UNIVERSITETET I AGDER

Problemløsning i videregående skole

En studie av resonnementene som kommer til uttrykk gjennom en 2P-Y- og en R1-gruppes arbeid med problemløsningsoppgaver.

AV: JON BJARNE BØ

VEILEDER

Hans Kristian Nilsen

Universitetet i Agder, 2018
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

FORORD

Høsten 2013 startet jeg på grunnskolelærerutdanningen 5-10 ved Universitetet i Agder, der målet var å oppnå en mastergrad. Studiet, som for min del har inneholdt matematikk og naturfag, har vært lærerikt, engasjerende og innholdsrikt. Det å flytte til Kristiansand har vært et valg som for alltid har satt sitt preg, og beriket livet mitt på mange måter. Nå står dermed en siste oppgave igjen før jeg kan ta fatt på livet som lærer, og sammen med familien bygge nye relasjoner og vennskap.

Det er en mengde personer som har vært svært viktige for meg i arbeid med masteroppgaven. Først vil jeg takke min veileder Hans Kristian Nilsen som har gitt meg gode råd, og veiledning tilpasset mine behov. Takk for at du har vært så fleksibel, og for at du har vært tilgjengelig for spørsmål på mail til enhver tid. Jeg vil også takke avdelingsleder og faglærere på skolen hvor jeg utførte min forskning. Ikke minst ønsker jeg å rette en stor takk til de elevene som bidro til å gjøre denne studien mulig å gjennomføre.

Jeg vil i tillegg rette en takk til mine medstudenter, for mange gode kaffekopper og samtaler, for støttende råd, og evnen til å alltid sette av tid til et spørsmål. Jeg vil også takke min familie for omtanke og støtte i prosessen.

Til slutt vil jeg takke min utrolige kone, og bestevenn, for at hun har holdt ut med meg gjennom denne prosessen. Takk for at du tror på meg, og for din støtte både gjennom datainnsamling, skrivingen og ikke minst den mentale prosessen!

Jon Bjarne Bø

Kristiansand, mai 2018

SAMMENDRAG

Temaet for denne mastergradsavhandlingen er problemløsning i videregående skole. For å få et innblikk i hvordan problemløsningsprosessen kan beskrives i videregående skole har jeg, med sosiokulturelle briller, vurdert en problemløsningsprosess i en 2P-Y-gruppe og en R1-gruppe med utgangspunkt i forskningsspørsmålet:

Hvilke matematiske resonnement kommer til uttrykk i en 2P-Y- og en R1-gruppes arbeid med problemløsningsoppgaver, og hvilke faser karakteriserer prosessen?

I min gjennomgang av forskningslitteratur, ble det klart at det finnes mye forskning på problemløsning, og at det dermed var behov for å begrense teorien for å best mulig kunne besvare forskningsspørsmålet ut fra funnene som ble gjort. Forskningsspørsmålet er todelt, og innebærer å oversiktlig trekke frem de ulike fasene som problemløsningsprosessen preges av, og samtidig fremheve de matematiske resonnement som kommer til uttrykk i prosessen.

For å besvare forskningsspørsmålet har jeg valgt å kategorisere problemløsningsfasen inn i 6 kategorier presentert av Schoenfeld (1985). I tillegg vil jeg i studien kategorisere de matematiske resonnementene i tre overordnede heuristikker, presentert av Mason og Davis (1991) henholdsvis: spesialisering, generalisering og overbevisning. Resonnementene som fremkom gjorde det også nødvendig å dele opp spesialisering i ytterligere tre heuristikker: *gjett og sjekk*, *lag tabell* og *se etter mønster*.

Datamaterialet består av videoopptak, lydopptak og innsamling av notater fra to sekvenser på 90 minutter. Informantene består av henholdsvis en 2P-Y-gruppe på fire elever, og en R1-gruppe på fire elever. Datainnsamlingen er foretatt gjennom observasjon av gruppene, mens de jobbet med to gitte problem. Analysen baseres i all hovedsak på videoopptakene, og elevenes notater fra under prosessen.

De to gruppene presterer ganske likt i arbeid med oppgavene. Begge elevgruppenes resonnement er i stor grad preget av *gjett og sjekk*, og det kommer også frem en del eksempler på gjetninger. Gruppene benytter seg også av å lage tabeller, og tabellene som lages fører i mange tilfeller til at elevene presterer å se mønstre i tallene som så blir benyttet, for så å komme frem til eksplisitte og rekursive formler.

Begge elevgruppene søker etter å generalisere, selv om oppgaven spør etter spesialtilfeller, og selv om elevene eksplisitt nevner at de kan løse oppgaven, kommer det frem at de anser det som viktigere å komme frem til en generalisering før de besvarer problemet.

Selv om begge elevgruppene benyttet seg av overbevisning, var denne overbevisningen i stor grad preget av å *overbevise en venn*. Det kommer altså frem få fullstendige bevis, og mange eksempler på naiv empirisme.

I største delen av problemløsningsprosessen befinner elevene seg i utforskningsfasen. Analysefasen, som Schoenfeld (1992) hevder er den viktigste fasen, får minst oppmerksomhet av elevene.

Til slutt vil jeg trekke frem hvor tidkrevende slike problemløsningsoppgaver er, og hvor sentralt selvregulering tyder på å være for å kunne bli en bedre problemløser.

Abstract

The topic of this Master thesis is problem-solving in high school. To get an insight into how the problem-solving process can be described in high school I have, with socio-cultural glasses, assessed a problem-solving process in a 2P-Y group and a R1 group based on the research question:

What mathematical reasoning is expressed in a 2P-Y- and a R1-group's work on problem solving tasks, and which phases characterize the process?

In my review of research literature, I came to realize that the research available on problem-solving was immense. Because of this, I had to restrict the theory presented so that it best answered the research question relative to the discovered findings. The research question is made up of two parts. Firstly, it involves to orderly present the different phases that characterize the problem-solving prosses, and secondly, it involves emphasizing the mathematical reasoning expressed in the process.

To answer the research question, I have chosen to categorize the problem-solving phase into 6 categories presented by Schoenfeld (1985). In addition, I will categorize the mathematical reasoning in three superior heuristics, presented by Mason and Davis (1991), respectively: Specialization, Generalization and Conviction. The mathematical reasoning that arose required me to divide specialization into another three heuristics: *guess and check*, *make a table* and *look for a pattern*.

The data material consists of video recordings, sound recordings and a collection of notes from two sequences that lasted 90 minutes each. The informants consist of a 2P-Y group of four students, and a R1 group of four students respectively. The data collection was conducted through observation of the groups while working on two given problems. The analysis is based mainly on video recordings and the students' notes from the process.

The two groups perform quite similarly during the problem-solving prosses. Both groups' reasoning is largely characterized by *guess and check*, and there are also some examples of *guesses*. The groups also make use of tables, and the tables created lead in many cases to students seeing patterns and eventually arriving at explicit and recursive formulas.

Both groups seek to generalize, although the task asks for special cases, and although the students explicitly mention that they have the means solve the problem, it appears that they consider it more important to arrive at a generalization before answering the special case.

Although both groups made use of convincing, this convincing was largely characterized by *convincing a friend*. Thus, there is little reasoning containing complete proofs, and many examples of naive empiricism.

The majority of the problem-solving prosses the students find themselves in the exploration phase. The analysis phase that Schoenfeld (1992) argue is the most important phase when solving a problem, is the phase that get the least attention.

Finally, I will highlight how time-consuming such problem-solving tasks appear to be, and how self-regulation appears to a central part of becoming a better problem solver.

INNHOLDSFORTEGNELSE

Forord iii
Sammendrag v
Abstract vii
1 Innledning 1
1.1 Bakgrunn for valg av tema 1
1.2 Studiens formål og forskningsspørsmål 2
1.3 Avgrensning 3
1.4 Oppgavens struktur og innhold 3
2 Teoretisk rammeverk 5
2.1 Sosiokulturelt perspektiv 5
2.2 Problem 6
2.3 Problemløsning 7
2.3.1 Faser i problemløsningsprosessen 8
2.3.2 Individets problemløsningsferdigheter 11
2.3.3 Matematiske heuristikker 12
2.4 Tidligere forskning 13
2.4.1 Liknende studier 14
2.4.2 Hvordan utvikle problemløsningsferdigheter? 14
2.5 Bevis 15
2.6 Oppgavekriterier 16
3 Oppgavebegrunnelse 17
3.1.1 Oppgavevalg 17
3.1.2 Hanoi-problemet 17
3.1.3 Froskehopp-problemet 20
3.1.4 Vurdering av oppgavekriterier 23
4 Metodologi 25
4.1 Gjennomføring av studien 25
4.2 Forskningsdesign og forskningsparadigme 25
4.3 Valg av metode 26
4.4 Informanter 26
4.5 Datainnsamling 27
4.6 Databehandling 27
4.7 Validitet og reliabilitet 28
4.8 Etiske betraktninger 29
5 Analyse 31

5.1 Hanois Tårn ... 31
5.1.1 2P-Y-gruppen ... 31
5.1.2 R1-gruppen ... 37
5.2 Froskehopp ... 40
5.2.1 2P-Y-gruppen ... 40
5.2.2 R1-gruppen ... 46
6 Diskusjon ... 53
6.1 Faser ... 53
6.1.1 Hanois Tårn ... 53
6.1.2 Froskehopp ... 55
6.2 Heuristikker ... 56
6.2.1 Spesialisering ... 56
6.2.1.1 Gjett og sjekk ... 57
6.2.1.2 Lag tabell ... 58
6.2.1.3 Se etter mønster ... 58
6.2.2 Generalisering ... 59
6.2.3 Overbevisning ... 61
7 Konklusjon ... 63
8 Avsluttende betraktninger ... 65
8.1 Didaktiske implikasjoner ... 65
8.2 Videre forskning ... 66
9 Prosjektets betydning for meg ... 67
10 Referanser ... 69
Vedlegg 1 - Gruppeoppgaver ... 73
Vedlegg 2 - Transkripsjonsnøkkel ... 75
Vedlegg 3 – Meldeskjema NSD ... 77
Vedlegg 4 - Samtykkeærklæring ... 81

1 INNLEDNING

1.1 BAKGRUNN FOR VALG AV TEMA

Så lenge jeg kan huske har jeg stilt spørsmål, undret meg og kverulert når anledningen har bydd seg. Dette tror jeg kan være en av årsakene til min lidenskap for matematikk. Kasner og Newman (1940) påpeker at: «It is *only* by amusing oneself that one can learn» (Kasner & Newman, 1940, s. 156). Det hevdes altså her at en må være interessert i det som skal læres, for å kunne lære det. Likevel må det legges til at dette er noe som kan diskuteres, og mange vil muligens oppleve at de kan lære uten interesse. Til tross for dette åpner utsagnet opp for refleksjon. Når Kasner og Newman (1940) belyser hvordan dagens matematikk har oppstått. Deres forklaring er nettopp at slike scenarioer, der undringen og interessen er høy, og hvor det blir stilt spørsmål, er grunnleggende for matematikken. «The theory of equations, of probability, the infinitesimal calculus, the theory of point sets, of topology – all are fruits grown from seeds sown in the fertile soil of creative imagination – all have grown out of problems first expressed in puzzle form.» (Kasner & Newman, 1940, s. 156).

Logiske puslespill som innebærer å se mønstre og sammenhenger, slik som eksempelvis sudoku, sjakkoppgaver og fysiske pusleleker i tre, har alltid fanget min interesse. Likevel erfarte jeg selv som elev at dette var lite nyttig. Hver matematikktime var preget av samme struktur. Læreren presenterte først et matematisk tema, og vi fikk deretter rutineoppgaver. Hvis jeg stilte spørsmål om hvorfor vi gjorde det vi gjorde, fikk jeg ingen forklaring, men ble derimot fortalt at «det bare er sånn». Uten å egentlig ville akseptere dette, var altså min oppfatning av matematikk prosedyrepreget frem til jeg begynte på lærerutdanningen, hvor det åpnet seg en helt ny verden. Matematikk var her noe mer enn bare prosedyrer og regler, som skulle pugges. Plutselig skulle vi lete etter mønstre, sammenhenger og forklaringer, og sentrale fokuspunkter og spørsmål til diskusjon var: «Hvorfor er det slik?», «Hva om det hadde sett annerledes ut?» og «Hvordan kan vi være helt sikre på dette?» De mange rutineoppgavene ble færre, og forståelsen for konseptene ble dypere og bedre.

Det er ikke til å legge skjul på at rutineoppgaver og prosedyrer har sentral plass i matematikken, men skal det virkelig være slik at en må studere matematikk ved høyere utdanning før en får oppleve hva det virkelig innebærer? Hva med elevene som daglig frustrerer seg over at de ikke har en forståelse for hva de egentlig gjør i matematikktimene? Det jeg i denne studien vil trekke frem, er en av mulighetene lærere har for å variere den rutineoppgavepregede matematikkundervisningen, nemlig problemløsning.

Et problemløsningskurs forrige semester, vekket min interesse for problemløsning ytterligere. Her var det essensielt å reflektere, være engasjert og tenke annerledes enn det en tidligere var vant til. Pensum var resonnementene, refleksjonene og arbeidet som ble lagt inn i problemet. Kurset innebar ikke noen fasit, og mange av svarene og refleksjonene studentene hadde var ulike. Det å trekke frem refleksjoner høyt, argumentere og overbevise andre, og samtidig fortelle om frustrasjonen av å stå fast var nyttig for min egen matematiske utvikling. Det å høre på andres resonnement, og være observant på hvilke faser og prosesser de var gjennom medførte at jeg lærte å anvende matematikken jeg hadde tilgjengelig på en annen måte, og dermed løse problemer jeg tidligere ikke engang ville forsøkt å starte på. Denne måten å arbeide på, reflektere og diskutere er noe jeg ser nytte av ikke bare i matematikk, men når man møter på problemer generelt. Er det ikke slike egenskaper en egentlig har brukt for i arbeidslivet?

1.2 STUDIENS FORMÅL OG FORSKNINGSSPØRSMÅL

Som fremtidig matematikklærer, mener jeg det er viktig å kunne forberede elever på det de kommer til å møte i arbeidslivet. I Kunnskapsdepartementets læreplanverk for kunnskapsløftet (LK06) fremheves det at: «Opplæringens mål er å ruste barn, unge og voksne til å møte livets oppgaver og mestre utfordringer sammen med andre» (Kunnskapsdepartementet, 2006, s. 2). Videre skal opplæringen «..kvalifisere for produktiv innsats i dagens arbeidsliv, og gi grunnlag for senere i livet å kunne gå inn i yrker som ennå ikke er skapt» (Kunnskapsdepartementet, 2006, s. 2). Derfor har en som lærere et ansvar for å utvikle kompetanser hos elevene, som er viktig for senere arbeidsliv. Samtidig skal en forberede dem på livets oppgaver og utfordringer.

PISA-undersøkelsen er ment for å teste kompetanser som OECD mener er viktige i videre studier, fremtidige yrker, og for å ha en aktiv rolle i samfunnet (Utdanningsdirektoratet, 2016). Matematikk, norsk og naturfag vektlegges i denne undersøkelsen, og i 2003 ble temaet *problemløsning* innført. Dette temaet kom igjen i PISA 2012, men ble i 2015 endret til *samarbeidende problemløsning* (Universitetet i Oslo, u. å.). Årsaken til at problemløsning ble innført som eget tema, begrunnes med at det er «en av de mest sentrale kompetansene som kreves i dagens og morgendagens arbeidsliv» (Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe & Turmo, 2004, s. 162).

Problemløsningsoppgaver kan altså beskrives som sentrale, for å kunne tilfredsstille læreplanverkets krav om elevers opplæring. I tillegg til dette, tyder forskning på at problemløsning kan legge til rette for begrepsforståelse (Kieran, Krainer & Michael Shaughnessy, 2013; Prusak, Hershkowitz & Schwarz, 2013). Kjærnsli et al. (2004) hevder at resonneringsferdigheter er noe av det viktigste for å skåre høyt i problemløsning. På bakgrunn av dette, i tillegg til min egen erfaring med problemløsningsoppgaver, har jeg i denne studien valgt følgende forskningsspørsmål:

Hvilke matematiske resonnement kommer til uttrykk i en 2P-Y- og en R1-gruppes arbeid med problemløsningsoppgaver, og hvilke faser karakteriserer prosessen?

For å kunne besvare forskningsspørsmålet, er det sentralt å definere hva som menes med et problem og problemløsningsoppgaver. Dette blir grundig forklart i kapittel 2.1 og 2.2. Det er også sentralt å trekke inn hva jeg mener med matematiske resonnementer. De matematiske resonnementene som vil bli vektlagt i denne studien, er i hovedsak elevenes begrunnelser og argumentasjoner i løsningsprosessen av to gitte gruppeoppgaver. Disse resonnementene vil senere kategoriseres ut fra hvilke heuristikker som blir benyttet. De ulike heuristikkene blir presentert i kapittel 2.3.

Siste del av forskningsspørsmålet innebærer å se på hvilke faser som kategoriserer problemløsningsprosessen. For å få en best mulig oversikt over disse, vil de først bli presentert i analysedelen, før jeg i diskusjonsdelen fremstiller problemløsningsprosessen ved å trekke frem tidsbruken til de ulike gruppene, i de ulike fasene. I kapittel 2.3.1 redegjør jeg for de ulike fasene som fremkommer.

Informantene i denne studien er to grupper, på henholdsvis fire elever, som befinner seg i ulike faglige klasser. Den ene gruppen er fra en 2P-Y-klasse, og den andre gruppen er fra en R1-klasse. Mangelen på tilsvarende studier i videregående skole er hovedårsaken til mitt valg av fokus. Selv om det i liknende studier har blitt sammenliknet høytpresterende og lavtpresterende elever, mener jeg at denne studien vil være mer unik. Dette fordi den ikke sammenlikner elever som nødvendigvis har ulikt faglig nivå, men likevel ulik faglig bakgrunn. For å kunne få en innsikt i forskjellene og likhetene i elevgruppenes resonnementer, har jeg valgt å benytte identiske oppgaver i de to gruppene.

Under gjennomføringen av studien ble interaksjonen mellom elevene i de to gruppene sentral, noe som kan relateres til det sosiokulturelle læringssynet. Det vil derfor være naturlig at det sosiokulturelle perspektivet er underliggende gjennom hele studien, og hos meg som forsker.

1.3 AVGRENSNING

Problemløsning er et omfattende tema, og det ble på grunn av prosjektets rammer nødvendig å foreta avgrensninger. Dette ble gjort i form av både teori og oppgaver. Et av valgene som ble tatt for å avgrense oppgaven vises i form av hvilken teori som utgjør oppgavens teoretiske bakteppe.

Det finnes mye teori om problemløsning, så det teoretiske rammeverket måtte innsnevres slik at problemstillingen kunne besvares på en best mulig måte, uten å trekke inn for mange ulike teorier. Det var likevel sentralt å trekke inn Pólya, som er en av pionerene innenfor problemløsning. Han har lagt grunnlag for mange av de senere teoriene om problemløsning. Likevel vil ikke hovedfokuset bli på hans teori.

Som tidligere nevnt, var det også naturlig å trekke inn et kort kapittel om sosiokulturell teori. Dette perspektivet aktualiserer hvilken påvirkning samhandlingen mellom elevene og artefaktene har, på de ulike resonnementene som kommer frem.

Innsamlingen av data ble avgrenset til en observasjon av to ulike gruppers arbeid med to problemløsningsoppgaver. Det ble vurdert til at disse observasjonene ville gi meg tilstrekkelig mengde data, og jeg valgte dermed å ikke utføre et gruppeintervju, slik som originalt var planlagt.

1.4 OPPGAVENS STRUKTUR OG INNHOLD

Studien bygger i hovedsak på et sosiokulturelt læringsperspektiv, jeg har derfor valgt å presentere dette først i det teoretiske rammeverket, slik at dette danner en grunnmur for resten av oppgaven. Videre redegjøres det for problemer, og hva problemløsning innebærer, som ligger til grunn for analysen. Det har blitt utført en del studier om effekter av problembasert undervisning, og jeg har derfor valgt å inkludere dette i et eget underkapittel kalt "nyere forskning".

Oppgavene det her er tatt utgangspunkt i, finnes offentlig, og det er derfor sentralt å begrunne hvorfor nettopp disse kan kategoriseres som problemløsningsoppgaver, og hvilke resonnement som kan komme frem i arbeidet med dem. Dette er årsaken til at jeg har dedikert et helt kapittel (kapittel 3) til oppgavebegrunnelsen. Her presenteres oppgavene. Deretter argumenteres det for hvorfor de kan kategoriseres som problemløsningsoppgaver, og til slutt påpekes hvilke matematiske resonnementer som vil kunne komme frem.

I det påfølgende metodologikapittelet vil jeg så legge frem fremgangsmetoden som ble benyttet for å innhente informasjon, begrunne hvorfor kvalitative metoder ble benyttet, samt argumentere for hvilke konsekvenser dette medfører oppgavens validitet og reliabilitet. Det vil her også bli trukket frem etiske betraktninger, og hvilke valgt som er blitt tatt for å overholde informantenes anonymitet.

I analysekapittelet følger en presentasjon av studiens funn. Jeg har her valgt å presentere funnene ut fra oppgaver og grupper, slik at dataen blir presentert på en oversiktlig måte. I kapittel 4.3 følger en mer samlet oversikt over fasene elevene befant seg i på ulike tidspunkt, og i diskusjonskapittelet samler jeg funnene og sammenlikner dem med annen forskning, før jeg trekker konklusjoner.

Jeg vil avslutte oppgaven med egne refleksjoner om hvilken betydning denne studien har for meg som fremtidig lærer, og hvilke erfaringer jeg har fått gjennom å arbeide med denne oppgaven.

I det påfølgende kapittelet vil jeg ta for meg studiens teoretiske rammeverk.

2 TEORETISK RAMMEVERK

I det teoretiske rammeverket vil jeg først presentere det overordnede perspektivet på læring i korte trekk. Videre vil kapittelet bære preg av problemløsning, der hovedfokuset vil være på problemløsningsfasene til Pólya, Schoenfeld og Mason, Burton og Stacey. Schoenfelds ferdigheter innenfor matematisk problemløsning vil bli presentert, og det vil også fokuseres på de sentrale problemløsningsstrategiene som trekkes frem av Mason og Davis, Pólya og Schoenfeld. I tillegg vil jeg i dette kapittelet trekke inn tidligere forskning, og gjøre kort rede for de ulike bevisnivåene til Balacheff, samt presentere kriteriene som ligger til grunn for valg av problemløsningsoppgavene.

2.1 SOSIOKULTURELT PERSPEKTIV

Denne studien tar utgangspunkt i det sosiokulturelle perspektivet på læring. Et sosiokulturelt perspektiv på læring var et naturlig valg, fordi fokuset på studien er å betrakte resonnementene som kommer frem når elevene samhandler med hverandre. Elevene skal også samhandle med artefaktene som blir benyttet i oppgavene, og ettersom at det ikke gis noen føringer i oppgaven knyttet til fremgangsmåter eller hint, vil elevenes samarbeid kunne være essensielt for å komme frem til ulike resonnementer. Jeg vil videre presentere kort hva et sosiokulturelt perspektiv innebærer, samt sentrale begreper som vil bli benyttet i analyse- og diskusjonskapittelet.

De sosiokulturelle røttene finner vi i arbeidet til den russiske psykologen Lev Vygotsky, og den senere utviklingen er også sterkt inspirert av han (Skaalvik & Skaalvik, 2013). I det sosiokulturelle perspektivet legges hovedvekten på den samhandlingen som individet deltar i (Lillejord, Nordahl & Manger, 2013). Læring består i stor grad av overføring av kunnskap og tenkning som er utviklet historisk, og som er en del av kulturen (Skaalvik & Skaalvik, 2013). Begrepet kultur blir ofte benyttet i tilknytning til sosiokulturell teori. Säljö beskriver kultur slik:

> «Med kultur mener jeg dermed den samlingen av ideer, holdninger, kunnskaper og andre ressurser vi erverver gjennom interaksjon med omverdenen. I kulturen inngår også alle de fysiske redskapene - artefaktene - som vår hverdag er fylt av – ulike verktøy, instrumenter for måling, veiing og liknende, ulike former for informasjons- og kommunikasjonsteknologi, fremkomstmidler og annet.» (Säljö, 2010, s. 30)

Kulturen er altså et historisk produkt av andre menneskers erfaringer. Vi lærer oss eksempelvis språk, matematikk og matlaging, nettopp fordi vi interagerer med andre personer som inngår i den samme kulturen. Begrepet kultur innebærer altså en samling av både materialistiske og ikke-materialistiske redskaper, og Säljö påpeker viktigheten av samspillet mellom dem.

I sitatet ovenfor brukes begrepet artefakt. Artefakter er menneskeskapte fysiske gjenstander, som har til hensikt å fungere som redskaper for mennesker når de blant annet skal løse problemer og bearbeide informasjon (Säljö, 2010). Ulike kulturer utvikler ulike artefakter, eksempelvis vil en hjelpepleier ikke ha nytte av en linjal på samme måte som en matematiker vil ha. Slike artefakter er også noe vi interagerer med, og ifølge Säljö innebærer dette at vi ikke kan se på et artefakt som et utelukkende dødt objekt: «Menneskelige kunnskaper, innsikter, konvensjoner og begreper er bygd inn i apparater og blir derved noe vi samspiller med når vi handler» (Säljö, 2010, s. 82). På denne måten kan altså artefakter fungere som medierende redskaper, om brukeren har kompetansen til å bruke det.

Artefakter kan altså mediere virkeligheten for oss mennesker. Det er viktig å presisere at artefaktet er et produkt av mennesker, og er formet av kulturen til menneskene som har skapt, og bruker, artefaktet. Vellykkede artefakter er, ifølge Säljö, ofte slik at de fungerer uten at brukeren forstår den underliggende teknikken. Et eksempel er datamaskinene de fleste har tilgjengelig, og kan bruke, selv om en nødvendigvis ikke har kunnskap om hvordan denne egentlig fungerer.

Begrepet mediering er ikke utelukkende knyttet til artefakter og teknikk. Säljö presiserer faktisk at «Menneskets aller viktigste medierende redskap er de ressursene som finnes i språket vårt» (Säljö, 2010, s. 84). Mediering er en komplisert prosess som skjer i samhandling med andre. Hans Kristian Nilsen definerer mediering som «...all kinds of interplay between signs, tools and human beings.» (Nilsen, 2013, s. 45). Videre i oppgaven vil jeg støtte meg til Nilsen sin definisjon, og refererer til mediering som all form for samhandling mellom tegn, verktøy/artefakter og mennesker. Med tegn menes alle psykologiske verktøy. Eksempler på slike psykologiske verktøy kan være blant annet språk, symboler og grafer. En elevs tolkning av ulike matematiske symboler, vil eksempelvis være et resultat av mediering mellom eleven og symbolene.

Mediering kan føre til at vi lærer noe vi ikke kunne fra før. Det å i en kultur ta til seg kunnskaper fra andre på denne måten, kalles appropriering. «Vi har i enhver situasjon mulighet til å overta og ta til oss - appropriere - kunnskaper fra våre medmennesker i samspillsituasjoner.» (Säljö, 2010, s. 122). Man har altså muligheter til å ta til seg ny kunnskap i samspill med andre, som er en viktig egenskap for å ta del i en kultur. Dette kommer også tydelig frem i det Vygotsky definerer som den proksimale utviklingssonen, som er et viktig prinsipp i den sosiokulturelle teorien. Den kan beskrives som avstanden mellom det et barn kan prestere alene, og hva barnet kan prestere ved veiledning av en voksen, eller i samarbeid med mer kapable andre (Skaalvik & Skaalvik, 2013).

Med sosiokulturelle briller vil jeg som forsker kunne fokusere på medieringen elevene er en del av, og hvordan problemløsningskulturen kan bidra til å fremme resonnementer og argumentasjoner hos elevene. For å kunne analysere elevenes resonnement i arbeid med problemer, vil det være essensielt å definere hva et problem faktisk er. I neste avsnitt vil jeg derfor trekke frem noen sentrale definisjoner og forsøke å samle dem i én definisjon som vil være utgangspunkt for resten av studien.

2.2 PROBLEM

Problem er muligens et av de mest sentrale begrepene innenfor matematikken. Katz trekker blant annet frem at: «Mathematics was not discovered in the polished form of our textbooks, but was often developed in an intuitive and experimental fashion in order to solve problems.» (Katz, 2009, s. xi). Problemer hevdes altså å være selve fundamentet for matematikken. Matematikken er en av de eldste vitenskapene som finnes, og i to av de eldste og mest kjente, nedskrevne dokumentene: Rhind-papyrusen og Moskva-papyrusen, kan vi se hvordan egypterne brukte matematikk for å løse ulike problemer knyttet til administrering av landet.

Det finnes flere definisjoner på hva et problem er. Årsaken til at det kan være vanskelig å definere hvilke oppgaver som er problemer, er fordi problemløsning er relativt. Noen oppgaver kan oppleves som rutineoppgaver for enkelte, men problemer for andre. Et problem er altså ikke en spesifikk type matematisk oppgave, men et bestemt forhold mellom den individuelle oppgaven og personen som skal forsøke å løse den (Schoenfeld, 1985).

Schoenfeld definerer et problem ved å ta hensyn til individet slik: «For any student, a mathematical problem is a task (a) in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and (b) for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution» (Schoenfeld, 1989, s. 87-88).

For at et matematisk problem skal oppstå, er det altså essensielt at oppgaven ikke blir for enkel for individet, samtidig som det likevel skal være en oppgave som er mulig å løse. I tillegg presiserer Schoenfeld (1985) viktigheten av at oppgavens utfordring er intellektuell, og ikke operasjonell. En oppgave vil altså ikke fungere som et problem om individet forstår oppgaven umiddelbart og vet hvordan den skal regnes, men har problemer med det regnetekniske. En oppgave vil fungere som et problem om individet ikke umiddelbart vet hvordan oppgaven skal løses. Dette kommer også frem gjennom Pólyas definisjon: «To have a problem means: *to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim*. To solve a problem means to find such action.» (Pólya, 2009, s. 117). I Oxford English Dictionary blir begrepet definert som: «A difficult or demanding question; (now, more usually) a matter or situation regarded as unwelcome, harmful, or wrong and needing to be overcome; a difficulty. » (problem, 2018, 3a).

Felles for de ulike definisjonene er at oppgaven skal være en utfordring for individet. I tillegg til dette påpeker Schoenfeld (1985) at problemene må stilles på en slik måte, at ikke elevene blir veiledet mot en løsningsmetode. De må selv bruke de ferdighetene og erfaringene de besitter, for å se hva som kan brukes og hvordan en kan gå frem. Dette er også noe Mason og Davis (1991) støtter opp om, men her trekkes det også frem effekten av at en oppgave kan løses på flere ulike måter.

Jeg vil forsøke å samle disse ulike definisjonene, og vil videre i denne oppgaven definere et problem slik: *Et problem er en oppgave som individet ikke umiddelbart kan se en løsning på, og som utfordrer individet selv om det har tilstrekkelig matematisk kompetanse for å løse oppgaven. Et problem skal kunne løses på flere ulike måter, og det skal stilles på en slik måte at elevene ikke blir veiledet inn mot en løsningsmetode.*

2.3 PROBLEMLØSNING

Selve begrepet problemløsning omhandler prosessen en må gjennom for å løse et problem. Jonassen (2014, s. 269) trekker frem at det både er eksterne og interne faktorer som påvirker problemløsningsprosessen. Eksterne faktorer er faktorer relatert til problemets natur slik det blir møtt i verden, mens interne faktorer er knyttet til personlige karakteristikker hos problemløseren. Slike interne faktorer kan blant annet være tidligere erfaringer, kunnskapsnivå, eller strategier som blir benyttet. Jeg vil i denne oppgaven hovedsakelig fokusere på de interne faktorene i problemløsning, ettersom at det er det som blir mest relevant for å kunne besvare problemstillingen.

Lesh og Zawojewski definerer problemløsning slik:

> «Problem solving is defined as the process of interpreting a situation mathematically, which usually involves several interactive cycles of expressing, testing and revising mathematical interpretations – and of sorting out, integrating, modifying, revising, or refining clusters of mathematical concepts from various topics within and beyond mathematics» (Lesh & Zawojewski, 2007, s. 782)

Problemløsning innebærer altså ikke bare de matematiske metodene en bruker for å finne en løsning, men også alt annet som ligger til grunn for resonnementene. Hvordan man uttrykker seg, resonnerer, sorterer informasjon, vurderer og reflekterer over begrunnelser og argumenter er sentrale deler av problemløsningsprosessen.

2.3.1 FASER I PROBLEMLØSNINGSPROSESSEN

Pólya regnes for mange som grunnleggeren av dagens problemløsning (bla. Passmore (2007); Schoenfeld (1987a)). I boken «How to solve it» trekker Pólya (2004) frem fire sentrale faser man går gjennom når man løser et problem:

1. *Forstå problemet*

I denne fasen må problemløseren ta for seg problemet, og virkelig forstå hva det innebærer. Å forstå problemet innebærer blant annet å identifisere hva som er ukjent, hva de ulike tegnene betyr og hvilken informasjon som er essensiell for å kunne svare på spørsmålet. I en studie av Baraké, El-Rouadi og Musharrafieh (2015) utført på 7. og 8. klassinger trekkes det frem at elevene forhaster seg i denne fasen og dermed ikke tolker problemet tilstrekkelig. Dette medfører at de ikke har tilstrekkelig informasjon for å løse problemet.

2. *Komme frem til en plan*

Den andre fasen går ut på at problemløseren gjør seg opp en plan for hvordan problemet kan løses. Denne fasen kan være lang og kreve utholdenhet, og det er i denne fasen at den største delen av problemløsningsprosessen ligger. Det å trekke frem tidligere kunnskap, og bruke dette på en effektiv måte er sentralt i denne fasen. Essensielle spørsmål som en kan stille seg i denne fasen kan være: «Har jeg sett liknende problemer tidligere?», «Kan jeg løse deler av problemet?»

3. *Utføre planen*

Denne fasen er ganske «rett frem», og innebærer steget hvor man utfører det man kom frem til i den forrige fasen. Selve utførelsen kan være tidkrevende, men er ofte den minst krevende fasen i problemløsningsprosessen. Dette fremhever også Pólya (2004, s. 12): «To carry out the plan is easier, all you need is mainly patience».

4. *Se tilbake*

Den siste fasen innebærer å ta et steg tilbake, se på resultatet, kontrollere at alt er gjort riktig, og at argumentasjonen er god. At argumentasjonen er god nok innebærer at man kan bevise påstandene, og stå for de konklusjonene man har kommet frem til. Her kan man også knytte opp svaret og prosessen man har vært gjennom med andre problemer og se om man kan finne likheter. Kan svaret kanskje skrives på en annen måte? Er argumentet godt nok forankret?

Denne oversikten over de ulike fasene som Pólya beskriver, er generell og ikke nødvendigvis rettet inn mot spesifikke matematiske problem. Selv om denne modellen til Pólya er gammel, hevder Leong, Tay, Toh, Quek og Dindyal (2011) at den er dagsaktuell, og fremdeles blir brukt som et teoretisk rammeverk i forskning på problemløsning. Schoenfeld (1985) utvider denne oversikten ved å dele den første fasen opp i to deler: lese-fasen og analysefasen. Lese-fasen innebærer å lese problemet, og all tid som benyttes til å ta innover seg hva som faktisk står i problemet, mens analysefasen innebærer å analysere problemet, forstå hva det faktisk spørres etter, hva man skal svare på og hvordan man på best mulig måte kan besvare spørsmålet. Det å se problemet på en annen måte, å gå tilbake for å så tolke hvordan problemet ser ut, er også en del av denne fasen.

Schoenfeld (1985) deler også opp den andre fasen til Pólya i to: *utforskningsfasen* og *planleggingsfasen*. Utforskningsfasen innebærer, slik jeg tolker det, at problemløseren usystematisk utforsker ulike konsekvenser av problemet. Fasen hvor man *planlegger* skiller seg fra fasen til Pólya hvor man *kommer frem til en plan*, ved å, etter min tolkning, utelukkende inneholde selve planleggingen. Pólyas fase inneholder altså i tillegg veien til å komme frem til planen (som da blir en blanding av analyse og utforskningsfasen til Schoenfeld). Schoenfelds oversikt blir dermed seende slik ut: lese, analysere, utforske, planlegge (plan), implementere (implement), se tilbake/bekrefte (verify) (Schoenfeld, 1985).

I arbeid med ulike problemer er det viktig å kunne endre synsvinkler (Pólya, 2004). Mason og Davis (1991) fremhever viktigheten i det å stå fast, altså å være «stuck». Det å stoppe opp og ikke vite hvor man skal videre er essensielt i problemløsningsprosessen, og det er gjennom denne erfaringen at en har størst potensiale for læring. Det å stå fast slik, å frustrere seg over hindringer, bidrar til at man må endre synsvinkler og tenke annerledes. Dette skjer ofte flere ganger under problemløsningsprosessen, og en har dermed ofte behov for å se problemet på ulike måter, eller med ulike «briller». Etter hvert som det arbeides med problemet vil dette synet endre seg. På denne måten vil problemet se annerledes mot slutten av problemløsningsprosessen enn hva det gjorde i starten av prosessen (Pólya, 2004). Dette skiftet mellom synsvinkler på problemet, er essensielt for å kunne bevege seg gjennom de tre fasene som Mason, Burton og Stacey (2010) deler problemløsningsprosessen inn i: *Inngangsfasen, angrepsfasen* og *tilbakeblikksfasen*.

Hvordan spørsmålet tolkes, hvilke valg som blir tatt og hvordan en så reflekterer over de ulike valgene er essensielt i de overnevnte fasene. Fasene sier altså noe om progresjonen til problemløseren, og har nær sammenheng til de fire fasene Pólya benytter. Inngangsfasen er nært knyttet til den første fasen til Pólya, hvor det essensielle er å få en god oversikt over problemet og hva det faktisk spørres om.

Videre er angrepsfasen en overordnet fase av 3., 4. og 5. fasen til Schoenfeld. Denne fasen innebærer å lage hypoteser (conjectures) som skal kunne redegjøres for, samt at en skal kunne overbevise seg selv og andre om at disse stemmer. Mason og Davis (1991) trekker frem at en først skal overbevise seg selv, deretter overbevise en venn, for så til slutt overbevise en skeptisk kollega (bevis).

Angrepsfasen kan altså gå litt over i tilbakeblikks-fasen, som er nært knyttet til Pólyas 4. fase, og innebærer å se tilbake på hva en har gjort og reflektere over resultatene. Mason et al. (2010) fremhever at denne fasen ikke nødvendigvis må være slutten på prosessen. Denne fasen innebærer å se tilbake på hva som er blitt gjort, også når man står fast eller ikke kommer frem til riktige konklusjoner. Det er altså ikke bare en fase hvor man beviser funnene, men også en fase hvor man reflekterer over argumenter og feil som er blitt gjort, slik at man kan nøste opp i disse og gå tilbake til angrepsfasen. Denne fasen innebærer også både å reflektere over valg som ble gjort, og utvide problemet til en større kontekst.

Tabell 1 på neste side viser en oppsummerende sammenheng mellom de ulike teoriene presentert ovenfor slik jeg har tolket dem.

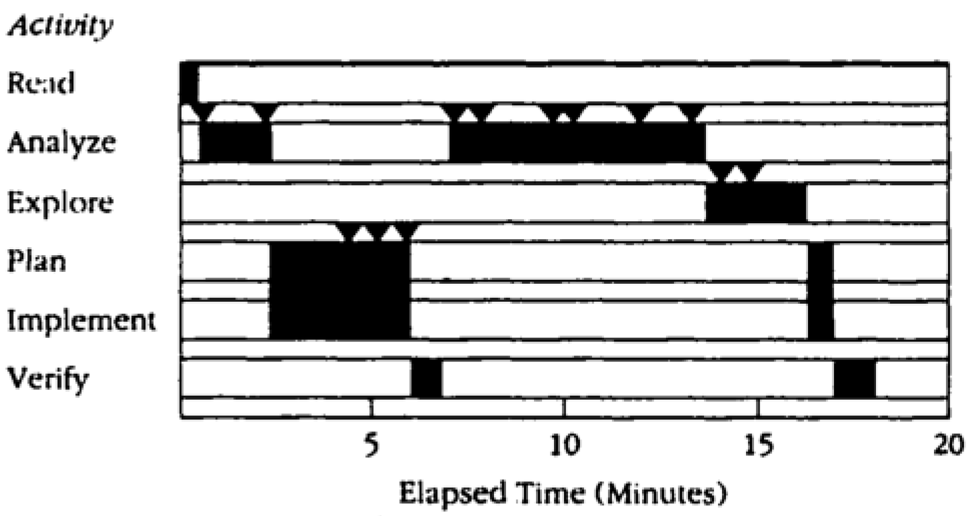
Mason et. Al. (2010)	Pólya (1971)	Schoenfeld (1985)
Inngang	Forstå problemet	Lese
		Analysere
Angrep	Komme frem til en plan	Utforske
		Planlegge
	Utføre planen	Implementere
Tilbakeblikk	Se tilbake	Bekrefte

Tabell 1

Det understrekes at de ulike fasene ikke nødvendigvis forekommer i kronologisk rekkefølge, og ender med at problemet blir løst. I mange tilfeller går en for eksempel fra inngangsfasen til angrepsfasen, for så å ende i inngangsfasen igjen. Det finnes derfor ikke noen enkel måte å beskrive en generell problemløsningsprosess på, ettersom at den er for kompleks, og avhenger av individets ferdigheter og kunnskaper (Erbas & Okur, 2012; Passmore, 2007; Schoenfeld, 1985).

Schoenfeld (1985, 1992) benytter seg av disse ulike fasene ved å se på tiden problemløseren bruker i de ulike fasene. Denne tidsbruken mener Schoenfeld (1985, 1992) vil kunne bidra til å skille erfarne problemløsere og mindre erfarne problemløsere, og rette fokus mot problemløserens selvregulering og monitorering (se kapittel 2.3.2) gjennom problemløsningsprosessen. Schoenfeld (1992) trekker frem at en god problemløser er flink til å fokusere på selvregulering og monitorering, og dermed vurderer strategiene som velges til enhver tid. Han trekker på dette grunnlaget frem at en erfaren og dyktig problemløser i størst grad fokuserer på analysefasen, planleggingsfasen og implementeringsfasen, mens en uerfaren problemløser i størst grad benytter seg av utforskningsfasen.

En metode som kan benyttes i forskningssammenheng for å få en oversikt over de ulike fasene problemløseren går gjennom, er å sette opp en figur med en oversikt over problemløserens tidsbruk i de ulike fasene. Figur 1 er en representasjon av en problemløsningsprosess utført av en ansatt på matematisk fakultet ved et universitet slik Schoenfeld (1992) presenterer det.



Figur 1 (Schoenfeld, 1992, s. 356)

Schoenfeld (1992) trekker også frem at de ulike fasene problemløseren er innom vil variere ut fra problemene, og at progresjonen i fasene, slik figur 1 viser, ikke nødvendigvis er ideelle i arbeid med alle problemer. De ulike trianglene som er tegnet inn i figuren, representerer kommentarer som problemløseren har gjort seg i forhold til hvor han/hun er i problemløsningsprosessen.

2.3.2 INDIVIDETS PROBLEMLØSNINGSFERDIGHETER

Individets problemløsningsferdigheter er også noe Schoenfeld (1985) trekker frem. Han har utarbeidet fire sentrale begreper, som beskriver ferdighetene som kreves av individet i arbeid med matematiske problemer:

1. *Ressurser* (Resources): Selve matematikken som kreves for å løse problemet.

Den matematiske kompetansen til eleven spiller en stor rolle i arbeid med et problem. Schoenfeld kommenterer at det likevel ofte er slik at elevene ikke klarer å løse problemet selv om de har den matematiske kompetansen som kreves. «The issue for students is often not how efficiently they will use the relevant resources potentially at their disposal. It is whether they will allow themselves access to those resources at all» (Schoenfeld, 1985, s. 13).

Hvordan vi bruker den matematiske kompetansen vi har er altså det mest essensielle innenfor matematisk problemløsning, og nettopp derfor er det viktig å ha kunnskap om ulike heuristikker.

2. *Heuristikker* (Heuristics): «Tommelfingerregler» for suksessfull problemløsning.

Heuristikker kan altså betraktes som enkle strategier som kan hjelpe individet til å forstå problemet bedre eller bidrar til progresjon mot en løsning. Heuristikker er sentrale i den andre fasen til Pólya som innebærer å lage en plan. Det finnes et stort antall ulike heuristikker, men Mason og Davis (1991) trekker frem spesialisering, generalisering og overbevisning som sentrale overordnede heuristikker.

Pólya (2004) nevner en del andre heuristikker som kan være nyttige, men de fleste av disse kan plasseres inn under en av disse tre kategoriene som Mason og Davis trekker frem. Noen eksempler på slike underordnede heuristikker kan være blant annet å *se etter mønster*, se på spesialtilfeller, løse et enklere problem eller gjette og sjekke.

De heuristiske metodene som Pólya viser til, er ikke nødvendigvis bare ferdigheter. For å kunne lage en tegning eller et bilde av problemet, må en elev vite hvilket bilde som skal tegnes til hvilke problemer og situasjoner. Derfor vil den viktigste ferdigheten ligge skjult hos eleven, og være selve tolkningsferdigheten, ikke bare ferdigheten til å utføre oppgaven. Å lære slike heuristiske metoder innebærer altså metakognitive refleksjoner knyttet til selve tolkningen av metodene og problemene (Lesh & Zawojewski, 2007).

Jeg vil gå mer inn på spesifikke heuristikker som blir benyttet i denne studien i kapittel 2.3.3.

3. *Kontroll* (Control): Betegner hvordan individet bruker informasjonen som potensielt er til disposisjon. Schoenfeld (2017) nevner at begrepene *selvregulering og monitorering* er synonym til kontroll, og det er disse begrepene som oftest benyttes i dagens forskning.

Kontroll fokuserer på store avgjørelser om hva man burde gjøre i et problem. Dette kan omhandle: «planlegging», «sette opp mål og delmål», «overvåke og vurdere ulike løsninger som kommer frem», og «revidere og forkaste planer når vurderinger indikerer at dette burde gjøres». Den definerte karakteristikken av handlinger på kontrollnivå, er at de har globale konsekvenser for utviklingen av en løsning. De er beslutninger om hvilke retninger man velger, og derfor også hvilke man ikke velger. De er beslutninger om å forlate retninger, som åpner opp for nye muligheter, men hvor man risikerer å «kaste bort» det arbeidet man allerede har gjort som muligens kunne endt opp med riktig svar.

Slike handlinger på kontrollnivå innebærer altså i stor grad hvordan en velger å prioritere ressursene en har tilgjengelig, som for eksempel tid eller hvilke heuristikker en velger å benytte.

4. *Oppfatnings-systemer* (Belief Systems): innebærer individets syn/perspektiv på hvordan en forholder seg til matematikk og matematikkoppgaver.

En persons oppfatning av matematikk kan avgjøre hvordan en velger å møte et problem, hvilke teknikker en bruker eller unngår, samt hvor lenge og hvor hardt en arbeider med et problem. Oppfatningen danner konteksten hvor ressurser, heuristikker og kontroll opererer.

En annen forsker som trekker inn viktigheten av den matematiske oppfatningen (mathematical belief) er Jo Boaler. Boaler (2016) trekker frem hvor sentrale slike oppfatninger er i arbeid med matematikk, og introduserer begrepet: *mathematical mindset,* som de holdningene og oppfatningene elevene må søke å oppnå. Hun trekker også frem hvordan en gjennom kreative oppgaver kan endre elevenes oppfatning til et mathematical mindset, og at dette vil kunne resultere i bedre problemløsere (Boaler, 2016).

En persons erfaringer med, og ferdigheter innenfor, disse fire kategoriene som Schoenfeld introduserer, er altså viktig for suksessfull problemløsning. Disse ferdighetene avgjør i stor grad hvordan individet velger å gå frem i arbeid med et problem, hvilke beslutninger individet tar under problemløsningsprosessen, og hvordan individet forholder seg til resultatene og prosessene en må gjennom.

Å kartlegge et individs ferdigheter innenfor disse fire kategoriene kan være vanskelig fordi at mange av disse ferdighetene kan ligge skjult, og må arbeides med av individet selv ved å reflektere over eget metakognitive nivå (Schoenfeld, 1985). Det å fokusere på hvilke av disse ferdighetene som kommer frem, og da spesielt hvilke ulike heuristikker som blir benyttet er derimot enklere. Dette vil derfor være en sentral del av analysekapittelet.

2.3.3 MATEMATISKE HEURISTIKKER

Jeg har tidligere definert hva som menes med heuristikker, og vil i dette delkapittelet gå inn på hvilke heuristikker som vil bli trukket frem og fokusert på i analysekapittelet. De heuristikkene som blir presentert her, vil altså fungere som analyseverktøy for datamaterialet.

En viktig heuristikk som Pólya trekker frem når en skal arbeide i de ulike fasene er å bruke *hjelpeproblem* (*auxillary problem*). Dette er andre problem som kan være til hjelp, på vei mot å løse det originale problemet. Noen ganger er resultatet av dette problemet det vi er interessert i, andre ganger er det løsningsmetoden eller prosessen som kan være av interesse. Utfordringen med slike problem er tidsbruk, og å finne dem. Det er sjelden de blir oppgitt, og det kan være en risiko ved å bruke mye av ressursene på dette nye problemet, istedenfor det originale problemet.

Om en går fra det originale problemet, til et mindre ambisiøst hjelpeproblem, er det mulighet for at en får tilstrekkelig med informasjon for å kunne løse det originale problemet, men dette er ikke garantert. Et eksempel på en slik overgang kan være *spesialisering*. Om man går fra det originale problemet til et mer ambisiøst problem vil man i mange tilfeller kunne løse det originale problemet på en enkel måte, men dette krever også mer arbeid fra problemløseren. Et eksempel på en slik overgang kan være *generalisering* (Pólya, 2004).

Spesialisering og generalisering er essensielle metoder for å løse ulike problemer (Mason et al., 2010; Mason & Davis, 1991). Spesialisering er et overordnet begrep som innebærer all form for forenkling av problemet, eller å prøve ut spesialtilfeller. Spesialisering innebærer å finne noe, enten et fysisk objekt, mentalt bilde, et diagram, et spesialtilfelle eller et eksempel som kan manipuleres enklere, og med større sikkerhet, enn ordene som blir brukt i spørsmålet (Mason & Davis, 1991).

På mange måter kan man si at generalisering er det motsatte av spesialisering. Generalisering innebærer at problemet ses i en større sammenheng. Gjelder problemet i flere tilfeller enn det som er oppgitt? Kan man finne en formel som vil gjelde i alle slike tilfeller? Pólya (2004) nevner at man i mange tilfeller enklere kan besvare problemet ved å først generalisere. Dette kan være i tilfeller hvor problemet kan være vanskeligere å løse ved å spesialisere. Et eksempel på dette kan være figurtall, hvor en får spørsmål om å finne figur nummer 100. I dette tilfellet vil det være enklere for oss å finne en generell formel først, ved å benytte oss av mønsteret til de første figurene, for så å bruke den generelle formelen for å besvare spesialtilfellet med figur nummer 100.

Ved generalisering av mønstre og tallrekker slik elevene skal forsøke å gjøre i denne studien, sier Lannin, Barker og Townsend (2006) at det er to ulike måter å tolke slike situasjoner på. Enten kan rekursiv metode benyttes, ved å gjenkjenne og bruker endringene fra figur til figur. Det andre alternativet er eksplisitt metode, der en gjenkjenner eller finner et mønster hvor den uavhengige variabelen settes i sammenheng med den avhengige variabelen. Ved å benyttelse av en rekursiv formel er en alltid avhengig av det foregående leddet i rekka, men ved eksplisitt formel derimot, er det mulig å regne ut en hvilken som helst verdi for variabelen.

I tillegg til de tre overordnede heuristikkene som nå er blitt nevnt, vil jeg også trekke frem tre mer spesifikke fra Pólya (2004), som kommer frem i analysen: *se etter mønster*, *lage tabeller* og *gjett og sjekk*. Det å bevisst benytte seg av tabeller for å få en oversikt som man kan jobbe videre med trekkes også frem av Mason et al. (2010); Mason og Davis (1991), hvor de også trekker frem hvordan dette kan bidra til enklere å se et mønster. De poengterer samtidig viktigheten av at det ikke skal oppgis eksplisitt som en metode i oppgaven, men at problemløseren selv må kunne kjenne behovet eller trangen for å sette opp en tabell. Mason et al. (2010); Mason og Davis (1991); Schoenfeld (1985) trekker også frem nytten av å effektivt kunne benytte seg av *gjett og sjekk*, men at en må være bevisst på hvordan man benytter seg av heuristikken for at det skal kunne fungere effektivt. Capraro, An, Ma, Rangel-Chavez og Harbaugh (2012) mener at man ikke kan regne en ren gjetning som det samme som *gjett og sjekk*. Om man gjetter seg frem, men ikke kan forklare løsningen, eller ikke benytter seg av gjetningen for å kontrollere løsningen, kan det ikke regnes som en strategi (Capraro et al., 2012).

I det neste kapittelet vil jeg i korte trekk se på noe om hva forskning viser i forhold til utvikling av bedre problemløsningsferdigheter.

2.4 TIDLIGERE FORSKNING

I dette kapittelet vil det trekkes frem utvalgt forskning på problemløsningsfeltet. Kapittelet vil være todelt, hvor fokusområdet i den første delen vil være liknende studier som er blitt utført i nyere tid. Deretter følger en del om studier som påpeker hvordan undervisningen kan legges til rette for å utvikle problemløsningsferdighetene. Den sistnevnte delen vil ikke være like aktuell i denne studien, men representerer likevel en sentral del av den omgående forskningen som blir utført på feltet, og anses dermed som relevant å belyse.

2.4.1 LIKNENDE STUDIER

Flere studier har tatt for seg elevers resonnement i arbeid med problemløsningsoppgaver. Det vil her trekkes frem studier som anses som aktuelle sammenlikningsstudier.

I en studie av ungdomsskolelærere, utført av Capraro et al. (2012), hvor 8 ulike ungdomsskolelærere arbeider med et geometriproblem, trekkes det frem at løsningsprosessene i størst grad er preget av *gjett og sjekk*. Det kommer også frem at lærerne på flere steder benyttet seg av usystematisk gjetting istedenfor å systematisk benytte seg av *gjett og sjekk*.

En annen studie av Selden, Selden, Hauk og Mason (2000) fokuserer på kalkulusstudenters arbeid med problemløsningsoppgaver. Her konkluderes det med at studentene har den tilgjengelige matematiske kompetansen som kreves for å løse oppgaven, men ikke klarer å benytte seg av denne kunnskapen i møte med ikke-rutine-problemer.

En studie av Bjuland (2007) fokuserer på lærerstudenters problemløsningsstrategier, etter et kurs knyttet til problemløsning. Han konkluderer med at de mest fremtredende strategiene som blir benyttet av lærerstudentene er strategiene visualisering, monitorering og spørring, og at det er essensielt at studentene hele tiden har kontroll på hvor i problemløsningsprosessen de befinner seg og at tilbakeblikks-spørsmål stilles.

Abusdal (2011) sammenlikner svake og sterke 9. klassinger i arbeid med problemløsning, og trekker konklusjonen at de svake elevene i større grad benytter seg av uhensiktsmessige strategier og går raskere over i angrepsfasen enn de sterke elevene. I tillegg til dette trekkes det frem at de sterke elevene har større utholdenhet og repertoar av strategier. Hun trekker også frem at de sterke elevene benytter seg av tilbakeblikks-fasen, som for de svake elevene er ukjent.

Leistad (2016) sammenlikner også resonnementene til to grupper på 9. trinn på ulikt nivå. Hun trekker frem at begge gruppene i liten grad benytter seg av monitorering, og var preget av rutinearbeid og det å komme raskt frem til svaret.

2.4.2 HVORDAN UTVIKLE PROBLEMLØSNINGSFERDIGHETER?

Pólya (2004) hevder at en kan bli en bedre problemløser ved å gjøres oppmerksom på de ulike fasene, og stille seg generelle spørsmål for å bli oppmerksom på ulike heuristikker. Ved å gjøre dette mener Pólya at en vil «acquire something that is more important than the knowledge of any particular mathematical fact» (Pólya, 1971, s. 5). Yuan (2013) støtter opp om Pólyas modell, og mener at den ikke trenger å utvides, så lenge undervisningen kombineres med tilstrekkelig repetisjon.

Lesh og Zawojewski (2007) hevder derimot at nyere forskning ikke kan konkludere med at undervisning av Pólyas generelle heuristiske strategier nødvendigvis fører til bedre problemløsningsferdigheter. Dette er også noe som støttes opp av Lester (1994); Schoenfeld (1987b); Williams og Goos (2013). Erbas og Okur (2012) hevder på en annen side at «The problem solving success is too complex to be clarified by a unique property or behavior of the solver» (Erbas & Okur, 2012, s. 89). Passmore (2007) trekker derimot frem at trening i heuristiske strategier kan være verdifullt, om det blir utført i en kontekst hvor det er naturlig å benytte problemløsning. Dette støttes også av Arcavi, Kessel, Meira og Smith III (1998) som mener at elever må jobbe med virkelige problemer, og ikke øvelser som er konstruert for å trene på spesifikke metoder eller prosedyrer. Om denne treningen i tillegg kombineres med eksplisitt metakognitiv trening for å fremme selvregulering og monitorering av problemløsningsprosessen, tyder forskning på at dette vil kunne bidra til å bli en bedre problemløser (Erbas & Okur, 2012; Ghahari & Basanjideh, 2015; Lester, 1994; Schoenfeld, 1987b, 2016; Williams & Goos, 2013).

Passmore beskriver utfordringen slik: «Another difficulty comes from cognitive research which shows that, as well as training in the strategies and tactics of problem-solving, students need training in command and control - in self-regulation and mental resource allocation during the problem-solving process» (Passmore, 2007, s. 48). I tillegg til et slikt metakognitivt fokus vil også elevenes oppfatninger av matematikken, og problemene som skal løses, kunne være essensielt. Å arbeide kreativt med matematikk kan bidra til at elevene vil kunne endre disse oppfatningene, og dermed oppnå et mathematical mindset (Boaler, 2016).

En metode som trekkes frem av Schoenfeld (2017) for å bevisstgjøre elevene på sine refleksjoner, og dermed øke selvregulering, er bruken av videoopptak i undervisningen. Med dette menes ikke at man skal filme et undervisningsopplegg som elevene skal se, men heller en gruppeprosess hvor elevene selv er delaktige. På denne måten mener Schoenfeld (2017) at man får tatt et steg tilbake, og sett på sin egen problemløsningsprosess på en annen måte som han mener kan bidra til å øke selvreguleringen.

2.5 BEVIS

Som tidligere nevnt vektlegger både Mason et al. (2010); Mason og Davis (1991); Pólya (2004); Schoenfeld (1985) viktigheten av det å se tilbake, vurdere svaret og overbevise andre om at de resonnementene som er blitt gjort er riktige. Et sentralt tema som dukker opp i forbindelse med dette er bevis.

Balacheff (1988) introduserer fire bevisnivåer som kan identifiseres i skolematematikken: Naiv empirisme (naive empiricism), avgjørende eksperiment (the crucial experiment), generisk eksempel (the generic example), tankeeksperiment (the thought experiment). Han trekker også frem at de to førstnevnte ikke kan regnes som bevis, men regnes som et bevisnivå fordi individet som utfører en av disse metodene selv ser på det som et bevis.

Naiv empirisme innebærer at en overbeviser en selv og andre, gjennom å vise at påstanden stemmer for flere spesialtilfeller. Avgjørende eksperiment innebærer at en tester ut en hypotese for et ekstremt spesialtilfelle, slik at en kan trekke konklusjonen «om det fungere her så MÅ det jo fungere på resten». Det generiske eksempelet innebærer at en overbeviser om at en påstand må være sann ved å konstruere et eksempel (objekt), som fungerer som representant for et generelt tilfelle hvor det tas utgangspunkt i egenskapene objektet har. Deretter viser en hvorfor påstanden må stemme, ved å benytte seg av operasjoner som kan benyttes på tilsvarende måte på alle objekter med like egenskaper som eksempelet en har konstruert. Tankeeksperimentet fremkaller handling ved å internalisere beviset, og løsne seg fra en bestemt representasjon. Beviset er fortsatt farget av en anekdotisk tidsmessig utvikling, men drift og grunnleggende relasjoner i det er angitt på en mer generell måte enn i det generiske eksempelet (Balacheff, 1988, s. 219).

I argumentasjonen for de to oppgavene som er blitt valgt kommer det frem to ulike typer bevis. Det ene beviset er et eksempel på et direkte bevis, mens det andre er et induksjonsbevis. Jeg vil derfor i korte trekk forklare hva som menes med disse to ulike bevistypene.

I et direkte bevis tas det utgangspunkt i en forutsetning, og ved direkte resonnering trekkes slutningen om at denne forutsetningen fører til at påstanden er sann. Normann (2005) påpeker at en vil ta utgangspunkt i det en vet, for så å bevise flere og flere fakta inntil en har et fullstendig bevis for det en ønsket å vise.

I beskrivelsen av et induksjonsbevis trekker Normann (2005) paralleller til dominobrikker. Hvis en brikke veltes, vil den ta med seg den neste, som vil ta med seg den neste, og dette vil fortsette til alle brikkene har falt. Dette er, ifølge Normann (2005), prinsippet induksjonsbeviset bygger på, og det innebærer å bevise to delpåstander som han kaller for induksjonsstarten (1) og induksjonsskrittet (2). For en mer matematisk forståelse, kan induksjonsprinsippet formuleres slik:

«La P(n) være en påstand om et vilkårlig naturlig tall. Anta at vi kan bevise

1. Induksjonstarten $P(1)$, det vil si at P holder for $n = 1$.
2. Induksjonskrittet $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ for et vilkårlig naturlig tall k.

Da kan vi konkludere med at $P(n)$ holder for alle naturlige tall n.» (Normann, 2005, s. 121).

2.6 OPPGAVEKRITERIER

I mitt arbeid med å velge problemløsningsoppgaver, har jeg tatt utgangspunkt i fem kriterier som Olki og Schoenfeld (1994, s. 44-46) peker på som viktige for gode problemer (min oversetting og tolkning). Jeg har i tillegg utvidet kriteriene med et ekstra punkt (punkt 6), med utgangspunkt i tidligere overskrevet teori:

1. Problemet bør være mulig å arbeide med for et bredt spekter av elever, på grunnlag av deres tidligere kunnskap, og bør ikke inneholde for mange teknikker eller avanserte begreper.
2. Problemet må kunne løses på flere måter, eller i det minste kunne være mulig å angripe på flere måter. Alternative løsningsmetoder kan illustrere hvor rikt matematikk som tema er, og kan innebære sammenhenger mellom ulike matematiske temaer.
3. Problemet bør illustrere noen viktige matematiske idéer, enten i form av matematisk innhold eller løsningsstrategier.
4. Man bør kunne løse problemet uten triks. Med triks menes det teknikker som man ikke har sett før, og mest sannsynlig ikke har bruk for senere.
5. Problemet bør kunne fungere som et første steg inn mot matematisk utforskning. Det bør være utvidbart, og generaliserbart. Når man har kommet til en løsning kan det fungere som et springbrett inn i videre utforskning, og mot nye problemer.
6. Problemet må formuleres på en slik måte at elevene ikke blir veiledet mot en gitt løsningsmetode.

I kapittel 3 redegjør jeg for hvorfor oppgavene som er blitt valgt tilfredsstiller de oppgitte kriteriene. Her reflekterer jeg også over hvorfor oppgavene som blir valgt kan kalles for problemløsningsoppgaver.

3 OPPGAVEBEGRUNNELSE

I denne delen av studien vil jeg begrunne oppgavene, og mitt oppgavevalg. Jeg har valgt å benytte problemer som kan åpne for interesse og motivasjon hos elevene. Dette har jeg prøvd å få til gjennom å trekke inn artefakter i en aktivitet, og la elevene komme frem til all matematikken selv. Jeg vil for det første begrunne oppgavevalgene. For det andre vil jeg ta for meg de to problemene separat, og begrunne eventuelle fremgangsmåter som kan benyttes. Til slutt vil jeg vurdere problemene opp mot kriteriene til Schoenfeld presentert i kapittel 2.4.

3.1.1 OPPGAVEVALG

Det er flere årsaker til mitt valg av oppgavene «Hanois tårn» og «Froskehopp». I hovedsak er det sterkeste argumentet for valget av disse oppgavene at de mest sannsynlig er annerledes enn de oppgaver elevene vanligvis møter. I tillegg var det viktig for meg at oppgavene kunne benyttes på tvers av matematikkunnskap, altså at de var like aktuelle for både 2P-Y-elever og R1-elever. Oppgavene åpner også for å benytte artefakter som muligens kan øke elevenes motivasjon for å løse problemet. Interesse og vilje til å løse oppgaven, er som tidligere nevnt viktig i arbeid med problemløsningsoppgaver. Oppgavene i sin helhet, slik gruppene fikk dem presentert, ligger vedlagt som vedlegg 1.

Årsaken til at jeg har valgt å benytte artefakter er altså både for å fremme motivasjon, men også for å gjøre det lettere å komme i gang med problemene. Å lage egne mentale bilder av forflytningene, og samtidig telle antall trekk vil kunne være en kognitiv utfordring både i «Hanois tårn» og i «Froskehopp». Det vil også kunne kreve for mye tid, slik at noe av hensikten med problemene går tapt. Artefakter kan bidra til å gjøre denne visualiseringen enklere. Dette vil kunne bidra til at elevenes fokus kan rettes mer mot matematikken bak aktiviteten.

I problemene «Hanois tårn» og «Froskehopp» er matematikken som kommer frem gjennom aktiviteten det viktigste, ikke aktiviteten i seg selv. For en elev som gjør aktivitetene uten å fokusere på selve problemet, kan man risikere at aktivitetene fungerer mer som spill, hvor det er om å gjøre å flytte tårnet fra den ene søylen til den andre eller å klare å få froskene til å bytte plass. Om elevene klarer å gjennomføre aktivitetene og sier seg fornøyd med det, vil det mest sannsynlig ikke komme frem noen interessante argumenter. «Spillet» er ferdig, og eleven klarte det. Denne holdningen vil også medføre at eleven ikke vil kunne svare på problemet. Hvis en slik situasjon skulle oppstå, hvor aktiviteten i seg selv får mer fokus enn problemet, vil jeg prøve å lede elevene inn mot oppgaven igjen. Hensikten med aktivitetene er å gjøre elevene engasjerte og nysgjerrige. Spørsmål en veileder kan stille for å fremme matematiske resonnement er for eksempel: «Hva hvis man har flere brikker?», «Hvorfor er det slik?», «Hvordan kan vi være sikre på dette?» (Mason & Davis, 1991).

3.1.2 HANOI-PROBLEMET

Et av de to problemene elevene skal arbeide med er «Hanois tårn». Elevene får presentert problemet slik (Vedlegg 1):

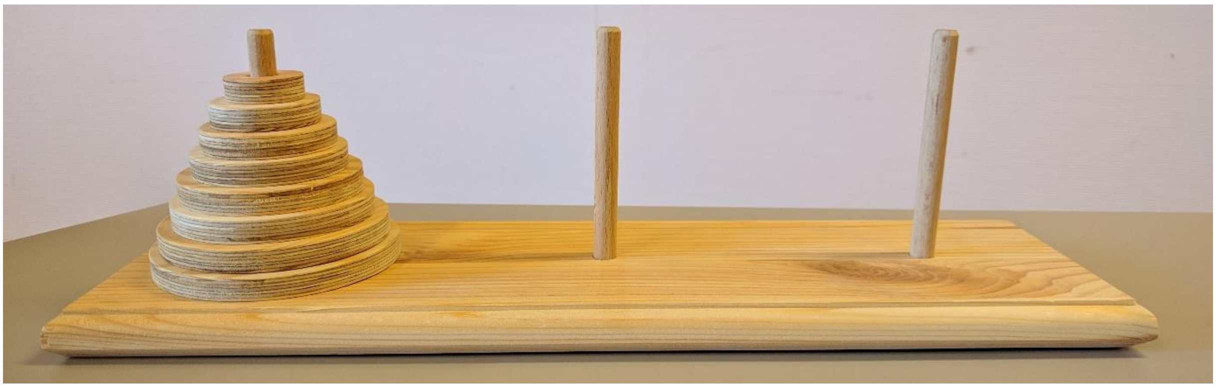
> *Hanois tårn er et klassisk spill vi kan finne mye matematikk i. Spillet går ut på å flytte et tårn med ringer fra den ene stolpen til den andre. Den største ringen ligger i bunn, og de andre ringene blir mindre og mindre oppover. Spillets regler er enkle:*
>
> - *Bare en ring kan flyttes av gangen*
> - *Det skal aldri ligge en større ring oppå en mindre*
>
> *Hvor mange trekk vil man trenge for å flytte et tårn som inneholder 64 ringer?*

«Hanois tårn» er hentet fra matematikksenterets nettside (Matematikksenteret, 2018c), og er et klassisk eksempel på en problemløsningsoppgave.

Problemet slik det er presentert av matematikksenteret er snevrere enn hva jeg har valgt å benytte. De nevner spesifikt at elevene blant annet skal prøve med ulikt antall ringer, sette opp i tabell og se etter systemer i tallrekka som fremkommer. Jeg valgte å ikke inkludere dette, fordi jeg ønsket at elevene skulle bestemme heuristikker selv.

For å kunne løse denne oppgaven på en effektiv måte, vil det kunne være nyttig å benytte artefakter. Artefakten som elevene kan bruke i arbeid med oppgaven er av tre. Den består av en stor plate i bunn som det er festet tre søyler på. Søylene har lik avstand mellom seg, og er identiske. Artefakten inneholder også 8 ringer av ulik størrelse med et hull i midten, slik at de kan tres på søylene (se bilde 1).

Basert på egne erfaringer, kan artefaktene ta fokus bort fra selve oppgaven om det gis for mange ringer. Inneholder tårnet 8 ringer vil det for eksempel kreve 255 trekk, noe som kan bidra til at fokuset blir på å flytte det store tårnet istedenfor å finne mønsteret. Derfor får elevene utdelt 5 ringer hver til å starte med (krever 31 trekk). Om de vil kontrollere sin hypotese, er det mulighet for å få en ekstra ring slik at de kan prøve ut hypotesen.



Bilde 1

Dette problemet innebærer at løseren i stor grad har evnen til å finne et mønster. For å kunne besvare oppgaven godt, kreves også gode refleksjoner omkring begrunnelse og bevis. Problemet krever at man starter med å spesialisere, for så å benytte seg av mønsteret som kommer frem av spesialtilfellene for å finne en generalisering. Problemet slik det står, kan løses ganske raskt. Ved å systematisere opplysningene en får etter 4. flyttingen, kan en utarbeide en tabell, slik som tabell 2.

Antall ringer	Antall trekk
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15

Tabell 2

Om man er vant til å se slike mønstre, kan en se at mønsteret tyder på at n ringer gir $n^2 - 1$ antall trekk (altså Mersenne-tallene). Hvis en så kontrollerer, vil en se at dette stemmer for flere tilfeller. En annen måte å komme frem til denne formelen på, om det ikke ses ut fra tabellen, er å se på differansen mellom antall trekk. Differansen danner en geometrisk rekke der kvotienten er 2 $(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots)$, som en kan regne seg frem til summen av ved å benytte summeformel for geometrisk rekke. For å kunne forklare hvorfor det faktisk må være slik for alle tilfeller, må enkelt induksjonsbevis benyttes.

For å kunne utføre induksjonsbeviset er en i tillegg avhengig av en rekursiv formel, og denne er muligens enklere å finne for en elev med mindre matematisk kompetanse. Man kan finne den ved å se på hvordan hvert nye ledd er annerledes fra forrige, slik det er vist i tabell 3.

Antall ringer	Antall trekk	Uttrykk
0	0	
1	1	$0 \cdot 2 + 1$
2	3	$1 \cdot 2 + 1$
3	7	$3 \cdot 2 + 1$
4	15	$7 \cdot 2 + 1$
...	...	...
n	a_n	$a_{n-1} \cdot 2 + 1$

Tabell 3

Altså kan antall trekk multipliseres når en har $n - 1$ ringer med to og legge til én. Denne metoden kan også forklares, og begrunnes visuelt. Når man har et tårn med n ringer må man først flytte tårnet med $n - 1$ ringer bort fra den nederste ringen. Man kan da flytte den største (nederste) ringen over til den ledige stolpen (ett trekk) før man må flytte tårnet med $n - 1$ ringer tilbake på den største ringen. Denne begrunnelsen gjør at en kan være sikker på at en har funnet minste antall trekk, så lenge aktiviteten er riktig utført med 1 og 2 ringer. Begrunnelsen i seg selv mener jeg vil kunne kategoriseres som det Balacheff (1988) kaller et *tankeeksperiment*.

For å kunne bevise den eksplisitte formelen ved induksjon, er en avhengig av den rekursive formelen. Samspillet mellom de to formlene gir et bevis som er enkelt å følge, og samtidig enkelt å vise. Elever som har vært gjennom induksjonsbevis tidligere, vil altså ikke få regnetekniske problemer med selve beviset, men støte på utfordringer i jobben med å legge en plan på hvordan de kan bevise påstanden.

For å bevise at $a_n = 2^n - 1$ faktisk gir oss antall trekk for alle n kan vi altså benytte oss av et enkelt induksjonsbevis. Siden vi har argumentert for at $a_n = 2 \cdot f(n-1) + 1$ stemmer kan vi bruke dette i beviset:

1. Vi ser om a_n stemmer for $n = 1$:

$$a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

   Altså stemmer påstanden for $n = 1$

2. Antar at påstanden stemmer for $n = k$ og må vise at den da også gjelder for $k + 1$:

$$a_k = 2^k - 1$$

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_{k+1-1} + 1 = 2 \cdot a_k + 1$$

   Siden $a_k = 2^k - 1$ får vi at:

$$a_{k+1} = 2 \cdot (2^k - 1) + 1$$

$$a_{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$$

$$\blacksquare$$

For å kunne løse dette problemet, er en avhengig av å først generalisere for så å spesialisere (se på tilfellet med 64 ringer). For å kunne bruke den eksplisitte formelen for å komme frem til antall trekk som kreves for å flytte 64 ringer, er det viktig å begrunne formelen en har kommet frem til kan benyttes. Beviset er altså essensielt for at elevene skal kunne stole på at det de har gjort er riktig. En mulighet for elever som ikke klarer induksjonsbeviset (som mangler den matematiske kompetansen), er å sette opp den rekursive formelen i et regneark (f.eks. Excel). Når dette er gjort kan en trekke formelen nedover 64 ruter, for å komme frem til løsningen på problemet. Om elevene kan begrunne hvorfor den rekursive formelen fungerer, gir dette også et svar som en kan si seg fornøyd med, selv om en ikke klarer å begrunne den generelle formelen.

Når problemet er løst, kan det også utvides ved å blant annet stille spørsmål om man kan komme frem til en metode for å systematisk flytte tårnet. Man kan også stille spørsmål ved om det alltid vil være et primtall antall trekk som kreves, om antall ringer er primtall. Svaret på dette vil være nei, dette blant annet fordi $n = 11$ ikke gir et Mersenne-primtall, men det vil kunne åpne for mer utforskning og muligheten for å føre elevene inn på samtaler om blant annet perfekte tall. Dette vil jeg ikke gå mer inn på her, og om elevene blir raskt ferdig med denne oppgaven vil jeg heller styre dem videre på neste problem.

3.1.3 FROSKEHOPP-PROBLEMET

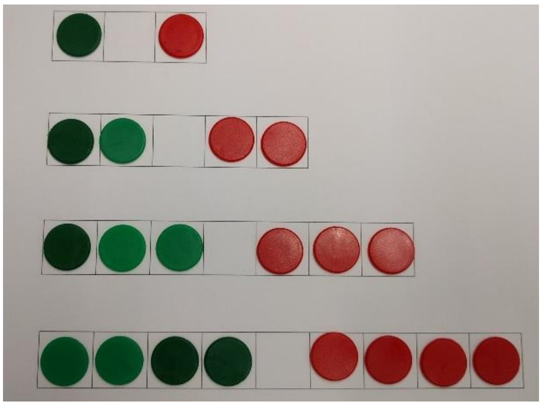
Det andre problemet elevene skal arbeide med er froskehopp-problemet. Problemet, slik elevene får det presentert, ser slik ut:

> *To froskefamilier sitter på vannliljeblader. Hver familie består av like mange frosker. De er plassert på vannliljebladene på denne måten:*
>
> *Midt mellom froskefamiliene er det et ledig vannliljeblad. De røde froskene skal bytte plass med de grønne froskene etter følgende regler:*
>
> - *de røde froskene har bare lov til å flytte seg mot venstre*
> - *de grønne froskene har bare lov til å flytte seg mot høyre*
> - *det er bare mulig å hoppe til et ledig naboblad eller over en annen frosk til et ledig blad*
> - *to frosker har ikke lov til å sitte på samme blad*
>
> *Når de røde froskene og de grønne froskene har byttet plass, er oppgaven løst.*
>
> *Hvor mange hopp kreves det hvis hver familie består av 15 frosker?*

Froskehopp-problemet er også hentet fra matematikksenterets nettside (Matematikksenteret, 2018b). Dette problemet nevnes også av Mason et al. (2010), og de kaller problemet for «Leapfrogs». Selv om dette problemet blir fremstilt litt annerledes, er oppgaven den samme. Mason, Burton og Stacey beskriver oppgaven grundig her, og kommer med noen løsningsforslag og forslag til utvidelser. De kommer med et forslag på hvordan inngangsfasen, angrepsfasen og refleksjonsfasen kan se ut, og hvordan refleksjonsfasen spesielt kan åpne for flere nye problemer.

På matematikksenterets nettsider inneholder oppgaven 9 underspørsmål, men disse har jeg valgt vekk. Dette fordi at oppgaven i større grad leder elevene inn mot en løsningsstrategi, om disse underspørsmålene er inkludert. Det er som tidligere nevnt viktig at elevene i arbeid med problemløsningsoppgaver finner disse ulike strategiene selv. Dette kan føre til at oppgaven tar lengre tid, men det kan også resultere i rikere argumenter og refleksjoner. Om elevene står fast for lenge, vil jeg stille spørsmål som kan hjelpe elevene, eller lede dem videre i problemløsningsprosessen. Jeg vil forsøke å unngå å vise til spesifikke metoder.

I arbeid med denne oppgaven vil elevene også få artefakter tilgjengelig i form av fem tabeller med henholdsvis 1×3, 1×5, 1×7, 1×9, og 1×11 ruter. Disse tabellene vil kunne fungere som ulike «brett» i arbeid med oppgaven. Elevene vil også få noen grønne og røde brikker som vil kunne fungere som frosker og som kan plasseres på de ulike brettene slik som i bilde 2.



Bilde 2

Froskehopp-problemet innebærer en del av de samme elementene som Hanois tårn. Det er fordelaktig å starte med å spesialisere for å finne et mønster, som igjen kan benyttes for å generalisere. Selve aktiviteten er vanskeligere enn Hanois tårn, men når en først har funnet en metode som fungerer for å løse aktiviteten med få frosker, er denne metoden enkelt overførbar når en øker antallet frosker. Det er også en del færre trekk her enn i Hanois tårn. Det betyr at det ikke trenger å ta like lang tid å kontrollere antall trekk med flere frosker.

En metode for å løse oppgaven kan innebære å spesialisere med 1, 2, 3, 4 og 5 frosker på hver side. En vil da få en tabell slik som tabell 4.

Antall frosker på hver side	Antall trekk
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Tabell 4

Ut fra tabellen kommer det frem ulike mønstre. Man kan blant annet se på differansen mellom trekkene og komme frem til en aritmetisk rekke hvor differansen er 2 slik at man får rekken:

$$3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + k$$

Om ikke man kan summeformelen for en aritmetisk rekke, kan denne hjelpe oss til å komme frem til en rekursiv formel. Siden alle tallene i tallrekka er oddetall vil det si at alle tallene i tallrekka kan skrives på formen $k = 2n + 1$, der n er leddnummeret i rekka. Siden denne rekken summert opp blir antall trekk gir det oss at:

$forrige\ antall\ trekk\ +\ ledd\ nummer\ n\ =\ antall\ trekk$. Altså at: $T_n = T_{n-1} + 2n + 1$.

Om man kan summeformelen for en aritmetisk rekke kan man også benytte seg av denne på rekka for å komme frem til en eksplisitt formel for antall trekk. Man kan også kommer frem til en eksplisitt formel ved å se direkte i tabellen at det kommer frem et mønster: $Antall\ trekk = (Antall\ frosker + 1)^2 - 1$. Den eksplisitte formelen for antall trekk ($T(n)$) som kreves for å flytte n frosker er altså $T(n) = (n + 1)^2 - 1$.

En tredje metode elevene kan bruke for å finne en eksplisitt formel (som ikke er særlig matematisk) er regresjonsverktøyet i Geogebra. Ved å plotte inn de tre første koordinatene vil Geogebra kunne komme frem til funksjonen $f(x) = x^2 + 2x$ om man benytter regresjon. Selve beviset for denne påstanden er vanskeligere å komme frem til, men enkelt å utføre matematisk. Det innebærer å gå tilbake for å spesialisere videre. Hvilke forskjellige typer trekk har vi? Froskene kan «krabbe» over til nabobladet, eller «hoppe» over en annen frosk.

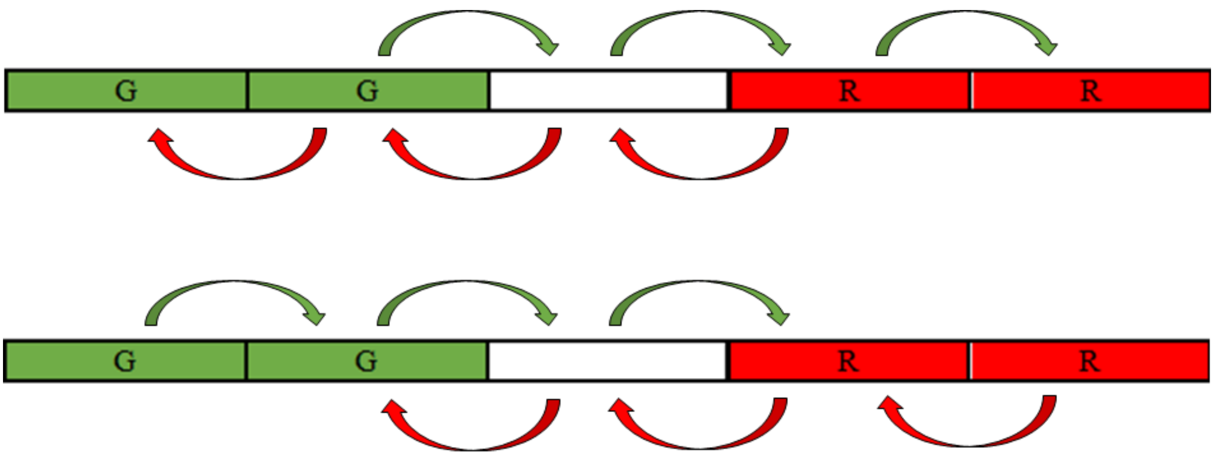
Om vi kategoriserer disse to trekkene som forskjellige kan vi sette opp resultatene i en ny tabell (tabell 5).

Antall frosker på hver side	Antall trekk	Antall krabb	Antall hopp
1	3	2	1
2	8	4	4
3	15	6	9
4	24	8	16
5	35	10	25

Tabell 5

Vi ser fra tabellen at antall hopp er antall frosker kvadrert, og antall krabb er antall frosker multiplisert med 2, men hvorfor?

Hvis vi i tillegg introduserer antall forflytninger som kreves, kan vi bruke dette videre i argumentasjonen. Antall forflytninger som kreves når man har én frosk på hver side, vil være to forflytninger for den grønne frosken (siden den skal flyttes to blader), og av samme grunn også to forflytninger for den grønne frosken. Har man to frosker på hver side vil minste antallet forflytninger for hver frosk være tre. Altså vil det kreves $3 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ forflytninger (se figur 2).



Figur 2

Har man tre frosker på hver side må hver frosk forflytte seg 4 blader, altså kreves det totalt $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ forflytninger. Hvis antall frosker på hver side defineres som n, kan antall forflytninger totalt F(n) skrives slik:

$$F(n) = 2 \cdot n \cdot (n + 1)$$

Grunnet at alle froskene må hoppe over, eller bli hoppet over, av frosker med motsatt farge, vil alle være involvert i like mange hopp som det er frosker av den motsatte fargen. Eksempelvis er figur 2, hvor den første grønne frosken uansett må være delaktig i to hopp, fordi den må hoppe, eller bli hoppet over, av to røde frosker. Det samme vil gjelde for den andre grønne frosken. Tilsvarende kan sies om n frosker. Om en har n frosker, vil altså den første grønne frosken være involvert i n hopp, den andre grønne frosken involvert i n hopp osv. Dette resulterer i at n frosker er involvert i n hopp hver. Altså vil vi ende opp med at antall hopp $H(n)$ vil være:

$$H(n) = antall\ grønne\ frosker \cdot antall\ røde\ frosker = n \cdot n = n^2$$

Dette stemmer overens med resultatene fra tabell 5. Altså vet vi at:

$$F(n) = 2n(n+1)$$

$$H(n) = n^2$$

Direkte bevis kan benyttes ved videre resonnering, for å i større grad kunne konkludere med at denne påstanden må være riktig. Hvert hopp teller som to forflytninger, og hver krabb ($K(n)$) teller som én forflytning. Altså må vi ha:

$$F(n) = K(n) + 2 \cdot H(n)$$

Setter vi inn for funksjonene finner vi at:

$$K(n) = 2n^2 - 2n(n+1) = 2n^2 - 2n^2 + 2n = 2n$$

Dette stemmer dermed også bra med funnene i tabell 5.

Nå kan det settes opp en formel for totalt antall trekk ($T(n)$), fordi det er summen av antall krabb og hopp:

$$T(n) = K(n) + H(n)$$

$$T(n) = 2n + n^2 = n(n+2)$$

For å kontrollere om denne formelen er den samme som den eksplisitte formelen som var utgangspunkt for resonneringen, kan den eksplisitte formelen skrives ut:

$$T(n) = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n = n(n+2)$$

■

Froskehopp-problemet er muligens en bedre problemløsningsoppgave enn Hanois tårn, grunnet at den åpner for flere muligheter etter at det originale problemet er blitt løst. Dette beviset er sannsynligvis annerledes enn det de fleste tidligere har jobbet med, og dermed vil det være nærliggende å anta at jeg må være delaktig i løsningsprosessen, for at elevene skal kunne komme frem til gode matematiske argumenter. Det er likevel et teknisk enklere bevis enn induksjonsbeviset, i og med at det kreves færre matematiske ferdigheter for å følge resonnementet.

Om elevene kommer så langt at de kan si seg fornøyd med resultatet (eller jeg må hjelpe for mye med beviset), åpner det opp for flere utvidelsesspørsmål, som for eksempel: «Hva hvis vi har ulikt antall frosker på hver side?», «Kan vi si noe generelt om dette?».

3.1.4 VURDERING AV OPPGAVEKRITERIER

Som nevnt tidligere, har jeg benyttet de fem kriteriene til Olki og Schoenfeld (1994) for å kunne argumentere for at oppgavene jeg har valgt er problemløsningsoppgaver:

1. Oppgavene «Hanois tårn» og «Froskehopp» er begge trivielle problemer, som oppfordrer til utforskning og engasjement. Ved å knytte problemløsningsoppgavene til aktiviteter har jeg også prøvd å ufarliggjøre dem, noe som kan bidra til at elevene har bedre holdninger

inn mot arbeidet med oppgavene. Problemene kan, ifølge matematikksenteret, arbeides med allerede fra barneskolen av, og helt opp til videregående opplæring (Matematikksenteret, 2018a). Mange av argumentene og resonnementene som vil kunne komme frem i arbeid med oppgavene, krever mindre kompetanse enn hva elevgruppene som gjennomfører studien har. Derfor mener jeg at dette kriteriet blir tilfredsstilt (selv om noen deler av oppgavene, blant annet beviset av Hanois tårn, krever mer matematikk enn det den ene elevgruppen har). Problemene blir også forklart uten vanskelige begreper, og krever lite matematisk kompetanse for å forstå.

2. Begge problemene kan, som nevnt tidligere, både angripes og løses på flere måter.
3. Problemene inneholder viktige matematiske ideer i form av det å finne mønster, tallrekker og generalisering. Jeg vil argumentere for at begge problemene kan plasseres innenfor temaet algebra eller funksjoner, i tillegg til at de inneholder muligheter for geometriske og aritmetiske rekker, samt induksjonsbevis.
4. Ingen av problemene krever «triks» for å løses.
5. Begge problemene utfordrer elevene til å stille spørsmål: «Hvorfor må det være slik?», «Hva hvis vi gjør det på en annen måte?», «Hva om vi ser problemet annerledes?». Jeg mener problemene åpner opp for nysgjerrighet, samt undring over matematikken som ligger bak.

4 METODOLOGI

Jeg vil i dette kapittelet redegjøre for valg av metode. Det vil bli trukket frem hvordan studien i sin helhet er blitt gjennomført, og hvilke valg jeg som forsker har tatt som kan påvirke studien. Først vil jeg gi et overblikk over gjennomføringen av studien, og deretter beveger jeg meg inn på mer teoretiske metodologiske beskrivelser og drøftinger.

4.1 GJENNOMFØRING AV STUDIEN

Studien er blitt gjennomført på en videregående skole i Agder. Informantene er fordelt i to grupper, som begge jobbet med de to oppgavene som ble presentert i forrige kapittel. Den ene gruppen består av fire elever fra en R1-klasse, og den andre gruppen av fire elever fra en 2P-Y-klasse. Elevene ble valgt ut av to ulike faglærere, som ble informert om hvordan studien skulle foregå. På bakgrunn av dette valgte de ut de elevene som samtykket, og som faglærer mente kunne bidra til å fremme resonnementer i en slik situasjon.

Problemløsningsarbeidet foregikk over en periode på to skoletimer, altså totalt 90 minutter per gruppe. Den første skoletimen arbeidet gruppen med Hanois Tårn, og i den neste skoletimen arbeidet de med Froskehopp. Begge problemene som gruppene møtte på innebar artefakter, som de også ble tildelt i starten av oppgaven. For grundigere beskrivelse av aktivitetene, artefaktene og problemene se kapittel 3.

Datainnsamlingen er blitt utført gjennom gruppeobservasjon, hvor jeg har fungert som en deltakende observatør. Det ble utført videoopptak av alle observasjonene. I tillegg til videoopptak, valgte jeg å samle inn arkene elevene noterte på slik, at også dette ved nødvendighet kunne benyttes som data. Videoopptakene er blitt transkribert, og informantene er blitt anonymisert med fiktive navn. Forsker refereres til med initialene JB. Transkripsjonsnøkkelen ligger vedlagt som vedlegg 2.

4.2 FORSKNINGSDESIGN OG FORSKNINGSPARADIGME

I forskningsspørsmålet kommer det at oppgavens fokus vil være elevenes resonnement i arbeid med problemløsningsoppgaver, og hvilke ulike faser de befinner seg i under denne prosessen. For å kunne gjøre dette, er min tolkning av begreper, ord, samt det elevene sier og gjør essensielt. Bryman (2016) trekker frem at det er de kvalitative metodene som fokuserer på ord og beskrivelser. På bakgrunn av dette vil det derfor være naturlig å benytte seg av kvalitative forskningsmetoder. Mine tolkninger av resonnementene er grunnlaget for analysen, og jeg vil derfor innta et interpretivistisk epistemologisk ståsted, altså et fortolkningsparadigme. De kvalitative metodene er mer fleksible enn kvantitative tilnærminger, og åpner i større grad for tolkning av empirien (Christoffersen & Johannessen, 2012).

For å kunne få et best mulig utgangspunkt for å besvare problemstillingen, valgte jeg å utføre det Wellington (2015) kaller en instrumentell casestudie. I casestudier vil en undersøke et tilfelle, emne eller hendelse i en setting i detalj, med et eller flere enkeltindivider eller grupper som deltakere (Wellington, 2015). En instrumentell casestudie er en casestudie som brukes for få innsikt i et spesielt problem, eller en hypotese (Wellington, 2015, s. 166). Etter min tolkning er dette prosjektet altså en instrumentell casestudie, fordi hensikten ikke er at elevene skal sitte i grupper å løse problemløsningsoppgaver, men å gi innsikt i deres matematiske resonnementer og faser. Selve casen er altså ikke like viktig som funnene. Studien vil i tillegg ha et komparativt design, fordi jeg har valgt å sammenlikne to ulike grupper .

4.3 VALG AV METODE

Metoden jeg har valgt for datainnsamling er gruppeobservasjon. Elevgruppene arbeidet med to problemløsningsoppgaver, mens jeg som forsker fungerte som en deltakende observatør. Som en deltakende observatør er en aktiv i datainnsamlingen (Bryman, 2016; Wellington, 2015). Å fungere som en deltakende observatør innebærer ikke utelukkende å observere, slik Bryman (2016) peker på: «The participant observer/ethnographer immerses him- or herself in a group for an extended amount of time, observing behavior, listening to what is said in conversations both between others and with the fieldworker, and asking questions» (Bryman, 2016, s. 423). Rollen som deltakende observatør innebærer altså i tillegg å stille spørsmål, kommunisere med gruppen som skal observeres, og gjerne også fokusere på andre aspekter enn observasjonen. I følge Bryman (2016) kan også det å samle inn dokumenter som blir brukt under observasjonen, være en del av det å være deltakende observatør.

Årsaken til at jeg valgte å fungere som deltakende observatør, er altså muligheten for å kunne veilede elevene videre om de står fast, og muligheten for å kunne bygge opp under interessante samtaler, diskusjoner, samt å stille spørsmål om noe er uklart. Det vil i tillegg bidra til å simulere en mer realistisk klasseromssituasjon, der elevene sitter i grupper og læreren går rundt og kommuniserer med dem. Resonnementene som fremkommer fra elevenes egne notater vil også tolkes. Dette mener jeg kan være viktig for studiens formål, om det er et spesifikt matematisk resonnement eller uttrykk, som ikke kommer tydelig nok frem gjennom observasjonen, men som elevene har skrevet ned. Likevel ble det viktig at jeg som forsker ikke ledet elevene inn mot spesielle løsningsmetoder eller strategier, med mindre jeg fant det essensielt for at elevene skal komme seg videre i prosessen. Som nevnt i teoridelen er det å stå fast naturlig og elementært i en problemløsningsprosess, og det å bevisst forhindre at elevene bruker tid på å stå fast vil kunne svekke argumentene som kommer frem, samt deres egen problemløsningsprosess.

4.4 INFORMANTER

Studien er utført på en videregående skole i Agder. Informantene har, som tidligere nevnt, ulik matematisk bakgrunn. Gruppen fra 2P-Y inneholder elever som går i 3. klasse på videregående skole, mens det i R1-gruppen er elever ved 2. klasse. Sistnevnte gruppe er ferdig med gjennomgang av pensum, og det eneste som gjenstår i fremtidige matematikktimer er repetisjon. Gruppen fra 2P-Y har gjennomgått alt av pensum, med unntak av arbeid med mønstre og figurtall. Jeg har bevisst valgt ut gruppen fra 2P-Y før de arbeider med mønstre og figurtall, fordi dette direkte kan knyttes til utvalgte problem, noe som igjen kan føre til påvirkning av resultatene.

Utvalget av informanter er, i tillegg til å være basert på faglig nivå (R1 og 2P-Y), også bestemt ut i fra hvilke kandidater som ville få frem flest mulige verbale resonnement. Jeg var derfor avhengig av å ha informanter som var aktive og hadde meninger. På grunnlag av dette valgte jeg, i forkant av studien, å kontakte faglærer for å finne en elevgruppe som han/hun mente kunne bidra best mulig til studiens formål. Dette innebar i hovedsak ikke faglige prestasjoner, men heller elevenes evner til å kommunisere og diskutere. Denne prosedyren, at faglærerne valgte ut elever fra klassen som tilfredsstiller studiens formål, medfører at jeg har benyttet det som Bryman (2016) kaller for bevisst (purposive) sampling.

For å sikre anonymitet for alle de 8 informantene, har de her fått fiktive navn. Måten jeg har valgt å gjøre dette på er å gi gruppe 1 (2P-Y-gruppen) navnene Anders, Beate, Camilla og Daniel. Gruppe 2 (R1-gruppen) har jeg gjort tilsvarende, og tildelt navnene Erlend, Fiona, Gabriel og Henrik. Årsaken til at jeg har valgt å gi informantene fiktive navn, istedenfor å benytte tall eller elev x, er at det da kan skilles mellom kjønn, noe som kan medføre at situasjonene som beskrives oppfattes som mer realistiske. I oppstarten av studien ble det søkt til NSD, og etter godkjenning (Vedlegg 3) ble informasjonsskriv (Vedlegg 4) gitt til faglærer, som sørget for å innhente signatur av de elevene som sa seg villig til å delta i studien.

4.5 DATAINNSAMLING

Datainnsamlingen ble gjort på to grupper, med fire informanter i hver. Elevgruppene ble tatt ut på et eget rom, hvor de fikk utdelt et ark hver med oppgavene. De fikk utdelt oppgavene separat, slik at de ikke var klar over hva froskehoppgaven innebar før de var ferdige med Hanois tårn. De ble fortalt at de måtte diskutere høyt, og forklare resonnementene og forklaringene de kom frem til. Gruppene startet med oppgaven om Hanois tårn, og arbeidet med den i én skoletime (45 minutter) før jeg samlet inn det de hadde gjort, og deretter delte ut Froskehoppoppgaven som de også fikk én skoletime på å arbeide med. På denne måten kunne gruppen fokusere utelukkende på den oppgaven de skulle løse, og ikke bli distrahert av den andre oppgaven. Jeg var selv til stede under hele problemløsningsprosessen, og stilte oppfølgingsspørsmål og spørsmål om forklaringene var uklare. Gruppene ble presentert for artefakter til hver av oppgavene slik det er beskrevet i oppgavebegrunnelsen.

For å få fanget flest mulig resonnement valgte jeg å filme elevgruppene. Dette er også noe Schoenfeld (2017) anbefaler som metode i forskning på problemløsning. Schoenfeld (2017) trekker frem de ulike mulighetene for tolkning som videoopptak tilbyr, og mener at dette er uerstattelig. Jeg har også benyttet lydopptak av samtalene, og samlet inn elevenes notater fra problemløsningsøkta. Årsaken til at jeg valgte å benytte meg av både lyd- og videoopptak, er tidligere erfaringer med dårlig lydkvalitet eller lavt volum på videoopptakene.

4.6 DATABEHANDLING

Innsamlingen er som tidligere nevnt blitt utført gjennom videoopptak, lydopptak og innsamling av notater. Før jeg startet med transkriberingen av videoopptakene, sjekket jeg over om det var steder hvor jeg manglet lyd, eller om alt var kommet med i videoopptaket. Det var en del steder i videoopptakene hvor det var umulig å høre hva som ble sagt, og derfor valgte jeg å redigere inn lydfilen på videofilen slik at jeg fikk frem alle resonnementene da jeg senere skulle transkribere opptakene. Etter denne prosessen ble jeg sittende igjen med fire videofiler på omtrent 45 minutter hver, som deretter ble transkribert. Bryman (2016) trekker frem omfanget av å transkribere lydfiler. Han sier at man må regne med 5-6 timer med transkribering for hver time med lydopptak. Denne prosessen mener jeg at er enda mer krevende om man tar utgangspunkt i videofiler, slik jeg har gjort i denne studien. Transkripsjonsprosessen innebærer ikke utelukkende å få med hvem som sier hva, når man tar utgangspunkt i et videoopptak, men også observasjoner som gjøres. For å redusere omfanget noe, har jeg valgt å ekskludere observasjoner som var irrelevante for å besvare problemstillingen. Dette kan være observasjoner som blant annet «x sitter og ser på de andre», eller «x strekker seg». Jeg valgte å beholde transkripsjonene både fra lyden og filmen samlet. Det vil si at om en elev sier noe, og deretter gjør noe (f.eks. peker på noe), vil dette følge kronologisk og ikke i separate filer. Jeg valgte også å samle transkripsjonene slik at transkripsjonene av de to filmene fra 2P-Y-klassen var samlet i samme dokument, og transkripsjonene av de to filmene fra R1-klassen var samlet i et annet felles dokument. Transkripsjonsnøkkelen, som er en oversikt over de ulike tegnenes betydning i transkripsjonen, ligger vedlagt som vedlegg 2.

Disse to dokumentene ble veldig omfattende, og jeg endte derfor opp med å gjøre det som Wellington (2015) hevder kan være nyttig under behandling av store mengder data, nemlig datareduksjon. Dette innebar for meg å først få et overblikk over alle transkripsjonene, for så å lage et nytt dokument der alle kommentarer, refleksjoner og observasjoner som jeg mener kunne knyttes til matematiske resonnementer ble tatt med. Dette ble et samledokument, og inneholdt både transkripsjoner fra 2P-Y-gruppen og R1-gruppen. Dette dokumentet med transkripsjoner, sammen med de innsamlede notatene, er grunnlaget for min analyse. Etter dette arbeidet, startet kodingsprosessen. Altså kategoriserte jeg empirien fra samledokumentet a. I arbeidet med transkripsjonen valgte jeg å analysere dataen ved å først bruke det Strauss og Corbin kaller åpen koding (Bryman, 2016, s. 574). Etter min tolkning, innebærer åpen koding at en ser på dataene, bryter disse ned og deretter danner kategorier. Etter denne kodingsprosessen sto jeg igjen med 6 kategorier innenfor elevresonnementer som ble brukt for å kategorisere funnene: spesialisering, *gjett og sjekk*, *lag tabell*, *se etter mønster*, generalisering og overbevisning. Disse kategoriene vil presenteres i analysedelen, og knyttes opp mot de kategoriene og fasene nevnt i teorikapittelet.

4.7 VALIDITET OG RELIABILITET

Validitet og reliabilitet er begreper som beskriver dataens relevans (gyldighet) og funnenes pålitelighet (Christoffersen & Johannessen, 2012; Postholm & Jacobsen, 2012).

Reliabilitet kan ifølge Bryman (2016) deles opp i ekstern og intern reliabilitet. Studiens eksterne reliabilitet er nært knyttet til begrepet replikerbarhet, og innebærer hvorvidt studien kan replikeres og gi samme funn. Dette er et vanskelig kriterie å oppfylle når en benytter seg av kvalitative metoder. Som forsker kan utføre studien på samme måte som beskrevet tidligere i kapittelet, men det er lite sannsynlig at en vil komme frem til de eksakt samme resonnementene og svarene. Dette fordi at ulike klasser og grupper er forskjellige, selv om det tas utgangspunkt i elever som har tilsvarende fag. Alle mennesker er forskjellige, og dette gjør at denne studien, og kvalitativ forskning generelt, har lav ekstern reliabilitet. Studien har derimot høy grad av intern reliabilitet. Den interne reliabiliteten innebærer hvorvidt andre forskere kan anvende begrepsapparatet for dataanalysen, på samme måte som forskeren (Bryman, 2016). Ettersom at det i denne studien benyttes begrepsapparater for analyse av data, som er blitt grundig redegjort for i teorikapittelet, vil den ha høy grad av intern reliabilitet.

Validitetsbegrepet kan også deles inn i intern og ekstern validitet (Bryman, 2016). I noen sammenhenger brukes også begrepet gyldighet istedenfor validitet, og i så tilfelle vi dette begrepet deles inn i indre og ytre gyldighet (Postholm & Jacobsen, 2012). Ekstern validitet, eller ytre gyldighet, belyser hvorvidt funn kan generalisere til en gruppe en enda ikke har utforsket. Dette kriteriet er ofte en utfordring for kvalitativ forskning, fordi datainnsamlinger ofte utføres på en relativt liten gruppe. Dermed kan det ikke trekkes slike generaliserende konklusjoner (Bryman, 2016), noe som også er tilfellet i denne studien. Det siste troverdighetskriteriet er intern validitet, som omhandler kausale forhold, altså årsak-virkning forhold. Den interne validiteten i oppgaven vurderes som god, grunnet at de tolkningene som er blitt gjort er utført på bakgrunn av et nøye utformet og begrunnet analyseverktøy. Det å benytte seg av videoopptak, vil derimot kunne svekke den interne validiteten ettersom at funnene som oppstår kan være påvirket av at elevene blir filmet. For å i størst mulig grad unngå dette valgte jeg å plassere kameraet litt distansert fra gruppen, slik at det ikke skulle få noe nevneverdig oppmerksomhet. Gruppene så, etter min tolkning, ikke ut til å tenke på at de ble filmet under gruppearbeidet.

4.8 ETISKE BETRAKTNINGER

Som forsker har jeg altså en plikt til å opprettholde de etiske prinsippene og forholdsreglene som gjelder, slik Thagaard (2013) påpeker: «All vitenskapelig virksomhet krever at forskeren forholder seg til etiske prinsipper som gjelder internt i forskningsmiljøer, så vel som i relasjon til omgivelsene» (Thagaard, 2013, s. 24).

Christoffersen og Johannessen (2012, s. 41) nevner tre hensyn som forskeren må ta stilling til, henholdsvis: (1) informantenes rett til selvbestemmelse og autonomi, (2) forskerens plikt til å respektere informantenes privatliv, og (3) forskerens ansvar for å unngå skade. (1) Det første punktet innebærer at informantene skal få tilstrekkelig informasjon om studien, samt at det er frivillig samtykke fra informantene. Dette vil også si at informantene på et hvilket som helst tidspunkt, også etter datainnsamlingen, vil kunne trekke seg uten å måtte begrunne seg, og uten at dette skal måtte føre til ubehag for informanten. (2) Det neste punktet innebærer at informantene selv skal kunne bestemme hvilken informasjon forskeren får tilgang til, og kunne være sikre på at forskeren ivaretar konfidensialitet og ikke bruker identifiserbare opplysninger. (3) Det siste punktet innebærer at data som løftes frem, ikke skal kunne skade informanten på noen som helst måte. Dette kan være i for eksempel være i form av kritiske spørsmål eller nedlatende holdninger.

Alle disse hensynene er noe en forsker er nødt til å ta stilling til, ikke bare før gjennomførelsen av studien, men også under og etter gjennomførelsen. All forskning i Norge skal skje i henhold til regelverk som er utarbeidet av Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD) og Forskningsetikkloven. Før jeg satte i gang med forskningen, hadde jeg dermed søkt om godkjenning av prosjektet fra NSD (Se vedlegg 3). I tillegg til å søke til NSD, ble det samlet inn samtykke fra elevene ved at de signerte på samtykkeskjema (vedlegg 4), som måtte godkjennes av NSD. Det ble i dette skrivet også påpekt at deltakelse var frivillig, at alle informanter ville bli anonymisert, og at de når som helst kunne trekke seg fra studien. Dokumentet inneholdt i tillegg en kort beskrivelse av studien, samtidig som noe informasjon (som blant annet selve oppgavene) ble tilbakeholdt for at studiens formål skulle opprettholdes. Jacobsen (2015) påpeker at forskeren må forsøke å gi elevene tilstrekkelig, men ikke for mye informasjon, altså finne en gylden middelvei.

Det ble også vurdert om elevenes identitet er tilstrekkelig anonymisert. Jeg har gitt dem fiktive navn, og avgrenset området til Agder. Derfor mener jeg at det ikke vil kunne spores tilbake til informantene, og dermed at deres identitet er tilstrekkelig anonymisert.

5 ANALYSE

I denne delen av oppgaven vil jeg presentere, og analysere resultatene fra studien. Resultatene vil, som tidligere nevnt, baseres på transkripsjonen av videoopptakene, som ble tatt under gruppearbeidet i de to forskjellige gruppene. For å kunne trekke frem de mest sentrale funnene, er det viktig å gå tilbake for å orientere forskningsspørsmålet:

Hvilke matematiske resonnement kommer til uttrykk i en 2P-Y- og en R1-gruppes arbeid med problemløsningsoppgaver, og hvilke faser karakteriserer prosessen?

For å gi en best mulig oversikt over problemløsningsprosessen slik den utartet seg, og dermed kunne besvare forskningsspørsmålet på best mulig måte, har jeg valgt å strukturere resonnementene og fasene elevene befinner seg i kronologisk. Hovedfokuset i analysedelen vil være de ulike resonnementene som kom frem i prosessen. I tillegg vil jeg trekke frem de ulike problemløsningsfasene elevene befant seg i.

5.1 HANOIS TÅRN

5.1.1 2P-Y-GRUPPEN

Gruppen startet med å lese oppgaven individuelt. Da alle var ferdig å lese oppgaven, startet gruppen å diskutere hva som var poenget med oppgaven. Gruppen valgte deretter å flytte noen av ringene på tårnet, for å diskutere hvordan oppgaven kan løses. Etter min tolkning befinner gruppen seg her i analysefasen, hvor de forsøker å få en oversikt over problemet, i og med at dette gjøres systematisk. Etter denne utforskingen husket gruppen at de måtte telle antall trekk, og følgende dialog utspilles:

Camilla: Men hvis vi teller hvor mye det tar for å få en på plass
Anders: mhm
Camilla: også prøver vi med et par for å se om det er like mange hele tida
Anders: mhm
Camilla: Så er det jo bare å gange det med antall ringer er det ikke det?
Anders: Ja, du ser jo [**oppgavearket*], den andre oppgaven så er det sekstifire
Camilla: mhm
Anders: Her er det åtte. Så det blir åtte ganger flere, så det svaret vi får på hvor mange vi må
gjøre det her [**artefakten*] må vi gange med åtte, for å finne det andre svaret. Så har vi
svaret på den siste oppgaven.

Dialogen som utspiller seg mellom Camilla og Anders tyder på at det her fortsatt jobbes med å faktisk forstå problemet (analysefasen), dette ved å stille spørsmål som: Er det slik at alle ringene krever like mange flyttinger? Hva er det vi egentlig vet, og hva skal vi svare på? Strategien som Camilla foreslår innebærer spesialisering. De diskuterer å se på spesialtilfellet, hvor en ser på de individuelle ringene og teller antall trekk som kreves, for å se om differansen er den samme hver gang en øker antallet ringer. Det legges altså her en plan. Om dette stemmer, vet de hvordan de skal løse problemet. De kan bare «gange med åtte» som Anders nevner.

Det kommer her også frem et eksempel på hjelpeproblem. De konstruerer et enklere problem, der alle trekkene øker med samme differanse (selv om det muligens er ubevisst) for å se på hvordan de hadde løst problemet i denne situasjonen. Fordi de ikke trekker det frem som et alternativ at antall flyttinger ikke øker med samme differanse, tyder mye på at de allerede har en hypotese om at differansen er den samme, og ved å undersøke spesialtilfellene kan de få styrket eller avkreftet denne hypotesen.

Gruppen går så over til implementeringsfasen og starter med å utføre planen de har satt seg. Etter at de har flyttet de tre første ringene en gang til, og telt over antall trekk spør Anders:

Anders: Vet vi at dette er den raskeste måten å gjøre det på?

Her ser vi at Anders stiller spørsmål ved selve flyttingen. Det kan tenkes at dette skyldes hans tidligere hypotese med at differansen er lik hver gang. Selve spørsmålet tyder på at Anders befinner seg i tilbakeblikks-fasen, og i et slikt tilfelle vil det være viktig å kunne argumentere for at det ikke kan finnes et mindre antall trekk å flytte tårnet på. Siden dette ikke diskuteres, kan det tenkes at Anders ikke er helt overbevist om at dette faktisk er den raskeste måten å flytte tårnet på, men gruppen velger likevel å ta utgangspunkt i at de faktisk har flyttet med riktig antall trekk. Dette medfører at de finner at differansen er ulik:

Daniel: Men det blir jo fler og fler for hver gang. Flere og flere flyttinger for hver.. jo lenger ned du kommer.

Daniel kommenterer altså at differansen mellom antall flytninger øker, når antall ringer øker. Det kommer dermed frem et bevis ved motsigelse mot at hypotesen deres kan stemme. Gruppen lager da en ny plan om å se hvor mye det øker med, og notere antall trekk hver gang. De går deretter tilbake til implementeringsfasen, hvor de finner et mønster:

Daniel: Det blir egentlig enklere hvis vi bare tar streker. Det blir jo en [**strekene*], det blir to, så blir det fire, så blir det..
Anders: Da kan vi se da om det bare dobler seg for hver gang, det kan godt være det gjør. Det finner vi fort utav.
…
[Anders tegner opp åtte røde streker]
Camilla: okei så da dobler det seg for hver gang
Anders: da dobler det seg for hver gang
Daniel: Så da blir det seksten
Anders: Da kan vi jo bare regne ut hvor lang tid det vil ta
Beate: Men vi må jo finne ut av det og sjekke alle
Camilla: Skal vi sjekke en til først? Bare se om det blir seksten
Anders: Skal vi gjøre det?
Camilla: Så er vi hundre prosent sikre.
Anders: Da bruker jeg [holder oppe en grønn penn]
…
Camilla: ni [*R4:S3-S2*]
Beate: ti [*R1:S1-S2*], elleve [*R2:S1-S3*], tolv [*R1:S2-S3*], tretten [*R3:S1-S2*], fjorten [*R1:S3-S1*], femten [*R2:S3-S2*], seksten [*R1:S1-S2*]
Camilla: Seksten ja

Mønsteret gruppen her kommer frem til, er at differansen dobles for hver ekstra ring. Daniel tar utgangspunkt i de første spesialtilfellene med en, to og tre ringer i tårnet, ser på differansen mellom dem, og trekker frem rekka som oppstår. Gruppen ser etter hvert at differansen dobles fra den forrige differansen, når det økes med en ring. Ved denne oppdagelsen, kommer det frem noen forskjeller hos gruppemedlemmene.

Anders og Daniel har funnet ut at mønsteret stemmer for de første fire ringene, og dermed har de overbevist seg selv om at mønsteret vil fortsette. Det har derimot ikke Camilla, fordi hun vil sjekke om mønsteret gjentar seg videre når det økes med en ekstra ring. Hun begrunner det med «så er vi hundre prosent sikre» (linje 27), noe som tyder på at hun ikke er helt overbevist. Gruppen beveger seg dermed over i tilbakeblikks-fasen, hvor de vil bekrefte at påstanden de har kommet frem til er riktig. Det at hun eksplisitt nevner at å kontrollere et ekstra tilfelle holder for å bevise at påstanden må stemme, kan tolkes som et eksempel på naiv empirisme. En slik forskjell hos de ulike elevene i gruppen, kan tyde på ulike erfaringer på kontroll-nivå. Selv om hun vil at de skal kontrollere med et ekstra eksempel, mener jeg likevel ikke at gruppen er veldig uenig om funnene. Ingen stiller spørsmål om en faktisk kan si seg helt enig med at mønsteret må fortsette på samme måte, eller om dette er ren tilfeldighet.

For å kontrollere at mønsteret fortsetter på samme måte, velger gruppen altså kun å kontrollere med en ekstra ring, og deretter si seg fornøyd med resultatene. Selv om gruppen nevner det et par ganger gjennom arbeidet, legger de heller ikke noe særlig vekt på om de faktisk vet at dette er minste mulige antall trekk, eller om det kan flyttes på en raskere måte.

Etter at de nå har funnet et mønster å forholde seg til, utspilles en interessant diskusjon:

34.	Anders:	Ja, da har vi funnet ut av.. Men spørsmålet er jo egentlig bare hvor mange trekk det tar
35.		for å flytte et tårn som inneholder sekstifire
36.	Daniel:	Vi kan ikke lage en funksjon på det da?
37.	Anders:	Nå har vi funnet ut basicsene for hvordan dette spillet fungerer, så kan vi gå.. så må vi
38.		egentlig bare begynne da.

Med dette går Anders tilbake til lese-fasen. Han prøver å forstå problemet bedre, ved å stille spørsmål rundt hva det egentlige målet er. Denne samtalen tolkes som at gruppen egentlig ikke har kommet i gang med å løse selve problemet. De har funnet et mønster i spesialtilfellene, og «funnet ut basicsene» (linje 37) for hvordan det fungerer. Dermed kan det tolkes at de nå har returnert til inngangsfasen, hvor de ser problemet på en annen måte.

Problemet ses nå på i lys av at det følger et mønster, hvor elevenes oppgave er å forklare hvordan dette mønsteret kan benyttes for å besvare det originale problemet. Det som er her ser ut til å fremkomme, er et nytt hjelpeproblem som kan trekke frem videre matematikk, samt åpne for nye spørsmål. Som et resultat av Daniel sin kommentar om å lage en funksjon, prøver gruppen å resonnere seg frem til hvordan dette mønsteret kan benyttes, for å komme frem til et funksjonsuttrykk:

39.	Camilla:	Fordi… Hvordan lager vi en funksjon på det?.. for sånn det egentlig blir, blir jo
40.		[*skriver ned noe på arket*]. Det er jo én, to, fire, åtte, seksten og så videre. Så det du
41.		gjør er å gange nummeret på den med to? [**ringene*].
42.	…	
43.	Beate:	Er det sekstifire i andre da?
44.	Beate:	Nei, jeg mente to…
45.	Anders:	Du ganger nummere på ringen med seg selv? Går ikke det an? Da blir det helt feil, det
46.		blir jo feil.
47.	Camilla:	en ganger en er en, to ganger to er fire… Nei, for tre ganger tre går ikke opp.
48.	Beate:	Nei, men du ganger jo med to hele tiden
49.	Camilla:	Jo, men.. Problemet.. Altså du ganger jo med to hele tiden, men hvis vi skal få det inn
50.		i en kort funksjon, så er problemet at det blir jo bare en lang rekke hvor du ganger
51.		med to. Det går ikke an å opphøye to i x da?
52.	Beate:	Jo, så blir jo x sekstifire
53.	Camilla:	Nei, for det blir jo den [**tallene hun har skrevet opp*], pluss den, pluss den, pluss den,
54.		pluss den. Så det du får til slutt vil jo ikke være svaret. Det vil bli ett av tallene du skal
55.		plusse sammen med alle de [*de tidligere tallene hun har skrevet opp]

Disse resonnementene tyder på at gruppen befinner seg i utforskningsfasen, fordi det her bæres preg av usystematisk resonnering. De forsøker å finne funksjonsuttrykk som kan stemme med observasjonene fra spesialtilfellene, altså forsøker gruppen å generalisere funnene. Gruppen trekker også inn tallene to og sekstifire i resonnementene sine, fordi de tror disse er en del av funksjonen. Det kommer forslag om å multiplisere antall ringer med to, opphøye antall ringer i andre og opphøye to i antall ringer.

De to første forslagene er ubegrunnet, og elevene argumenterer ikke noe for hvorfor de kom frem til dem. Det virker altså som om de kun har benyttet seg av gjetning slik Capraro et al. (2012) trekker frem. De forkaster også disse to uttrykkene raskt, fordi de ikke passer med spesialtilfellene. I det siste funksjonsuttrykket som nevnes resonnerer derimot Camilla seg frem. Hun trekker frem at differansen alltid er et produkt av toere, og at de derfor kan opphøye to i x. Dette tolkes som et veldig godt resonnement, som åpner for at gruppen kan diskutere og appropriere denne tenkemåten inn i senere resonnement.

Camilla trekker frem resultatene fra spesialtilfellene som gruppen har blitt enige om at stemmer, og resonnerer seg frem til en generalisering som er korrekt, men som ikke blir en generalisering av antall trekk, men av differansen. 2^x er eksempelvis differansen mellom antall trekk som kreves, for å flytte henholdsvis $x + 1$ og x ringer. Det tyder likevel på at Camilla ikke har overbevist seg selv om at det hun har kommet frem til er riktig, og dette fører til at hun reflekterer over resonnementet sitt. Dette fører til at hun kommer med en hypotese om at summen av alle disse tallene hun har skrevet opp $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ..)$ blir svaret de er ute etter, og at det siste tallet som skal summeres er 2^{64}, noe som nesten bli korrekt.

Gruppen har altså funnet en metode for å komme frem til svaret på problemet, men sier seg likevel ikke helt fornøyd:

Anders: Nei, det klikker jo helt der vetu. Det er veldig tungvint også skrive en helt ned til sekstifire, og så doble det. Doble den [*differansen] for hver gang og så plusse det sammen det tar veldig lang tid.

…

Beate: Vi må jo lage en formel for å gjøre det enklere for oss.

…

Anders: Det hadde vært lettere hvis vi kunne svaret først. Det tar veldig lang tid, jeg vet ikke om jeg gidder.

Her ser vi at ressursene elevene har, altså de matematiske kunnskapene de besitter, ikke er tilstrekkelig for det mønsteret gruppen har funnet. Gruppen har kommet frem til en sum som beskriver antallet trekk for n ringer, men mangler den matematiske kompetansen til å regne ut summen uten å legge sammen hvert ledd. Det at gruppen kommer frem til en geometrisk rekke, men ikke kommer videre herfra inn mot et spesifikt uttrykk, tyder på at det enten er kontroll-ferdigheter (altså at de ikke kommer på at det er en geometrisk rekke og kan benytte seg av formelen for summen av en geometrisk rekke) eller ressurser (altså at de faktisk ikke vet hva en geometrisk rekke er) som begrenser gruppen, og siden de ikke har geometriske rekker som pensum i 2P-Y vil jeg tro at det er det sistnevnte som er hovedårsaken.

Gruppen hevder altså at de kan komme frem til et svar, men at det vil ta lang tid å involvere og fysisk legge sammen alle leddene i rekken. Det å lage denne formelen som Beate kommenterer, er ikke like lett om man fokuserer på rekken uten å ha tilstrekkelige ressurser, noe som kan medføre at elevene står fast. Dette kan igjen føre til at hjelpeproblemet (se på summen til differansen), tar unødvendig mye tid, som burde bli brukt mer effektivt. Igjen bestemmes dette av hvilke kontroll-ferdigheter gruppen har, og hvordan de prioriterer tidsbruken sin.

Det at Anders trekker frem at det hadde vært en fordel å kunne svaret, for å komme frem til en formel mener jeg forteller to ting. For det første fokuseres det her ikke lenger på det egentlige problemet (som i all hovedsak handler om å finne antall trekk), men heller på selve generaliseringen, altså det å finne et uttrykk for antall trekk. Problemet som gruppen jobber med nå er dermed ikke det samme som det de startet med, og innebærer å komme frem til en generalisering. For det andre kommer det i denne kommentaren frem en misoppfatning, dette at svaret faktisk gir gruppen noe mer inn mot generaliseringen. Mye tyder altså på at Anders tror at antall trekk ved 64 ringer vil avsløre noe en ikke allerede vet, fra de andre spesialtilfellene. Altså begrunnes det for å kontrollere et eventuelt generelt uttrykk, med antall trekk som kreves for å flytte 64 ringer, i større grad overbeviser om at uttrykket er riktig, enn å kontrollere uttrykket med noen av de andre spesialtilfellene som de faktisk har flyttet. Dette tyder på at eksempelet med 64 ringer vil fungere som et avgjørende eksperiment for å «bevise» en generalisering.

Gruppen kommer ikke noe videre med rekken, derfor velger de å prøve å benytte seg av regresjon i Geogebra. Det at de nå bestemmer seg for systematisk å benytte seg av regresjon, tyder på at de befinner seg i planleggingsfasen. De navngir og forklarer at x-aksen kan stå for antall ringer og at y-aksen da blir antall trekk. Daniel sier at de kan finne riktig svar ved å se på hvilken y-verdi funksjonen får når $x = 64$ om de kommer frem til funksjonsuttrykket, noe som er riktig, men selve funksjonsuttrykket (som nevnt i oppgavebegrunnelsen) klarer ikke Geogebra å komme frem til. Det kommer likevel frem noen misoppfatninger her når Beate spør:

Beate: Passer ikke polynom?

Hadde elevene forstått hvordan en polynomfunksjon er bygget opp, ville de raskt konkludert med at det ikke kunne vært tilfellet. Når differansen vokser eksponentielt, må nødvendigvis også funksjonen være satt sammen av en eksponentialfunksjon, altså kan ikke funksjonen være en polynomfunksjon. Når regresjon i Geogebra ikke fungerer, beveger gruppen seg tilbake til utforskningsfasen. Etter en liten stund ser Anders et mønster:

Anders: men se [*løfter opp arket sitt og viser de andre*]. Vi får jo en mindre enn det hele hver
gang, ser dere det? De to sammen er tre, den er fire. De sammen er syv, det er åtte… Det
er like mye, men en mindre… Antall trekk for å komme til seks er sekstitre. Det syvende
trekket er sekstifire. Like mye, men en mer. Tror du det er en sammenheng?
…
Anders: Ja, fordi at nå står det det at det tiende, der står det femtolv, ikke sant. Da vet du at trekk
en til ni vil være femelleve ut ifra det. Så det er jo det du lærer av det da. Så vil elleve
være det dobbelte minus en. Minus en hver gang i hvert fall.

Anders finner altså en sammenheng mellom antall trekk, og differansen til det neste trekket når han ser etter mønstre. Denne sammenhengen prøver han å forklare til de andre på gruppen, men han klarer ikke helt å overbevise dem. Han har satt opp en systematisk oversikt over antall trekk, differansen mellom hvert av trekkene og antall ringer på arket sitt. Han har altså satt opp en tabell.

Det at Anders ikke helt selv klarer å forstå hvordan han kan overbevise de andre på en annen måte, tyder på at han ikke helt forstod resultatene av det gruppen kom frem til med differansen. Når han ser dette mønsteret, og ser at antall trekk som kreves alltid er en mindre en den neste differansen, kan han egentlig sette opp det generelle uttrykket. Gruppen har tidligere kommet frem til at de kan skrive differansen som 2^n, og dermed kunne Anders i prinsippet brukt denne tidligere generaliseringen til å komme frem til det riktige funksjonsuttrykket. Han sier også at «Så vil elleve være det dobbelte minus en. Minus en hver gang i hvert fall» (linje 71-72). Dette tolkes som at han mener det dobbelte av den forrige differansen, minus én. Dette underbygger altså at han faktisk har klart å komme frem til det generelle uttrykket, selv om han ikke er klar over det selv.

Selv om Anders er veldig nær en løsning står gruppen fast igjen, og denne gangen kommer de ikke videre. På spørsmål om de står fast kommenterer Camilla «La oss tenke litt til». Dette tyder på at problemet er spennende, engasjerende og at de vil forsøke å løse det på egenhånd. Altså forteller dette noe om gruppens matematiske tankesett. De vil forsøke å løse problemet alene, og til tross for at de står fast vil de ikke gi seg.

Etter en liten stund kommenterer jeg «dere var inne på noe med hvor mange toere det var». Dette gjør at gruppen igjen får noe å fokusere på, og selv om jeg som forsker her leder dem inn i en retning, er det en retning de tidligere valgte å fokusere på selv. At de da får denne retningen mener jeg kan tyde på paralleller til planleggingsfasen, hvor de får en plan på hva som skal gjøres slik at de skal kunne få utforske mulighetene som ligger i de resonnementene som tidligere er blitt gjort. Nesten umiddelbart etter oppstår dialogen under:

Camilla: To i sekstifjerde? Men jeg føler ikke det blir liksom..
Beate: Ja, men er det to i sekstifjerde minus en da? Fordi da, sånn minus [*notatene til Anders]
…
Anders: Prøve på noen av de andre her, det blir jo.. altså. To trekk. To ganger to minus en.
Camilla: Ja fordi.. To i første minus en da blir det jo faktisk en. For det var den jeg stussa på.
[Gruppen kontrollerer for de andre spesialtilfellene]
…
Anders: Dobbeltsjekk med et tall for eksempel. To opphøyd i åtte for eksempel. Det blir to-femti-seks minus en, to-femti-fem, det blir riktig.
…
Anders: Det blir jo noe helt sykt, men svaret er jo i hvert fall det der vi hadde én komma åtte ganger ti opphøyd i nitten.

Det at gruppen så raskt klarte å komme frem til det generelle uttrykket, vitner om at det var kontroll-nivået som avgjorde at de sto fast. De hadde ressursene som krevdes, men de trengte å se etter et mønster da de var klar over hva de skulle se etter, for å endelig komme frem til en løsning på problemet. Det å få informasjon om **hvor** de skulle lete etter dette mønsteret, kan tenkes å være årsaken til at de kom frem til uttrykket. Gruppen kontrollerer så uttrykket ved å teste ut om det stemmer for de ulike spesialtilfellene de har funnet antall trekk på. Til tross for at de ikke eksplisitt har skrevet opp et generelt uttrykk, tyder mye på at det er det generelle uttrykket $2^x - 1$, de benytter seg av for å teste spesialtilfellene. Det at de sier seg fornøyd med dette uttrykket ved å kontrollere at det stemmer med de ulike spesialtilfellene, og at Anders blir overbevist ved å benytte seg av antall trekk som de har regnet ut ved å bruke den rekursive formelen tyder på naiv empirisme. Her er gruppen i tilbakeblikks-fasen. Ved spørsmål om de kan skrive resultatet som en funksjon, svarer Camilla raskt:

Camilla: Ja, er det ikke to opphøyd i x minus en? Så har du to opphøyd i antall ringer du har i det lille slottet ditt.

Dette viser at gruppen har kommet frem til et uttrykk som beskriver antall trekk som en funksjon av antall ringer. De så også tilbake på hva oppgaven faktisk spurte om, og svarte på problemet. Da gruppen her hadde kommet frem til løsningen, spurte jeg om det var mulig å løse oppgaven på en annen måte, med utgangspunkt i forrige antall trekk. Konsekvensen av dette spørsmålet var at gruppen gikk tilbake til utforskningsfasen, men de kom likevel raskt frem til et svar:

[Elevene ser ned på arket med tabellen som de har skrevet opp]
Beate: en tre syv fem, en tre syv fem. Siste tallet er..
Daniel: Det er ganger to pluss en.

Elevenes tidsbruk her, tyder på at det ikke var matematisk vanskelig for dem å komme frem til en rekursiv formel. Den rekursive formelen vil være vanskelig å bruke for å klare å løse oppgaven, men som nevnt i oppgavebeskrivelsen er den essensiell for beviset av det generelle uttrykket. Det at denne formelen også kan bevises enkelt, ved å ta utgangspunktet i artefakten, gjør at elevene i tillegg har ressursene til å begrunne denne formelen. På spørsmål om de kan komme frem med en begrunnelse for at dette resonnementet må være riktig, og dermed at de har funnet minste mulige antall trekk i spesialtilfellene, er svaret at de prøver de seg videre ved å se etter nye mønster. Gruppen går da over i tilbakeblikks-fasen igjen, og Camilla tror hun har kommet frem til et mønster:

Camilla: Det er jo fordi at man må flytte alle sammen to ganger pluss den nye.

Dette utsagnet tyder på at Camilla ser den store sammenhengen, og at hun forstår at hele det forrige tårnet må flyttes to ganger, først over til en annen stolpe før man flytter den nye ringen, og deretter til neste stolpe der den nye ringen nå ligger på. Det kommer frem i følgende utsagn at hun likevel ikke klarer å begrunne dette for de andre, eller vise det visuelt:

91. Camilla: Det gav mening inne i mitt hode, men jeg skjønner ikke hvordan man skal forklare det.

Etter dette forsøker gruppen å begrunne resonnementet på andre måter, men mister fokus på selve uttrykke de skal vise. De begynner å se på sammenhenger mellom hvor mange trekk de ulike ringene flyttes hver gang, og får dermed ikke tid nok til å komme videre med resonnementene. Oppgaven vekker derimot nysgjerrighet hos dem, og de beveger seg over i utforskningsfasen og ser etter andre sammenhenger med antall ringer:

92. Camilla: Men den øverste blir flytta flere og flere ganger blir den ikke?
93. Beate: mhm
94. Camilla: Eller er det bare i mitt hode?
95. Anders: Hvor mange flere ganger da tror du? Er det noen sammenheng dette her?

Gruppen utforsker denne hypotesen mer, og kommer frem til et mønster i antall ganger hver av ringene må flyttes:

96. Anders: Flytta den fire ganger [**R1*]. Så en [**R3*], to [**R2*], fire [**R1*]. Den flytta du en gang
97. [**R3*], den flytta du to ganger [**R2*], og den flytta du fire ganger [**R1*]

Gruppen oppdager et mønster i hvor mange ganger hver av ringene må flyttes når en flytter tårnet, men får hverken tid til å utforske mer, eller argumentere ytterligere for resonnementene.

5.1.2 R1-GRUPPEN

R1-gruppen valgte å lese opp problemet høyt. Deretter startet også denne gruppen med å flytte på det oppsatte tårnet, dog mer usystematisk og uten et klart mål. Dette tolkes som at gruppen går direkte inn i utforskningsfasen. Erlend utførte mesteparten av flyttingen, og da de hadde flyttet tre av ringene riktig stoppet de opp. Gruppen hadde til nå ikke telt over antall trekk, men prøvde å lage en plan.

98. Fiona: Det er et mønster
99. Erlend: Det er et mønster det går i. Vi må bare finne ut hvilket mønster det går i så må vi plusse
100. på et trekk hver gang.
101. Fiona: Ja, så kunne vi kanskje telt hvor mange ganger vi må flytte den her som har åtte ringer og
102. så bare gange med åtte?

Mønsteret som gruppen her påpeker er, slik jeg forstår det, ikke knyttet til antall trekk, men hvordan ringene skal flyttes for å klare å flytte hele tårnet. Resonnementet til Fiona tyder på at hun tenker at oppgaven raskt kan løses, om de klarer å telle antall trekk som kreves for å flytte det oppsatte tårnet med 8 ringer, og dermed multiplisere antall trekk med åtte. Dette resonnementet følges ikke opp, og gruppen velger videre å utforske spesialtilfellene uten en plan. Da tårnet var flyttet slik at fire ringer var riktig, begynte de å reflektere:

103. Erlend: Det øker for hver etasje da
104. Fiona: Ja [*nikker*]
105. Henrik: Ja [*nikker*]
106. Erlend: Ehm… Tror ikke det fungerer å gange det samme på åtte da

Selv om elevene til dette tidspunktet ikke har telt antall trekk, merker de at jo flere ringer en har, jo flere trekk kreves. Dermed må den originale planen forkastes, og de er tvunget til å utvikle en ny hypotese. Slik dette forstås, ser elevene seg her tilbake og reflekterer over den tidligere planen. Etter hvert prøver de å lage seg en ny plan på hvordan de skal gå frem:

107. Henrik: Kan det ikke være en formel da?
108. Fiona: Det hadde vært hyggelig det
109. Erlend: mhm, med x antall ringer
110. Henrik: Men kan det være nummeret til ringen opphøyd i noe? Kan vi finne noe sånn?
111. Fiona: Skal vi sjekke på de første..
112. Erlend: Hvis vi sier at antall ringer er x, så må vi finne en formel for det
113. Fiona: Vi kan jo bare teste å se hvor mange trekk vi trenger per ring
114. Erlend: Prøve med fire da

Dette viser at gruppen igjen befinner seg i planleggingsfasen, hvor de trekker frem det å se etter et mønster ved å ta utgangspunkt i noen spesialtilfeller som de kan flytte, og telle trekkene til. De vil så se om de kan benytte seg av dette mønsteret, for å komme frem til en generell formel som gir antall trekk som kreves, uttrykt med x, hvor x er antall ringer. For å sjekke ut spesialtilfellene, velger de å telle antall trekk som kreves med fire ringer, og begir seg ut i implementeringsfasen. Det er uvisst hvorfor gruppen velger å begynne med fire ringer, men personlig ville jeg anbefalt dem å begynne lavere. Likevel valgte jeg å ikke blande meg inn, for å se hvor de endte opp med dette utgangspunktet. Beslutningen (kontroll-nivå) om å begynne med spesialtilfellet med fire ringer, vil kunne føre til at det tar lengre tid å finne et mønster, fordi det tar lengre tid å komme frem til antall trekk i de ulike spesialtilfellene.

Etter at de har kommet frem til antall trekk som kreves for å flytte fire ringer, begir de seg videre for å se på antall trekk for å flytte fem ringer, og her stopper de opp og er usikre på om de klarer å flytte på riktig antall trekk. Gruppen går her tilbake til utforskningsfasen, og forsøker å flytte spesialtilfellet flere ganger. Etter hvert settes det opp et scenario der elevene har flyttet et tårn på fire ringer til den høyre stolpen, og har resten av tårnet igjen på den venstre stolpen. Etter litt diskusjon ser Erlend et mønster:

115. Erlend: Så hvis jeg flytter alle disse her så er det femten [*de fire minste ringene på S3*], så kan
116. jeg ta og flytte den her [*R5:S1-S2*] seksten. Det var det du mente, åja. Og da vil det jo
117. egentlig ta femten over dertil igjen? [**S2*] Så da er det trettien.

Erlend går fra utforskningsfasen, hvor de forsøker å gjennomføre antall flyttinger i et spesialtilfelle, til å oppdage et mønster som han deretter benytter for å resonnere seg logisk frem til den rekursive formelen. Denne måten å resonnere på, gjør at han samtidig begrunner hvorfor det må være slik (beviset). Dette kan muligens føre til at de kan bli sikre på at de har flyttet med minste antall trekk, om de teller antall trekk i noen av de andre spesialtilfellene. Dette tyder på at Erlend på dette tidspunktet befinner seg i tilbakeblikks-fasen. Erlend valgte deretter å se på spesialtilfellet, hvor tårnet har tre ringer og sier at det skal ta syv trekk. Når Erlend har flyttet de tre ringene, og telt antall trekk, kommer han frem til at det stemmer overens med formelen hans. Dette resulterer i en dialog:

118. Henrik: Så hvordan går mønsteret?
119. Erlend: Ehh.. Du tar den forrige, altså resten, ganger den med to og plusser på en, hver gang, men
120. ehh.. det må jo være en formel for det
121. Henrik: Få se. [*ser bort på arket til Fiona som har laget en tabell med antall trekk på de første 5*
122. *tårnene*].
123. Ganger med to, plusser på en, ganger med to, plusser på en, ja det er jo det. Ganger to
124. pluss en. Er det ikke det da? x ganger to pluss en.
125. Erlend: Men x-en blir jo feil for du kan ikke si. Hva er x-en for noe?
126. Henrik: x-en kan være nummer [**ringene*]. Liksom hvis det er nummer en [**R1*], nummer to
127. [**R2*], nummer tre [**R3*]

Erlend forklarer altså den rekursive formelen med ord, og Henrik lager så et matematisk uttrykk av det. Uttrykket i seg selv er ikke feil, men Henrik har her en misoppfatning om at x i dette tilfellet er antall ringer, selv om det egentlig er antall trekk som kreves for å flytte det forrige tårnet. Denne prosessen som har utløpt seg her, vil jeg tro er ganske uvanlig. Her har

Erlend både kommet frem til den generelle rekursive formelen ved å se på et spesialtilfelle, og samtidig bevist at den faktisk stemmer. Når gruppen er blitt overbevist om at formelen må stemme, kommenterer Fiona:

128. Fiona: Men det er jo en veldig upraktisk måte hvis vi må regne gjennom alle trekkene for å
129. komme til sekstifire, så jeg håper det er en formel vi kan komme på.

Fiona trekker altså frem at det vil være tungvint å benytte seg av den rekursive formelen, for å gå helt opp til et tårn som inneholder 64 ringer. Gruppen er enig om at det er mulig å løse oppgaven på denne måten, men de velger allikevel å ikke gjøre det. De forsøker å finne en eksplisitt formel, og går med dette tilbake til utforskningsfasen. Her står gruppen fast lenge, men etter en stund tar Erlend opp datamaskinen.

130. [*Erlend finner frem datamaskinen og åpner Geogebra*]
131. Erlend: Skal vi se.., vis, regneark
132. [*Erlend lager en tabell i regnearket til Geogebra. I kolonne A skriver han inn 1, 2, 3, 4, 5,*
133. *og i kolonne B skriver han inn de tilhørende trekkene: 1, 3, 7, 15, 31*]

Erlend lager altså en plan som innebærer å benytte seg av regresjon i Geogebra. Han befinner seg altså i planleggingsfasen, før han etter hvert går over til implementeringsfasen. Han finner en funksjon som passer relativt bra til punktene (en logaritmisk funksjon), men trekker raskt slutning om at denne må være for komplisert. Den passer heller ikke nøyaktig med punktene.

Gruppen kommer ikke videre. De bruker mye tid på å tenke individuelt, noe som tyder på at de igjen er i utforskningsfasen og står fast. Etter en liten stund velger jeg å stille spørsmål om hva differansen mellom trekkene er i de påfølgende tårnene. Gruppen ser noen spesialtilfeller, men velger å ikke fokusere for mye på denne differansen likevel. Den neste delen av angrepsfasen inneholder utforskning og gjetninger. Erlend kommer med uttrykket «En minus x i andre pluss en», og Gabriel kommenterer «Jeg tror det skal være to minus x i andre». Hvordan de har resonnert seg frem til disse uttrykkene er jeg usikker på, men dette tolkes som ren gjetting. Blant annet trekkes også Fibonacci frem her. Dette er med andre ord en periode hvor elevene virkelig står fast, og virker desperate etter svar. For meg virker det som at denne fastkjøringen fører til en del gjettinger, men omsider kommer det frem noen argumenter som har mer resonneringsgrunnlag:

134. Henrik: Forskjellen er jo kvadratisk

Henrik trekker altså frem differansen mellom antall trekk for de påfølgende tårnene. Han gjør dette individuelt, uten at dette tar særlig fokus for resten av gruppen. Selv om han gjør dette, har han likevel ikke overbevist seg selv om at dette er verdt å følge opp videre. Gruppen fortsetter med en del frustrasjon, og står fremdeles fast en stund. Etter hvert føler jeg meg nødt til å gripe inn, og lede gruppen videre inn mot en løsning.

135. JB: Men de tallene var forskjellen her, hva var de for noe?
136. Henrik: to, fire, åtte, seksten
137. JB: Okei. Kan vi skrive de tallene på en annen måte?
138. Henrik: To opphøyd i x går det?
139. Gabriel: x opphøyd i to tror jeg

Ved å spesifikt spørre om forskjellen, forsøker jeg å lede gruppen inn på tanken om å se på differansen (siden det er dette de har vært nærmest på egenhånd). Det at Henrik umiddelbart kan fortelle at to, fire, åtte, seksten er det samme som ulike toerpotenser, tyder på at han har ressursene som kreves for å kunne løse oppgaven. Det at han likevel ikke reflekterer mer over svaret, kan bety at han ikke har tilstrekkelig med kontroll-ferdigheter til å se hvordan han skal gå frem. Det at Gabriel etter Henrik sin kommentar benytter seg av samme konstant og variabel, men setter opp uttrykket annerledes, mener jeg tyder på gjetning. Dette grunnet at uttrykket ikke har en sammenheng med mønsteret som kommer frem ved å se på differansen mellom spesialtilfellene.

Selv om Henrik her kommer inn på noe, er samtalen preget av min hjelp, og det ser ikke ut som om gruppen henger helt med på hvor de skal. De har ikke en plan, og denne siste delen av prosessen er i stor grad preget av dette, hvor de befinner seg i utforskningsfasen og leter etter nye argumenter og resonnementer som kan fungere. Etter en liten stund kommenterer Erlend:

140. Erlend: Minus en. To opphøyd i x minus en hva er det for noe?
141. …
142. Erlend: To opphøyd i fire minus en det er femten
143. Fiona: Ja
144. Erlend: Da blir det to opphøyd i tre minus en det er syv. Det stemmer jo. To opphøyd i en det er
145. to minus en det er en. Det stemmer. To opphøyd i x minus en.

Erlend kommer altså omsider frem til en eksplisitt formel for antall trekk. For å kontrollere om denne formelen virker, prøver han den ut på de spesialtilfellene som de vet er riktige. Det at Erlend så kommenterer at «det stemmer» (linje 145) tyder på naiv empirisme, ettersom at han overbeviser seg selv om at generaliseringen er korrekt ved å kontrollere spesialtilfeller. Dette utsagnet tyder også på at gruppen befinner seg i tilbakeblikks-fasen. Etter en liten stund med kontrollering, går gruppen over i planleggingsfasen når de sier at de kan beregne svaret til oppgaven ved å benytte formelen. De går så over i implementeringsfasen når de tar frem kalkulatorene, og kommer frem til at:

146. Henrik: Det blir én komma åttifire ganger ti opphøyd i nitten.

De sier seg så egentlig fornøyde med svaret, og viser ikke tegn til å forsøke å begrunne svaret i noen større grad. De har kommet frem til et svar på problemet, og er fornøyd med det. På spørsmål om de er sikre på svaret, eller om det er gjetning får jeg blant annet som svar at:

147. Henrik: Det er jo litt gjetting

5.2 FROSKEHOPP

5.2.1 2P-Y-GRUPPEN

Da 2P-Y-gruppen skulle starte med froskehoppoppgaven, oppstod det en del ulike tolkninger av oppgaven. Den ene tolkningen som kom frem innebar at liljebladene ikke lå på en lang horisontal linje, men at de to froskefamiliene var plassert på to vertikale linjer, på hver sin side av det ledige vannliljebladet.

Det at oppgaven kan tolkes på ulike måter, kan tyde på at den ikke er blitt formulert presist nok. Medieringsprosessen mellom elevene og oppgaveteksten, blir da ulik for de individuelle elevene i gruppen, og oppgaven kan misforstås eller feiltolkes. Denne tolkningen av oppgaven vil selvsagt også kunne føre med seg ulike resonnement. Selv om gruppen kom i gang ved å sette det opp på denne måten, valgte jeg etter hvert å bryte inn for å komme med en bedre forklaring av problemet slik at det ble tolket på riktig måte.

At gruppen ikke forsto oppgaven til å begynne med, medførte at de brukte lengre tid i inngangsfasen, nærmere bestemt analysedelen av inngangsfasen, hvor de jobbet med å forstå problemet. De ulike tolkningene av problemet ble diskutert, og gruppen fokuserer på ordene og hva som faktisk står slik at de ikke misforstår oppgaven. Selv om disse ulike tolkningene kunne vært interessante velger jeg å ikke trekke dem inn her, ettersom at de er lite relevante for å besvarer problemstillingen.

Da gruppen hadde tolket oppgaven riktig, startet de med de ulike spesialtilfellene som er oppført på oppgavearket med henholdsvis 3, 5, 7 og 9 ruter. De startet individuelt i utforskningsfasen, før de etter hvert bestemte seg for å planlegge hva som skulle gjøres. De la en plan for å finne antall trekk som kreves i de ulike spesialtilfellene, for så å se om de kunne finne noe mønster i tallene, som de kunne bruke for å besvare problemet. Fra Anders' utsagn under kommer det også frem at gruppen fokuserte på spesialtilfellene, og det å faktisk klare å løse disse tilfellene:

Anders: Så begynne på toppen med den enkleste da også jobber vi oss heller nedover så tar vi ett problem om gangen kanskje?

Anders trekker frem at de nå ser på noen andre problemer, nemlig å løse spesialtilfellene. Her blir altså spesialtilfellene hjelpeproblemer, ettersom at de ikke intuitivt sier oss noe om antall trekk. Det å løse hvert av spesialtilfellene, kan altså oppfattes som ulike problemer i seg selv, og er essensielt for å kunne klare å løse det originale problemet. Gruppen har nå beveget seg over til implementeringsfasen, hvor de har laget seg en plan og skal til å utføre planen.

Elevene bruker lang tid på å løse, og finne antall trekk som kreves i de ulike spesialtilfellene. Daniel velger å ikke gjøre det samme som resten av gruppen, og setter opp 15 brikker på hver side av et ledig vannliljeblad, og forsøker å flytte seg frem direkte til løsningen i det spesialtilfellet. Han trekker seg altså litt bort fra medieringen mellom de andre elevene, for å forsøke å fokusere på egenhånd på problemet. Når elevene starter med å prøve å finne antall trekk i de ulike spesialtilfellene, jobber de individuelt. Hvis en av dem kommer frem til riktig løsning sier de det høyt til de andre, og Anders skriver opp resultatene (bilde 3). Denne delen av problemløsningsprosessen, virker som er preget av gjetninger, noe som også kommer frem i noen av dialogene mellom elevene, blant annet her:

Camilla: En, to, tre, vent.. Jeg hadde det, nå mista jeg det igjen. Hva i huleste var det jeg gjorde?
[Camilla flytter brikkene noen ganger, men kommer ikke frem til løsningen]

Camillas utsagn tyder på at gruppen ikke jobber systematisk eller ser etter systemer, men utelukkende prøver på ulike forflytninger for å se om de kommer frem til en løsning. Slike kommentarer som den ovenfor, preger denne delen av prosessen og viser at dette gjelder for alle i gruppen (også Daniel som sitter med sine 15 brikker). Selv om gruppen hadde en overordnet plan med å løse de ulike spesialtilfellene, tyder denne utforskningen på at det ikke var like enkelt som først antatt. Spesialtilfellene her vil, etter min mening, kunne fungere som noen underproblemer, der elevene først må finne et system i forflytningene, før de kan løse alle spesialtilfellene på en effektiv måte. Etter en stund med denne prøvingen og feilingen bryter jeg inn, og stiller spørsmålet:

JB: Når er det dere blir låst da?

Gruppen går da tilbake til planleggingsfasen, og bestemmer seg for å prøve å løse brettet som inneholder syv felt felles. Dette tyder på at min kommentar bidrar til å samle gruppen mot et felles mål. Videre tyder det på at gruppen sammen lager seg en plan for hvordan de skal gå frem for å løse spesialtilfellet. Anders setter opp brikkene på sitt ark, og alle i gruppen diskuterer sammen. I implementeringsfasen går diskusjonene slik:

Anders: Du må begynne sånn [*RR_RGGG*].
Alle: Mhm
Anders: Dét går jo ikke an [*R_RRGGG*], da stenger du jo inne grønt fra å komme videre [*Flytter tilbake til RR_RGGG*], og da er du jo fort nødt til å gjøre sånn [*RRGR_GG*]

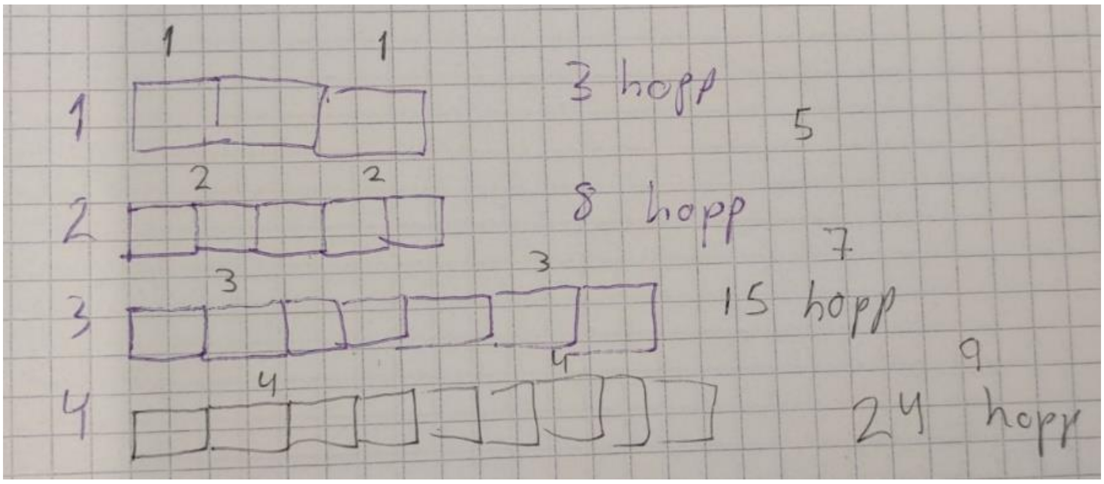
Gruppens fokus er her på hvilke scenarioer som ikke fungerer, noe jeg mener er et eksempel på at de har laget en plan som skal utføres. Altså kommer det frem en tendens til at en ny heuristikk blir benyttet. Elevene går bort fra å gjette og sjekke, og beveger seg mot en mer systematisk fremgangsmåte hvor de ser etter mønstre og eliminerer ulike trekk. Det å resonnere slik sammen, gjør også at medieringsprosessen mellom elevene får større innflytelse på resonnementene, og etter en del diskusjon innad i gruppen, mens de flytter alle brikkene på brett nummer 3, kommer de etter hvert frem til en løsning.

Selv om de løser dette spesialtilfellet, er gruppen likevel nødt til å gå tilbake å gjøre alt på nytt fordi de ikke teller antall trekk. Dette tyder på at gruppen ikke har laget en tydelig nok plan før de satte i gang med å utføre den. Dette kan gå på bekostning av tid, som kunne blitt unngått om man hadde tatt andre avgjørelser (kontroll-nivå). Det ser også ut til at denne felles resonneringen på brettet, som inneholder syv ruter, gjør det enklere for dem å komme frem til en løsning på det siste brettet:

157. Camilla: Okei den var ganske lett nå [*Flytter brikkene på B4*]
158. Anders: Nå som du har den der annenhver i hodet?

Gruppen har altså resonnert seg frem til at det er om å gjøre å få froskene til å stå i annenhver farge, og at det da blir enklere å løse de ulike spesialtilfellene. Dette kan tyde på at elevene individuelt ikke klarte å komme frem til dette mønsteret, men at de sammen med resten av gruppen presterte å finne et mønster ved å gå gjennom medieringsprosessen beskrevet ovenfor.

Etter at de har kommet seg gjennom alle brettene som står på arket har Anders en oversikt over resultatene (bilde 3). En slik oversikt vil også kunne kategoriseres som en heuristikk, ettersom at det er en spesifikk metode som blir benyttet for å lettere kunne arbeide med resultatene fra spesialtilfellet (Mason et al., 2010; Mason & Davis, 1991). Ettersom at det kan trekkes paralleller til tabell, velger jeg her å tolke Anders sin oversikt som en tabell.



Bilde 3

Som nevnt tidligere er tegn sentralt i matematikken, og det at Anders her velger å tegne opp og lage tabellen sin på en slik måte som han gjør, tyder på at det er denne måten å fremstille dataen på som gir best oversikt for han. Det trenger likevel ikke være slik for resten av gruppen fordi medieringsprosessen Anders har med tegnene på arket, er annerledes enn medieringsprosessen de andre elevene vil ha med de samme tegnene. Etter at Anders har skrevet opp denne tabellen, begynner gruppen å se etter matematiske mønstre:

159. Beate: Okei. Partall blir partall og oddetall blir oddetall. Og det ser ut som..

Beate resonnerer seg altså frem til at om det er et partall antall frosker i hver familie, vil antall trekk bli partall. På samme måte vil det antall trekk bli oddetall, om antallet forsker i familien er oddetall. Siden hun og gruppen ikke har noen spesifikk plan, tyder mye på at de befinner seg i utforskningsfasen. Videre velger gruppen å se på differansen mellom antall trekk:

Anders: Skal vi se. Her er det jo fem imellom
Beate: Her er det syv imellom
Anders: Ni imellom. Tror du det kan være elleve her? [*flirer*]
Beate: Det er et eller annet. Det er et eller annet her [**arket og flirer*]
Anders: Blir det trettifem trekk? [*ser på JB*]
JB: Ja
Anders: Ja, for det har du jo også her da. Her ville du hatt fem på hver side og da får du jo også det der oddetallet ditt [*ser på Beate*].
Beate: Ja
Anders: Så det blir to mer trekk, på grunn av at det er to flere brikker som er med i spillet. En på hver side.
Beate: Så blir det førtiåtte neste [*skriver ned*]

Medieringsprosessen mellom elevene i gruppen mener jeg er essensiell i overnevnte dialogen. Slik jeg tolker resonnementene, begynner Anders å se på differansen, noe som medfører at Beate approprierer denne tenkemåten. Når Anders så ser at den neste differansen er ni tyder det på at mønsteret som oppstår er kjent. Tallene 5, 7 og 9 opptrer, og min tolkning av situasjonen er at elevenes matematiske kompetanse (ressurser) gjør at de raskt oppdager dette mønsteret, og stiller spørsmålet om neste tall skal være 11.

Gruppen ser altså et mønster i denne differansen, men det at de stiller spørsmål om det de har funnet tyder på at de ikke er helt sikre på om dette mønsteret faktisk stemmer. Her kan elevene enten kjenne igjen mønsteret fordi de er påfølgende oddetall, eller så kan de se på differansen til differansen. Ettersom at Anders kommenterer at det «blir to mer trekk» (linje 169) tyder mye på at det er det sistnevnte mønsteret som gruppen har sett når de kom med en hypotese for at den neste differansen skulle være 11.

Vi ser også at Anders (etter å ha spurt meg) også støtter opp argumentet sitt ved å henvise til Beates resonnement om partall og oddetall. Det neste argumentet som Anders kommer med, er interessant og vitner om en vilje til å forklare funnene. Han forsøker å argumentere for hvorfor differansen øker med to fra det forrige brettet når antall frosker øker med to (en i hver familie). Anders gjør altså det Pólya (2004) kaller for å se tilbake, og trer dermed inn i tilbakeblikks-fasen ved å forsøke å argumentere for resonnementene han gjør. Han forsøker i tillegg å bruke dette tilbakeblikket som en argumentasjon, når han forsøker å overbevise de andre i gruppen:

Anders: Eller du øker to imellom der da [**differansen mellom trekkene som han har skrevet opp på arket*]. Fordi at du har to brikker mer, men selvfølgelig må du sette det over det gamle i tillegg.
Daniel: Åja..
Camilla: Hvordan fant dere ut av de andre?
Beate: Det er jo det vi vet [*3, 8, 15, 24]. Så plusser vi på elleve siden det er neste tall i rekka der oppe.
[Camilla nikker]
Beate: Så det blir trettifem, og det stemte.
Anders: Ja, og hvor mange hopp kreves hvis hver familie består av femten frosker? Her består de av fem [*35]. Så hvis vi finner en sammenheng mellom dette her da og klarer å lage et uttrykk som vi gjorde i stad.

Selv om mye tyder på at Anders klarer å overbevise gruppen om at hans resonnement må stemme, ser det ikke ut som at gruppen sier seg fornøyd med den aritmetiske rekken, selv om den i utgangspunktet er tilstrekkelig for å finne en løsning. Problemet som gruppen fokuserer på har, slik jeg tolker det, altså skiftet fra å finne antall trekk som kreves for å flytte 15 frosker til å finne en generalisering for problemet. Dette er også noe Anders fremhever når han sier: «Så hvis vi finner en sammenheng mellom dette her da og klarer å lage et uttrykk som vi gjorde i stad» (linje 182-183).

Selv om fokuset nå er et annet problem ser vi likevel at gruppen ikke har gått bort fra det originale problemet og Anders nevner, slik jeg tolker det, at de vil bruke generaliseringen for å løse det originale problemet når han trekker frem at de skal svare på hvor mange hopp som kreves hvis hver familie består av 15 frosker. Gruppen benytter den aritmetiske rekken, selv om de ikke har uttrykt summen algebraisk, til å finne noen av de neste spesialtilfellene som de ikke har flyttet. De stoler altså på at mønsteret vil fortsette, noe som kan tyde på naiv empirisme. Selv om den aritmetiske rekken Anders kom frem til ser ut til å stemme, og gruppen benytter seg av den for å finne antall hopp som kreves for flere tilfeller enn de selv har kontrollert, er ikke gruppen helt fornøyd med begrunnelsen:

184.	Anders:	Ja, vi har funnet ut det der, men hvorfor er det sånn?
185.	…	
186.	Camilla:	Det er jo liksom, altså det må jo være en grunn til at det er sånn. Jeg finner ikke noen
187.		måte å sette det opp på heller.
188.	Beate:	Men se [**differansen på arket til Anders*]. Her er det neste det er fem, der er det fem
189.		brikker [**B2*], neste er syv, her er det syv brikker [**B4*], der er det ni.
190.	Anders:	Ja, at du har antall plass, æ, antall liljeblader

Anders, og resten av gruppen, stiller altså flere spørsmål til hvorfor den aritmetiske rekken er som den er. De blir altså ikke fullstendig overbevist (selv ikke Anders) over resonnementet om at differansen må øke med to, siden antall frosker øker med to. De søker etter en forklaring for at det må være slik, og ved å gjøre dette er de innom en sentral del av det å se tilbake (tilbakeblikks-fasen).

Denne søknen bidrar også til at Beate ser at differansen er det samme som antall liljeblader på det neste brettet. Selv om Beate sier «brikker» (linje 189) her, tolker jeg det slik at hun mener blader eller kvadrater. Når hun peker så peker hun på selve brettet, og det er ingen av spesialtilfellene som gruppen har sett på som inneholder 5, 7, eller 9, brikker, kun kvadrater/blader. Det ser også ut som om Anders forstår hvordan hun tenker og retter henne ved å si «antall liljeblader» (linje 190).

Selv om gruppen forsøker å trekke inn elementer fra oppgaven for å beskrive mønsteret i den aritmetiske rekken, har det ikke blitt forsøkt å finne en mer systematisk og matematisk begrunnelse. Dette kan tyde på at gruppen fremdeles er preget av å utforske ulike elementer, selv i tilbakeblikks-fasen. Slik jeg tolker denne situasjonen, går ikke gruppen frem for å legge en systematisk plan. Derimot beveger gruppen seg etter hvert bort fra å argumentere for rekken, og dermed over til utforskningsfasen.

Etter litt diskusjon kommer også gruppen frem til at de har alt som kreves for å løse det faktiske problemet. Likevel virker det som at dette ikke er tilfredsstillende nok for dem, noe som tyder på at de fremdeles har fokus mot generaliseringen:

191.	Camilla:	Ja, for det er jo trettien, så vi kan jo regne ut her og komme frem til det.
192.	Anders:	Er ikke det kjedelig?
193.	Camilla:	Jo

De mener med dette at de kan komme frem til svaret ved å summere hele rekka. Daniel forsøker å utføre den lange addisjonen, for å regne seg frem til svaret på problemet. Mens Daniel regner seg frem til spesialtilfellet som problemet spør om, forsøker resten av gruppen å resonnere seg frem til et eksplisitt uttrykk. Da de ikke klarer å komme frem til noe, forsøker de å oppsummere den informasjonen de allerede har:

194.	Anders:	Hopp er ukjent. Vi vet hvor mange frosker hver familie har, hvor mange det er totalt, og
195.		vi vet også hvor mange liljeblader det vil være den linjen da. Det blir jo fem på en side og
196.		en imellom, så det er det vi vet fra før av da. Vi vet hvor mange blader det er, vet hvor
197.		mange frosker det er per familie. Det vi ikke vet da det er hoppene, så da…

Denne oppsummeringen er en sentral del av det å forstå problemet. Anders beveger seg altså tilbake til analysefasen, og gir et overblikk på hva de vet og hva de ikke vet. Gruppen beveger seg tilbake til utforskningsfasen igjen, og etter en liten stund kommer Daniel frem til et svar:

Daniel: Tofemtifem, er det riktig? [*Ser på JB*]
…
Anders: Men jeg tror, svaret er nok ikke… Men jeg tror ikke egentlig.. De spør jo selvfølgelig hvor mange hopp det er, men hele poenget med denne oppgaven her er jo å finne uttrykket.
Daniel: Ja, men hvis vi har riktig svar så kan vi lettere finne uttrykket.
Anders: Ja, men vi har jo også svaret på det.. [**arket med antall trekk*]
Camilla: Vi kunne regnt ut svaret på den måten der
Anders: Vi kan jo bruke en av dem da bare [**antall trekk som er blitt funnet*]

Daniel trekker seg altså ut fra gruppen, og fokuserer på å finne selve løsningen av problemet. Selv om han klarer å komme frem til løsningen av problemet, vil gruppen likevel ikke se seg ferdig med det. Dette tyder på at han ikke har satt seg samme mål som de andre, altså å finne et generelt uttrykk, men heller på å løse det faktiske problemet. Selv om Daniel kommer frem til selve svaret, merkes det at gruppen fokuserer på generaliseringen heller enn det spesielle tilfellet som spørres om. Det virker også som at Daniel vil finne det generelle uttrykket, men at han tenkte det ville bli enklere om de hadde et svar å forholde seg til, noe som tyder på at han oppfatter spesialtilfellet med 15 frosker i hver familie som et avgjørende eksperiment for å kontrollere generaliseringen.

Det at Anders og Camilla kommenterer at de bare kunne brukt noen av de andre spesialtilfellene til å kontrollere det generelle uttrykket, viser at de har reflektert over hva spesialtilfellene kan brukes til. Jeg mener også at dette kan tolkes som selve årsaken til at de valgte å ikke regne seg frem til svaret på samme måte som Daniel, altså at de var klar over at det ikke var nødvendig, og valgte å prioritere tiden på å finne en generalisering.

Etter en liten stund, velger Camilla å benytte seg av heuristikken sette opp en tabell for å få en oversikt over informasjonen som de faktisk har (de 4 øverste radene i bilde 4).

Antall pr fam	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5
Ant. frosk	2	4	6	8											
Liljeblad	3	5	7	9											
Hopp	3	8	15	24											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Bilde 4

Denne tabellen kan fungere som en god oversikt, og det virker som at det er denne tabellen som blir årsaken til at Camilla ser et mønster:

Camilla: Men alle disse.. Vent da.. Men hvorfor begynner vi på tre? En ganger tre, to ganger fire, tre ganger fem, fire ganger seks. Er vi inne på noe? [*snur seg mot JB*]

Dette utsagnet tyder på at Camilla ser på antall trekk som et produkt av to faktorer, og ser etter et mønster mellom faktorene. Etter at hun har skrevet opp all informasjonen, legger hun til en rad under antall hopp, som er det tallet som antall frosker i hver familie skal multipliseres med. Arket ser da slik ut, som på bilde 4. Dette tyder på at Camilla ser at begge faktorene vokser med samme differanse, altså når antall frosker per familie vokser med én så vokser også den andre faktoren med én. Dette gjør at hun kan skrive opp rekka helt bort til det står 15 og 17 (siste kolonne). Det siste hun trenger å gjøre da, er å multiplisere disse faktorene sammen for å komme frem til svaret på problemet.

Medieringsprosessen mellom tegnene, slik de er blitt presentert i tabellen, og Camilla, fører altså til at hun kommer frem til en ny løsningsmetode. Det er ikke sikkert at den samme metoden hadde kommet frem om hun ikke hadde satt opp opplysningene på nøyaktig denne måten. Det at hun benytter seg av heuristikken "sette opp i tabell", kan altså være sentralt for at hun skal komme med nøyaktig de resonnementene hun gjør. Selv om hun nå har funnet en mer effektiv måte å komme frem til svaret på, trenger ikke dette å bety at hun har kommet frem til den eksplisitte formelen. Hun nevner spesialtilfellene, men ikke noen generalisering av disse funnene hun har gjort. Dette kommer også frem når jeg stiller spørsmål om hva hun gjør:

JB: Hva er det du gjør?
Camilla: Jeg tok det [*1] også begynte jeg på tre, altså en ganger tre er tre, to ganger fire er åtte, tre ganger fem er femten. Så det øker på en måte med en her hele tiden.
JB: Hvor mye større er det siste tallet du ganger med enn det første tallet?
Camilla: Det er det jeg prøver å finne ut av nå.. Det var antall per familie..
JB: Du sa en ganger tre, to ganger fire, tre ganger fem..
Anders: Ja det er to ganger større hver gang? Nei at det er to mer hver gang? [*ser ned på arket sitt*]
[Camilla taster inn 15*17 på kalkulatoren]
Camilla: Tohundreogfemtifem?
Daniel: Mhm
[Camilla nikker]
Anders: Hvordan fant du ut av det?
Camilla: Fordi, jeg vet ikke helt hvorfor da, men da begynner man på tre her [*3]
Beate: Hva er tretallet?
Camilla: Tretallet det er bare sånn det passer inn, jeg vet ikke, men det er jo antall liljeblader, og antall hopp man trenger. Men jeg føler ikke det egentlig har noe å si. Men liljebladene passer heller ikke inn her [*4]. For da begynner man på tre der og for antall man øker i familien så ganger du to med fire, tre med fem, så du øker én hele tiden.
Beate: Ja
Camilla: Men jeg vet ikke hvorfor

Selv om hun benytter seg av den eksplisitte formelen, vet hun altså ikke selv hvordan det kan generaliseres. Mye kan derfor tyde på at hun har vært heldig, og oppdaget dette mønsteret ved en tilfeldighet. Anders ser mønsteret når jeg eksplisitt nevner de første spesialtilfellene, men går ikke noe videre inn på dette. Dette tyder på at han ikke har tro på at han faktisk indirekte har kommet frem til en generalisering som gruppen kunne ha benyttet.

Selv om Camilla kommer frem til riktig svar kan det altså tolkes slik at hun har gjettet seg frem til metoden. Hun forsøker å overbevise seg selv, og gruppen om hvorfor dette må være riktig, ved å forsøke å trekke inn alt det gruppen har snakket om tidligere. Gruppen vil dermed befinne seg i tilbakeblikks-fasen. Likevel klarer hun ikke å komme frem til en god argumentasjon for hvorfor det må være slik. Det at hun prøver, tyder likevel på en viktig refleksjonsegenskap innenfor problemløsning. Dette er den siste diskusjonen gruppen har før jeg er nødt til å runde av. Gruppen får altså kommet frem til en eksplisitt formel, men de har ikke klart å uttrykke den algebraisk.

5.2.2 R1-GRUPPEN

Da R1-gruppen fikk presentert problemet, valgte jeg å forklare dette i kombinasjon med en demonstrasjon, på bakgrunn av misforståelser som oppstod i 2P-Y-gruppen. Etter at gruppen hadde lest oppgaven, forklarte jeg altså hvordan problemet skulle oppfattes. Dette har tydelige paralleller til analysefasen, og selv om ikke gruppen resonnerte seg frem her, vil min forklaring kunne tydeliggjøre problemets hensikt.

R1-gruppen brukte dermed mindre tid på tolkningen av problemet, enn hva 2P-Y-gruppen gjorde, og satt raskt i gang med å flytte brikkene på de ulike brettene. Altså startet de nesten umiddelbart i angrepsfasen, ved å forsøke å løse spesialtilfellene. Elevene forsøkte deretter å utforske de ulike spesialtilfellene, uten noen tydelig plan på hva de skulle gjøre, noe som kan tyde på at de befant seg i utforskningsfasen. Elevene satt alle individuelt, og forsøkte å finne antall hopp som krevdes. Når noen klarte å løse et av brettene, sa de dette, i tillegg til antall trekk de kom frem til, høyt i gruppen. Deretter ble dette skrevet opp, slik det fremgår av situasjonen under:

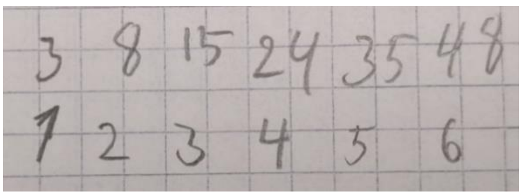
Erlend: Fem, seks, syv, åtte, nei…
[Erlend skriver ned 3 ved siden av det øverste brettet]
Erlend: Ser alle teknikken for å gjøre det?
Henrik: Åtte, jeg fikk åtte
…
Erlend: Jeg fikk også åtte

Medieringen i denne situasjonen kan tolkes som en metode for å forsikre seg om at man har flyttet riktig, og kommet frem til riktig antall hopp. Om de flytter uavhengig av hverandre, og ikke viser fremgangsmåten til hverandre før de har flyttet brikkene individuelt, vil det kunne styrke resonnementet, om flere av elevene i gruppen kommer frem til det samme. Det kommer ikke tydelig frem i gruppen om dette valget er blitt gjort bevisst, eller om det er en tilfeldighet at de valgte å benytte denne metoden. Denne metoden fortsetter de å bruke frem til alle de fire brettene er blitt løst. Selv om ikke alle i gruppen henger med på de siste brettene, flytter både Henrik og Erlend individuelt, og forteller de andre hvor mange trekk de brukte.

Denne gruppen bruker, sammenliknet med 2P-Y-gruppen, ganske kort tid på å flytte alle brikkene, noe som kan tyde på at de har oppdaget et mønster med flyttingen. Dette kommer også frem når Erlend spør de andre om de «ser teknikken» (linje 231). Han har altså sett et mønster i hvordan brikkene skal flyttes, og dermed blir ikke spesialtilfellene lenger oppfattet som et problem. Når gruppen har funnet antall trekk for alle brettene, har alle skrevet dem opp på sitt eget ark. Den neste dialogen som oppstår, tyder på at gruppen nå benytter seg av heuristikken *se etter mønster*:

Fiona: Det øker jo jevnt mellom de
Gabriel: Øker det jevnt?
Fiona: Fra en til to så er det fem, og fra to til tre så er det syv
…
[*Erlend utvider radene med to nye kolonner hvor den første nye kolonnen inneholder 35 og 5, og den siste kolonnen inneholder 48 og 6*]
Erlend: Det øker med fem, så øker det med syv, så øker det med ni, det vil si det blir trettifem på neste.

Det at Fiona resonnerer seg frem til at det øker jevnt, viser at hun har sett et mønster i differansen. Slik jeg tolker dette utsagnet, mener hun at differansen øker med det samme, altså to. Dette ser det ut til at Erlend approprierer, ettersom at han senere benyttet seg av denne metoden for å finne noen av de neste spesialtilfellene. Han benytter seg så av heuristikken å sette opp i tabell (bilde 5). At Erlend sier at «det blir trettifem på neste» (linje 241-242) tyder på at han er sikker på resonnementet til Fiona (linje 235). Det å ta en slutning slik, ved å se på noen få eksempler tyder på naiv empirisme.



Bilde 5

Selv om det ikke eksplisitt nevnes, kommer det frem at gruppen tenker på differansen som en aritmetisk rekke. Et videre blikk på denne differansen gjør at det oppstår en liten diskusjon rundt partall og oddetall:

Gabriel: Er det oddetallene?
Henrik: Blir det ikke det?
Gabriel: Jo det er oddetallene
Erlend: Formelen for oddetallene er jo to x minus en

Gruppen kommer altså frem til at differansen mellom trekkene alltid er oddetall, og det trekkes frem hvordan oddetallene kan skrives generelt. Det at gruppen kommer inn i denne tankegangen er muligens det som gjør at de fortsetter å tenke på partall og oddetall:

Erlend: Partall blir partall og oddetall blir oddetall.. Jeg vet ikke om det følger hele veien, men det ser sånn ut siden det øker med oddetall hele veien.

Erlend resonnerer seg altså frem til at antall trekk er partall, om antall frosker i hver familie er partall. Slik blir også antall trekk oddetall, om antall frosker i hver familie er oddetall. Dette resonnementet begrunner han ved å ta utgangspunkt i den tidligere dialogen, hvor de kom frem til at differansen var oddetall. Dette betyr at han indirekte hevder at om differansen alltid er et oddetall, må resonnementet hans stemme. Dette vitner igjen om at han reflekterer og ser tilbake på det de har kommer frem til tidligere, for å overbevise seg selv og de andre på gruppen om at dette faktisk stemmer. Det at gruppen velger å fokusere på differansen, gjør at Fiona ender opp med å se et annet mønster, og forklarer det slik:

Fiona: Altså, det her [**arket sitt hvor hun har skrevet opp summene*] funker jo på en måte, men det er jo ikke godt nok.. Det du hadde fra før, pluss fem, pluss antall ganger du økte ganger to.
…
Fiona: Det er bare at du setter inn hvis du har fem, så setter du inn fire [**faktoren til 2*]. Det gjelder i hvert fall for de første fem.

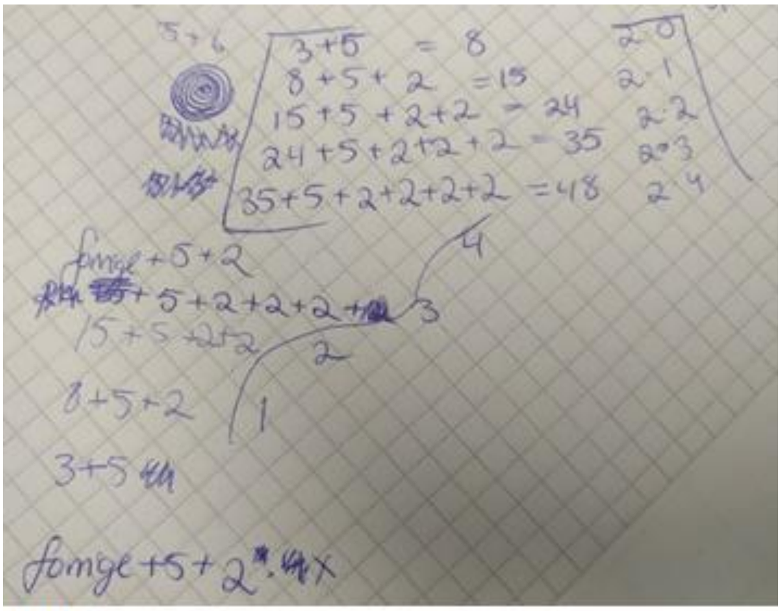
At Fiona trekker frem «det du hadde fra før» (linje 250), og dermed utfører operasjoner på forrige antall trekk tyder på at hun tenker på en rekursiv formel. Hun skriver opp summene av de første fem spesialtilfellene de har funnet, hvor hun setter opp antall trekk som summen av det forrige, fem og et bestemt antall toere. Det at Fiona sier at dette «funker jo på en måte» (249), tyder også på at hun ikke er helt overbevist om at det trenger å fungere i flere tilfeller, men at det i hvert fall fungerer for de spesialtilfellene som de allerede har funnet. Dette er derfor ikke naiv empirisme, og dette mener jeg viser at Fiona ikke vil påstå noe hun ikke kan overbevise om at må være riktig. Dermed tolker jeg det slik at hun heller ikke befinner seg i tilbakeblikks-fasen.

Hennes notater av mønsteret, kan ses i bilde 6. Vi ser av den høyre kolonnen på bildet, at hun skriver antall toere som et produkt med to faktorer, og på denne måten kommer frem til et rekursivt uttrykk for antall trekk. Det matematiske uttrykket hun trekker frem kan vi se nederst i bilde 6, sammen med forklaringen hennes av hva som skal settes inn for x: «det er bare at du setter inn hvis du har fem, så setter du inn fire» (linje 253), altså skal man sette inn antall frosker i hver familie minus en, istedenfor x. Om hun hadde skrevet opp uttrykket på samme måte som hun forklarer det, tolker jeg det slik at hun benytter seg av den samme rekursive formelen som ble omtalt i oppgaveanalysen:

$$H_n = H_{n-1} + 5 + 2(n-1)$$

$$= H_{n-1} + 5 + 2n - 2$$

$$= H_{n-1} + 3 + 2n,$$ der x er antall frosker i hver familie.



Bilde 6

Samtidig som Fiona fokuserer på differansen, kommer Erlend frem til et annet mønster ved å se etter sammenhenger i tabellen sin:

Erlend: En ganger tre er tre, to ganger fire er åtte, tre ganger fem er.. Så det øker med antall du ganger med. Så for det første så [*1] ganger du med tre, den [*2] ganger du med fire, [*3] ganger du med fem, [*4] ganger du med seks, [*5] ganger du med syv, [*6] ganger du med åtte.
…
Erlend: x ganger x pluss to i parentes [Ser bort på JB]
Henrik: Stemmer det? Det gjelder for den første, men hva med de andre?
Erlend: [*Taster på kalkulatoren*] Seks ganger seks pluss to i parentes blir førtiåtte, ja det stemmer. Skal vi prøve på de andre? Fire ganger fire pluss to er tjuefire, det stemmer. Så hvis det er femten. Så femten gange femten pluss to. Tohundreogfemtifem. Hvis jeg skal bevise det så kan jeg ikke gjøre det.

Erlend oppdager altså her et mønster mellom antall frosker og antall trekk. Han starter med å resonnere seg frem til at tre består av faktorene én og tre, og slik jeg tolker måten han legger det frem på, så ser han at begge faktorene øker med én for hvert nye brett. Det er også mulig at Erlend tenker geometrisk, og ser for seg en trekant hvor to av hjørnene er faktorene og det siste hjørnet er produktet av dem. Et eksempel på dette kan være at to av hjørnene er én og tre, mens det siste hjørnet også er tre. Om han tenker slik, kan han finne et mønster ved å se på en translasjon av denne trekanten mot høyre, og se at mønsteret vil fortsette. Om man for eksempel flytter denne trekanten i forrige eksempel ett tall mot høyre, vil vi få hjørnene 2, 4 og 8, og dermed vil mønsteret fortsette. Slik han har tegnet opp tabellen (bilde 5), er det en mulighet for at han bruker denne måten å resonnere på. Ettersom at han peker på den første av faktorene hver gang når han forklarer tenkemåten sin, kan det derimot tolkes som at han ser at den neste faktoren alltid skal være to større enn den første, og at grunnlaget for dette resonnementet heller er aritmetisk enn geometrisk.

Det at Erlend forklarer mønsteret på en slik aritmetisk måte, kan bidra til at han effektivt kommer frem til en algebraisk forklaring av resonnementet sitt, i form av en generalisering. Når Henrik så stiller spørsmål om dette stemmer, kan det tolkes som at Erlend hverken har overbevist seg selv, eller de andre. Han velger å teste ut uttrykket på spesialtilfellene, som de har skrevet opp, noe som tyder på at gruppen befinner seg i tilbakeblikks-fasen. Når han så har testet på noen av spesialtilfellene, ser det ut til at han er blitt overbevist om at uttrykket må stemme. Han velger å sette inn 15 for x for å regne ut svaret på problemet. Selv om han kommer frem til svaret, er han rask med å si at han ikke kan bevise det, noe som tyder på at det ligger en forventning om at han burde kunne det. Han er altså forsiktig med å trekke en konklusjon om at resonnementet hans må stemme.

Når gruppen nå har svart på problemet, velger jeg å se om de klarer å finne en annen løsningsmetode ettersom at vi ikke har tid til å begi oss ut på beviset av løsningen:

JB: Ja. Hvis du hadde… Eller hvis du ser på tallene som kommer opp. Tre, åtte, femten, tjuefire.. Hvis du legger til en på alle de.
Gabriel: Mhm
JB: Hvilke tall er det da som står?
Gabriel: Fire, ni seksten, tjuefem
JB: Minner det dere om noe?
Erlend: Det er jo kvadratrottallene, vi kan ta kvadratroten av de
Henrik: Kvadrattall?
Erlend: Ja kvad..
Gabriel: Kvadrattall
Erlend: Kvadrattall heter det ja

Jeg velger her altså å lede dem inn mot en annen måte å løse problemet på, en annen synsvinkel slik Pólya (2004) nevner, og dermed en annen måte å se mønsteret på. Ved å stille spørsmål om hvilke tall som oppstår om man legger til én, kan dette bidra til at elevene ser en ny tallrekke som de muligens er mer kjent med (4, 9, 16, etc.). Elevene går her tilbake til utforskningsfasen, hvor det ser ut til at disse tallene er kjente, da de raskt konkluderer med at dette er kvadrattallene. Det neste resonnementet som kommer frem, tyder også på at gruppen er mer kjent med kvadrattall, samt hvordan de kan representeres algebraisk:

Henrik: Er det kvadrattallet minus en?
Erlend: hmm..
Gabriel: x i andre minus en da? Er det det? [*Ser på JB*]

Selv om både Henrik og Gabriel her tenker riktig, tyder måten de stiller spørsmålet på at de gjetter på noe som muligens kan være svaret. Hadde de sett mønsteret, eller gått frem for å sjekke med noen av spesialtilfellene, ville de raskt ha merket at det ikke ville fungert på denne måten (selv om de er veldig nære). Det at Henrik stiller spørsmål om kvadrattallet minus én, tyder på at han har appropriert det gruppen kom frem til i forhold til kvadrattall i forrige dialog. Det at Gabriel fortsetter, og representerer Henrik sitt spørsmål algebraisk, tyder også på at han approprierer denne tankemåten. Det at Gabriel spesifikt sier «x i andre» (linje 279) forteller oss at han er kjent med den algebraiske representasjonen av kvadrattall, og dermed har ressurser til å kunne fortsette på argumentet. Etter hvert skriver Erlend ned noe på arket sitt:

JB: Hva skrev du for noe?
Erlend: x pluss en i andre minus en

Det at Erlend nå kommer frem til det generelle uttrykket, etter at Henrik og Gabriel trakk frem noen liknende uttrykk tidligere, tyder på at medieringen i gruppen kan ha påvirket resonnementet til Erlend, som muligens har appropriert de tidligere resonnementene. Enten har han tatt utgangspunkt i deres tidligere resonnement, og sett på hva som gjorde at det ikke virket for så å gjøre noe med det. Eller så har han kommet frem til det på egenhånd. Det vil likevel være sannsynlig at resonnementet er påvirket av min tidligere kommentar om kvadrattall, og at det er dette som har ført til Erlends endelige uttrykk. Når han har kommer frem til uttrykket, stiller jeg spørsmål om dette uttrykket og det forrige han fant er likt, og eventuelt hvordan han kan vise at de er like. Erlend setter da i gang med å utvide det siste uttrykket slik:

Erlend: x i andre pluss to x pluss en minus 1, [*Erlend utvider* $(x+1)^2 - 1$ *på arket til*

283. $x^2 + 2x + 1 - 1$], da skal det være minus en så da kan du ta vekk den der [*stryker over*
284. *enerene slik at det blir stående igjen* $x^2 + 2x$], det stemmer, de er like.

Erlend resonnerer seg altså frem til at begge uttrykkene som de har funnet må være like. Dette vil styrke resonnementet, og være en viktig del av tilbakeblikks-fasen, men det vil likevel ikke holde som et bevis.

Når R1-gruppen har konkludert med svaret, og sier seg fornøyd med det, velger jeg å stille spørsmål om hva som skjer om det er én mindre frosk i en av familiene, altså at det ikke lenger er parvis like mange. Årsaken til at jeg leder dem inn her mot en slik «hva hvis»-situasjon, slik det nevnes av Mason og Davis (1991), er mangelen på tid til å hjelpe gruppen gjennom beviset. Gruppen utforsker dette nye problemet, men kommer ikke frem med noen nevneverdige resonnement før det må avsluttes.

6 DISKUSJON

I dette kapittelet vil jeg forsøke å samle resultatene fra forrige kapittel, og se dem i lys av teori. For å dele inn kapittelet har jeg valgt å trekke frem forskningsspørsmålet:

Hvilke matematiske resonnement kommer til uttrykk i en 2P-Y- og en R1-gruppes arbeid med problemløsningsoppgaver, og hvilke faser karakteriserer prosessen?

Forskningsspørsmålet belyser to ulike spørsmål. Det ene innebærer elevenes faser gjennom problemløsningsprosessen, og det andre innebærer de matematiske resonnementene. Jeg har derfor valgt å dele inn diskusjonskapittelet i to underkapitler for å kunne besvare forskningsspørsmålet på en best mulig måte. Det første kapittelet jeg tar for meg innebærer de ulike fasene elevene befinner seg i. Deretter tar jeg for meg de ulike heuristikkene som kommer frem for å belyse de matematiske resonnementene. Til slutt avrunder jeg diskusjonen med en sammenlikning av resultatene som fremkommer i studien, og resultatene fra andre tidligere studier.

6.1 FASER

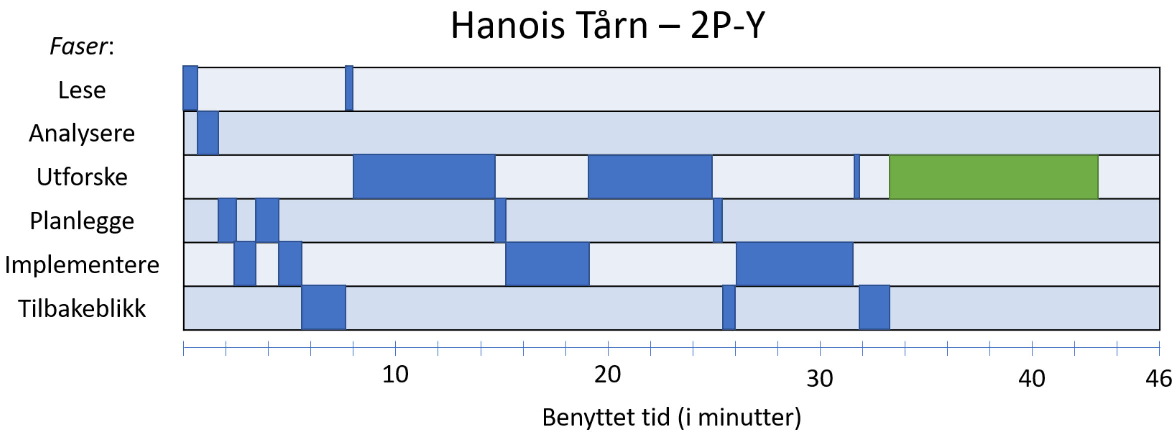
Schoenfeld (1985, 1992), Mason et al. (2010) og Pólya (2004) trekker alle frem ulike faser som en sentral del av problemløsningsprosessen. Schoenfeld (1985, 1992) trekker også frem hvordan disse fasene kan benyttes til å kartlegge elevenes problemløsningsferdigheter. Inspirert av figuren Schoenfeld (1992) benytter for å analysere problemløserens faser, har jeg valgt å på samme måte oppsummere de ulike fasene som gruppene går gjennom i arbeid med de ulike oppgavene. Jeg har valgt å benytte meg av tilbakeblikks-fasen til Mason et al. (2010), i stedet for bekreftelsesfasen til Schoenfeld (1985, 1992), men resten av fasene som representeres er de som trekkes frem av Schoenfeld (1985, 1992). I tillegg har jeg valgt å utelukke trianglene som Schoenfeld benytter seg av, for å markere problemløserens monitorering.

Slik jeg tolker hendelsene og utsagnene, benytter begge elevgruppene seg i liten grad av monitorering, og jeg har derfor valgt å utelukke trianglene. Elevene er dyktige på å kommentere hva som er blitt gjort resultatmessig, men monitorering innebærer å overvåke prosessen, noe de i liten grad gjør. Dette er også noe som er i tråd med funnene som kommer frem i masteravhandlingen til Leistad (2016).

Ettersom at de to utvalgte oppgavene er meget ulike, velger jeg å dele opp dette kapittelet i to deler, hvor jeg først tar for med Hanois tårn, og hvilke faser som karakteriserte problemløsningsprosessen her. Deretter tar jeg for meg Froskehopp-problemet. Til slutt vil jeg oppsummerer, og sammenlikne drøftingene.

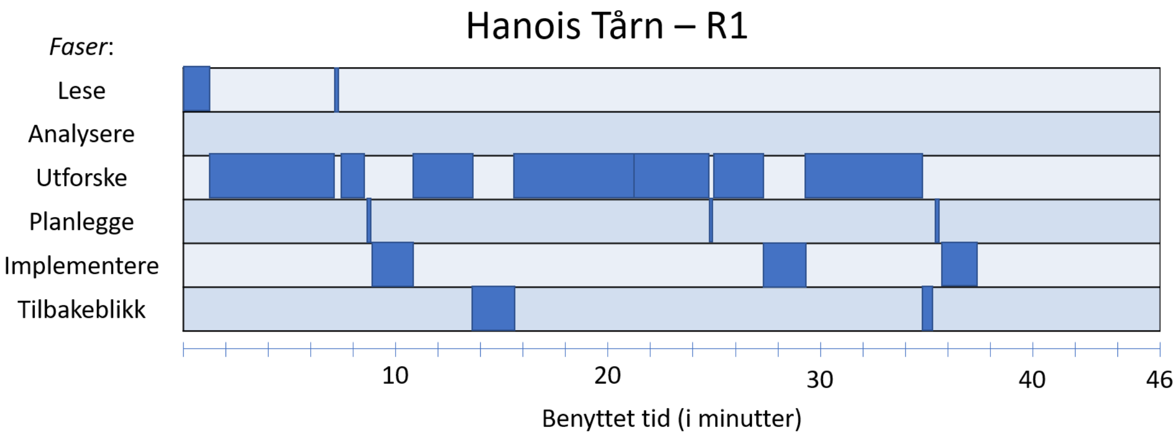
6.1.1 HANOIS TÅRN

Problemløsningsprosessen til 2P-Y-gruppen i arbeid med Hanois tårn, kan beskrives slik som i figur 3. Som Schoenfeld (1985, 1992) trekker frem, er en viktig ferdighet hos problemløseren at man har god selvregulering og monitorering. Måten 2P-Y-gruppen arbeider med Hanois tårn tolker jeg det slik at de har en stor grad av selvregulering. Selv om de ikke benytter seg av analysefasen slik Schoenfeld (1985, 1992) trekker frem som fordelaktig, tyder alle faseskiftene på at gruppen er bevisst på når de bør forkaste et resonnement, og når de bør fortsette å bygge opp om resonnementet. Denne representasjonen er selvsagt ikke et fullstendig bilde på hvordan 2P-Y-gruppen arbeidet, men den kan fortelle noe om de ulike ferdighetene.



Figur 3

Det at gruppen benytter seg av å planlegge i den graden de gjør, kan fortelle oss noe om samarbeidet i gruppen. Om man som gruppe skal lage en plan på hva gruppen skal arbeide med, vil medieringen innad i gruppen være sentral. At problemløsningsprosessen er preget av denne typen struktur kan også fortelle noe om elevenes matematiske tankesett slik det forklares av Boaler (2016). Det at gruppen ikke gir opp, fortsetter å lage planer, og vil forsøke å løse oppgaven selv, er et godt eksempel på dette. Dette kommer også frem av kommentaren til Camilla da gruppen stod fast i en av utforskningsfasene: «La oss tenke litt til». Gruppen kom frem til svaret på problemet, både den eksplisitte formelen og den rekursive formelen, samt selve spesialtilfellet som det ble spurt etter, men sa seg likevel ikke ferdig før jeg måtte runde av. Det grønne rektangelet er tiden gruppen brukte etter at de hadde løst problemet, og endte opp med å utforske andre mønster som kom frem i mediering med artefaktet.

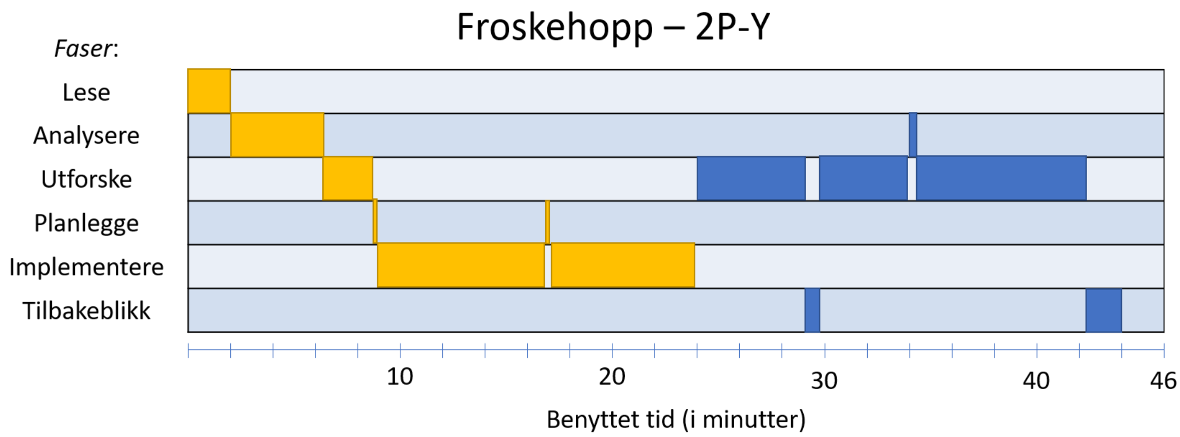


Figur 4

Om vi sammenlikner med R1-gruppens problemløsningsprosess (figur 4), ser denne veldig annerledes ut. Denne figuren likner mer på den Schoenfeld (1985, 1992) beskriver for uerfarne problemløsere, hvor nesten all tiden går med i utforskningsfasen. Prosessen bærer preg av at elevene samarbeider i mindre grad, og at de muligens dermed bruker mindre tid i planleggingsfasen. Gruppen analyserer ikke oppgaven, og velger å utforske direkte etter at de har lest teksten. De arbeider usystematisk, uten å telle antall trekk, og en mye større del av denne prosessen bærer preg av stillhet og egne tanker. Likevel kommer R1-gruppen frem til både den eksplisitte og rekursive formelen for antall trekk, og begrunner den rekursive formelen på en grundig og god måte. En annen interessant bemerkning er at R1-elevene bruker mindre tid i implementeringsfasen enn 2P-Y-elevene. Dette kan muligens skyldes bedre ressurser, altså matematiske ferdigheter, ettersom at denne fasen (spesielt mot slutten av problemene) stort sett omhandler kalkulasjoner og utregninger. Prosessen hos R1-elevene tyder også på at elevene her ikke, i lik grad som 2P-Y-elevene, har det Boaler (2016) kaller et matematisk tankesett. Dette fordi at de ikke tilstreber å argumentere for begrunnelser. Når de har kommet frem til et svar, og oppgaven er blitt besvart sier de seg ferdig.

6.1.2 FROSKEHOPP

I arbeider til 2P-Y-gruppen med froskehoppoppgaven ble det, som nevnt i analysedelen, en del misforståelser. I tillegg til dette kommer det frem i begge gruppene at det å løse spesialtilfellene her, er vesentlig vanskeligere enn i Hanois tårn. Jeg har dermed valgt å merke rektanglene hvor enten gruppen forsøker å forstå oppgaven, eller kommer frem til de ulike spesialtilfellene i gult.



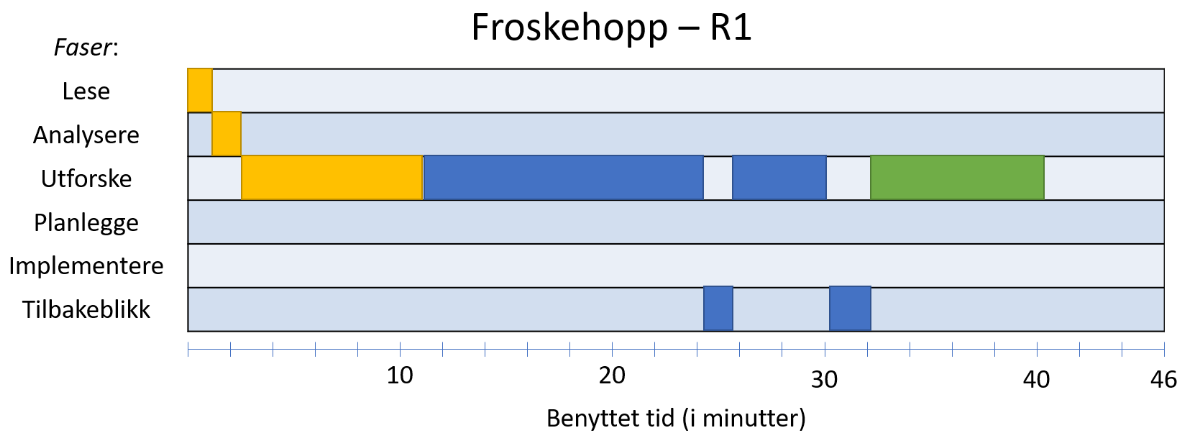
Figur 5

Som vi ser av figur 5 betyr det at 2P-Y-gruppen i utgangspunktet ikke fikk mer enn 20 minutter med matematisk arbeid, i løsningen av dette problemet. Prosessen til 2P-Y-gruppen, i arbeidet med denne oppgaven, preges i større grad av at gruppen ikke er like strukturert og samarbeider på samme måte. Prosessene som innebærer matematiske resonnementer er stort sett innenfor utforskningsfasen. Jeg mener derfor gruppen her fremstår som det Schoenfeld (1985, 1992) kaller uerfarne problemløsere.

Det kan derimot tenkes at det kunne kommet frem flere argumenter fra gruppen, om ikke over halve tiden gikk med til aktiviteter og argumenter som ikke var nødvendige. Selv om tolkningen av spørsmålet tok ekstra tid her, er det som tar lengst tid for gruppen selve løsningen av spesialtilfellene. Ettersom at dette er beslutninger som går på bekostning av ressurser som tid, vil jeg si at det er beslutninger på kontrollnivå (Schoenfeld, 1985, 1992) som er årsaken til at elevene får så dårlig tid. Elevenes selvregulering er altså ikke like fremtredende her som i forrige problem.

En annen mulig årsak til denne endringen i faser kan være problemtypen. I dette problemet er det ikke én artefakt elevene må samarbeide om å løse, men alle har hvert sitt brett med mulighet om å sette opp spesialtilfellene og løse dem selv. Problemløsningsprosessen i 2P-Y-gruppen er mer individuell i arbeid med dette problemet, og dette kan være noe av årsaken til det. Er kroneksempel som kommer frem i denne gruppen, er Daniels valg om å trekke seg ut fra samtalene med de andre, for å løse problemet på egenhånd før han skulle delta i samarbeidet.

Det var heller ikke før gruppen samarbeidet om å løse spesialtilfellet med 7 ruter at de klarte dette. Det kan altså tyde på at medieringen mellom medlemmene i denne gruppen er sentralt for at de skal løse problemer på en effektiv måte. 2P-Y-gruppen viser likevel at de har et matematisk tankesett, ved at de forsøker å begrunne og forklare alt de gjør. De stopper heller aldri opp, og streber mot å komme frem til generaliseringen, selv om de har prestert å komme frem til selve svaret på oppgaven ved å benytte seg av den rekursive formelen.



Figur 6

Det samme er derimot ikke tilfellet for R1-gruppen (figur 6). Prosessen i arbeidet med Froskehopp-problemet har mange fellestrekk med prosessen til forrige oppgave. Selv om dette problemet ble forklart, slik at de ikke skulle bruke like lang tid som 2P-Y-gruppen på å tolke problemet, bærer det likevel ikke preg av at fasene gruppen fokuserer på har endret seg. R1-gruppen bruker nesten halvparten av tiden som 2P-Y-gruppen brukte på komme frem til spesialtilfellene, men dette gjør ikke at R1-gruppen arbeider annerledes enn i forrige oppgave. Prosessen er fremdeles preget av individuelt fokus, og gruppen samarbeider i liten grad annet enn om noen kommer på et godt resonnement.

Dette kan også være årsaken til at forskjellen på prosessen i denne oppgaven, og den forrige ikke er like forskjellig. Ettersom at gruppen arbeidet mer individuelt i forrige oppgave, var det ikke like betydelig at denne oppgaven bar preg av å være mer individuell. Gruppen bærer også her preg av å ha lav grad av matematisk oppfatning. Når de kommer frem til et svar sier de seg ferdig med svaret, og vil ikke forsøke å argumentere for det. Dette kommer det også tydelige eksempler på, blant annet når Erlend kommenterer «Hvis jeg skal bevise det så kan jeg ikke gjøre det» (linje 264-265, s. 49).

6.2 HEURISTIKKER

Mason et al. (2010); Mason og Davis (1991) trekker frem hvordan angrepsfasen er preget av å forsøke å argumentere for, og sette seg nye hypoteser. Jeg vil derfor, med dette som bakgrunn, ta utgangspunkt i de like og ulike hypotesene som fremkommer i gruppene, og knytte disse hypotesene til ulike heuristikker som blir benyttet for å avkrefte eller bekrefte dem.

6.2.1 SPESIALISERING

Begge gruppene benytter seg i betydelig grad av spesialisering. I starten av problemløsningsprosessen tok begge gruppene for seg ulike spesialtilfeller, og benyttet seg dermed av det Pólya (2004) trekker frem som et hjelpeproblem i form av spesialtilfeller. Både i Hanois tårn og i Froskehopp kom dette frem, da gruppene starter med å flytte de ulike ringene eller brikkene, for å komme frem til et svar i spesialtilfellene. Et annet fellestrekk hos begge gruppene er at de startet med å forsøke å løse disse spesialtilfellene uten en plan, og dermed glemte de å telle antall trekk, noe som kan tyde på mangel på selvregulering og monitorering. Dette medføre at hjelpeproblemet tar unødvendig mye tid (Schoenfeld, 1985).

6.2.1.1 GJETT OG SJEKK

Resonnementene som kommer frem i problemløsningsprosessen er i stor grad preget av *gjett og sjekk*. Jeg mener derfor det kan dras paralleller til studien av Capraro et al. (2012). Et godt eksempel på denne heuristikken i bruk, er starten av problemløsningsprosessen av Hanois tårn.

Begge gruppene starter Hanois tårn med utgangspunkt i samme hypotese. I 2P-Y-gruppen trekker Camilla frem «…prøver vi med et par for å se om det er like mange hele tida» (linje 3, s. 31), og i R1-gruppen kommenterer Fiona at de kunne «…telt hvor mange ganger vi må flytte den her som har åtte ringer og så bare gange med åtte?» (linje 101-102, s. 37). Begge gruppene lager seg altså en hypotese om at antall trekk vokser lineært. Dette er den første hypotesen begge gruppene setter seg, og de ser raskt at denne hypotesen ikke stemmer ved å ta for seg noen av de første spesialtilfellene. Begge gruppene ser at antall trekk øker betraktelig, og at denne hypotesen ikke holder for noen av spesialtilfellene. Det å komme frem til denne hypotesen, for så å forkaste den vil igjen kunne betraktes som et eksempel på *gjett og sjekk*, ettersom at man gjennom å jobbe systematisk forkaster den angitte hypotesen slik heuristikken beskrives av Mason et al. (2010).

Når 2P-Y-gruppen og R1-gruppen står fast i arbeid med Hanois tårn, blir også problemløsningsprosessen preget av *gjett og sjekk* da de systematisk prøver seg frem ved å benytte Geogebra og regresjon. Selv om gruppene står fast på ulikt sted, tyder dette likevel på at de ser på regresjonsverktøyet i Geogebra som en heuristikk som kan hjelpe dem videre, ettersom at det kan regnes som en metode for å forså problemet bedre (Schoenfeld, 1985). Det at dette ikke fungerer for Hanois tårn, vil kunne være en årsak til at det ikke forsøkes igjen på froskehopp (hvor det faktisk ville fungert). Når begge gruppene står fast i Froskehopp-problemet er det ingen som trekker frem å benytte seg av regresjon. Dette kan være en negativ konsekvens av selvregulering og monitorering slik det defineres av Schoenfeld (1985), hvor elevene approprierer at regresjon i Geogebra ikke fungerte på forrige oppgave, og at det dermed heller ikke vil fungere på denne oppgaven.

I begge gruppene bærer noen resonnementer preg av det som Capraro et al. (2012) kaller for gjetninger, som ikke kan regnes som heuristikken *gjett og sjekk*. Noen ganger kommer slike gjetninger frem gjennom ubegrunnede og ulogiske resonnementer, slik som når Gabriel i arbeid med Hanois tårn forteller at han tror det er «x opphøyd i to» (linje 139, s. 39), hvor svaret hverken begrunnes eller stemmer for noen av spesialtilfellene. Flere slike tilfeller oppstår, men er utelatt fra resultatene ettersom at de ikke innebar noen spesifikke heuristikker.

En annen måte slike gjetninger kommer frem på, hos begge gruppene, er i starten av arbeidet med begge problemene når gruppene går ut fra at de flytter riktig antall trekk. I 2P-Y-gruppens arbeid med Froskehopp-problemet kommer det derimot også eksempler på systematisk bruk av *gjett og sjekk*. Dette kommer også frem i dialogen (linje 153-156, s. 41):

Anders:	Du må begynne sånn [*RR_RGGG*].
Alle:	Mhm
Anders:	Dét går jo ikke an [*R_RRGGG*], da stenger du jo inne grønt fra å komme videre [*Flytter tilbake til RR_RGGG*], og da er du jo fort nødt til å gjøre sånn [*RRGR_GG*]

Her ser vi tendenser til systematisk bruk av *gjett og sjekk* heuristikken slik den blir beskrevet av bla. Mason og Davis (1991). Gruppen tar for seg de ulike scenarioene, og utelukker systematisk de alternativene som ikke fungerer gjennom medieringsprosessen med resten av gruppen. Ved å benytte seg av denne metoden, kommer gruppen frem til et mønster i forflytningen av spesialtilfellene, noe de tar med seg videre i neste spesialtilfelle, og som kommer frem når Camilla sier «Okei den var ganske lett nå» (linje 157, s. 41). Det å benytte seg av *gjett og sjekk* systematisk, tyder altså på at gruppen dermed kan bevege seg videre i problemløsningsprosessen, og på denne måten benytte seg av andre heuristikker for å arbeide med funnene som gjøres.

6.2.1.2 LAG TABELL

Mason og Davis (1991) trekker frem trangen til å sette opp tabeller, noe begge gruppene viser tegn til selv om oppgaven ikke ber om dette. 2P-Y gruppen setter opp flere ulike tabeller i arbeid med Froskehopp-problemet (bilde 3, s. 42 og bilde 4, s. 45), og R1-gruppen setter opp en tabell til begge problemene (linje 121, s. 38, og bilde 5, s. 47). Mason et al. (2010) og Mason og Davis (1991) hevder at det å sette opp tabeller vil kunne gjøre det enklere å finne mønstre, noe som også kommer frem hos gruppene ettersom at det er tabellene som blir utgangspunktet for å finne et mønster og sette seg opp nye hypoteser.

6.2.1.3 SE ETTER MØNSTER

De to gruppene leter etter mønstre på ulike måter under arbeid med de to problemene. Det kommer likevel frem noen felles fokus når de ser etter mønster.

I begynnelsen av problemløsningsprosessen under arbeid med Hanois tårn, ser begge gruppene et mønster i differansen. Dette kommer frem i Daniel sin kommentar: «… det blir jo fler og fler for hver gang» (linje 12, s. 32), og når Erlend kommenterer «Det øker for hver etasje» (linje 103, s. 37). Begge gruppene ser altså at differansen øker for hver ekstra ring. I 2P-Y-gruppen tar elevene for seg denne endringen, og ser at differansen dobles for hver ekstra ring. Dette kommer frem i Camilla sin kommentar: «okei så da dobler det seg for hver gang» (linje 20, s. 32). R1-gruppen har også tenkt å se på hvordan denne endringen i differansen ser ut, men mens de holder på med å flytte tårnet som inneholder fem ringer ser Erlend et mønster ved selve forflytningene (linje 115-117, s. 38):

> Erlend: Så hvis jeg flytter alle disse her så er det femten [**de fire minste ringene på S3*], så kan jeg ta og flytte den her [*R5:S1-S2*] seksten. Det var det du mente, åja. Og da vil det jo egentlig ta femten over dertil igjen? [**S2*] Så da er det trettien.

Erlend ser altså direkte, ved å utføre forflytningene, mønsteret som forklarer den rekursive formelen. Han benytter så dette resonnementet til å komme frem til et algebraisk uttrykk for den rekursive formelen for antall trekk. Dette uttrykket blir beskrevet i kapittel 6.2.2.

Det kommer også frem flere eksempler hvor gruppene ser etter mønstre. I arbeid med Hanois tårn leter 2P-Y-gruppen etter mønstre mellom differansen og antall trekk. Dette kommer frem når Anders (linje 65-72, s. 35) trekker frem at differansen hele tiden er én mindre enn antall trekk. I R1-gruppens arbeid med Hanois tårn, trekkes det også frem resonnementer som tyder på at de leter etter mønstre i differansen. Henrik nevner eksempelvis at «Forskjellen er jo kvadratisk» (linje 134, s. 39), noe som tyder på at han har lett etter mønster i differansen og oppdaget at de ulike differansene er påfølgende kvadrattall. Etter at jeg leder både R1-gruppen og 2P-Y-gruppen inn mot å fokusere på hvordan man kan uttrykke differansen, klarer begge gruppene å se et mønster, og dermed komme frem til en eksplisitt formel.

Froskehoppoppgaven er preget av at gruppene har valgt å sette opp antall trekk i form av tabeller, eller andre oversikter. Gruppene arbeider ikke med å *se etter mønster*, før de har satt opp en oversikt over de ulike antall trekk som kommer frem. Dette kan tyde på at effekten av å sette opp i tabeller gir rom for å enklere begi seg ut på å finne mønster, slik Mason og Davis (1991) initierer. Det første begge gruppene gjør i arbeid med froskehoppoppgaven, er å se etter et mønster i differansen. Dette kommer frem av Anders sitt resonnement når han sier at «… du øker med to imellom der da [*differansen mellom trekkene som han har skrevet opp på arket*]» (linje 172-173, s. 43). Det samme kommer i tillegg frem i R1-gruppen, når Fiona kommenterer at «det øker jo jevnt mellom de» (linje 235, s. 47). Begge gruppene ser altså at differansen mellom hvert trekk øker med 2 for hver gang.

Andre resonnementer som tyder på at elevene benytter seg av det å *se etter mønster* er når Camilla har skrevet opp tabellen i bilde 4. Resonnementet hennes tyder på at hun ser på antall hopp som et produkt av to faktorer, og ser et mønster i at disse faktorene begge vokser med én når antall frosker i hver familie vokser med én. Dette er et mønster som krever at hun har tabellen tilgjengelig, og som dermed fremhever effekten av å først lage en tabell. Dette mønsteret er også noe Erlend trekker frem i R1-gruppen, når han resonnerer at (linje 255-258, s. 49):

Erlend: En ganger tre er tre, to ganger fire er åtte, tre ganger fem er.. Så det øker med antall du ganger med. Så for det første så [*1] ganger du med tre, den [*2] ganger du med fire, [*3] ganger du med fem, [*4] ganger du med seks, [*5] ganger du med syv, [*6] ganger du med åtte.

I R1-gruppen kommer det frem flere eksempler på at gruppen benytter seg av å *se etter mønster*, i arbeid med froskehoppoppgaven. Ved å benytte seg av tabellen som en oversikt over spesialtilfellene, ser Gabriel et mønster: «Er det oddetallene?» (linje 243, s. 47). Det kan se ut til at konsekvensen av at Gabriel trekker frem et mønster mellom oddetall og partall, fører til at Erlend approprierer denne måten å tenke på, og dermed ser et nytt mønster knyttet til oddetall: «partall blir partall og oddetall blir oddetall.» (linje 247, s. 47). Fiona velger også å se på et annet mønster ved å sette opp antall trekk som en sum, og lete etter mønstre i denne summen for så å komme frem til en generalisering (se kapittel 6.2.2).

6.2.2 GENERALISERING

Flere generaliseringer ble benyttet, og jeg vil her trekke frem de generaliseringene som kom frem gjennom resonnementene. I forrige delkapittel (6.2.1) trekkes det frem ulike heuristikker som ble benyttet for å komme frem til disse generaliseringene. Jeg vil derfor ikke trekke dem inn igjen på nytt i dette delkapittelet.

Generalisering kommer frem som sentralt i begge gruppene, under arbeid med problemene. Selv om det blir presisert i begge oppgavene at det skal finnes et spesialtilfelle, velger begge gruppene å løse problemene ved å først finne generaliseringer, som de deretter kan benytte for å finne spesialtilfellene som oppgaven spør etter. Dette samsvarer med det Pólya (2004) trekker frem som et hjelpeproblem, hvor det å finne generaliseringen for så å finne spesialtilfellet som det spørres etter, kan være enklere enn å finne spesialtilfellet direkte. Det kommer likevel frem at dette ikke utelukkende er årsaken til at generalisering blir benyttet.

I 2P-Y-gruppens arbeid med froskehoppoppgaven klarer Daniel å komme frem til svaret på problemet, men gruppen søker likevel etter å finne en generalisering. Dette kommer også frem når Anders sier: «De spør jo selvfølgelig hvor mange hopp det er, men hele poenget med denne oppgaven her er jo å finne uttrykket» (linje 200-202, s. 44). Dette utsagnet tyder på at gruppen har tolket problemet slik at det er generaliseringen det spørres etter. En slik tolkning kan også tyde på at gruppen har et matematisk tankesett, ettersom at det å oppdage mønstrene og utforske oppgaven er viktigere enn å finne selve svaret (Boaler, 2016). Gruppens matematiske oppfatning kan altså tolkes å påvirke hvilke valg de gjør på kontrollnivå for å besvare oppgaven, slik det også trekkes frem av Schoenfeld (1985).

I arbeidet med Hanois tårn kom det flere ulike generaliseringer frem. En av disse generaliseringene kommer frem når 2P-Y-gruppen tar for seg differansen mellom antall trekk. Det tyder på at gruppen kommer frem til denne generaliseringen når de kommenterer «Det går ikke an å opphøye to i x da?» (linje 51, s. 33) og at «… det vil bli et av tallene du skal plusse sammen med alle de andre» (linje 54-55, s. 33). Denne generaliseringen som blir utført av gruppen ved å se et mønster i differansen, kan være en sentral årsak til at gruppen kommer frem til argumentet for den eksplisitte formelen: «Ja, er det ikke to opphøyd i x minus en?» (linje 85, s. 36).

Det tar heller ikke lang tid for 2P-Y-gruppen å komme frem til en rekursiv formel når de får spørsmål av meg om det. Den rekursive formelen beskrives av Daniel som «… ganger to pluss en» (linje 89, s. 36). De benytter seg av tabellen som de har skrevet opp, for å deretter finne et mønster ved å ta utgangspunkt i forrige antall trekk. Det at gruppen kommer frem til denne formelen så raskt etter spørsmålet mitt, kan tyde på at gruppen har både de tilstrekkelige heuristikkene og ressursene som kreves, men at de ikke reflekterte over at de kunne benytte seg av en formel som tok utgangspunkt i forrige antall trekk. Dette kan derfor tyde på mangel av selvregulering og monitorering. De hadde allerede kommet frem til ulike formler som var nære, men valgte å ikke fokusere på dem. Når de da fikk et fokusområde, gikk det raskt for Beate (linje 74, s. 35) å finne et mønster i tallrekken som gruppen allerede hadde forklart at besto av toerpotenser.

Slik Mason og Davis (1991) og Pólya (2004) trekker frem generalisering som å se et problem i en større sammenheng, trenger ikke dette å bety at man må komme frem til et algebraisk uttrykk, men det å se et generelt mønster som vil fortsette for alle tilfeller, vil også kunne betraktes som en generalisering. Jeg vil derfor argumentere for at begge gruppene benytter seg av generalisering når de kommer frem til de ulike rekkene i de forskjellige oppgavene. 2P-Y-gruppen uttrykker ikke eksplisitt disse rekkene algebraisk, men de forklarer både den aritmetiske rekken og den geometriske rekken muntlig, og argumenterer for at dette vil gjelde for alle tilfeller (selv om dette ikke blir bevist), og dermed kan disse resonnementene tolkes som generaliseringer. I R1-gruppen blir i tillegg den aritmetiske rekken som oppstår i Froskehopp-oppgaven, omgjort av Fiona til en rekursiv formel, ved at hun systematisk setter opp de ulike antall trekk som en sum, og ser etter et mønster i denne summen som hun så uttrykker algebraisk (bilde 6, s. 48). Uttrykket hun kommer frem til, og noterer ned er $forrige + 5 + 2 \cdot x$ som vil være lik den rekursive formelen beskrevet i kapittel 3.1.3.

En annen generalisering som kommer frem hos R1-gruppen er gjort av Erlend, når han kommer frem til den rekursive formelen for antall trekk i Hanois tårn ved å kun ta utgangspunktet i artefakten. Han klarer også å forklare sammenhengen med det han har funnet når han sier at: «… du tar den forrige, altså resten, ganger den med to og plusser på en, hver gang» (linje 119, s. 38).

Både 2P-Y-gruppen og R1-gruppen kommer frem til en løsning av begge problemene, ved å benytte seg av generalisering og komme frem til en eksplisitt formel. I Hanois tårn uttrykker begge gruppene dette algebraisk, mens i Froskehopp er det kun R1-gruppen som klarer å uttrykke den eksplisitte formelen algebraisk, selv om 2P-Y-gruppen, etter min tolkning, benytter seg av denne formelen indirekte for å finne løsningen på spesialtilfellet som oppgaven spør etter. I løsningen av Froskehopp-oppgaven ser vi også at begge gruppene kommer frem til den eksplisitte formelen ved å se etter et mønster mellom antall trekk, altså på formen $n(n + 2)$, og ikke ved å se på antall trekk som et kvadrattall minus én, altså $(n + 1)^2 - 1$.

6.2.3 OVERBEVISNING

Mason og Davis (1991) trekker frem tre ulike grader av overbevisning. Å overbevise seg selv, å overbevise en venn og å overbevise en fiende, hvor sistnevnte er det som vi kaller for bevis. For å benytte seg av denne heuristikken er det viktig å stille spørsmål om argumentasjonen er god nok, denne heuristikken vil jeg derfor argumentere for at henger tett sammen med tilbakeblikksfasen slik den legges frem av Mason et al. (2010). Gjennom gruppenes arbeid kommer alle de ulike gradene av overbevisning frem.

Den første av disse overbevisningsgradene, å overbevise seg selv, er muligens ikke like enkel å fange opp i alle situasjoner. Det kan tenkes at noen elever, i en sosial setting slik som disse gruppene, vil kunne reflektere over og overbevise seg selv før de uttrykker resonnementet selv til resten av gruppen. Det kommer likevel frem noen resonnement som kan tyde på dette nivået. I 2P-Y-gruppen utspiller det seg en dialog når gruppen kommer frem til at differansen dobler seg for hver gang. I denne argumenterer Camilla for at det «dobler seg for hver gang» (linje 20, s. 32), men hun stiller etterpå spørsmålet «Skal vi sjekke en til først? Bare for å se om det blir seksten… Så er vi hundre prosent sikre» (linje 25, s. 32). Dette siste resonnementet tyder på at hun ikke er helt overbevist selv, selv om de andre muligens er det. Det at hun trekker frem at de kan være «hundre prosent sikre» om de kontrollerer for neste spesialtilfelle tyder derimot at hun anser påstanden som bevist hvis det fungerer på alle spesialtilfellene de har til rådighet, og dermed kan det trekkes paralleller til det Balacheff (1988) kaller naiv empirisme.

Gruppen gjør tilsvarende resonnement når de kommer frem til den eksplisitte formelen for antall trekk, og etter at Beate kommer frem til den eksplisitte formelen, velger gruppen å kontrollere de ulike spesialtilfellene. Anders nevner også spesifikt at de kan «Dobbeltsjekk med et tall for eksempel. To opphøyd i åtte for eksempel. Det blir to-femti-seks minus en, to-femti-fem, det blir riktig» (linje 80-81, s. 35-36). Det kan altså se ut som om at gruppen blir overbevist over generaliseringen, ved å kontrollere den opp mot spesialtilfellene og dermed kan også dette tolkes som naiv empirisme (Balacheff, 1988).

Noen tilsvarende situasjoner opptrer også i R1-gruppen, når Erlend trekker frem påstanden om at den eksplisitte formelen må være «… To opphøyd i x minus en…» (linje 140, s. 39). Her kontrollerer ham med spesialtilfellene, som de har kommet frem til at «Da blir det to opphøyd i tre minus én det er syv. Det stemmer jo. To opphøyd i én det er to minus én det er én. Det stemmer. To opphøyd i x minus én» (linje 144-145, s. 39). Dette tyder på samme måte som i 2P-Y-gruppen på naiv empirisme. Erlend kontrollerer den eksplisitte formelen med de ulike spesialtilfellene som de allerede har kommet frem til, og det at de andre på gruppen starter å benytte seg av formelen for å regne ut spesialtilfellet slik som Henrik gjør (linje 146, s. 40), tyder på at gruppen blir overbevist om resonnementet. I etterkant av utregningen svarer derimot Henrik at «det er jo litt gjetting» (linje 147, s. 40), noe som tyder på at han ikke er helt overbevist om at dette må stemme.

Det oppstår også flere situasjoner som kan tyde på naiv empirisme når gruppene løser Froskehoppoppgaven. I 2P-Y-gruppen kontrollerer de den rekursive formelen de kommer frem til med spesialtilfellene, for så å benytte formelen for å finne flere spesialtilfeller (linje 160-171, s. 42). Det at gruppen velger å gjøre dette, tyder på at de er overbevist, og at de har blitt overbevist gjennom å kontrollere med spesialtilfellene. Det samme skjer når Camilla kommer frem til svaret på problemet ved å skrive opp rekken i bilde 3, og stole på at mønsteret som stemmer med spesialtilfellene også vil stemme generelt.

I det sistnevnte eksempelet kommer det likevel frem noe usikkerhet når gruppen stiller spørsmål om noen av metodene Camilla har benyttet seg av, blant annet når Beate spør «Hva er tretallet?» (linje 222, s. 46). I R1-gruppen ser vi også at elevene velger å godta en generalisering på bakgrunn av spesialeksempler når Fionas kommentar (linje 235, s. 47) med at «det øker jo jevnt mellom de» ender opp med at de kontrollerer denne påstanden for spesialtilfellene for så å benytte dette mønsteret til å finne andre spesialtilfeller. Når gruppen velger å benytte seg av dette argumentet til å finne flere spesialtilfeller (slik Erlend gjør i linje 239-240, s. 47), kan det tolkes som at gruppen aksepterer generaliseringen, og dermed kan dette tyde på naiv empirisme (Balacheff, 1988).

R1-gruppen blir derimot flinkere til å ikke argumentere for at en hypotesene stemmer, etter hvert som de arbeider seg gjennom Froskehopp-problemet. Når Fiona argumenterer for den rekursive formelen hun kommer frem til, trekker hun frem at «Det gjelder i hvert fall på de første fem» (linje 253-254, s. 48). Hun hevder dermed, etter min tolkning, at påstanden stemmer for de fem første spesialtilfellene, og at den kan stemme generelt, men at hun ikke kan argumentere for at den vil gjøre dette.

Det samme gjelder til en viss grad når Erlend argumenterer for den eksplisitte formelen han kommer frem til. Han kommer frem til formelen, bekrefter at den stemmer for alle spesialtilfellene, men istedenfor å trekke en konklusjon om at den da må gjelde sier han at «Hvis jeg skal bevise det så kan jeg ikke gjøre det» (linje 264-265, s. 49). Dette tyder på at han har overbevist seg selv og gruppen, men at han er klar over at argumentet ikke vil fungere som et godt nok bevis.

Gjennom gruppenes arbeid med disse problemløsningsoppgavene, kommer det frem ett eksempel på et gyldig bevis. Når R1-gruppen ser etter mønstre og Erlend kommer frem til den rekursive formelen for antall flyttinger som kreves for å flytte tårnet argumenterer han visuelt (linje 116-118, s. 38):

> Erlend: Så hvis jeg flytter alle disse her så er det femten [*de fire minste ringene på S3*], så kan jeg ta og flytte den her [*R5:S1-S2*] seksten. Det var det du mente, åja. Og da vil det jo egentlig ta femten over dertil igjen? [**S2*] Så da er det trettien.

Dette argumentet tolker jeg som et gyldig og fullstendig bevis i form av det Balacheff (1988) kaller et generisk eksempel. Dette fordi at Erlend tar for seg et spesialtilfelle, og benytter seg av egenskapene til dette spesialtilfellet, for å begrunne at dette også må gjelde for det generelle tilfellet ettersom at alle de andre spesialtilfellene deler de samme egenskapene.

Dette tyder på at selve tårnet fungerer som et medierende artefakt hvor medieringen mellom Erlend og tårnet bidrar til at Erlend ser mønsteret, og argumenterer for det. Erlend viser dermed visuelt at denne rekursive formelen er nødt for å gjelde. Dette resonnementet vil også være gyldig uavhengig av om de tidligere har kommet frem til riktig antall trekk, og kunne dermed også bidratt til å argumentere for at de spesialtilfellene som de hadde kommet frem til faktisk hadde vært riktige.

7 KONKLUSJON

Denne studien har hatt som mål å gi innsikt i hvilke matematiske resonnement videregåendeelever benytter seg av, i arbeid med problemløsningsoppgaver. Følgende forskningsspørsmål ble studert gjennom sosiokulturelle briller:

Hvilke matematiske resonnement kommer til uttrykk i en 2P-Y- og en R1-gruppes arbeid med problemløsningsoppgaver, og hvilke faser karakteriserer prosessen?

Tidligere personlige erfaringer med problemløsningsoppgaver, tilsier at en slik prosess er omfattende. Likevel fremstod en forventning om at resonnementene som kom frem kunne kategoriseres i de ulike fasene og heuristikkene på en oversiktlig måte. Til tross for dette ble det oppdaget at problemløsningsprosessen var en mer omfattende og komplisert prosess, enn tidligere antatt. Gjennom observasjoner og videoopptak av medieringen under problemløsningsprosessen i de ulike gruppenes arbeid med to utvalgte oppgaver kom det frem flere argumenter og tolkninger, enn forventet. Funnene bidro dermed til at noe av teorien måtte utvides, mens annet ikke lenger var like aktuelt. Til slutt endte jeg opp med 6 kategorier av heuristikker, som beskriver de ulike resonnementene, og 6 faser fra Schoenfeld (1985, 1992) som jeg benytter for å beskrive problemløsningsprosessen i sin helhet (figur 3-6, side 53-55).

Det kan være nærliggende å tro at det ville være betydelige forskjeller i resonnementene til de to gruppene, ettersom at de har ulike matematiske kunnskaper, men dette er ikke tilfellet her. Noen resonnementer, argumenter og faser preges av at R1-elevene har bedre matematiske ferdigheter, men funnene i studien tilsier, etter min tolkning, at de to gruppene presterer på et ganske likt nivå gjennom problemløsningsprosessen. 2P-Y-elevenes problemløsningsprosess er i større grad preget av selvregulering, og mange av funnene tyder på at 2P-Y-elevene har et mer matematisk tankesett enn R1-elevene. Studien tyder på at R1-elevenes matematiske ferdigheter (ressurser), jevner ut ulikhetene som gruppene har knyttet til selvregulering og matematisk tankesett, og at dette kan være en årsak til at begge elevene ender opp med mange av de samme resonnementene. Det kan derfor tyde på at R1-elevene ikke i tilstrekkelig grad klarer å benytte seg av sine matematiske ressurser, eller å prestere opp mot sitt potensiale, noe som også er tilfellet for kalkulusstudentene i studien til Selden et al. (2000).

Selv om 2P-Y-elevene hadde større grad av selvregulering har de langt igjen på veien mot å bli dyktige problemløsere. Analysefasen som Schoenfeld (1992) hevder er den viktigste av fasene i problemløsningsprosessen er den fasen som får minst oppmerksomhet av elevene, både i R1 og i 2P-Y. Begge elevgruppene befinner seg i utforskningsfasen største delen av problemløsningsprosessen.

Elevenes resonnementer bærer preg av 6 heuristikker: *spesialisering*, *gjett og sjekk*, *lag tabell*, *se etter mønster*, *generalisering* og *overbevisning*. Jeg har valgt å tolke heuristikkene slik at spesialisering, generalisering og overbevisning er overordnede, og det å benytte de andre tre går inn under spesialisering slik begrepet forklares av Mason et al. (2010) og Mason og Davis (1991). Begge elevgruppene har benyttet seg av alle de ulike heuristikkene gjennom de matematiske resonnementene som kommer frem i prosessen. Elevene så behov for å lage tabeller, selv om dette ikke blir nevnt i oppgaven. Tabellene fungerer i de fleste tilfeller som springbrett inn mot en generalisering, hvor den ble brukt for å *se etter mønster* og sammenhenger. Elevgruppene benytter seg også systematisk av *gjett og sjekk*, men det kommer også frem tydelige eksempler på det som Capraro et al. (2012) definerer som gjetninger.

Til tross for at oppgavene er formulert slik at det spørres etter spesialtilfeller, valgte begge gruppene å først benytte seg av generalisering, ved å sette opp en rekursiv og/eller eksplisitt formel for funnene, for så å finne spesialtilfellene som ble etterspurt. Begge elevgruppene kommer tidlig frem til at oppgaven kan løses ved å bruke de aritmetiske og geometriske rekkene, men finner dette for tungvint og velger å søke etter et algebraisk uttrykk.

Grunnet det matematiske tankesettet til 2P-Y-gruppen benytter denne gruppen seg i større grad av overbevisningsheuristikken enn R1-gruppen. Dette kommer frem gjennom at de hver gang søker å begrunne resonnementene som gjøres. Selv om begge elevgruppene benytter seg av overbevisning, innebærer denne overbevisningen for det meste det som Mason og Davis (1991) kaller for å overbevise en venn. Elevene utfører altså ikke tilstrekkelige fullstendige bevis for å argumentere for påstandene, og de fleste av overbevisningene hvor elevene begrunner generaliseringene er preget at naiv empirisme. Det kommer likevel frem ett fullstendig bevis gjennom at R1-gruppen benytter seg av et generisk eksempel for å begrunne den rekursive formelen for Hanois tårn.

Avslutningsvis vil jeg også bemerke at oppgavene i seg selv kan legge opp til ulike heuristikker. De resultatene som fremkommer av studien vil dermed også være en konsekvens av oppgavene og oppgavetypen som ble valgt. Ettersom at de intuitivt legger opp til å *se etter mønster*, vil dette være en naturlig heuristikk å benytte seg av, og dette kan også være en årsak til at elevene befinner seg i utforskningsfasen store deler av tiden. Det kan også tenkes at det matematiske tankesettet som oppstår, og valgene som blir gjort kan være påvirket av artefaktene som blir fremstilt ved oppgavestart og dermed ikke ville vært like fremtredende i en oppgave uten artefakter. Froskehoppoppgaven kunne også fordelaktig blitt formulert på en annen måte for å unngå slike misforståelser som oppsto i 2P-Y-gruppen (se 6.1.2).

8 AVSLUTTENDE BETRAKTNINGER

I dette kapittelet vil jeg betrakte de didaktiske implikasjonene av studien, samt vurdere videre forskning.

8.1 DIDAKTISKE IMPLIKASJONER

Da jeg for et års tid siden begynte å tenke på dette prosjektet, hadde jeg et ønske om å rette fokus mot tema av personlig interesse. Samtidig stod ønsket om overførbarhet til min fremtidige rolle som lærer sterkt. Erfaringer fra kurset om problemløsning vekket min interesse innenfor dette tema.

Ulike aspekter av problemløsningsprosessen har blitt påpekt i denne studien. Under arbeidet med å sette opp de ulike fasene, og forsøke å tolke hvor elevene befant seg, ble det fremtredende for meg hvor viktig et slikt fokus i et klasserom kan være. Som tidligere nevnt er det å analysere problemet en sentral del av prosessen, noe jeg mener enhver matematikklærer bør være bevisst på. Å få en tydelig og definert oversikt over hva et problem faktisk går ut på, for å så kunne reflektere over denne delen av prosessen er betydningsfullt. Det at elevene i denne studien ikke gjør dette i god nok grad, kan gi en indikasjon på at det er for lite fokus på dette i skolen. Altså vil det kanskje være nyttig å øke denne fasens fokus i undervisningen.

I tillegg vil jeg ta med meg innholdet i den oppsatte tidstabellen (figur 3-6) i undervisningen, for å la elevene reflektere over deres tidsbruk på de ulike fasene, noe som muligens kan bidra til økt selvregulering og monitorering. En sentral implikasjon som jeg mener kommer frem fra resultatene er effekten av nettopp selvregulering og monitorering i arbeid med problemløsningsoppgaver. Det at en gruppe med 2P-Y-elever kan prestere omtrent like bra som en gruppe med R1-elever, forteller meg som lærer at det er viktig å ikke utelukkende fokusere på faglig innhold, men også på elevenes selvregulering og monitorering. Fremtidsrettet vil dette potensielt kunne resultere i at mine elever gjøres mer observante på egne fremgangsmåter. Jeg vil understreke viktigheten av dette, ikke bare i arbeid med problemløsningsoppgaver spesielt, men også i arbeid med matematikk generelt. Slik jeg ser det kan disse ferdighetene også relateres til andre fag, og i videre arbeid. Evnen til å reflektere over egne beslutninger vil være sentral for at et menneske skal opptre selvstendig og voksent.

Det har også kommet frem andre elementer ved studien som kan være viktig å reflektere over i skolen. De ulike artefaktene som ble benyttet kan ha vært med på å påvirke elevenes matematiske tankesett ved å motivere dem, men selve arbeidet med artefaktene krevde også en del tid noe figur 5 og 6 bærer preg av. Generelt har jeg også fått erfart omfanget av problemløsningsoppgaver. En problemløsningsoppgave vil altså ta mye tid i en skoletime, og jeg tror derfor man bør arbeide systematisk med selvregulering og monitorering for å kunne benytte seg av slike oppgaver mest mulig effektivt i undervisningen.

Elevenes manglende kunnskaper om bevis er også fremtredende i studien. Noen av bevisene, slik som beviset for froskehopp-problemet, er ukompliserte og noe jeg mener kan introduseres tidlig for å rette fokus mot dette sentrale aspektet ved matematikken.

Et annet interessant funn er måten gruppene angriper problemene på. Når mønsteret oppstår starter begge gruppene med å se på mønsteret gjennom aritmetiske eller geometriske rekker. Det at dette ligger naturlig for elevene, gjør at det ville vært interessant å sett på effekten av å undervise om rekker og summer tidligere i skoleløpet, for så å se om dette er et tema som ville vært mer forståelig for elevene.

Jeg har også fått oppleve både positive og negative aspekter ved å samarbeide i grupper slik det gjøres i denne studien. R1-elevene bar preg av å ikke være vant til å samarbeide, noe som bidro til at noen elever arbeidet mer med problemet mens andre kunne «melde seg ut». 2P-Y-bedrev, slik jeg oppfattet det, et veldig positivt samarbeid. Jeg mener denne gruppen i større grad var preget av å være vant til å samarbeide. Gjennom denne gruppeprosessen hjalp elevene hverandre, og på denne måten bidro medieringen dem imellom til å gjøre at gruppen oppnådde mer, enn hva elevene muligens ville klart å prestere alene. Dette mener jeg tydeliggjør effekten av å ha en samarbeidskultur i klasserommet, hvor en retter fokus på medieringen som skjer i klasseromskulturen.

I tillegg til det overnevnte, har jeg sett en interesse og vilje hos elevene når det kommer til å løse problemløsningsoppgavene.

8.2 VIDERE FORSKNING

Ettersom at dette er en kvalitativ casestudie med forholdsvis få informanter kan ikke funnene generaliseres. Funnenes samsvar med tidligere forskning, gjør likevel at studien kan ha en grad av relevans for videre forskning. Det ville derfor vært spennende å se om funnene i studien ville samsvart med en tilsvarende studie på en annen skole. Om dette er tilfellet ville det videre også vært interessant å sett på om det er skolefaget eller læreren som bygger opp til forskjellene i studiet. Er det for eksempel mer fokus på selvregulering i 2P-Y enn i R1?

Det ville også vært interessant å sett på effekten av systematisk undervisning av selvregulering og monitorering i arbeid med ulike problemer i videregående og om denne typen undervisning vil ha konsekvenser for resultatene på standardiserte prøver.

Det at elevene i begge gruppene starter å fokusere på rekker får meg også til å undre på om rekker og summer med fordel kunne introduseres tidligere, og hvilken påvirkning dette ville hatt på matematikkfagets oppbygning.

Et siste område som kunne vært interessant å utforsket mer ville vært det Schoenfeld (2017) trekker frem om undervisning av selvregulering og monitorering gjennom at elevene ser gjennom videoer av seg selv.

9 PROSJEKTETS BETYDNING FOR MEG

Når jeg nå ser tilbake på januar hvor det hele startet, føles det så lenge siden. Mye har hendt siden, og kombinasjonen av oppgaveskriving, jobb og familie har preget prosessen. Studiet dette siste halve året har lært meg mye. På mange måter kan dette prosjektet for meg sammenliknes med en problemløsningsprosess. Uten å vite hvordan jeg skulle starte, eller hvor jeg endte opp, skulle jeg begi meg ut ved å prøve meg frem. Om min prosess var for preget av utforskning, ble jeg hjulpet inn igjen av veileder. Mang en gang måtte jeg likevel konstatere at jeg sto fast.

Under skriveprosessen har jeg lært meg nye heuristikker, nye vinkler å se problemstillingen fra, og flere kapitler ble etter hvert formulert før problemet til slutt ble besvart. Som en nå erfaren problemløser, med stor grad av selvregulering, vil jeg si at jeg har lært mye på min vei. Jeg har erfart at planleggingen ikke alltid går slik en tenker, at tenkte teorier ikke passer, og at transkriberingen tar lengre tid enn antatt. Monitorering har vært viktig. Det å overvåke prosessen, hvordan formuleringene er blitt gjort, hvordan innsamlingen er utført og om teorien er relevant. Det å måtte stå for strukturen i eget arbeid, og ikke kunne forholde seg til satte frister og forelesninger har vært en utfordring. Jeg har gjennom prosjektet blitt mer strukturert, og flinkere til å planlegge. Jeg har blitt mer reflektert, og alle kaffekoppene og tilhørende diskusjoner med medstudenter har vært av stor nytte.

I tillegg til erfaringene fra selve prosessen har jeg tilegnet meg ressurser. Kunnskapen jeg nå har fått innen problemløsning vil jeg ta med meg videre inn i mitt arbeid som lærer. Studien, slik jeg ser den, har lært meg mye ved å la meg reflektere over studiens funn, teori og praksis. Det å kunne se at elevene strever med selvregulering og monitorering, og hvilken sentral rolle matematisk tankesett har for problemløsningsprosessen og matematikk generelt vil være en erfaring jeg skal ta med meg til enhver undervisningstime. Denne broen mellom forskning, og praksis er videre nå enn før. Jeg vil forsøke å ikke undervurdere forskningen som kommer i fremtiden, slik at jeg kan implementere denne i min praksis.

Gjennom studien har jeg også utviklet min pedagogiske kompetanse, mine ferdigheter som fremtidig lærer, og ikke minst gitt meg en større innsikt i problemløsningsprosessen. Jeg har valgt et yrke hvor en aldri blir utlært, et yrke med barn, ungdom, et yrke med glede, oppdagelse og utforskning.

I have no special talents.

I am only passionately curious.

Albert Einstein[1]

[1] Sitatet fra Albert Einstein er hentet fra Calaprice (u.å., s. 13)

10 REFERANSER

Abusdal, I. (2011). *Elevers strategier for løsing av matematikkoppgaver: en sammenligning av noen sterke og svake elever på 9. trinn* (Mastergradsavhandling, Universitetet i Oslo).Hentet fra https://www.duo.uio.no/handle/10852/32317

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L. & Smith III, J. P. (1998). Teaching Mathematical Problem Solving: An Analysis of an Emergent Classroom Community. I A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky & J. Kaput (Red.), *Research in collegiate mathematics education : III* (Bind 7, s. 1-70). Rhode Island: American Mathematical Society, in cooperation with Mathematical Association of America.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-230). London: Hodder and Stoughton.

Baraké, F., El-Rouadi, N. & Musharrafieh, J. (2015). Problem Solving at the Middle School Level: A Comparison of Different Strategies. *Journal of Education and Learning, 4*(3), 62-70.

Bjuland, R. (2007). Adult students' reasoning in geometry: Teaching mathematics through collaborative problem solving in teacher education. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(1), 1-30.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets : unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching*. San Francisco, Calif.: Jossey Bass Publishers.

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Calaprice, A. (u.å.). *THE EXPANDED Quotable Einstein*. Hentet fra http://assets.press.princeton.edu/chapters/s6908.pdf

Capraro, M. M., An, S. A., Ma, T., Rangel-Chavez, A. F. & Harbaugh, A. (2012). An investigation of preservice teachers' use of guess and check in solving a semi open-ended mathematics problem.(Report). *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 105.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Erbas, A. & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *International Journal of Methodology, 46*(1), 89-102. doi: 10.1007/s11135-010-9329-5

Ghahari, S. & Basanjideh, M. (2015). Dynamics of Strategies-Based Language Instruction: A Study of Reading Comprehension and Problem Solving Abilities via Structural Equation Modeling. *RELC Journal: A Journal of Language Teaching and Research, 46*(3), 237-253. doi: 10.1177/0033688215595713

Jacobsen, D. I. (2015). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? : innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (3. utg. utg.). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Jonassen, D. H. (2014). Assessing problem solving. I J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen & M. J. Bishop (Red.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (4. utg., s. 269-288). New York: Springer Science+Buisness Media.

Kasner, E. & Newman, J. (1940). *Mathematics and the imagination*. New York: Simon and Schuster.

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics : an introduction* (3rd ed. utg.). Boston, Mass: Addison-Wesley.

Kieran, C., Krainer, K. & Michael Shaughnessy, J. (2013). *Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research*.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., Roe, A. & Turmo, A. (2004). *Rett spor eller ville veier?* Oslo: Universitetsforlaget.

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/

Lannin, J. K., Barker, D. D. & Townsend, B. E. (2006). Recursive and Explicit Rules: How Can We Build Student Algebraic Understanding? *Journal of Mathematical Behavior, 25*(4), 299-317. doi: 10.1016/j.jmathb.2006.11.004

Leistad, A.-M. (2016). *Problemløsning i matematikk - Hvordan resonnerer elever på 9.trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon?* (Mastergradsavhandling, Universitetet i Agder).Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/2412268

Leong, Y. H., Tay, E. G., Toh, T. L., Quek, K. S. & Dindyal, J. (2011). Reviving Polya's "Look Back" in a Singapore School. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 181-193. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.07.005

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modelling. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 763-804). Charlotte, N.C: Information Age Publishing Inc.

Lester, F. K. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660-675.

Lillejord, S., Nordahl, T. & Manger, T. (2013). *Livet i skolen : grunnbok i pedagogikk og elevkunnskap : 2 : Lærerprofesjonalitet* (2. utg. utg., Bind 2). Bergen: Fagbokforl.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed. utg.). Harlow: Prentice Hall.

Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem-solving*. Victoria: Deakin University.

Matematikksenteret. (2018a). Eksempler på rike oppgaver. Hentet 23.02.2018 fra https://www.matematikksenteret.no/grunnskole/l%C3%A6replan/veiledningsmateriell/rike-oppgaver/eksempler-p%C3%A5-rike-oppgaver

Matematikksenteret. (2018b). Froskehopp. Hentet 23.02.2018 fra https://www.matematikksenteret.no/grunnskole/l%C3%A6replan/veiledningsmateriell/rike-oppgaver/eksempler-p%C3%A5-rike-oppgaver/froskehopp

Matematikksenteret. (2018c). Hanois tårn. Hentet 23.02.2018 fra https://www.matematikksenteret.no/grunnskole/l%C3%A6replan/veiledningsmateriell/rike-oppgaver/eksempler-p%C3%A5-rike-oppgaver/hanois-t%C3%A5rn

Nilsen, H. K. (2013). *Learning and Teaching Functions and the Transition from Lower Secondary to Upper Secondary School* (Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder).Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/138131/PhD_avhandling__Hans_Kristian_Nilsen.pdf?sequence=1

Normann, D. (2005). *Logikk og Mengdelære*. Hentet fra http://folk.uio.no/dnormann/EVU6/MN.EVU.6.pdf

Olki, I. & Schoenfeld, A. H. (1994). A Discussion of Bruce Reznick's Chapter. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Mathematical thinking and problem solving* (s. 39-51). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Passmore, T. (2007). Polya's Legacy: Fully Forgotten or Getting a New Perspective in Theory and Practice? *Australian Senior Mathematics Journal, 21*(2), 44-53.

Pólya, G. (1971). *How to solve it : a new aspect of mathematical method* (Princeton paperbacks, 2nd ed. utg.). Princeton, N.J: Princeton University Press.

Pólya, G. (2004). *How to solve it : a new aspect of mathematical method* (Princeton science library, Expanded ed. utg.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (2009). *Mathematical discovery : On understanding, learning and teaching problem solving : 1* (Bind 1). New York: Ishi Press.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2012). *Læreren med forskerblikk*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.
problem, n. (2018). I *Oxford English Dictionary*. Hentet fra http://www.oed.com/view/Entry/151726?rskey=RvpM7E&result=1
Prusak, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2013). Conceptual Learning in a Principled Design Problem Solving Environment. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 266-285. doi: 10.1080/14794802.2013.836379
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.
Schoenfeld, A. H. (1987a). A brief and biased history of problem solving. I F. R. Curcio (Red.), *Teaching and learning : a problem-solving focus* (s. 27-46). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
Schoenfeld, A. H. (1987b). What's all the fuss about metacognition. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Cognitive science and mathematics education* (s. 189-215). Hillsdale,N.J: Lawrence Erlbaum.
Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. I L. B. Resnick & L. E. Klopfer (Red.), *Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research. 1989 ASCD Yearbook* (s. 83-103). Hentet fra https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED328871.pdf
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 334-370). New York: Macmillan.
Schoenfeld, A. H. (2016). Research in Mathematics Education. *Review of Research in Education, 40*(1), 497-528. doi: 10.3102/0091732X16658650
Schoenfeld, A. H. (2017). Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(5), 415-432. doi: 10.1007/s10857-017-9381-3
Selden, A., Selden, J., Hauk, S. & Mason, A. (2000). Why Can't Calculus Students Access Their Knowledge to Solve Non-routine Problems? I A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky & J. Kaput (Red.), *Research in collegiate mathematics education : IV* (Bind 8, s. 128-153). Rhode Island: American Mathematical Society, in cooperation with Mathematical Association of America.
Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2013). *Skolen som læringsarena – Selvoppfatning, motivasjon og læring*. Oslo: Universitetsforlaget.
Säljö, R. (2010). *Læring i praksis – Et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelens forlag.
Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (4. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.
Universitetet i Oslo. (u. å.). Om PISA. Hentet 06.05.2017 fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/pisa/om-pisa/
Utdanningsdirektoratet. (2016). PISA. Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/pisa/
Wellington, J. (2015). *Educational Research*. London: Bloomsbury Academic.
Williams, J. & Goos, M. (2013). *Modelling with mathematics and technologies*.
Yuan, S. (2013). Incorporating Pólya's Problem Solving Method in Remedial Math. *Journal of Humanistic Mathematics, 3*(1), 96-107. doi: 10.5642/jhummath.201301.08

VEDLEGG 1 - GRUPPEOPPGAVER

Hanois tårn

Hanois tårn er et klassisk spill vi kan finne mye matematikk i. Spillet går ut på å flytte et tårn med ringer fra den ene stolpen til den andre. Den største ringen ligger i bunn, og de andre ringene blir mindre og mindre oppover.

Spillets regler er enkle:

- Bare en ring kan flyttes av gangen
- Det skal aldri ligge en større ring oppå en mindre

Hvor mange trekk vil man trenge for å flytte et tårn som inneholder 64 ringer?

Froskehopp

To froskefamilier sitter på vannliljeblader. Hver familie består av like mange frosker. De er plassert på vannliljebladene på denne måten:

Midt mellom froskefamiliene er det et ledig vannliljeblad. De røde froskene skal bytte plass med de grønne froskene etter følgende regler:

- de røde froskene har bare lov til å flytte seg mot venstre
- de grønne froskene har bare lov til å flytte seg mot høyre
- det er bare mulig å hoppe til et ledig naboblad eller over en annen frosk til et ledig blad
- to frosker har ikke lov til å sitte på samme blad

Når de røde froskene og de grønne froskene har byttet plass, er oppgaven løst.

Hvor mange hopp kreves det hvis hver familie består av 15 frosker?

VEDLEGG 2 - TRANSKRIPSJONSNØKKEL

Transkripsjonsnøkkel:

Navn: kommentar → Personen med oppgitt navn sier det som kommer etter kolon.

[*tekst*] → observasjon

[**a*] → peker på *a*

Hanois Tårn:

Rx:Sy-Sz → Forflytninger av ringene i Hanois tårn. *Rx* er ring nummer *x* (der nummer 1 er den minste ringen, nummer to den nest minste ringen, osv.) *Sy* er stolpe nummer *y* som ringen blir flyttet fra, og *Sz* er stolpe nummer *z* som ringen blir flyttet til.

Rx → Ring nummer x (etter samme mønster som ovenfor)

Sx → Stolpe nummer x (etter samme mønster som ovenfor)

Froskehopp:

Bx → Brett nummer x av de fire brettene som ligger under froskehopp-oppgaven. B1 er det minste brettet med tre kvadrater, B2 det nest minste med 5 kvadrater, osv.

Flyttemønsteret for froskene er beskrevet slik:

R → rød brikke/frosk

G → grønn brikke/frosk

_ → tom rute

RR_GG betyr at vi er på B2 med 2 frosker per familie og totalt 5 vannliljeblader hvor _ er tom. Flytter man eksempelvis den røde brikken lengst mot høyre inn mot midten vil neste posisjon se slik ut: R_RGG.

VEDLEGG 3 – MELDESKJEMA NSD

NSD

Hans Kristian Nilsen
Gimlemoen 25
4630 KRISTIANSAND S

Vår dato: 23.02.2018	Vår ref: 58198 /3 /LH	Deres dato:	Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 08.01.2018 for prosjektet:

58198	*Problemløsningsoppgaver i ungdomsskolen*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Agder, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Hans Kristian Nilsen*
Student	*Jon Bjarne Bø*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Ved prosjektslutt 20.06.2018 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Marianne Høgetveit Myhren

Lise Aasen Haveraaen

Kontaktperson: Lise Aasen Haveraaen tlf: 55 58 21 19 /Lise.Haveraaen@ nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Jon Bjarne Bø, jonbjarnebo@ gmail.com

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 58198

UTVALG OG REKRUTTERING
Utvalget består av skoleelever på videregående (ref. epost fra student datert 14.02.2018), med ulike ferdigheter i matematikk. Student vil ta kontakt med skoler han har kjennskap til og forespørre deltakelse i studien. Rektor vil sette student i kontakt med lærere som kan være interessert i deltakelse, og student vil deretter sende ut informasjonsskriv til elevene. Lærer vil deretter velge ut 4-5 elever som oppfyller studiens inklusjonskriterier. Personvernombudet forutsetter at frivillighet, taushetsplikt og konfidensialitet blir ivaretatt under rekruttering av utvalget.

INFORMASJON OG SAMTYKKE
Du har opplyst i meldeskjema at utvalget (elever over 15 år) vil motta skriftlig og muntlig informasjon om prosjektet, og samtykke skriftlig til å delta. Vår vurdering er at informasjonsskrivet vi mottok på epost 14.02.2018 er godt utformet, men vi ber om at det oppgis dato for når datamaterialet anonymiseres.

METODE
Data vil samles inn gjennom observasjon og gruppeintervju. Observasjon vil foregå mens en gruppe på 4-5 elever jobber med problemløsningsoppgaver i matematikk. Fokuset under observasjonen vil være på samtale og non-verbal kommunikasjon mellom elevene. Det vil benyttes videopptak under observasjonen. I etterkant av observasjonen vil det gjennomføres gruppeintervju der student vil spørre elevene om deres holdninger til slike oppgaver og hvordan de synes det var å arbeide på denne måten. Vi minner om at kun personer som eksplisitt har samtykket til det, registreres på video- og lydopptak.

INFORMASJONSSIKKERHET
Personvernombudet forutsetter at du behandler alle data i tråd med Universitetet i Agder sine retningslinjer for datahåndtering og informasjonssikkerhet. Vi legger til grunn at bruk av privat pc er i samsvar med institusjonens retningslinjer.

PROSJEKTSLUTT OG ANONYMISERING
Prosjektslutt er oppgitt til 20.06.2018. Det fremgår av meldeskjema at du vil anonymisere datamaterialet ved prosjektslutt.
Anonymisering innebærer vanligvis å:
- slette direkte identifiserbare opplysninger som navn, fødselsnummer, koblingsnøkkel
- slette eller omskrive/gruppere indirekte identifiserbare opplysninger som bosted/arbeidssted, alder, kjønn
- slette lydopptak
- slette eller sladde bilde- og videoopptak

For en utdypende beskrivelse av anonymisering av personopplysninger, se Datatilsynets veileder:
https://www.datatilsynet.no/globalassets/global/regelverk-skjema/veiledere/anonymisering-veileder-041115.pdf

VEDLEGG 4 - SAMTYKKEÆRKLÆRING

Forespørsel om deltakelse i masterstudie

«Problemløsningsoppgaver i videregående»

Bakgrunn og formål

Formålet med denne studien er å se på hvilke matematiske resonnement som kommer frem når videregåendeelever arbeider med problemløsningsoppgaver. Problemløsningsoppgaver er oppgaver som kan løses på flere forskjellige måter, og det jeg ønsker i denne studien er å få frem flest mulig slike tenkemåter. Bakgrunnen for at jeg vil se på dette er at problemløsningsoppgaver blir mer og mer aktuelt og kommer mer og mer inn i videregående, samt testes det i mange internasjonale og nasjonale undersøkelser. Jeg synes derfor det er interessant å se på hvor mye matematikk som kommer frem gjennom arbeid med slike oppgaver, og siden det kan være tidkrevende å bruke i klasserommet lurer jeg på om man som lærer får «nok igjen» for det. Selv om det godkjennes av dere vil det ikke nødvendigvis bety at du blir trukket ut til å delta. Når jeg er klar over hvem som godkjenner deltakelsen vil jeg i samråd med deres faglærer plukke ut et utvalg av de som har godkjent.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien innebærer at du blir tatt med ut fra en undervisningsøkt for å arbeide med problemløsningsoppgaver sammen med andre deltakere (i samme klasse). Gruppen som blir tatt ut fra klassen vil arbeide med oppgaver som jeg har laget, og som er knyttet til matematiske temaer som dere er kjent med. Måten jeg vil samle inn den informasjonen jeg trenger vil hovedsakelig være gjennom dette gruppearbeidet. Jeg vil be dere forklare begrunnelsene deres og forklare til de andre elevene hvordan dere kom frem til svarene. Det vil bli tatt videoopptak og lydopptak som jeg senere vil transkribere og behandle i oppgaven. Før gruppearbeidet starter vil jeg gi litt informasjon om hvordan gruppearbeidet skal foregå, og i etterkant av gruppearbeidet vil jeg ha et kort gruppeintervju hvor jeg stiller dere noen spørsmål om deres holdninger til problemløsningsoppgaver og hvordan gruppearbeidet fungerte. Om ønskelig kan dere på forespørsel selvsagt se intervjuguiden.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Alle deltakerne i studien vil bli anonymisert og gitt fiktive navn innen 23.03.2018. Dette gjelder også skolene som deltar i studien. De eneste som vil ha tilgang til datamaterialet vil være meg selv og veileder. Opptakene som tas vil lagres lokalt på en ekstern PC i en mappe som vil være kryptert med passord. PCen vil selvsagt også være kryptert med passord slik at ingen andre enn meg selv kan få tilgang til informasjonen. Navnelisten som oversetter de fiktive navnene vil også oppbevares adskilt fra transkripsjonene for å ivareta konfidensialitet. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes ved publikasjon av masteroppgaven.
Prosjektet skal etter planen avsluttes 20.juni.2018. Når oppgaven er levert og vurdert vil videoene, lydopptakene og krypteringsnøkkelen (som forklarer de fiktive navnene) slettes.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn.
Dersom du har spørsmål til studien kan du kontakte med på telefon: 45 45 90 01 eller mail: jonbjarnebo@gmail.com. Min veileder på masteroppgaven, Hans Kristian Nilsen, kan også kontaktes om ønskelig på telefon: 941 38 220 eller på mail: hans.k.nilsen@uia.no.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

(Fyll inn navnet til ditt og signer om du godkjenner deltakelse i studien)

__________________________ har mottatt informasjon om studien, og godkjenner deltakelse i

(ditt navn) gruppeintervjuet og gruppearbeidet.

Dato og sted: ___________________________________

Underskrift/signatur: ___________________________________