større eller lik 9?
284. Per: Er ikke det bare å teste da? Vi kan ta 10 da.
285. Liv: *x* kan ikke være større eller lik 9. Jeg vet ikke. Det kan jo være at den ikke kan være større.
286. Ane: Skal jeg bare skrive det? At *x* kan ikke være større enn 9.

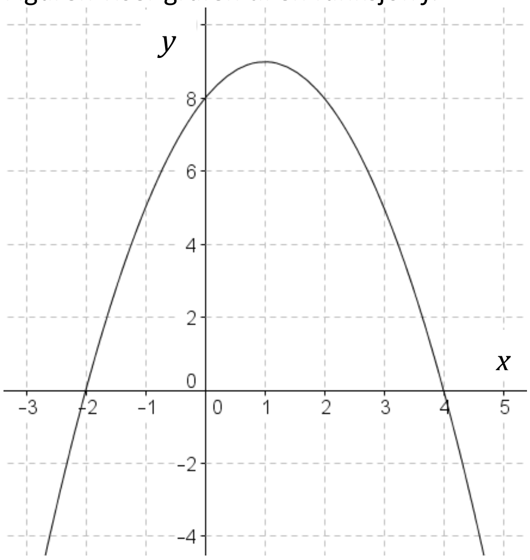
Ane skriver ned gruppas svar:

x kan ikke være større enn 9

Det ser ut til at Per og Ane mistenker at det har skjedd en feil underveis i utregningen og Per foreslår å stryke den (utsagn 280 - 282). Jeg antar at grunnen til at de mistenker at det er skjedd en feil er at fortegnslinja til *hele* som de skriver, er negativ for alle verdier av x, med unntak av $x = 3$ i skjemaet deres. Jeg antar at *hele* er ment å bety $-x^2 - 6x - 9$. «Er *x* større eller lik 9?» sier Liv i utsagn 283. Hun ser ut til å mene $-x^2 - 6x - 9$ når hun sier *x* her. Per ser ut til å tenke at hun mener variabelen *x* siden han foreslår å teste med 10 (utsagn 284). Jeg antar at han ønsker å teste hva verdien av uttrykket blir når variabelen $x = 10$. Liv og Per ser her ut til å snakke forbi hverandre ved å bruke *x* om to ulike objekter. Ane skriver i elevsvaret at: «*x* kan ikke være større enn 9». *x* ser ut til å ha en tredje betydning her, uttrykket: $-x^2 - 6x$. Måten elevene bruker uttrykket *x* er hemmende for kommunikasjonen.

Utdrag 4 Bruk av begrepene *stiger* og *synker*
I følgende oppgave skal elevene tegne fortegnslinja til *f(x)* og *f'(x)* utelukkende basert på grafen til funksjonen *f.*

Oppgave 3
Figuren viser grafen til en funksjon *f.*



Tegn fortegnslinja til *f(x)* og *f'(x).*

Løsning:

```
             -2            1           4       x
        ------------------------------------------>
f(x)  ------------0————————————————————0-------------
f'(x) ———————————————————————0-----------------------------
```

Denne oppgaven kommer elevene tilbake til to ganger senere fordi de ikke klarer å bli enige om løsningen. Utdraget er hentet fra første gang de ser på oppgaven. Elevene bruker begrepene *stiger* og *synker* ulikt.

Elevenes diskurs, utdrag:

54. Per: Altså det stiger i alle fall frem til 1, så det kan vi jo tegne.
55. Liv: Ja, da tegner du?
56. Per: *f* av *x.*
57. Liv: *f* derivert av *x*?
58. Per: Nei *f* av *x. f* derivert av *x* der stiger den til, nei, da synker den frem til der, og så stiger den, og så synker den etter det.
59. Liv: Er det ikke omvendt? At *f* derivert av *x,* at da stiger den opp til der, og synker til der?
60. Per: Nei
61. Ane: Nei, det tror ikke jeg heller.
62. Liv: Nei?

Per sier at *det* stiger, jeg antar han snakker om grafen til *f*, frem til 1 (utsagn 54). Dette utsagnet er ikke matematisk uriktig. I utsagn 58 sier Per: «*f* derivert av *x* (…) da synker den frem til der, og så stiger den, og så synker den etter det. Det ser ut til at han mener at *f* derivert *synker* i intervallene der grafen til *f* er negativ, $x < 2$ U $x > 4$, og *stiger* i intervallet der grafen til *f* er positiv. Dette er på ingen måte matematisk korrekt. Per ser ikke ut til å ha kommet langt i prosessen med å appropriere begrepet *den deriverte* ennå. Jeg tror Per sier *synker* når han snakker om et negativt intervall på en fortegnslinje, uten å tenke over hva uttrykket *synker* betyr både i dagligtale og matematisk diskurs. Liv spør i utsagn 59 om det ikke er omvendt. At det er *f* derivert av *x* som *stiger* opp til der, og så *synker*. Jeg antar at Liv tenker at *f'(x) stiger* i intervallet der grafen *stiger*. Det kan se ut til at Liv sier *stiger* når hun ser et positivt intervall på fortegnslinja til *f* derivert. Grafen til f derivert er synkende for alle verdier av *x*, den er derimot positiv for $x < 1$. Elevene skriver først Per sitt svar som konklusjon.

Utdrag 5 Bruk av uttrykket *den deriverte* II
Dette utdraget er fra intervjuet med Ola. Han jobber med følgende oppgave:

Oppgave 5
Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene.
$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

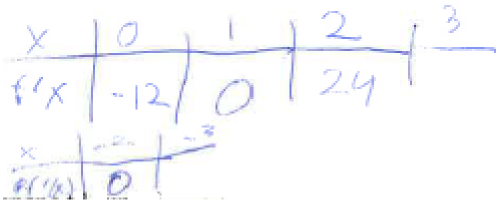
$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
Oppgavens matematiske løsning: *g* er voksende for $x < -2$ U $x > 1$
g er minkende for $-2 < x < 1$

I dette utdraget fra intervjuet med Ola bruker han den deriverte til å finne ut når grafen til *g* stiger og synker. Fra dette utdraget ser det ut til at Ola har en mye større forståelse av hva den deriverte kan formidle, enn det som kom frem blant elevene under gruppearbeidet.

Utdrag fra intervju med Ola:

15. Ola: Ja, hvis jeg finner nullpunktene så vet jeg hvor den stiger og synker. Eller i alle fall der den slutter å stige eller slutter å synke. Sånne ting.
    -tenker-
16. Ola: En ting er vel å sette inn i et sånt skjema der du har *x* og *f* derivert av *x* for eksempel. Og jobbe seg fremover. Det tar jo veldig lang tid, men du kommer jo fram etter hvert.
    -regner ut verdier-

Utklipp av Olas tabell sammen med standardiserte versjon til høyre.



x	0	1	2	3
f'(x)	-12	0	24	

x	-2	-3
f'(x)	0	

17. Ola: Den blir i alle fall null på den eneren der, altså hvis $x = 1$. Fortegnslinje altså. Det kan jeg ikke.
18. Ola: Jeg har jo ikke prøvd å gå nedover.
19. Int: Hvor mange nullpunkt er det tenker du?
20. Ola: Det er jo et tredjegradspolynom så den må jo se sånn ut (tegner skisse). Så den må jo ha et toppunkt og et bunnpunkt.
21. Ola: Jeg går ut ifra at det er den (bunnpunktet) jeg har der. Jeg skal ikke si det sikkert, men.
22. Int: Hva er grunnen til at du går ut ifra det?

23. Ola: Måten den vil stige videre oppover. Hvis du setter for eksempel tre inn her. Videre oppover så vil jo tallet bare bli høyere og høyere på den deriverte. Så da regner jeg med at jeg har kommet til den kurven der den bare går videre oppover. Jeg ser ikke at den kan komme til å bli minus der etter hvert.

Ola sier at hvis han finner nullpunktene så finner han hvor den slutter å stige eller slutter å synke. Jeg antar at han mener at hvis han finner nullpunktene til den deriverte så vet han hvor grafen til *g* slutter å stige og slutter å synke. Dette stemmer. For å finne disse punktene velger han å sette inn i en tabell og regne seg fremover. Der han skriver *f'(x)* har han brukt $g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$. Dette er en tungvint og lite fleksibel rutine. Ola er heldig som treffer på nullpunktene etter å ha regnet ut relativt få verdier for *g'(x).* Ola sier tredjegradspolynom (utsagn 20), jeg antar han tenker på en funksjon. Han har en narrativ om tredjegradspolynom(funksjoner), at de må ha et toppunkt og et bunnpunkt. Dette gjelder ikke nødvendigvis, og gjør rutinen hans enda mindre fleksibel. Hovedgrunnen til at jeg har valgt å presentere dette utdraget er hvordan Ola bruker uttrykket til den deriverte til å drøfte hvordan grafen til *g* ser ut. Det ser ut som Ola ser på *g'(x)* som en funksjon som for ulike verdier av *x* forteller om stigningen til grafen til *g* i punktet (utsagn 23). Han sier at han regner med at han har kommet til den kurven, jeg antar han mener det stedet på kurven, der den bare går videre oppover (utsagn 23). Dette utsagnet viser også innsikt i polynomuttrykk fordi han er klar over at andregradsleddet blir så stort at *g'(x)* må bli positiv.

4.2 Elevenes bruk av visuelle mediatorer

Utdragene i dette delkapittelet blir presentert fordi de eksemplifiserer hva jeg mener karakteriserer elevenes bruk av visuelle mediatorer, blant annet fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter og polynomfunksjoner.

Utdrag 6 Bruk av fortegnsskjema I
Utdraget nedenfor er fra da elevene tegnet sitt første fortegnsskjema i løpet av gruppearbeidet. Elevene løste ulikheten nedenfor som likning i første time av gruppearbeidet og fant at uttrykket har nullpunktene $x_1 = 0$ og $x_2 = 6$. I andre time gikk de tilbake til oppgaven etter kommentar fra meg som observatør om at de kunne se etter om oppgaven var ferdig løst. Utdraget er hentet fra da elevene hadde gått tilbake til oppgaven og holdt på med å faktorisere uttrykket, så de kunne sette faktorene inn i et fortegnsskjema.

Oppgave 2a) Løs ulikheten: $x^2 - 6x < 0$

Elevene bruker noen overflødige elementer i faktoriseringen av uttrykket. For å legge merke til disse er det en fordel å ha foran seg den faktoriserte formen til uttrykket $x^2 - 6x$.
Uttrykket $x^2 - 6x$ faktorisert: $x(x - 6)$.
Oppgavens matematiske løsning: $0 < x < 6$.

Elevenes diskurs, utdrag:

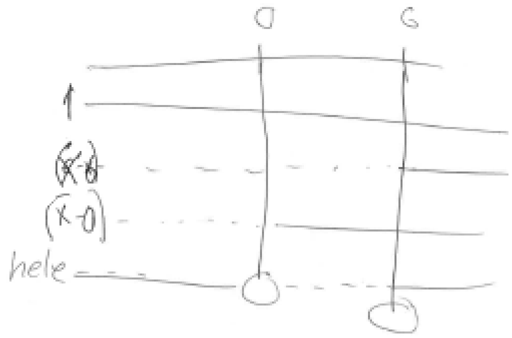
245. Liv: Er det ikke $(6 - x)$?
246. Ane: Nei, er det ikke sånn: $(x - x_1)$?

...

247. Ane: Jeg har alltid trodd at det var omvendt, at det var $(x - 6)$, er det ikke det? Eller er det helt feil?
248. Liv: Det er sikkert det
249. Ane: Jeg vet ikke helt.
250. Liv: a, hvordan er den? $(x - x_1)$, nei, vi går for *x* først. Bytter du om på dem?
251. Per: Ja *x* først.

252.	Ane: Den er først positiv.
253.	Liv: Ja, den er først positiv. Og så blir den negativ.

Pers fortegnsskjema:

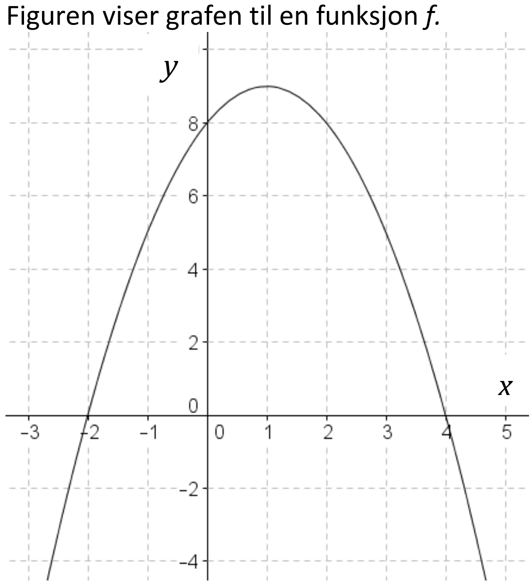


Figur 3: Pers tegning av fortegnsskjema tilknyttet oppgave 2a.

Utdraget viser at elevene var usikre på hvordan de skulle faktorisere uttrykket. Måten de landet på å gjøre det inneholder overflødige elementer. Disse overflødige elementene ser vi igjen i faktorene i fortegnsskjemaet Per tegnet. Per velger å tegne faktoren 1 som første linje i skjemaet. Denne er overflødig, men jeg antar at den er med fordi de vil ha uttrykket på formen a(*x* - x_1)(*x* - x_2). Av fortegnsskjemaet over kan vi skimte at det stod (6 – *x*) som faktor til venstre for andre linje, før (*x* – 6) ble skrevet over. I tredje linje i fortegnsskjemaet har Per skrevet (*x* – 0). Dette kunne vært skrevet enklere som kun *x.* Jeg antar også her at det er fordi de tenker at de må faktorisere uttrykket på denne formen: a(*x* - x_1)(*x* - x_2). På nederste linje skriver han «hele». Her vil jeg tro han mener 1(*x* – 6)(*x* – 0). Kommunikasjonen her er uklar både muntlig og skriftlig. Måten elevene bruker fortegnsskjemaet synes å være preget av usikkerhet.

Utdrag 7 Tegning av fortegnslinjene til *f(x)* og *f'(x)*
I følgende oppgave skal elevene tegne fortegnslinja til *f(x)* og *f'(x)* utelukkende basert på grafen til funksjonen *f.* Utdraget er tidligere brukt som eksempel på hvordan elevene bruker begrepene *stiger* og *synker*. Her blir utdraget brukt til å vise hvordan elevene tegner fortegnslinjene til *f(x)* og *f'(x).*

Oppgave 3
Figuren viser grafen til en funksjon *f.*



Tegn fortegnslinja til *f(x)* og *f'(x).*

Oppgavens matematiske løsning:

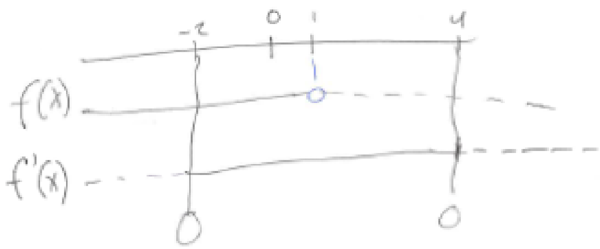
```
                                                x
          -2            1              4
       ---------------------------------------->
I  f(x) ------------0————————————————0------------
II f′(x) ——————————————0-----------------------------
```

Denne oppgaven kommer elevene som sagt, tilbake til to ganger senere fordi de ikke klarer å bli enige om løsningen. Utdraget er hentet fra første gang de ser på oppgaven.

Elevenes diskurs, utdrag:

54. Per: Altså det stiger i alle fall frem til 1, så det kan vi jo tegne.
55. Liv: Ja, da tegner du?
56. Per: *f* av *x.*
57. Liv: *f* derivert av *x*?
58. Per: Nei *f* av *x. f* derivert av *x* der stiger den til, nei, da synker den frem til der, og så stiger den, og så synker den etter det.
59. Liv: Er det ikke omvendt? At *f* derivert av *x,* at da stiger den opp til der, og synker til der?
60. Per: Nei
61. Ane: Nei, det tror ikke jeg heller.
62. Liv: Nei?

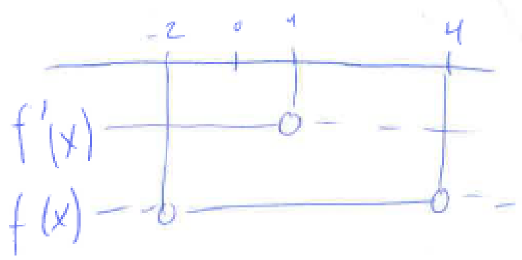
Pers tegning av fortegnslinjer:



Figur 4: Pers tegning av fortegnslinjer tilknyttet oppgave 3.

Per har tegnet på første linje at verdiene til *f(x)* har positivt fortegn når $x < 1$ og negativt fortegn når $x > 1$. Han skriver ikke *x* på den øverste tallinjen. Jeg antar likevel at han mener *x*-verdier. På andre linje har han tegnet at verdiene til *f′(x)* har negativt fortegn når $x < -2 \cup x > 4$, og at verdiene til *f′(x)* har positivt fortegn for $-2 < x < 4$. Det ser ut til at han tenker at fortegnslinjen til *f(x)* viser om grafen til *f* stiger eller synker. Dette er ikke matematisk riktig.

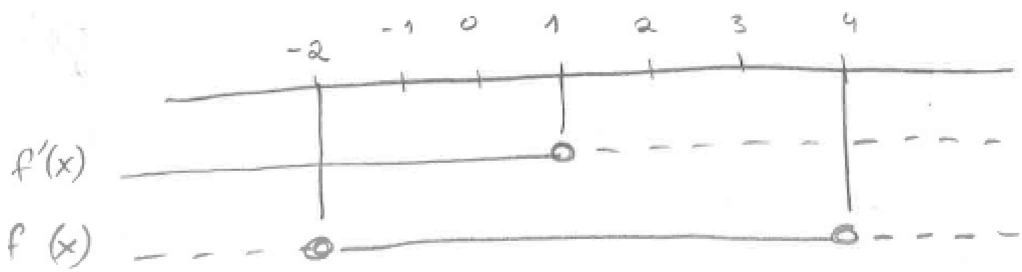
Liv har tegnet fortegnslinjene sine «motsatt» av Per:



Figur 5: Livs tegning av fortegnslinjer tilknyttet oppgave 3.

Liv har tegnet en null på fortegnslinjen til *f′(x)* under 1-tallet som jeg antar symboliserer $x = 1$. Liv ser ut til å mene at *f′(x)* er null der grafen til f har et toppunkt, se utdrag 5. Pers fortegnslinjer får gjennomslag. Dette preger samtalen i mye av gruppearbeidet. Liv mener de har gjort feil. Mens de arbeider med oppgave 5 bruker de den deriverte til å finne ut hvor topp og bunnpunktene til grafen til funksjonen er, se utdrag 16. Da blir de andre elevene enige med Liv i at de bør flytte apostrofen fra der det her står *f(x)* til *f'(x).*

Gruppas svar på oppgaven:



Figur 6: Anes tegning, som også er gruppas svarsetning, tilknyttet oppgave 3.

Utdrag 8 Bruk av uttrykket *den deriverte* I
I neste utdrag bruker elevene uttrykket *den deriverte* på ulike måter. De er uenige om hvordan fortegnslinja i oppgaven skal tolkes fordi de har ulike meninger bak nøkkelbegrepet *den deriverte*.

Oppgave 4
Nedenfor ser du fortegnslinja til *f'(x)*, for en funksjon *f.*
Lag en skisse som viser hvordan grafen til *f* kan se ut.

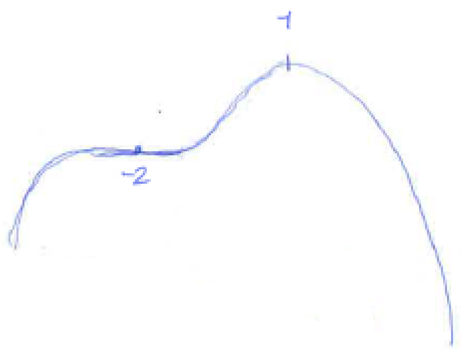
Oppgavens matematiske løsning: Grafen til *f* er voksende for *x* < 1, og avtagende for *x* > 1. Grafen har et terrassepunkt når *x* = - 2.

Elevene har nettopp tegnet fortegnslinjene i oppgave 3 «motsatt» av det som er den matematiske løsningen.

Elevenes diskurs, utdrag:

76. Liv: Hvis det er det at den deriverte har med toppunkt å gjøre så skal den se sånn ut. (skisserer). For da har den en stopp der den ikke stiger noen ting.

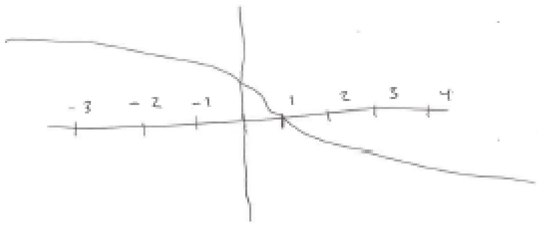
Liv sin skisse:



Figur 7: Livs skisse av grafen til f tilknyttet oppgave 4.

77. Ane: Fra (-2) til 1?
78. Liv: Nei på minus 2. At den stiger og stiger til (-2), der stiger den ingenting, og så stiger og stiger den til 1, og så synker og synker den.
79. Ola: Et terrassepunkt.
80. Liv: Men, det er jo hvis den deriverte er toppunkt.
81. Per: Den er over null frem til 1, og så er den under null.

Per sin skisse:



Figur 8: Pers tegning av grafen til f tilknyttet oppgave 4.

Liv mener at den deriverte har med toppunkt å gjøre (utsagn 76 og 80). Dette er langt fra en presis definisjon, men jeg antar at hun mener at de bruker den deriverte til å finne toppunkt. Per ser ut til å tenke at der fortegnet til *f'(x)* er positivt er grafen til *f* positiv. Han har ikke tatt hensyn til nullen ved minus to.
Terrassepunkt er et annet ord som elevene bruker her (utsagn 3 og 4). Liv og Ola er enige om at det er et terrassepunkt når $x = -2$ fordi den da har et punkt der den ikke stiger noen ting.

4.3 Elevenes narrativer

Også i denne delen av oppgaven vil jeg presentere utdrag fra elevenes diskurs mens de arbeider med oppgaver. Utdragene jeg presenterer her er valgt fordi de viser eksempler på hvilke narrativer elevene har og bruker om fortegnsskjema, andregradsulikheter og polynomfunksjoner.

Utdrag 9 Elevenes narrativ om fortegnsskjema.
Utdraget er hentet fra elevenes arbeid med første oppgave i oppgaveheftet. Dette er en tekstsvarsoppgave.

Oppgave 1 Hva er et fortegnsskjema? Når bruker man det?

2. Ola: Et skjema du setter opp då for å liksom for å skissere det litt ut hvordan en graf kan se ut. Der du viser frem for eksempel toppunkt og bunnpunkt og sånne ting.
3. Per: Er det ikke hvor den stiger og hvor den synker?
4. Ola: Ja, hvor den stiger og hvor den synker, og finne terrassepunkt og slike ting.
5. Liv: Men det kan jo være for å finne andre ting også. Det kan jo være å finne for eksempel hvor han er på minussida. Så et fortegnsskjema kan jo både være for en graf, men også for den deriverte av en graf. Så det kan jo være, vise flere ting enn bare topp og bunnpunkt.

Ane skriver ned gruppas svar:

Et skjema der du viser hvordan en graf vil se ut.
Finner bunn- og topp toppunkt, hvor grafen krysser negativt
Bruker den til den deriverte, og hvis du skal tegne
opp en graf dersom du har fått en likning

Elevene har litt diffuse narrativer om fortegnsskjema. Første og tredje setning i elevsvaret antar jeg svarer til at fortegnslinja til *f'(x)* kan brukes til å lage en skisse av grafen. Det samme gjelder starten av andre setning i elevsvaret. Andre del av andre setning: «hvor grafen krysser negativt» er mer diffus. Jeg antar at de her sikter til bruken av fortegnsskjema i arbeid med løsning av ulikheter. Ved bruk av fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter kan fortegnslinja til uttrykket vise ved hvilken *x*-verdi uttrykket går fra å være positivt, til å bli negativt. Det at elevene skriver om «topp- og bunnpunkt» og «krysser negativt» i samme setning, kan indikere at elevene har vanskelig for å skille klart mellom bruk av fortegnsskjema for å finne monotoniegenskaper til en funksjon, og til å finne gyldige områder til en ulikhet. Med unntak av denne diffuse halve setningen der elevene gjerne er inne på det, nevner ikke elevene bruk av fortegnsskjema for å finne ut når et uttrykk er positivt eller negativt.

Utdrag 10 Narrativ om multiplisering av parenteser
I neste oppgave skal elevene løse en ulikhet som er på faktorisert form. Elevene velger først å gange sammen parentesene ved hjelp av en narrativ.

Oppgave 2 b) Løs ulikheten $(x-1)(x-2) > 0$

Liv: Bakerst med bakerst, bakerst med fremst…

Dette er et eksempel på en andreordens narrativ. En beskrivelse av hvordan elevene behandler objekter.

Notatene til Liv:

b) $(x-1)(x-2)$

$2 - x - 2x + x^2$

$x^2 - 3x + 2 > 0$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$ $\frac{3 \pm 1}{2}$ $x_1 = 2$
$x_2 = 1$

Elevene velger å gange sammen parentesene. Da bruker de narrativen for å gange sammen parenteser. De får da $x^2 - 3x + 2$. Deretter bruker de abc-formel for å finne nullpunktene til uttrykket. De bruker ikke narrativen om faktorisering av andregradsuttrykk: «ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) hvor x_1

og x_2 er løsning 1 og 2 som gjør at uttrykket blir 0. Med bruk av denne kunne oppgaven vært løst ved bruk av færre manipulasjoner.

Utdrag 11 Elevenes narrativ om monotoniegenskapene til en tredjegradsfunksjon
Dette utdraget er to sitat fra Ola og Liv som blir sagt mens elevene jobber med å finne monotoniegenskapene til oppgaven nedenfor. Første sitat blir sagt i første time av gruppearbeidet, første gang elevene jobber med oppgaven. Elevene klarer ikke å løse oppgaven da, så de går tilbake til den i andre time. Livs sitat blir sagt i andre time, mens elevene jobber med oppgaven for andre gang.

Oppgave 5b) Beskriv monotoniegenskapene til funksjonen. h(x) = $-x^3$

Løsning: *h* er minkende for alle verdier av *x.* Funksjonen er strengt minkende for alle $x \neq 0$.

Sitat Ola:

140. Ola: Hvis det er et tredjegradspolynom, så skal den vel gå, i alle fall når det er minus først, så skal den vel gå ned, så først opp og så nedover.

Sitat Liv:

320. Liv: «Dette er jo en tredjegradsfunksjon. Den har ett toppunkt, og ett bunnpunkt.»

Ane skriver gruppas svar:

$h(x) = -x^3$
(grafen synker til $x=0$ og stiger til $x=3$
og synker fra $x=3$)

grafen stiger til $x=0$ og synker fra $x=0$

Dette er en oppgave som elevene strever med og ikke klarer å løse. Grunnen til dette ligger gjerne i narrativen deres om tredjegradsfunksjoner. Ola sier tredjegradspolynom, men jeg antar at han her snakker om en funksjon. Han beskriver at *den,* jeg antar grafen, skal gå ned, så først opp og så nedover. Jeg tolker dette som at han tenker at tredjegradsfunksjoner skal ha et toppunkt og et bunnpunkt. Liv sin narrativ er gjerne lettere å tolke. Jeg antar ut fra elevsvarets og sitatene at elevene har en narrativ om tredjegradsfunksjoner at den skal ha et toppunkt og et bunnpunkt. Dette er en førsteordens narrativ som ikke gjelder for tredjegradsfunksjoner der andre- og førstegradsleddet er lik null, som *h.*

4.4 Elevenes rutiner

Utdragene i dette siste delkapittelet er valgt fordi de eksemplifiserer to av rutinene som elevene bruker i oppgaveløsningen.

Utdrag 12 Bruk av abc-formel som ritual
Dette utdraget viser bruk av abc-formel som ritual. Elevene velger å bruke denne formelen med alle andregradsuttrykk de har med å gjøre i oppgaveheftet. At elevene bruker formelen i denne

oppgaven, tyder på manglende rutine for faktorisering av andregradsuttrykk der konstantleddet er lik 0.

Oppgave 2a Løs ulikheten: $x^2 - 6x < 0$

Faktorisert form: $x(x - 6) < 0$
Oppgavens matematiske løsning: $0 < x < 6$

Utdraget er hentet fra starten av første time der elevene jobber med sin første regneoppgave. Elevene bruker litt tid på å huske hvordan abc-formelen var før de begynner utregningen.

Elevenes diskurs, utdrag:

30. Liv: Ehm, du må jo bruke abc-formel her. Jeg klarer ikke å huske.
31. Ane: Du kan prøve det og se.
32. Liv: Jeg må først skrive formelen. Hva er den?
33. Per: Minus b, pluss minus kvadratroten av b i andre, minus fire ganger ac, delt på to ganger a.
    …
34. Liv: Ok, det blir jo -6, nei det blir 6.
35. Per: Hvor er a'en, og b'en, og hvor er c'en egentlig?
36. Liv: a = 1, b = -6 og c = 0.
37. Ane: Mhm
    …
38. Liv: Jeg fant ut at $x_1 = 6$ og $x_2 = 0$.
39. Ola: Da er det jeg som er på jordet.
40. Liv: Du må huske at minus 6 er i parentes.

Livs utregning:

$$\frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 0}}{2 \times 1} \qquad \frac{6 \pm 6}{2}$$

$$\frac{12}{2} = 6$$

$$x_1 = 6$$
$$x_2 = 0$$

Ola sin utregning:

$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2}$$

$$6 \pm 9 = 14, 2$$

Elevene velger å bruke abc-formel, selv om uttrykket kunne vært faktorisert ved kun å flytte en x utenfor en parentes. Liv sier, (utsagn 30), at de: «*må* jo bruke abc-formel her». Elevenes bruk av abc-formel virker å være lite fleksibel, de *må* bruke den til å finne nullpunktene til andregradsuttrykk. De har uttrykket på formen $ax^2 + bx + c = 0$, og setter verdiene til koeffisientene inn i «abc-formelen»: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ for å finne x-verdiene som gjør at uttrykket blir null.

Elevene kommer for det meste frem til riktige nullpunkter ved bruk abc-formelen. De er mer øvet i hvordan rutinen skal gjennomføres, enn å se når det er hensiktsmessig. Et av unntakene der utregningen ikke gir riktige nullpunkter er Ola sin utregning på denne oppgaven. Her har han skrevet – (-6) utenfor brøkstreken, og får dermed 6 ± 3, som gir uriktige verdier. Svaret er strøket ut så det er vanskelig å lese.

Utdrag 13 Elevenes rutine for drøfting av polynomfunksjoner uten fortegnsskjema
Under gruppearbeidet jobber elevene med å beskrive monotoniegenskapene til to tredjegradsfunksjoner. Dette utdraget er fra arbeidet med den første av dem. Elevene ser ut til å bruke en rutine som består av tre trinn i begge oppgavene:

1. Derivere funksjonen.
2. Finne nullpunktene til den deriverte ved hjelp av abc-formel.
3. Anta ut fra fortegnet til koeffisienten til tredjegradsleddet hvilket av nullpunktene til den deriverte som er toppunkt, og hvilket som er bunnpunkt.

Når elevene går i gang med denne oppgaven har de fortsatt Per sin versjon av fortegnslinjene i oppgave 3 som svar, se utdrag 8. Derfor prøver Liv å overbevise medelevene om at den deriverte er null der grafen til *g* har et toppunkt eller bunnpunkt. Elevene jobber med følgende oppgave i dette utdraget:

Oppgave 5 Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
Oppgavens matematiske løsning: g er voksende for $x < -2$ U $x > 1$
g er minkende for $-2 < x < 1$

Elevenes diskurs, utdrag:

82. Per: Vi må vel bare derivere den?
83. Liv: Og når du deriverer den, hva finner du ut av da?
84. Per: Jeg vet ikke, men det var så stygge tall.

(...)

104. Liv: $6x^2 + 6x – 12$ Ja, da har vi derivert den. Men hva sier den deriverte for noe? Det er der vi er litt uenige.

...

105. Liv: Fordi monotoniegenskapene er jo hvor den stiger og synker, sant? Var det ikke det vi ble enige om? Og når vi skal finne ut hvor den stiger og hvor den synker så må man jo finne ut hvor nullpunktene er. Så da må vi sette den lik 0. Men, det gir ikke mening hvis ikke den deriverte har med toppunkt og bunnpunkt.

-Jobber med å sette $6x^2 + 6x – 12$ inn i abc-formelen. De ser ikke at de kunne ha faktorisert ut 6-tallet, så det hadde blitt lettere tall å jobbe med. De finner *x*-verdiene 1 og (-2).

114. Liv: Også vet vi at, så vet vi at det er positivt foran, sant.
115. Liv: Har ikke det noe å si at den er positiv foran?
116. Ane: Da går den jo
117. Liv: Først opp
118. Ane: Ja

119. Liv: Da vil det si at toppunktet er 1 og bunnpunktet er -2?

(…)

131. Per: Den går jo mest opp så, skal vi bare ta den da?

132. Ane: Jeg tror også det er den.

133. Liv: Ja, men da tar vi den. Siden det er positivt fortegn i tredjegradsfunksjonen så går grafen sånn. Og da er toppunktet 1 og bunnpunktet -2.

Pers utregninger:

$6x^2 + 6x - 12 = 0$ $\quad \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot -12}}{12}$

1 og -2

Ane skriver ned gruppas konklusjon:

Siden fortegnet er positivt i funksjonen.
vil grafen se ut slik: 
Toppunktet vil være 1 og bunnpunktet blir -2.

Rutinen elevene bruker ser ut til å være preget av at det er en stund siden sist de jobbet med å drøfte en polynomfunksjon. I oppgave 1 sa elevene at de brukte fortegnsskjema når de skulle skissere en graf. Men her bruker de ikke fortegnsskjema. Per starter prosessen med å si at de må vel derivere (utsagn 82), uten å ha noen begrunnelse for det (utsagn 84). Liv forsøker å begrunne hvorfor de utfører operasjonene derivering og å finne nullpunktene (utsagn 105). Hun sier: «Og når vi skal finne ut hvor den stiger og hvor den synker så må man jo finne ut hvor nullpunktene er. Så da må vi sette den lik 0. Men, det gir ikke mening hvis ikke den deriverte har med toppunkt og bunnpunkt.» Det er ikke en matematisk overbevisning, men heller en oppramsing av steg i et ritual hun husker. Hun virker å forholde seg til den deriverte som et sted i et ritual for å finne topp og bunnpunkt. Siste steg som elevene bruker i ritualet, er å sammen diskutere hvordan grafen kan skisseres ut fra fortegnet til koeffisienten til tredjegradsleddet i funksjonen. Elevene kommer ikke i mål med en godkjent løsning på oppgaven. Godkjenningen er avhengig av andre. Svaret deres er basert på en felles antakelse om at en tredjegradsfunksjon der koeffisienten til tredjegradsleddet er positiv, vil funksjonen ha en form som ligner skissen i svarsetningen. I skissen har toppunktet en lavere *x*-verdi enn bunnpunktet. I svarsetningen svarer de likevel at «toppunktet vil være 1 og bunnpunktet blir (-2).» Jeg er usikker på hvorfor elevene velger å si at toppunktet vil være 1 og bunnpunktet vil være (-2). Hvis elevene tenker at dette er *x*-verdiene til ekstremalpunktene burde de vært plassert motsatt ifølge skissen deres. Kanskje velger de å sette 1 som toppunkt fordi 1 er større enn (-2), og de tenker på verdiene som funksjonsverdier.

Utdrag 14 Anes rutine for drøfting av polynomfunksjoner med fortegnsskjema
Dette utdraget er hentet fra intervjuet med Ane. I intervjuene jobber elevene med å drøfte den samme funksjonen *g* som de gjorde under gruppearbeidet. Ane ser ut til å bruke følgende steg i løsningsprosessen:

1. Deriver funksjonen
2. Finn nullpunktene til den deriverte ved hjelp av abc-formel
3. Faktoriser uttrykket til den deriverte

4. Tegn fortegnsskjema til uttrykket til den deriverte
5. Skisser grafen ut fra fortegnslinja til den deriverte

I dette utdraget jobber Ane med å løse følgende oppgave:

Oppgave 5 Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

Oppgavens matematiske løsning: g er voksende for $x < -2 \cup x > 1$

g er minkende for $-2 < x < 1$

31. Ane: Jeg vet ikke om jeg kommer til å klare den altså. Jeg kan prøve.
    Ane deriverer funksjonen:

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$3 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 3x - 12$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

32. Ane: Skal jeg bare gjøre et eller annet?
    -setter inn i abc-formel. Setter ikke 6 utenfor, så det blir store tall å jobbe med.
33. Int: Husker du da dere jobbet med denne i gruppa?
34. Ane: Var det den som ble 18? Var det det? Jeg må tenke…
35. Ane: Blir 18 · 18 = 324? Ja, det må jo være det.

$$\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot -12}}{2 \cdot 6}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 + 288}}{12}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{324}}{12}$$

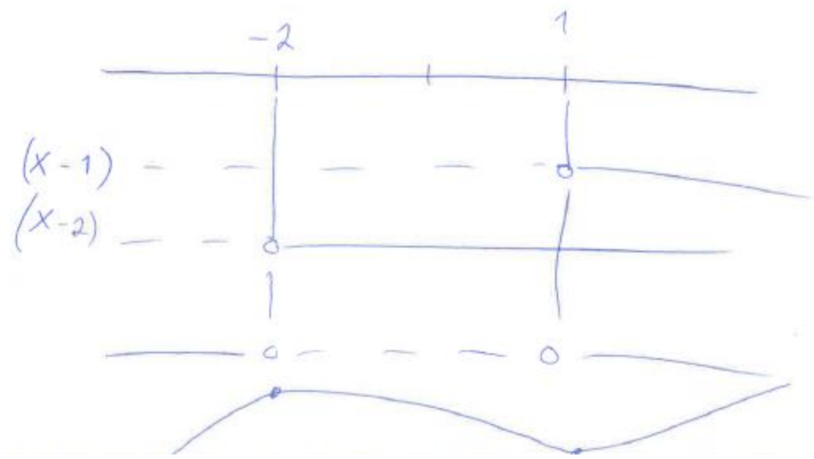
$$\frac{-6 \pm 18}{12}$$

240
24
24
288
36
324

$$x_1 = \frac{-6+18}{12} = \frac{12}{12} = \underline{1}$$

$$x_2 = \frac{-6-18}{12} = \frac{-24}{12} = \underline{-2}$$

36. Ane: Da får jeg at en er -2 og den andre 1.
37. Ane: hmm…
38. Int: Hva tenker du nå?
39. Ane: Jeg bare husker ikke helt hva jeg skal sette inn her. I de parentesene. Er det bare (x – 1), (x – 2), stemmer ikke det? Og da blir det sånn.



i. Figur 9: Anes tegning av fortegnsskjema tilknyttet oppgave 5.

40. Ane: Og da vet vi at den stiger fram til her, og synker til 1, og så går opp igjen. Men, jeg aner ikke om det er rett.

Ane gjennomfører steg for steg i ritualet uten å vite om hun har kommet frem til riktig svar (utsagn 40).

Utdrag 15 Livs rutine for drøfting av polynomfunksjoner, en utforskning?
Dette utdraget er hentet fra intervjuet med Liv. Liv ser ut til å bruke samme steg i løsningsprosessen som Ane.
Stegene i rutinen:

1. Deriver funksjonen
2. Finn nullpunktene til den deriverte ved hjelp av abc-formel
3. Faktoriser uttrykket til den deriverte
4. Tegn fortegnsskjema til uttrykket til den deriverte
5. Skisser grafen ut fra fortegnslinja til den deriverte

Liv jobber med å løse følgende oppgave:

Oppgave 5 Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

Oppgavens matematiske løsning: g er voksende for $x < -2 \cup x > 1$

g er minkende for $-2 < x < 1$

21. Liv: Jeg kan jo prøve å regne ut topp og bunnpunktene. Først derivere den og så sette den lik null.

…

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

22. Liv: Da har vi jo en andregradsfunksjon. Så setter vi den inn i abc-formelen, og så får vi nullpunktene.

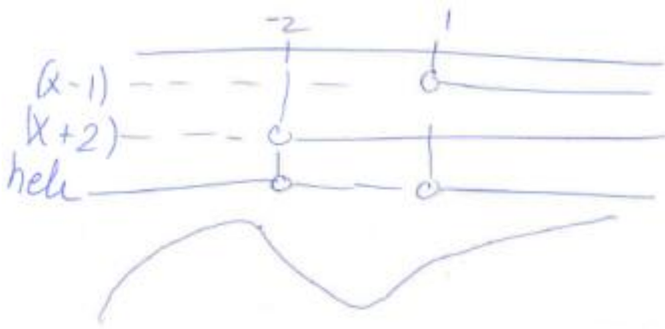
$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 6 \times -12}}{6 \times 2}$$

23. Int: Husker du da dere holdt på med denne i gruppa?
24. Liv: Ja, det var 18. Nei, jo jeg husker det. Det var et veldig stort tall som Per kom på. Men hva var det for noe igjen? Jeg tror, nei, jeg husker ikke. Jeg tror jeg må regne det ut hvis jeg skal få rett.

…

$$\frac{-6 \pm 18}{12} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = -2$$

25. Liv: Og så for å finne topp- og bunnpunkt så må jeg sette det i fortegnsskjema. (Skriver opp faktorene først)



Figur 10: Livs tegning av fortegnsskjema tilknyttet oppgave 5.

28. Liv: Så den tredjegradsfunksjonen så stiger den først. Den stiger til $x = -2$ og så synker den til $x = 1$ og så stigen den videre igjen.

…

Rutinen hennes har elementer av utforskning i seg. Hun jobber individuelt og svaret hennes blir stående som godkjent ut fra stegene i rutinen. Ut fra hvordan Liv jobber sammen med de andre i gruppearbeidet vil jeg tro rutinen hennes mangler fleksibiliteten som trengs for å kunne kalle de en utforskning.

5 Diskusjon

Forskningsspørsmålet denne studien ønsket å besvare er:

Hva karakteriserer fire S1-elevers bruk av fortegnsskjema i løsning av andregradsulikheter og drøfting av polynomfunksjoner?

Det fremkom av analysen at elevenes bruk av fortegnsskjema var preget av misvisende ordbruk og ulik begrepsbruk elevene imellom. Ordbruk er svært viktig fordi det er ansvarlig for hva brukeren kan si om, og dermed se i verden (Sfard, 2008). Elevene hadde kommet ulikt langt i prosessen med å appropriere begrepet *den deriverte* (jf. Wittek, 2012). Dette utfordret samarbeidet. Blant annet gjorde det at de ikke så det samme ut fra fortegnslinja til den deriverte. En av elevene gav imidlertid i intervjuet uttrykk for at han var kommet lengre i prosessen med å individualisere begrepet *den deriverte* enn det som ble synlig under gruppearbeidet (Sfard, 2007). I tillegg ble uttrykkene *stiger* og *synker* brukt i strid med hva ordene betyr, og «*x*» ble brukt om uttrykket i tolkning av fortegnsskjemaet til en ulikhet.

Elevene hadde nytte av fortegnsskjema som visuell mediator (jf. Sfard, 2008), spesielt i arbeid med andregradsulikheter. Utfordringen i løsning av ulikhetene lå hovedsakelig i faktorisering av uttrykkene. Elevene var heller ikke fortrolige med bruk av ulikhetstegn. De valgte å bruke ord som *større enn* og *mindre enn*. At elevene hadde ulike meninger bak begrepet *den deriverte* gjorde det utfordrende å sammen tegne eller tolke fortegnslinjen til den deriverte. I tillegg ble bruk av en feilaktig narrativ (jf. Sfard, 2008) om at tredjegradsfunksjoner må ha topp og bunnpunkt begrensende i elevenes drøfting av tredjegradsfunksjon uten første- og andregradsledd. I likhet med i studien til Gade (2007) ble både fysiske og intellektuelle redskaper medierende midler i problemløsningen. Elevene fikk tilgang til hverandres tanker ved at de satte ord på tankene sine. Papirark og penn var fysiske redskaper som ble brukt til å tegne visuelle mediatorer som fortegnsskjema.

Elevene mestret i større grad hvordan abc-formelen skulle brukes enn når det var mest hensiktsmessig å bruke den. Formelen ble brukt som ledd i ritual (jf. Sfard, 2008) til å finne nullpunkter for andregradspolynom, også der førstegradsleddet og konstantleddet manglet. Rutinene deres (jf. Sfard, 2008) for drøfting av polynomfunksjoner var lite fleksible og preget av usikkerhet. I gruppearbeidet var fortegnsskjema ikke del av denne rutinen. To av elevene brukte fortegnsskjema til drøfting av en polynomfunksjon under intervjuene. En av elevene var svært usikker på bruken av redskapet (jf. Saljö, 2002), mens den andre eleven brukte en rutine som nærmet seg en utforskning (jf. Sfard, 2008).

Så lenge skolens undervisning fokuserer på *hvordan* rutiner skal utføres og nesten forsømmer spørsmålet om *når* denne rutinen ville være mest hensiktsmessig, er det mer sannsynlig å resultere i diskurs av ritualer enn av utforskninger (Sfard 2008). Mine funn bekrefter Sfards påstand i den grad at elevene i min studie viste mer mestring av hvordan rutinene skal utføres, enn når det er hensiktsmessig. Elevene i denne studien viste, som elevene i Kadijas (2010) studie, at de generelt visste hvordan de kunne løse andregradslikninger. Abc-formel ble brukt til å finne nullpunktene til alle andregradsuttrykkene. Elevenes rutiner bærer dermed preg av å være det Sfard kaller ritualer. Elevene går på grunn av dette glipp av verdifulle muligheter for å utforske matematikken som er involvert og derigjennom læringsmuligheter.

I Vaiyavutjamai og Clements (2006) sin studie av elevers forståelse av kvadratiske likninger syntes mange av elevene at det var forvirrende med konseptet variabel. At elevene i min studie bruker uttrykket «*x*» både om variabelen og om uttrykket i en ulikhet kan tyde på at også elevene i min studie synes det var forvirrende med konseptet variabel. Masson (2010) fant at få av elevene var i stand til å bruke prosedyrene så effektivt som mulig. Elevene i denne studien brukte, som i Massons studie, narrativen om å gange sammen parenteser for å finne nullpunktene til et uttrykk på faktorisert form: a(x-x_1)(x-x_2). Det vitner om lite fleksible rutiner og manglende narrativ om faktorisering for andregradsuttrykk: «ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2), hvor x_1 og x_2 er løsning 1 og 2 som gjør at uttrykket blir 0.

Samarbeid kan avdekke konkurrerende meninger bak begreper, slik det gjorde i elevenes diskusjon om *den deriverte*. Samspill er avgjørende for læring og bør være en stor del av matematikktimene, fordi språket vårt er det viktigste redskapet vi har (Wittek, 2012).

6 Avslutning
I dette kapittelet vil jeg i 6.1 ønsker jeg å si noe om hva lærere kan gjøre for å legge til rette for at elevene skal være i stand til å bruke fortegnsskjema som visuell mediator på en hensiktsmessig måte. Endelig vil jeg i 6.2 gi en egenrefleksjon rundt studien.

6.1 Implikasjon
Arbeidet med denne studien har gitt meg en ny bevissthet rundt elevenes og ens egen matematiske diskurs som matematikklærer. Synet på matematisk diskurs som selve objektet som læres (Sfard, 2008) har gjort meg mer oppmerksom på viktigheten av matematisk riktig ordbruk og matematisk korrekte narrativer. Jeg vil i ettertid være mer opptatt av å omtale matematiske begreper på en presis måte enn jeg har vært før. Hvis vi tar snarveier, og for eksempel sier at tredjegradsfunksjoner har et topp- og et bunnpunkt, kan elevene tilegne seg en narrativ som begrenser dem. Dette kan andre matematikklærere også lære av. Å lære matematikk blir sett på som individualisering av matematisk diskurs, og å spørre hva elevene ikke har lært ennå blir ensbetydende med å spørre hvilke endringer de må gjøre i måten de kommuniserer (Sfard, 2007). Ut fra dette bør samhandling i matematikktimene vektlegges.

Utforskende rutiner bør etterstrebes fordi de er mer fleksible og fordi de fører frem til en godkjent narrativ (Sfard, 2008). Mine funn viste blant annet at elevene vil ha nytte av mer fleksible rutiner for faktorisering av andregradsuttrykk, fremfor å være låst til abc-formelen som ritual.

Studien viste at det er avgjørende at elevene har tilegnet seg en riktig mening bak begrepet *den deriverte* for å gjøre mening av fortegnslinjen til den deriverte. Dette følger også rent logisk. Det vil derfor være lurt å forsikre seg om at elevene har individualisert begrepet den deriverte før man begynner å drøfte polynomfunksjoner.

6.2 Egenrefleksjon
Jeg er glad for at jeg har gjennomført arbeidet med denne studien. Noe av det jeg setter pris på at jeg har brukt tid på å sette meg inn i er perspektivet på matematikk som diskurs (Sfard, 2008). Dette perspektivet vil følge meg videre i arbeidet som lærer. Jeg ønsker å legge opp til mer mellommenneskelig kommunikasjon i matematikktimene mine heretter. Hvis elevene bruker mesteparten av matematikktimene til å sitte alene og jobbe individuelt med oppgaver, tror jeg det er større fare for at de tilegner seg en diskurs som ikke er matematisk riktig. Dette kan gjerne være vanskelig å oppdage ved lite samhandling.

Hvis jeg skulle ha endret på noe med hvordan studien ble utført, ville jeg byttet ut oppgave 6, og heller lagt til noen flere ulikheter som skulle løses, og flere polynomfunksjoner som skulle drøftes. Da ville jeg hatt enda mer grunnlag for å kunne si noe om hva som karakteriserer elevenes rutiner og bruk av visuelle mediatorer.

Det har vært vanskelig å finne studier som har studert det samme som meg. Dette har ført til at jeg ikke har hatt så mye å sammenligne som jeg kunne ønsket. Mer forskning på elevers bruk av fortegnsskjema vil være nyttig. Jeg valgte å ikke ta videoopptak under gruppearbeidet for å lettere få tillatelse til å gjennomføre studien. Dette gjorde at jeg ikke fikk studert elevenes gester og ansiktsuttrykk, noe som kan gi mer informasjon om elevenes bruk av fortegnsskjema. Det kunne også vært nyttig å se på når og hvordan fortegnsskjema introduseres, og hvilke innvirkninger dette har på elevenes bruk av redskapet.

7 Referanseliste

Boaler, J. (1998, Jan). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, ss. 41-62.

Bryman, A. (2012). *Social research methods.* New York: Oxford University Press.

Gade, S. (2007, September 2 - 6). Artefact mediated classroom practice. I C. Bergsten, H. Grevholm, H. S. Måsøval, & F. (. Rønning, *Relating Practice and Research in Mathematics Education. Proceedings of Norma 05* (ss. 257 - 269). Trondheim: Tapir Academic Press.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H., & Borgan, Ø. (2015). *Matematikk S1.* Oslo: Aschehoug & Co.

Kadija, B. (2010). *Albania nupper secondary students' ways of working with equations.* Kristiansand: Universitetet i Agder.

Karlson, K. A. (2014). *Sigma S1 matematikk.* Oslo: Gyldendal.

Masson, E. (2010). *Prosedural and conceptual knowledge among upper secondary students. The case of second degree polynomials.* Kristiansand: Master's Thesis in Mathematics Education. Faculty og Engineering and Science, University of Agder 2010.

matematikk.net. (2019, Februar 15). Hentet fra Eksamensoppgaver: https://matematikk.net/side/Eksamensoppgaver

matematikk.org. (2014, September 11). Hentet fra Monotoniegenskaper: https://www.matematikk.org/student/artikkel.html?tid=154785&within_tid=154782

matematikk.org. (2014, November 28). Hentet fra Fortegnsskjema: https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=154621&within_tid=154618

McCambridge, J., Witton, J., & Elbourne, D. R. (2013, November 22). Systematic review of the Hawthorne effect: New concepts are neededto study research participation effects. *Journal of Clinical Epidemiology*, ss. 267-277.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2013). *Sinus matematikk S1.* Oslo: Cappelen Damm AS.

Sfard, A. (2007, Des 5). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, ss. 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating.* New York: Cambridge University Press.

Svartdal, F. (2019 , Februar 18). *Store norske leksikon.* Hentet fra Hawthorne-effekt: https://snl.no/Hawthorne-effekt

Säljö, R. (2002). Læring, kunnskap og sosiokulturell utvikling: meennesket og dets redskaper. I I. (. Bråten, *Læring i sosialt, kognitivt og sosialt-kognitivt perspektiv* (ss. 31-57). Oslo: Cappelen Forlag.

Tjora, A., & Halle, H. N. (2018, April 20). *Store norske leksikon.* Hentet fra Hawthorneeffekten: https://snl.no/Hawthorneeffekten

Utdanningsdirektoratet. (2013, August 1). *udir.no.* Hentet fra Læreplan i matematikk for samfunnsfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT4-01): https://www.udir.no/kl06/MAT4-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-s1

Utdanningsdirektoratet. (2013, August 1). *udir.no*. Hentet fra Læreplan i matematikk fellesfag: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-1t-%E2%80%93-vg1-studieforebuande-utdanningsprogram

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. (. (2006). Effects of Classroom Instruction on Student Performance on, and Understanding of, Linear. *Mathematical Thinking and Learning*, ss. 113-147.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of Classroom Instruction on Students' Understanding of Quadratic Equations. *Mathematics Education Research Journal*, ss. 47-77.

Viirman, O., & Nardi, E. (2018, November 24). Negotiating different disciplinary discourses: biology students' ritualized and exploratory participationin mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*.

Wittek, L. (2012). *Læring i og mellom mennesker.* Oslo: Cappelen Damm .

Vedlegg

1 Godkjenningsbrev fra NSD

NSD sin vurdering

Prosjekttittel
Bruk av fortegnsskjema som medierende redskap i matematikk. En studie av S1-elevers arbeid med andregradsulikheter og polynomfunksjoner.

Referansenummer
964057

Registrert
21.12.2018 av Ida Synnøve Lohne - idasl10@student.uia.no

Behandlingsansvarlig institusjon
Universitetet i Agder / Fakultet for teknologi og realfag / Institutt for matematiske fag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)
Martin Carlsen, martin.carlsen@uia.no, tlf: 38141659

Type prosjekt
Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student
Ida Synnøve Lohne, is.lohne@kvs-lyngdal.no, tlf: 48250415

Prosjektperiode
01.02.2019 - 15.05.2019

Status
28.01.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

28.01.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 28.01.2019. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.05.2019.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). Dersom du benytter en databehandler i prosjektet må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

2 Oppgaveheftet

Gruppeoppgaver
1. mars 2019

Oppgave 1
Tekstsvarsoppgaver. Besvar spørsmålene nedenfor med ord.

Fortegnsskjema
Hva er et fortegnsskjema?
Når bruker man det?

Ulikhet
Hva er en ulikhet?
Hvordan kan løsningene til en ulikhet være?

Monotoniegenskaper
Hva menes med monotoniegenskapene til en funksjon?
Hvordan kan vi finne disse egenskapene?

Oppgave 2
Løs ulikhetene

a) $x^2 - 6x < 0$

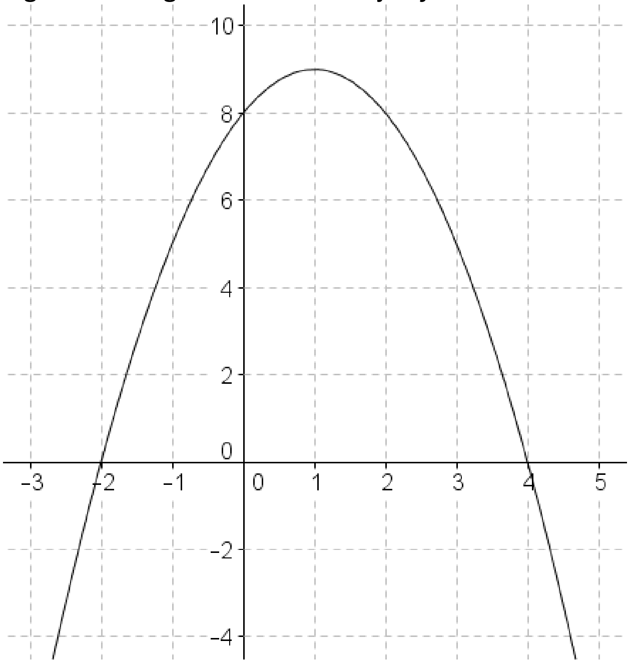
b) $(x - 1)(x - 2) > 0$

c) $-x^2 - 6x \geq 9$

d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

Oppgave 3

Figuren viser grafen til en funksjon *f.*



Tegn fortegnslinja til *f(x)* og *f'(x).*

Oppgave 4

Nedenfor ser du fortegnslinja til *f'(x)*, for en funksjon *f.*

Lag en skisse som viser hvordan grafen til *f* kan se ut.

Oppgave 5

Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene.

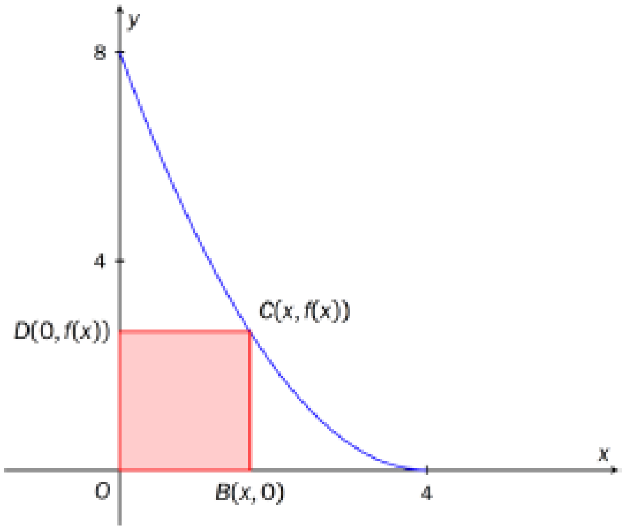
a) *g(x)* = $2x^3 + 3x^2 - 12x$

b) *h(x)* = $-x^3$

Oppgave 6

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ $\qquad 0 < x < 4$

Under grafen til *f* er det tegnet inn et rektangel ABCD, slik som figuren nedenfor viser.



Bestem x slik at arealet til rektangelet blir størst mulig.

Oppgavesamlingen er laget ut fra eksamensoppgavene: Høst 2018, Vår 2018 og Høst 2017. Noen av oppgavene er direkte kopi, andre er brukt som inspirasjon.
Oppgavene er hentet fra https://matematikk.net/side/Eksamensoppgaver

3 Intervjuguide

Intervjuguide
15. mars 2019

Fredag for to uker siden jobbet dere med å beskrive monotoniegenskapene til denne funksjonen:
$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
Husker du hva dere gjorde for å løse den?
Evt. hvis det er vanskelig å huske, hva vil du gjøre for å løse den?
Hva trenger du for å løse den?
Hvordan kan du sjekke om svaret ditt er rett?

Fredag 1. mars jobbet dere også med å løse denne ulikheten: $-x^2 - 6x \geq 9$
Husker du hva dere gjorde for å løse den?
Evt. hvis det er vanskelig å huske, hva vil du gjøre for å løse den?
Hva trenger du for å løse den?
Hvordan kan du sjekke om svaret ditt er rett?

4 Transkripsjon av gruppearbeid

Gruppearbeidet varer i 45 x 2 min. Det meste av samtalen er transkribert. Steder der jeg har utelatt noe er markert med ei linje med tre prikker. Det som er utelatt, er utenom snakk eller mumling eller at elevene snakker i munnen på hverandre. Innimellom legger jeg til en kommentar om hva elevene gjør. Oppgavene som elevene jobber med, er klippet inn. De fire elevene har fått navnene Ola, Per, Liv og Ane.

Oppgave 1
Hva er et fortegnsskjema?
Når bruker man det?

1. Liv: Hva er et fortegnsskjema?

-De blir enige om at Ane skriver ned løsningene.

2. Ola: Et skjema du setter opp då for å liksom for å skissere det litt ut hvordan en graf kan se ut. Der du viser frem for eksempel toppunkt og bunnpunkt og sånne ting.
3. Per: Er det ikke hvor den stiger og hvor den synker?
4. Ola: Ja, hvor den stiger og hvor den synker, og finne terrassepunkt og slike ting.
5. Liv: Men det kan jo være for å finne andre ting også. Det kan jo være å finne for eksempel hvor han er på minussida. Så et fortegnsskjema kan jo både være for en graf, men også for den deriverte av en graf. Så det kan jo være, vise flere ting enn bare topp og bunnpunkt.
6. Ola: Mmm

…

7. Per: Ja, men da har vi svart på den andre også.
8. Liv: Ja, hvordan bruker du det.
9. Ola: Men du, det er vel det, når du, men den deriverte, er det ikke det? At du skal sette opp dette fortegnsskjemaet.
10. Liv: Men, du bruker det vel både til den deriverte, men og til den «ikke deriverte» hvis du selv skal tegne grafen.

…

Hva er en ulikhet?
Hvordan kan løsningene til en ulikhet være?

11. Liv: Ja, hva er en ulikhet. Er ikke det det samme som en, en, å hva heter det der. Et stykke der du har større, mindre, større enn, mindre enn, og er lik, ja.
12. Ola: Ja, større, eller mindre enn, eller er lik.
13. Liv: Ja
14. Per: En likning

…

15. Liv: Hvordan kan løsninger til en ulikhet være?
16. Ola: Nei, kan det ikke…
17. Liv: Det kan vel være $x > 4$? Det kan vel være?
18. Ola: Ja, sette x for seg selv for eksempel, eller på noen må du kanskje bruke abc-formel også, og finne ut av, eller kvadratsetningene.
19. Liv: Men, det står bare hvordan kan løsningene på en ulikhet være. Så det skal vel bare et eksempel sikkert. Og det er vel et eksempel det, er det ikke det?

20. Ola: Ja, sikkert.

Hva menes med monotoniegenskapene til en funksjon?
Hvordan kan vi finne disse egenskapene?

21. Liv: Monotoniegenskapene
22. Per: Hvor den stiger og hvor den synker.
23. Ane: Mmm
24. Liv: Hva menes med monotoniegenskapene til en funksjon.
25. Ane: Hvor grafen stiger og hvor den synker?
26. Liv: Mmm. Hvordan kan vi finne disse egenskapene?
27. Ola: Sette opp det fortegnsskjema da eller?

Oppgave 2
Løs ulikhetene
a) $x^2 - 6x < 0$

28. Ola: $x^2 - 6x = 0$
29. Ane: Skal jeg skrive ned dette her?
30. Liv: Ehm, du må jo bruke abc-formel her. Jeg klarer ikke å huske.
31. Ane: Du kan prøve det og se.
32. Liv: Jeg må først skrive formelen. Hva er den?
33. Per: Minus b, pluss minus kvadratroten av b i andre, minus fire ganger ac, delt på to ganger a.

…

34. Liv: Ok, det blir jo -6, nei det blir 6.
35. Per: Hvor er a'en, og b'en, og hvor er c'en egentlig?
36. Liv: a = 1, b = -6 og c = 0.
37. Ane: Mhm

…

38. Liv: Jeg fant ut at x_1 = 6 og x_2 = 0.
39. Ola: Da er det jeg som er på jordet.
40. Liv: Du må huske at minus 6 er i parentes.

…

b) $(x - 1)(x - 2) > 0$

41. Liv: Bakerst med bakerst, bakerst med fremst…
42. Elevene velger å gange sammen parentesene. De får da $x^2 - 3x + 2 > 0$ og så setter de inn i abc-formelen igjen.

…

43. De er enige i at x_1 = 1 og x_2 = 2.

c) $x^2 - 6x \geq 9$

-Elevene flytter over nieren og setter inn i abc-formel.

…

44. Per: Jeg tror det er noe som skurrer her altså.

…

45. Per: Ja det blir jo null.
46. Ola: Det er litt rart altså.
47. Liv: Ja, det blir jo bare en *x*.
48. Ola: Ja, men det blir
49. Liv: Det blir fint.
50. Ane: Ja, da har vi den.

…

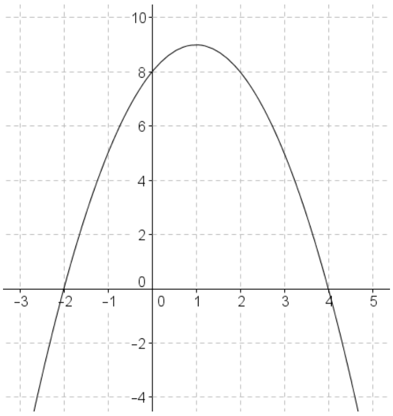
d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

…

51. Liv: $x_1 = 2$ og $x_2 = 1$
52. Liv: Fikk du det?
53. Ola: Ja, eh sånn halvvegs i alle fall.

Oppgave 3

Figuren viser grafen til en funksjon *f.*



Tegn fortegnslinja til *f(x)* og *f'(x).*

…

54. Per: Altså det stiger i alle fall fram til 1, så det kan vi jo tegne.
55. Liv: Ja, da tegner du…
56. Per: *f(x)*
57. Liv: *f'(x)*
58. Per: Nei *f(x). f'(x)*, der stiger den til, nei da synker den frem til der, og så stiger den, og så synker den etter det.
59. Liv: Er det ikke omvendt? At *f'(x)*, at da stiger den opp til der, og synker til der?
60. Per: Nei
61. Ane: Nei, det tror ikke jeg heller.
62. Liv: Nei?

…

Oppgave 4

Nedenfor ser du fortegnslinja til *f′(x)*, for en funksjon *f.*
Lag en skisse som viser hvordan grafen til *f* kan se ut.

63. Liv: Det vil jo si at den er…
64. Per: Over null fram til minus 2, nei.
65. Ane: Det er jo litt rart at den…

…

66. Ola: Det så ut som den gikk flatt der.
67. Per: Det betyr vel bare at den er over null. Og så på 1 så gå den ned under null.
68. Ane: Men det må jo være ett eller annet med den. (nullen ved minus 2)
69. Liv: Ja
70. Per: Den er bare i veien.
71. Liv: At det bare er lureri?
72. Ane: Hvis den ikke hadde vært der så hadde den jo bare gått sånn, hadde den ikke gjort det.
73. Liv: Men da tenker du toppunkt?
74. Per: Nei, det er ikke toppunkt.
75. Liv: Eller tenker du at dette er positivt?
76. Liv: Hvis det er det at den deriverte har med toppunkt å gjøre så skal den se sånn ut. (skisserer). For da har den en stopp der den ikke stiger noen ting.
77. Ane: Fra -2 til 1?
78. Liv: Nei på minus 2. At den stiger og stiger til minus to, der stiger den ingenting, og så stiger og stiger den til 1, og så synker og synker den.
79. Ola: Et terrassepunkt
80. Liv: Men, det er jo hvis den deriverte er toppunkt.
81. Per: Den er over null frem til 1, og så er den under null.

…

Oppgave 5

Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene.

$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

82. Per: Vi må vel bare derivere den?
83. Liv: Og når du deriverer den, hva finner du ut av da?
84. Per: Jeg vet ikke, men det var så stygge tall.
85. Ola: Når vi deriverer så finner vi vel stigningstall.
86. Liv: Jeg står fortsatt litt fast på at den deriverte har med topp og bunnpunkt å gjøre.
87. Ane: På den? (Peker på oppgave 3).
88. Liv: Ja, fordi
89. Per: Skal vi tegne den på nytt igjen?
90. Liv: Nei, det er bare å bytte om på den deriverte og ta den prikken på den andre.
91. Per: Ja, det er jo sant da.
92. Liv: Fordi da passer jo det med at det skal være et terrassepunkt.
93. Ane: Syns ikke du at hvis vi har tegna den, så er det jo bare at den stiger helt fram til 1 og så synker den.

94. Liv: Ja, at den deriverte har med vekstfart å gjøre. Tror jeg…

…

95. Per: Når vi deriverer den der så får vi så fine tall.

96. Liv: Ja, for hvis vi, hvis vi deriverer den så får vi jo ikke kjempe fine tall.

97. Liv: Da får vi jo x^6

98. Per: Nei

99. Liv: Ganger du ikke den opp med den?

100. Per: Nei
101. Liv: Å nei. Hva er du gjør for noe Per?
102. Per: Du får $6x^2$.
103. Per: Å ja, du ganger den ned ja.
104. Liv: $6x^2 + 6x – 12$ Ja, da har vi derivert den. Men hva sier den deriverte for noe? Det er der vi er litt uenige.

…

105. Liv: Fordi monotoniegenskapene er jo hvor den stiger og synker, sant? Var det ikke det vi ble enige om? Og når vi skal finne ut hvor den stiger og hvor den synker så må man jo finne ut hvor nullpunktene er. Så da må vi sette den = 0. Men, det gir ikke mening hvis ikke den deriverte har med toppunkt og bunnpunkt.
106. Per: Jaja, da bytter vi bare.

…

107. Ane: Så svitsjer jeg om på disse. (Oppgave 3)

…

108. Liv: Skal vi løse den da. (den deriverte til g i oppg 5), sette den lik null?

-Jobber med å sette $6x^2 + 6x – 12$ inn i formelen, de ser ikke at de kunne ha faktorisert ut 6-tallet så det hadde blitt lettere tall å jobbe med.

…

109. Liv: 324, kvadratrota av 324.
110. Per: Det er jo 18.
111. Liv: Eee ja. Skal vi prøve det? $18 \cdot 18$.

…

112. Per: Det ble 324.

…

113. Per: 1 og -2, det var fine tall!
114. Liv: Også vet vi at, så vet vi at det er positivt foran, sant.
115. Liv: Har ikke det noe å si at den er positiv foran?
116. Ane: Da går den jo
117. Liv: Først opp
118. Ane: Ja
119. Liv: Da vil det si at toppunktet er 1 og bunnpunktet er -2?

…

120. Ane: Jeg tipper det. Den må jo være positiv først uansett.
121. Liv: Nei, men hvis den er positiv så går den jo sånn som et smil, sant? Skisserer:
122. Ane: Er den ikke sånn? Den er jo i tredje.
123. Liv: Eller er den sånn?
124. Hvis den er sånn, så burde jo det ha vært minus. Er det ikke det?

125. Liv: Så den begynner på minus?
126. Ane: Ja, da tipper jeg at den er sånn. Men jeg vet ikke. Hva tror du at det er?
127. Liv: Jeg vet heller ikke.
128. Liv: En positiv tredjegradsfunksjon, hvordan går den nå igjen?

…

129. Ane: Men det er bare om den går sånn eller om den går sånn.
130. Liv: En tredjegradsfunksjon, hvordan, som er positiv, hvordan er den?
131. Per: Den går jo mest opp så, skal vi bare ta den da?
132. Ane: Jeg tror også det er den.
133. Liv: Ja, men da tar vi den. Siden det er positivt fortegn i tredjegradsfunksjonen så går grafen sånn. Og da er toppunktet 1 og bunnpunktet -2.

Oppgave 5

$h(x) = -x^3$

134. Per: $-x^3$ da?
135. Liv: Da må vi først derivere den. Sånn at det blir $-3x^2$. Så må vi ta kvadratsetninga av den.

…

136. Per: Det er jo bare 0 alt sammen her.

…

137. Liv: Men da må vi bare tenke at det er en tredjegradsfunksjon, og da går den negativt. Så da må jo denne her gå sånn da. Og så må jo toppunktet og bunnpunktet bli null da? Tror du ikke det?
138. Per: Det var jo ei enkel løsning.
139. Ola: Ja
140. Ola: Hvis det er et tredjegradspolynom, så skal den vel gå, i alle fall når det er minus først, så skal den vel gå ned, så først opp og så nedover. Når det er andregradspolynom så er det smilefjes eller surt fjes. Når det er minus først så må den jo gå nedover først.

…

141. Per: Går det ikke an å bare sette inn sånn for eksempel 1, der? Og der. Så får du når 1 er *x* så får du *y* der når du setter inn.
142. Liv: Ja det er for å finne punktene.
143. Per: Ja du finner jo hvis du gjør det, tall. Hvis vi bare tar to tall hver så får vi at det høyeste er toppunkt.

…

144. Liv: Vi tar ut 3, ikke sant, og så vet vi at for at det skal bli null så må *x* enten være -3 eller *x* = nei. Dette her var vanskelig.
145. Ane: Ja jeg aner faktisk ikke.
146. Per: Nei trenger ikke kjøre mitt løp altså.

…

147. Liv: Jeg tror det skal være noe mellom 0 og 3. Eller rundt der en plass.
148. Liv: Du tar jo på en måte 3 ut, så det blir $3(x^2)$. Da vet vi at hvis $x = 0$ så er stigninga 0. For dette skal jo være lik 0.

…

149. Liv: Hvis du tar $3x$ sånn, så da blir det 0. Og hvis du da tar når $x = 0$. Det blir jo bare 0! Alt blir jo bare 0.

150. Per: Ja
151. Liv: Så hvis
152. Per: Helt flat da!
153. Ane: Hvordan går det an da??
154. Liv: Nei den er ikke flat, det er den ikke!
155. Ane: Det er jo noe i tredje.
156. Liv: Ehm, ehm. Hva er det du må gange 3 med for å få 0? Det er jo 0. Enkelt og greit.

…

Pause

Andre time:

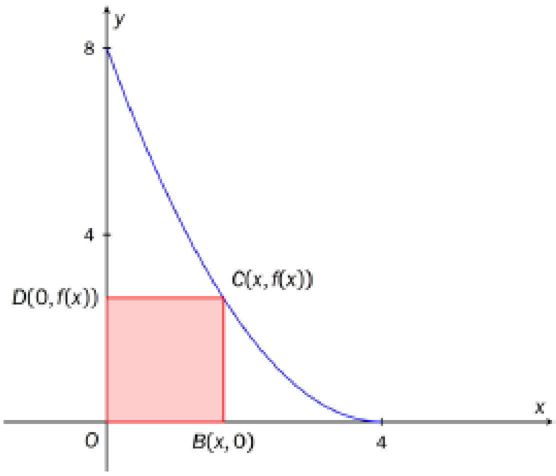
157. Observator: Når dere er ferdige med oppgave 5 og 6, så kan dere gå tilbake til oppgave 2 og se om oppgavene er ferdig løst.
158. Liv: Å ja, jeg vet jo hva vi gjør. Du må jo ha sånn, det der opplegget.
159. Ane: Å ja, sånn, at *x*'en står i midten.
160. Liv: Ja

…

Oppgave 6

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ $\quad 0 < x < 4$

Under grafen til *f* er det tegnet inn et rektangel ABCD, slik som figuren nedenfor viser.



Bestem *x* slik at arealet til rektangelet blir størst mulig.

161. Liv: Og null er mindre enn *x* og *x* er større enn, nei.
162. Ane: *x* er større enn null, men mindre enn 4.
163. Liv: Ja.

…

164. Ane: Vi har jo gjort noe sånn størst mulig med esker og sånn.
165. Liv: Men det er jo bare 4. Ikke sant, det er jo 0, 1, 2, 3, 4.
166. Per: Ja, så det er jo bare fem forskjellige muligheter her!
167. Liv: Så vi kan jo regne. At alle tar ett punkt hver, og så når du har funnet *x*.

…

168. Liv: Ja, men da, for eksempel at Ola tar null, du tar en, jeg tar to, Ane tar tre, og så ser vi hvem som tar fire. Og så finner vi både x'en og y'en, og så ganger vi de sammen, og så ser vi hvem som får størst areal.
169. Per: y?
170. Liv: Så når vi har funnet x'en så ganger vi den med y'en, og så ser vi hvem som får størst areal.
171. Per: Hmm. Skal jeg putte 1 inn der og se hva jeg får?
172. Liv: Ja
173. Per: Ok
174. Liv: Og så, når du har funnet 1, eee, 1 inn der, så tar du, nei, hvordan finner du ut y'en?
175. Per: Det du får blir y.
176. Liv: Ja, ja
177. Ane: Så da har du både x og y?
178. Liv: Kanskje? Nei, eet rektangel. Uansett, den kan jo se både sånn ut, og sånn. (lengst den ene sida, eller den andre)
179. Ola: Ok, så skulle vi ta større enn null?
180. Liv: Ok, du tar en, du tar to, og du tar tre?
181. Per: Null blir det jo sikkert ikke.
182. Liv: Nei, men vi regner den ut likevel.
183. Per: Nei, hva er det vits for? Altså
184. Liv: Den er jo ganske lang da.
185. Per: Hvis den er null?!
186. Liv: Nei, hvis den er null. Å ja.
187. Per: Da blir det jo null.
188. Liv: Ja, det er sant. Da tar du en, to, tre og så tar jeg fire. Er ikke det greit.
189. Ane: Ja
190. Liv: Gjør vi det i andre, eller gange inn med tall først?
191. Liv: Hm?
192. Ola: Fordi hvis du ganger med en halv så er det det samme som å sette kvadratrot.
193. Per: Ja, det er sant. Så da kan vi stryke hele greia. En er lik fire da. (x=1 gir y=4)
194. Liv: Men, hvordan gjorde du det der?
195. Per: Nei, altså, jeg tenkte bare det at en halv og så…
196. Ola: Det står jo at
197. Per: Ta kvadratrota og så bare dele det på en halv igjen så får du jo… Stryker bare begge to. Blir det rett?
198. Ola: Det vet jeg ikke men.
199. Ane: Stryke de to?
200. Ola: Hvis du ganger inn med en halv, med den parentesen der, for eksempel 2 ganger med en halv så får du jo to opphøyd i andre da.
201. Liv: Men hvis du tar 3 i andre så får du jo 9. Da får du jo ikke det samme. Så det blir jo feil. Eller hvis det er 6. Så tar du det opphøyd i andre, så får du 36, og så ganger du det med en halv, så får du 18. Så det blir feil.
202. Liv: Ja. Jeg fikk null. Så det er ikke fire. Ane fikk en halv.
203. Liv: Hva fikk du som areal da Per?
204. Per: Jeg mener det blir 4,5.
205. Ola: Jeg gjorde sikkert noe feil altså, men jeg fikk 1.

206. Liv: Men da er det du som vinner Per.

Tilbake til oppgave 2

a) $x^2 - 6x < 0$

207. Liv: At du liksom skal ha ett tall utenfor og så skal du ha *x*.
208. Ane: En sånn svarsetning på en måte.
209. Liv: Ja
210. Per: Var det bare de vi mangla nå?
211. Liv: Nei, vi mangla litt mer. Hva var det vi fant ut på a'en?
212. Ane: At *x* var 6 og 0.
213. Liv: Ja, og hvordan skriver man det?
214. Per: Jeg skriver det alltid med bokstaver.
215. Liv: Med bokstaver?
216. Per: Ja, mindre enn det, så skriver jeg mindre.
217. Ane: Men hvordan vet du hva som er mindre og størst. Når vi har x_1 = 6 og x_2= 0
218. Per: Altså 6 er størst, men jeg vet ikke.
219. Ane: Jeg tar alltid feil på det.
220. Liv: Gjør du? Jeg får alltid rett, men jeg vet jo aldri. Det er 50/50 egentlig.
221. Per: Men da gjør vi det du foreslår. Det er jo greie odds.
222. Liv: Vi må jo tenke at hvis *x* er for eksempel 5, nei jeg må ta 7, så blir x
223. Liv: Da vet vi jo at 7 er større enn null. Så da vet vi at, nei.
224. Per: Men er det ikke bare å teste, og sette inn 0 og 6 da? Altså 0, det blir jo lik 0. Og hvis du setter inn 6, det blir jo … 0. Hmm.
225. Liv: Men hvis du har *x* som er større enn 6, jeg tror…
226. Per: Skal vi prøve 5 da. Mindre enn 6, da blir det mindre enn null. Større enn 6, da får du, da får du pluss, og mindre enn 6, da får du minus.
227. Liv: Sånn?
228. Ane: Da er *x* større enn 6 og *x* mindre enn 0, stemmer det?
229. Per: Så 5, 4, 3, 2, 1, da får du mindre enn null.
230. Per: Så får du 7, og 8, og helt opp til evig, så får du mer enn null.
231. Liv: Blir det rett hvis vi gjør det sånn da?
232. Per: Det vet jeg ikke.
233. Liv: Tror du ikke det Ane?

…

b) $(x - 1)(x - 2) > 0$

234. Liv: Ok, på b, hva fikk du der?
235. Ane: 2 og 1.
236. Liv: Nå er det den andre veien. Nå skal du finne når null er mindre enn det.
237. Ane: Så 2 er større enn *x* og *x* er større enn 1. Så det må være mellom der.
238. Liv: Når *x* skal være mindre enn 0, sant, da må det være… Blir det feil vei?
239. Liv: Vi skal jo finne ut når *x* er mindre enn null.

…

Tilbake til a)

240. Per: Men ulikheter, skal vi ikke lage ei fortegnslinje da?

…

241. Liv: Er det (6 - *x*) og (0 - *x*)? Eller er det omvendt? Er det ikke sånn det blir seende ut? Og så må vi sette det inn i fortegnsskjema. Kan du sette inn i fortegnsskjema Per?

242. Per: Njaa, 1 først, må vi ikke det? (oppgave b)

243. Liv: Men er det (6 - *x*) eller er det (*x* - 6)?

244. Per: Det er jo en stor forskjell.

245. Liv: Er det ikke (6 - *x*)?

246. Ane: Nei, er det ikke sånn (x - x_1).

...

247. Ane: Jeg har alltid trodd at det var omvendt, at det var (*x* – 6), er det ikke det? Eller er det helt feil?

248. Liv: Det er sikkert det

249. Ane: Jeg vet ikke helt.

250. Liv: a, hvordan er den? (*x* - x_1), nei, vi går for *x* først. Bytter du om på dem?

251. Per: Ja *x* først.

252. Ane: Den er først positiv.

253. Liv: Ja, den er først positiv. Og så blir den negativ. Ok, hva var egentlig spørsmålet?

254. Per: Det er sikkert rett også det.

255. Liv: *x* er mindre enn

256. Ane: *x* er større enn null. Nei, det er jo omvendt.

257. Per: Vi er jo gode.

258. Ane: Ehm, 6 er jo større enn *x*.

259. Liv: x er negativ når den er mindre enn 6 og så er x negativ når den er større enn null.

260. Per: Vi bare skriver det med ord. Det er vel ikke så farlig med de tegnene.

261. Ane: Da er jo *x* mindre enn 6 og *x* større enn null.

262. Ane: *x* er jo mindre enn 6 og større enn 0.

263. Liv: Nei, vi skriver det med ord.

264. Per: Når *x* er mindre enn null så…

265. Liv: Er det ikke mer enn 0 og mindre enn 6? Ok, ja.

266. Liv: For vi skal jo finne ut når *x* er mindre enn 0.

Oppgave 2

b) $(x-1)(x-2) > 0$

267. Per: Der trenger vi ikke gjøre noe. Det er bare å sette inn (*x* - 1) og (*x* - 2).

…

268. Liv: Her vises jo at det er *x*’en som skal først.

269. Liv: Ok, og vi skulle finne ut når x er større enn 0. x er jo større enn 0 når

270. Per: Mindre enn 1 og mer enn 2.

…

Oppgave 2

c) $-x^2 - 6x \geq 9$

271. Per: Den vil vi ha sånne ting på.

272. Liv: Jeg kan gjøre den om da.

…

273. Liv: Er det sånn? Eller skal vi ta ut -*x*.

…

274. Liv: Nei, men vi har jo nullpunktene. Hva er nullpunktene?
275. Ane: Det er bare minus 3.
276. Liv: Mja, er det ikke bare sånn det blir da? Og så står det minus 3 her.
277. Liv: a= -1, og så er det (x – 3) og så (x – 3) igjen.
278. Per: Igjen?
279. Liv: Ja, det er opphøyd i andre, så derfor må du skrive den en gang til.

…

280. Per: Jeg tror det er noe som er feil her.
281. Ane: Det tror jeg også.
282. Per: Hvis vi bare stryker den?
283. Liv: Nei, nei, nei, det kan jo være rett. For er *x* større eller lik 9.
284. Per: Er ikke det bare å teste da? Vi kan ta 10 da.
285. Liv: *x* kan ikke være større eller lik 9. Jeg vet ikke. Det kan jo være at den ikke kan være større.
286. Ane: Skal jeg bare skrive det? At *x* kan ikke være større enn 9.

…

Oppgave 2

d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

-Her har de funnet to uriktige nullpunkter. De bruker nå disse i fortegnsskjemaet.

287. Liv: Når *x* er mindre enn null, og det er, større enn 1 og mindre enn 2. Er du enig?
288. Per: Mmm
289. Ane: Mhm

Tilbake til oppgave 5

Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene.

$h(x) = -x^3$

…

290. Liv: Vi skal jo finne hvor den synker og hvor den stiger. Men jeg vet ikke helt. Jeg syns jeg har prøvd alt på denne.
291. Liv: Vi har vel funnet ut at den skal se sånn ut? (synker hovedsakelig) Men vi må jo finne ut hvor de og de skal være. (Topp og bunnpunkt)

-Prøver med abc-formel.

292. Liv: Vi kan jo prøve å ta ut *x*-ene da.

…

293. Liv: Da vet du at x_1 skal være null og… Alt blir jo bare null, alt her oppe er jo null.
294. Per: Men da er den flat da.
295. Liv: Men det kan jo være at, som med en andregradsfunksjon, at bunnpunktet er akkurat på null. Er det ikke sånn x^2 ser ut?
296. Ane: Jo, $-x^2$
297. Liv: Nei, det blir et smilefjes. Og da er jo nullpunktet null.
298. Ane: Ja, ja, men det kan jo ikke være det her.
299. Liv: Nei, det er liksom akkurat det.

…

300. Liv: Kan det være at den ser sånn her ut? At det ene punktet er null og det andre er 3, på grunn av det 3-tallet der.

301. Ane: Kan vi ikke bare skrive det?

…

302. Liv: Vi vet at x^2 har et nullpunkt i null.

303. Ane: Hva har det med saken å gjøre?

304. Liv: At x^3 også må ha ett av punktene i null?

…

305. Er du sikker på at det du gjorde er feil egentlig Per?

306. Per: Eee ja.

307. Liv: Du gjør det vel med den deriverte, gjør du ikke?

308. Per: Nei

309. Liv: Det er den deriverte.

310. Per: Hm

311. Per: Altså null, null.

312. Liv: du kan jo prøve på fire og se om den begynner å stige etter fire.

313. Liv: Nei, den fortsetter å synke.

314. Liv: Men -3 da?

315. Per: Det synker det også altså.

316. Liv: -1 da?

317. Liv: Den deriverte blir jo seende sånn ut. Men da er den jo positiv til null, og negativ etter.

…

318. Liv: Det kan jo være at vi vet at den er positiv til null, og negativ fra null og ned. For det er jo ikke et toppunkt dette her.

319. Liv: Vi finner jo bare ett uansett.

…

320. Liv: Dette er jo en tredjegradsfunksjon. Den har ett toppunkt, og ett bunnpunkt.

321. Per: Men, nåe du deriverer den så blir det en andregrads.

…

322. Liv: Den synker jo bare uansett, alt er jo bare negativt med den.

323. Liv: Eller den stiger jo for så vidt til null og så synker den etterpå.

5 Transkripsjon av intervju

Intervjuene varer omtrent 20 min hver. Utklipp av elevenes skriftlige besvarelser er klippet inn.

5.1 Intervju med Ola

Oppgave 1

1. Int: Da skal du få en oppgave som dere løste fredag for to uker siden. Det var denne her: Beskriv monotoniegenskapene til funksjonen.
   $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
2. Kan du huske at dere holdt på med den?
3. Ola: Jeg husker at vi holdt på med den ja, men jeg skal ikke si at jeg husker hvordan vi gjorde det.
4. Int: Det er jo to uker siden.
5. Ola: Du setter vel opp eh. Du prøver vel å finne den deriverte, og så ser du hvor den stiger og synker.
6. Ola: Jeg kan derivere den. Det er greit nok. Men, altså, jeg vet ikke hvor mye mer jeg klarer.
7. Int: Ja
   -deriverer-

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

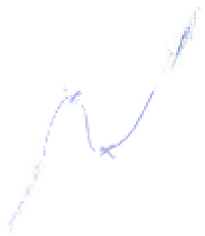
8. Int: Se det
9. Ola: Da har jeg prøvd å derivere den.
10. Int: Ja
11. Ola: Men så er det å sette det inn. Eh... Og finne ut hvor den stiger og synker.
12. Int: Hva er det du ønsker å gjøre for å finne det?
13. Ola: Nullpunktene kanskje? Jeg må bare prøve å komme på hvordan jeg gjorde det.
14. Int: Ja, du ønsker å finne nullpunktene?
15. Ola: Ja, hvis jeg finner nullpunktene så vet jeg hvor den stiger og synker. Eller i alle fall der den slutter å stige eller slutter å synke. Sånne ting.
    -tenker-
16. Ola: En ting er vel å sette inn i et sånt skjema der du har *x* og *f'(x)* for eksempel. Og jobbe seg framover. Det tar jo veldig lang tid, men du kommer jo fram etter hvert.
    -regner ut verdier-

x	0	1	2	3
f'x	-12	0	24	

x	-2	-3
f'(x)	0	

17. Ola: Den blir i alle fall null på den eneren der, altså hvis $x = 1$. Fortegnslinje altså. Det kan jeg ikke.
18. Ola: Jeg har jo ikke prøvd å gå nedover.
19. Int: Hvor mange nullpunkt er det tenker du?
20. Ola: Det er jo et tredjegradspolynom så den må jo se sånn ut. Så den må jo ha et toppunkt og et bunnpunkt.
21. Ola: Jeg går ut ifra at det er den (bunnpunktet) jeg har der. Jeg skal ikke si det sikkert men.
22. Int: Hva er grunnen til at du går ut ifra det?

23. Ola: Måten den vil stige videre oppover. Hvis du setter for eksempel tre inn her. Videre oppover så vil jo tallet bare bli høyere og høyere på den deriverte. Så da regner jeg med at jeg har kommet til den kurven der den bare går videre oppover. Jeg ser ikke at den kan komme til å bli minus der etter hvert.
24. Int: Ja
25. Ola: Så da må en vel kanskje regne seg nedover også.
    -regner videre-
26. Ola: Der blir den null igjen ja. $6 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 12 = 0$
27. Det er vel det punktet der det da kanskje. (Henviser til sin egen figur av grafen.) Jeg tror nesten det må bli det.



28. Int: Kan du sjekke at du har rett?
29. Ola: Ja, det var det da.
30. Int: Du sa at her vil det bare fortsette å stige. (når $x > 1$)
31. Ola: Ja, for det tallet vil bare fortsette å bli positivt videre oppover der, når den blir over 2.
    -sjekker med $x = -3$
32. Ola: Det begynner å bli store tall etter hvert her.
33. Altså før det punktet ($x = -2$) så vil den være positiv hele veien opp. Når du har den i andre der. For når du har -3 og lengre ned. Når du har minus ganger minus så blir jo det tallet der så høyt at det veier opp for de andre der.
34. Int: Ja
35. Ola: Så da vil den bare fortsette å stige fra -3 og nedover. Og det vil fortsette å stige når den passerer over 2'eren der.
36. Int: Se det.
    …

Oppgave 2

37. Int: Kan du huske hva dere gjorde på denne her?
38. Løs ulikheten: $-x^2 - 6x \geq 9$
39. Ola: Skal vi se. Det må vel være. Det er kanskje en abc inni dette her. Løse ulikheten, det er jo nesten som en likning.
    -flytter over 9-tallet
40. Ola: Jeg vet ikke hva som skjer når vi flytter over. Det er jeg usikker på.
41. Int: Hva tenker du?
42. Ola: Jeg tenker på hva du skal gjøre når du flytter over. Kanskje jeg skal sette opp en abc-formel på det. Det er jeg slettes ikke sikker på men.
    -setter inn i abc-formelen

$$\frac{-+6 \pm \sqrt{-6^2 \cdot 4 \cdot -1 \cdot -9}}{2 \cdot -1}$$

43. Ola: Det må være noe jeg gjør feil, men jeg føler at jeg bare står igjen med null der inni. (diskriminanten)
44. Ola: Da blir det i så fall: *x* = -3

$$\frac{6}{-2} = -3 \qquad -3 \geq 9$$

$$x = -3$$

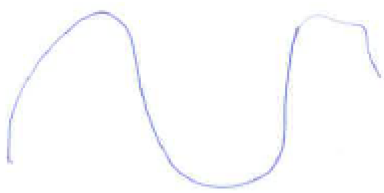
…

45. Ola: Her blir det vel, hvis du setter inn (-3) så får du vel null inni der. Det blir vel lik null når *x* = -3. Så jeg vet ikke om du bare kan skrive *x* = -3. Så er vel det større eller lik null. Altså svaret blir null når *x* = -3.
46. Int: Hva hvis x er noe annet enn (-3)?
47. Ola: Altså hvis du har for eksempel (-4)? Hvis det er mindre så blir det vel høyere. Blir det ikke det? Hvis jeg hadde brukt (-4) her så ville jeg vel fått et høyere tall enn null.
48. Ola: Altså hvis du setter (-4) inn her så vil jo det her bli større en null da. Så hvis jeg setter det som er under (-3) så blir det større enn null. Så jeg setter inn (-3) eller nedover så blir det større eller lik null.

5.2 Intervju med Ane

Oppgave 1

1. Int: Her får du en oppgave som dere holdt på med sist. Hvis du husker det, så kan du fortelle, og skrive ned hva dere gjorde sist. Og hvis du ikke husker det, så kan du bare fortelle hva du selv ville begynt med for å prøve å løse den.
   Beskriv monotoniegenskapene til funksjonen.
   $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
2. Ane: Ja. Ok. Det er i alle fall en tredjegradsfunksjon. Som er liksom, sånn. (tegner en skisse av en tredjegradsfunksjon som stiger mot høyre)



3. Int: Hvordan vet du det?
4. Ane: Fordi det er positivt. Derfor begynner den positivt.
5. Ane: Og så, jeg må tenke. Er det ikke noe sånn, at hvis du deriverer den eller noe, eller så finner du fortegnslinja og så kan du sjekke når punktene treffer, eller når det blir positivt og negativt.
6. Int: Vil du prøve å gjøre det?
7. Ane: Jeg vet ikke om jeg får det til. Monotoniegenskapene, det er jo hvordan grafen ser ut, når den stiger og synker, og topp og bunnpunkt. Jeg vet ikke hva mer jeg skal si.
   …
8. Ane: Nei, jeg vet ikke

Oppgave 2

9. Int: Hva ville du gjort for å prøve å løse denne?
   Løs ulikhetene: $-x^2 - 6x \geq 9$
10. Ane: Her ville jeg tatt abc-formel, og flytta den over. Og fått null der, og så regna ut. Så hadde du jo fått x_1 og x_2.

$$-x^2 - 6x \geq 9$$

$$-x^2 - 6x - 9 \geq 0$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -9}}{2 \cdot -1}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 + 0}}{-2} = \frac{6 \pm 6}{-2}$$

11. Ane: Gjorde jeg noe feil nå?
12. Ane: Det blir minus.
   -Eleven retter opp en feil, men gjør en ny, så hun får ikke null i diskriminanten likevel.

$$x_1 = \frac{6+6}{-2} = \underline{\underline{-6}}$$

$$x_2 = \frac{6-6}{-2} = \frac{0}{-2} = \underline{\underline{0}}$$

$$-6 \geq x \geq 0$$

13. Int: Hvordan tenkte du da du satte opp løsningen?
14. Ane: Nei, jeg var litt usikker.
15. Ane: Det er jo, når dette er større enn… null egentlig. Ehm

$$-6 \leq x \geq 0$$

16. Ane: Sånn tror jeg.
17. Int: Hvordan leser du den nederste linjen?
18. Ane: At *x* er større enn -6 og mindre enn 0

…

Oppgave 3

19. Int: Du kan få velge en av disse:

Løs ulikhetene

a) $x^2 - 6x < 0$
b) $(x-1)(x-2) > 0$
c) $-x^2 - 6x \geq 9$
d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

20. Ane: Ikke den. (b) Jeg kan ta en av disse (a,d)
21. Int: Hvorfor sa du: «ikke den»?
22. Ane: Hehe, jeg kan ta den også. Da må jeg sikkert bare gange inn dette.

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$x^2 - 2x - x + 2 > 0$$

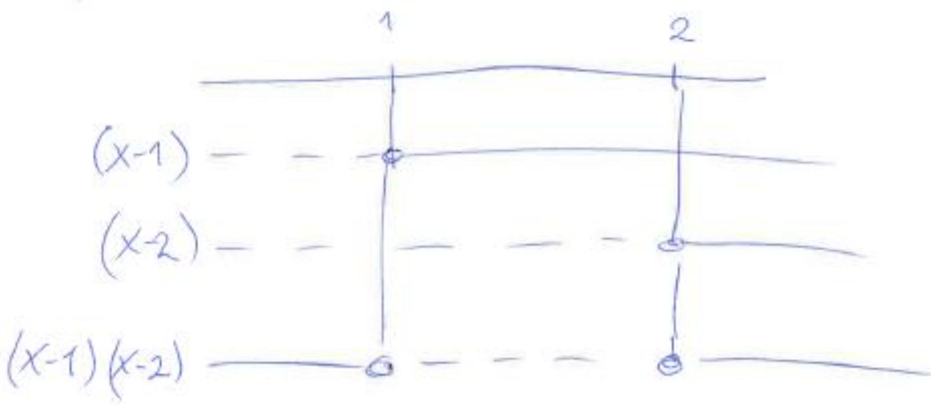
$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \qquad x_1 = \frac{3+1}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

23. Ane: Jeg må kanskje ta det inn i et fortegnsskjema. Det tror jeg. Det skulle jeg kanskje gjort der også? (forrige oppgave)



$= 1 \geq x \leq 2$

x er mindre enn 1 og større enn 2.

24. Ane: Sånn tror jeg
25. Int: Kan du sjekke om du har rett?
26. Ane: Jeg kan prøve å sette inn et tall her, for eksempel 3.

$$(3-1)(3-2) > 0$$
$$(2)\cdot(1) > 0$$
$$2 > 0$$

27. Int: Hvordan passer det med svaret ditt?
28. Ane: Det passer jo. Da er *x* større enn 2. Da blir svaret større enn 2 i alle fall

Oppgave 1

29. Int: Vil du nå prøve å regne litt på denne?
30. Beskriv monotoniegenskapene til funksjonen.
    $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

31. Ane: Jeg vet ikke om jeg kommer til å klare den altså. Jeg kan prøve.

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$
$$3 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 3x - 12$$
$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

32. Ane: Skal jeg bare gjøre et eller annet?
    -setter inn i abc-formel. Setter ikke 6 utenfor, så det blir store tall å jobbe med.
33. Int: Husker du da dere jobbet med denne i gruppa?
34. Ane: Var det den som ble 18? Var det det? Jeg må tenke…
35. Ane: Blir 18 · 18 = 324? Ja, det må jo være det.

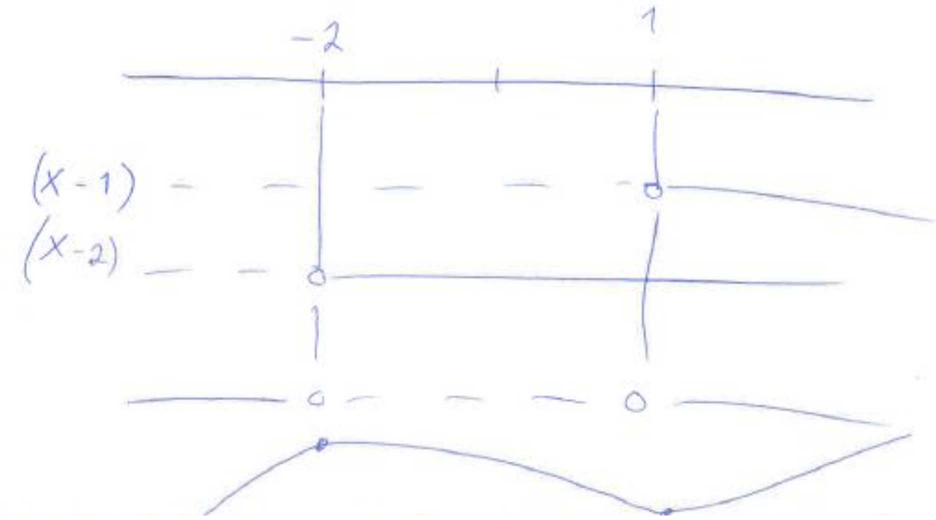
$$\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot -12}}{2 \cdot 6}$$
$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 + 288}}{12}$$
$$\frac{-6 \pm \sqrt{324}}{12}$$
$$\frac{-6 \pm 18}{12}$$

$$\begin{array}{r} 240 \\ 24 \\ 24 \\ 288 \\ 36 \\ 324 \end{array}$$

36. Ane: Da får jeg at en er -2 og den andre 1.

$$x_1 = \frac{-6+18}{12} = \frac{12}{12} = \underline{1}$$
$$x_2 = \frac{-6-18}{12} = \frac{-24}{12} = \underline{-2}$$

37. Ane: hmm…
38. Int: Hva tenker du nå?
39. Ane: Jeg bare husker ikke helt hva jeg skal sette inn her. I de parentesene. Er det bare (x – 1), (x – 2), stemmer ikke det? Og da blir det sånn.



40. Ane: Og da vet vi at den stiger fram til her, og synker til 1, og så går opp igjen. Men, jeg aner ikke om det er rett.

5.3 Intervju med Per

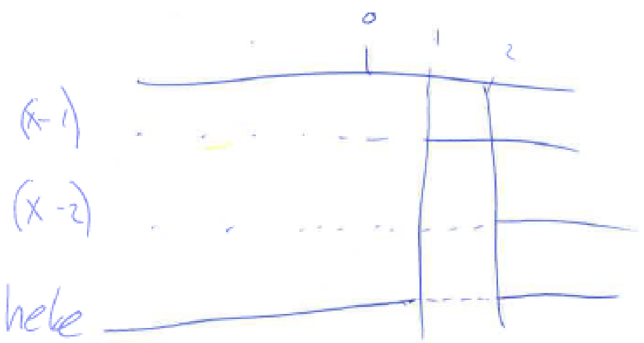
Oppgave 1

1. Int: Du velge hvilken av ulikhetene du har lyst til å løse.

   Løs ulikhetene

   a) $x^2 - 6x < 0$
   b) $(x-1)(x-2) > 0$
   c) $-x^2 - 6x \geq 9$
   d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

2. Int: Hvilken vil du ha, og hvorfor?
3. Per: a'en, for a'en er ofte det enkleste. Nei, jeg kan ta b'en faktisk. Ja, og så lager vi vel fortegnsskjema eller noe sånt.
   …
4. Int: Hva var grunnen til at du valgte b?
5. Per: Nei, for den så så ferdig ut. Der må vi lage de sånn (faktorisert form). Den var ferdig sånn.



6. Per: Nei, altså, jeg har ikke noe bedre svar enn det.
7. Int: Der har du en linje.
8. Per: Ja
9. Int: Kan den fortelle deg noe?
10. Per: Den kan fortelle meg at ehh… stiger fram til 1 og så synker til 2, og så stiger etter 2 igjen eller?
11. Per: Jaaa, det har vi kanskje ikke akkurat på ulikheter når vi skal ha de linjene der.
12. Hmm… Nei, jeg har ikke peiling jeg altså.
13. Int: Hva vil du finne?
14. Per: Jeg skal vel finne tallene som blir større enn null inni der. Det må jo bli mindre enn 1 og større enn 2 det da.
15. Per: Ja, det blir det jo ikke.
16. Int: Fordi?
17. Per: Jeg to null inn der bare.
18. Int: Hva fikk du da?
19. Per: Nei, da fikk jeg, nei det blir jo rett det. For det blir $(-1) \cdot (-2)$ som blir 2.
    …
20. Int: Vil du skrive en svarsetning?
    …

x må være mindre enn 1 eller større enn 2 for at ulikheten skal være større enn 0

Oppgave 2

Beskriv monotoniegenskapene til funksjonene.

$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

21. Per: Jeg begynner med å derivere den.

$6x^2 + 6x - 12$

22. Per: Nei, altså mitt beste forslag er bare å sette det inn i en tabell altså. Drive og teste med sånn fullt av forskjellige tall, men det tar jo lang tid da.
23. Int: Hva er det du trenger for å svare på oppgaven?
24. Per: Nei, monotoniegenskapene er jo hvor den stiger, og hvor den synker og sånn. Hvor den grafen der stiger og synker.
25. Int: Mhm
26. Per: Nå har jeg jo derivert den da.
27. Int: Hva treger du for å vite hvor den stiger og hvor den synker?
28. Per: Nei, da må jeg nesten ha den grafen altså.
29. Per: Hvis jeg putter inn en *x* så får jeg jo en *y* da. Jeg kan prøve det.
30. Per: Jeg kan ta den abc-formelen. Ikke at jeg vet hva det hjelper for altså, men det var fine tall til å jobbe med.
31. Per: Nei, altså jeg kan komme med et svar her også, det er bare å begynne her oppe.

2 + 3 - 12

$g(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -7$

16 + 12 - 24

$g(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 = 4$

81 98 62

$3 = 3 \cdot 27 + 3 \cdot 6 - 36 = 62$

32. Per: Nå tror jeg at jeg er litt på bærtur altså.

…

33. Per: Skal det inn i den eller den? Den deriverte eller den «ikke-deriverte»?

…

34. Int: Hva bruker du den deriverte til?
35. Per: Den deriverte, det bruker du til å, hvor den er over og under null. Eller noe sånn. Eller en av de (*f(x)* og *f'(x)*) er hvor den stiger og synker, og en av de er når den er over og under null.
36. Int: Ja
37. Per: Ja, hvem som er hvem, det er en annen sak altså.

5.4 Intervju med Liv

Oppgave 1

1. Int: Her er oppgavene dere jobbet med 1. mars. Du kan få velge en av ulikhetene.

   Løs ulikhetene

   a) $x^2 - 6x < 0$
   b) $(x - 1)(x - 2) > 0$
   c) $-x^2 - 6x \geq 9$
   d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

2. Int: Hvis du husker, så kan du si litt om hvordan dere løste de. Nå har det jo gått to uker, så hvis du ikke husker det, så kan du løse de sånn som du ønsker.

   …

3. Liv: Da tar jeg bare den første da.

$$x^2 - 6x < 0$$

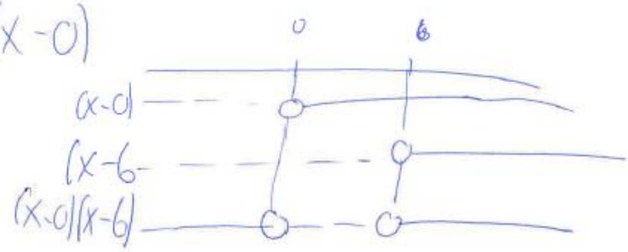
$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 0}}{2}$$

$$\frac{6 \pm 6}{2} = \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 0$$

4. Liv: Sånn
5. Int: Da er du i mål?
6. Liv: Mja, skal jeg skrive sånn der fortegnsskjema forresten.

   …

$(x-6)(x-0)$



$6 < x < 0$

7. Liv: Sånn, da er jeg ferdig.

Oppgave 2

8. Int: Du kan få velge en ulikhet til.

   Løs ulikhetene

   a) $x^2 - 6x < 0$
   b) $(x - 1)(x - 2) > 0$
   c) $-x^2 - 6x \geq 9$
   d) $x^2 - 3x + 4 < 0$

9. Liv: Da tar jeg c'en.

$$-x^2 - 6x - 9 \geq 0 \qquad \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4x - 1x - 9}}{2x - 1}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{0}}{-2} \qquad \frac{6}{-2} \qquad x = -3$$

$$\underline{x \geq -3}$$

…

10. Int: Kan du sjekke om du har gjort rett?
11. Liv: Ehm, ja, det kan jeg gjøre.

…

12. Liv: Sånn. Det er, eller det er jo større eller er lik, og det var den, den var lik.

$$-(-3)^2 - 6 \cdot (-3) \geq 9$$

$$-9 + 18 \geq 9$$

$$\underline{9 \geq 9}$$

13. Int: Og hvis *x* er noe annet?
14. Liv: Sååå, kan vi bare regne det ut og finne ut hva det er for noe.
15. Int: Hva tenker du?
16. Liv: Altså hvis *x* er større eller lik -3 så er tallet du får større enn x? Nei, når ehm, jeg vet egentlig ikke helt. Ehm, når, for vi har jo funnet ut at nullpunktet, eller, når vi løser denne (abc-formelen) så får vi jo at $x \geq -3$. Men her er det 9. Jeg vet egentlig ikke helt hva jeg har funne. Jeg har bare fulgt reglene slavisk sånn som vi lært.

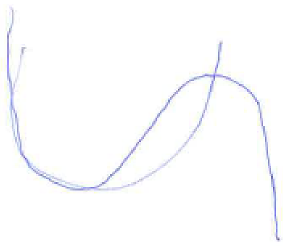
…

Oppgave 3

Beskriv monotoniegenskapene til funksjonen.
$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

17. Liv: Det er en en tredjegradsfunksjon, den har to punkter, topp og bunnpunkter, det første er vel et bunnpunkt, og det andre er vel et toppunkt tror jeg. Ja.
18. Int: Hvorfor tenker du det?

19. Liv: Bare i mitt hode så gir det veldig mening, for hvis du har en andregradsfunksjon som er positiv, så ser den jo sånn ut (tegner en smilemunn), så da tenker at når du har en tredjegradsfunksjon så må den begynne samme veg, men så må den snu. Så da tenkte jeg at det først må være bunnpunkt, og det andre må være toppunkt.



20. Int: Kan du sjekke det på noen måte?
21. Liv: Jeg kan jo prøve å regne ut topp og bunnpunktene. Først derivere den og så sette den lik null.

    …

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

22. Liv: Da har vi jo en andregradsfunksjon. Så setter vi den inn i abc-formelen, og så får vi nullpunktene.

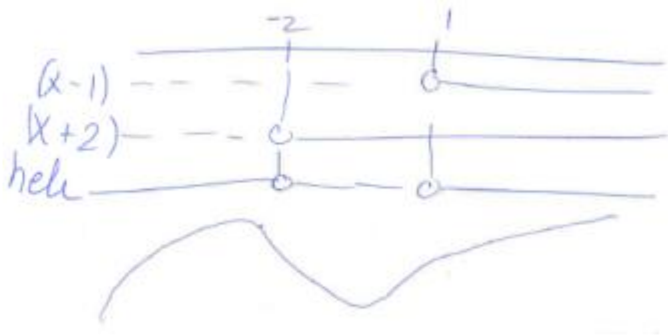
$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 6 \times -12}}{6 \times 2}$$

23. Int: Husker du da dere holdt på med denne i gruppa?
24. Liv: Ja, det var 18. Nei, jo jeg husker det. Det var et veldig stort tall som Per kom på. Men hva var det for noe igjen? Jeg tror, nei, jeg husker ikke. Jeg tror jeg må regne det ut hvis jeg skal få rett.

    …

$$\frac{-6 \pm 18}{12} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = -2$$

25. Liv: Og så for å finne topp- og bunnpunkt så må jeg sette det i fortegnsskjema. (Skriver opp faktorene først)



26. Liv: Så da vet vi at den går helt omvendt av det jeg sa. Så da er det først et toppunkt og det andre bunnpunkt. Og så for å finne, ja topp og bunnpunkt, det er jo ikke monotoniegenskapene. Da må du jo bare sette *x*'en inni den «ikke-deriverte» og så finner du *y*'en da.
27. Int: Vil du konkludere med en setning til slutt? En beskrivelse av monotoniegenskapene.
28. Liv: Så den tredjegradsfunksjonen så stiger den først. Den stiger til *x* = -2 og så synker den til *x* =1 og så stigen den videre igjen.

…