UNIVERSITETET I AGDER

Grunnskolelærerstudenters forståelse av funksjonsbegrepet

En casestudie av lærerstudenters forståelse av funksjonsbegrepet før de møter begrepet i egen utdanning.

MATHIAS BANG TØNDEVOLD

VEILEDER
Per Sigurd Hundeland

Universitetet i Agder, 2018
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Da jeg høsten 2011 selv tok fatt på grunnskolelærerutdanningen 5-10 trinn var en master i matematikkdidaktikk på ingen måte en del av planen. I løpet av lærerutdanningen våknet interessen og nysgjerrigheten for matematikk virkelig til live og jeg bestemte meg for å fortsette med en mastergrad etter fullført lærerutdanning. Jeg er nå i ferd med å avslutte masteroppgaven som markerer slutten på syv år med studier. Det har vært syv varierte, innholdsrike og lærerike år og selv om jeg har trivdes veldig godt som student ser jeg nå frem til å gå ut i jobb som lærer. Jeg håper jeg at jeg kan gi mine fremtidige elever opplevelser i matematikk som er fylt med mestringsfølelse, nysgjerrighet, nytteverdi og forståelse.

De fem siste månedene har jeg arbeidet med denne masteroppgaven. Gjennom forskningslitteratur, teori og egen forskning har jeg lært mye om begrepsforståelse generelt og studenters og elevers forståelse av funksjonsbegrepet spesielt. Erfaringene jeg tar med meg fra denne oppgaven håper og tror jeg vil være med å styrke min innsikt i elevers forståelse av begreper, og da spesielt funksjonsbegrepet. Denne innsikten vil gjøre meg i stand til å tilpasse undervisningen etter elevenes forståelse og legge opp til læringssituasjoner der denne kan utvikle seg videre.

Til tross for at de siste månedene har vært lærerike har de også være tøffe, langt tøffere enn jeg hadde regnet med, og bydd på mange utfordringer og arbeidet har mange ganger virket uoverkommelig. Det føles derfor ekstra godt å nå kunne si seg ferdig.

Jeg vil aller først takke min veileder Per Sigurd Hundeland for nyttige innspill, konstruktive tilbakemeldinger og god veiledning gjennom hele prosessen.

Takk til alle som har bidratt til denne masteroppgaven på ulike måter. Takk til MatRIC senter for forskning innovasjon og koordinasjon av matematikkundervisning for gavekort til studentene som stilte til intervju. Takk til utdanningsinstitusjonen og faglæreren som lot meg på tilgang til klassen med grunnskolelærerstudenter. Takk til de 43 studentene som deltok i studien og en spesiell takk til de fire studentene som også stilte opp til intervju.

Ikke minst vil jeg takke min samboer Maiken for oppmuntring, tålmodighet og motivasjon gjennom et semester der vi har jobbet med hver vår oppgave. Takk til min mamma Dagny og pappa Terje for oppmuntrende telefonsamtaler og korrekturlesing av oppgaven. Til mine medstudenter som jeg har vært så heldig å gjennomføre denne mastergraden sammen med: takk for alle diskusjonene og kaffepausene.

Mathias Bang Tøndevold
Kristiansand, Mai 2018

Sammendrag

Denne masteroppgaven har til hensikt å studere studenter ved den 5-årige grunnskolelærerutdanningen 5-10. trinn sin forståelse av funksjonsbegrepet. To forskningsspørsmål blir forsøkt besvart i oppgaven. Det første spørsmålet handler om oppgavens tema: *Hvilken forståelse har studenter ved grunnskolelærerutdanningen 5.-10. trinn av funksjoner, før de møter begrepet i utdanningen?* Begrepsforståelse blir i denne oppgaven definert ved hjelp av Sierpinska (1992), Hiebert og Carpenter (1992) og Skemp (1987). For å studere studentenes forståelse tar studien i bruk Vinner og Tall (1981) sin modell av begrepsbilde og DeMarois og Tall (1996) sin modell av lag og fasetter av et begrep. Dette leder til det andre forskningsspørsmålet: *I hvilken grad egner DeMarois' og Talls modell seg som verktøy for å kartlegge studenters forståelse av funksjonsbegrepet?* Dette spørsmålet vil besvares på bakgrunn av erfaringer gjort gjennom arbeidet med denne oppgaven.

Datainnsamlingen henter mye inspirasjon fra DeMarois (1998) og empirien til studien er samlet inn gjennom en skriftlig matematisk test om begrepet funksjoner av 43 studenter ved grunnskolelærerutdanningen 5-10. trinn ved en utdanningsinstitusjon i Norge. Det ble også foretatt intervjuer med fire av disse studentene. Også under intervjuene jobbet studentene med oppgaver knyttet til funksjoner og oppgavene fra testen ble gjennomgått på nytt.

Resultatene viser at studentene i stor grad er i stand til å benytte seg av forskjellige representasjoner for å finne funksjonsverdier og variabelverdier, men at studentenes begrepsbilder er uklart avgrenset. Dette fører til problemer med å avgjøre om sammenhenger mellom variabler, presentert gjennom grafer og algebraiske uttrykk, er funksjonssammenhenger eller ikke. Ingen av studentene fra studien er i stand til å redegjøre for hva en funksjon er gjennom beskrivelser eller definisjoner. Til tross for at de fire studentene som ble intervjuet oppgav å ikke ha noen tidligere erfaring med funksjonsmaskiner, viste resultatene fra testene og intervjuene at studentene behersket denne representasjonen på lik linje med andre representasjoner, i noen tilfeller bedre.

På bakgrunn av erfaringer gjort gjennom arbeidet med denne oppgaven kan DeMarois og Talls modell sies å være et godt verktøy for å kartlegge studentenes forståelse av et begrep i form av å skape et detaljert bilde av begrepsforståelsen ved å betrakte både dybde- og breddedimensjonen. Allikevel har modellen enkelte svakheter i form av antakelser som ligger til grunn for modellen samt mengden empiri som er nødvendig for å skape et slikt detaljert bilde.

Abstract

This master thesis intends to study preservice teachers at the teacher education master program grade 5-10 and their understanding of the concept of functions. The thesis attempts to answer two different research questions. The first question is: *What understanding does the students at teacher education grade 5-10 hold of the concept of function, before they encounter the concept in their education?* In this thesis understanding will be defined by Sierpinska (1992), Hiebert and Carpenter (1992) and Skemp (1987). To study the students' understanding this study will use Vinner and Tall's (1981) theory of concept image and DeMarois and Tall's (1996) theory of layers and facets of a concept. This leads us to the second research question: *To what extent is DeMarois' and Tall's model suitable as a tool for mapping students understanding of the concept of functions?* This question will be answered based on experiences made while working on this thesis.

The data collection is inspired by DeMarois (1998) and carried out by written, mathematical tests regarding the concept of function with 43 participants from a teacher education program at an institution for higher education in Norway. Interviews with four of these students were also conducted. During the interviews the students worked with further tasks regarding functions, and the tasks from the written test was undergone a second time.

The results show that the students are largely able to utilize different representations of functions to find functional values and variable values, but that the students' conceptual images are not well defined. This leads to problems in determining whether the relationships between variables, presented through graphs and algebraic expressions are functional relationships or not. None of the students were able to define or describe what a function is in a correct manner. Even though the four students stated that they had no previous experience with function machines, the results from the tests and interviews showed that the students mastered this representation in line with other representations, and in some cases, better.

Based on experiences gained through the work with this thesis I can determine that DeMarois' and Tall's model is a good tool for mapping students understanding of a concept through creating a detailed image of the concept understanding, by considering both its depth and the width dimension. Still, the model has its weaknesses through assumptions that underlies the model and the vast amount of empirical data that is needed to create such a detailed image.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Jeg vil starte denne oppgaven med å gjøre greie for egen personlige motivasjon og bakgrunn for valg av tema, jeg vil så presentere de to forskningsspørsmålene som jeg vil forsøke å besvare gjennom arbeidet med denne studien. Deretter vil jeg gi en oversikt over den videre strukturen i oppgaven.

1.1 Personlig motivasjon

I denne masteroppgaven har jeg valgt å fokusere på forståelse av begrepet funksjoner. Noe av bakgrunnen for dette valget av tema stammer fra egne erfaringer med funksjoner som elev, student og lærer, og jeg vil innledningsvis trekke frem noen av disse erfaringene.

Da jeg startet min grunnskolelærerutdanning høsten 2011 hadde jeg gjennom ungdomsskolen og videregående arbeidet mye med funksjoner, men var selv ikke i stand til å gi noen fullgod forklaring på begrepet, og jeg husker godt møtet med funksjoner i lærerutdanningen der definisjonen for første gang (som jeg kan huske) ble presentert og vektlagt. Min personlige opplevelse var at en tydelig definisjon gjorde det lettere å knytte de mange ulike delene av det som opplevdes som et komplekst begrep sammen til en felles enhet.

Gjennom undervisningserfaring med elever fra ungdomsskole, videregående og studenter fra grunnskolelærerutdanningen er min erfaring at temaet funksjoner for mange oppleves vanskelig og at mange elever og studenter har problemer med å knytte de ulike delene av begrepet sammen.

Da jeg senere, i forbindelse med faget MA-422 *Forskning på læring og undervisning av matematikk* ved UiA, sammen med en medstudent skulle skrive en større semesteroppgave valgte vi å undersøke to elever på 10. trinn sin forståelse av funksjoner. I denne undersøkelsen fant vi at disse elevene, der den ene var meget faglig sterk i matematikk, hadde problemer med å beskrive begrepet til tross for at de utviste varierende grad av forståelse for andre deler av begrepet.

1.2 Bakgrunn for valg av tema

I læreplanen for matematikk fellesfag finner vi funksjoner som ett av seks hovedområder, og omtales slik: *«Ein funksjon beskriv endring eller utvikling av ein storleik som er avhengig av ein annan, på ein eintydig måte. Funksjonar kan uttrykkjast på fleire måtar, til dømes med formlar, tabellar og grafar. Analyse av funksjonar går ut på å leite etter spesielle eigenskapar, som kor raskt ei utvikling går, og når utviklinga får spesielle verdiar*.» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 3)

At funksjoner beskrives som et av seks hovedområder er med på å vise viktigheten av funksjoner som eget område i matematikken i skolen i dag. Går vi inn og ser på de ulike kompetansemålene i læreplanen finner vi kompetansemål for både 1P og 1T som går på bruk av funksjoner til å beskrive praktiske situasjoner og oversetting mellom ulike representasjoner. Et skille i kompetansemålene for de to fagene, er at elevene som følger 1T forventes å kunne: «*gjere greie for funksjonsomgrepet og kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 10), men det nevnes det ikke i kompetansemålene for 1P (og heller ikke 2P) at elevene skal gjøre greie for begrepet, kun oversette mellom forskjellige representasjoner.

Fra og med høsten 2016 ble kravene til karakterer i matematikk fellesfag for søkere til lærer- og lektorutdanningene skjerpet fra tre til fire. Søkere som har fullført minst ett av fagene S1, S2, R1 eller R2 dekker også opptakskravene (Samordna Opptak, 2017). Fra høsten 2017 ble så grunnskolelærerutdanningen lagt om fra tidligere å være fireårig til nå å være en femårig utdanning med mastergrad (Kunnskapsdepartementet, 2016). Med bakgrunn i disse endringene er det grunn til å tro at det kan ha funnet sted en endring i hvilke studenter som søker seg til, og tas opp ved grunnskolelærerutdanningen de siste årene. Samtidig viser store samlingsstudier at lærerens faglige kunnskap er en viktig faktor for elevenes læring (Hill, Rowan & Ball, 2005; Nordenbo, Larsen, Tiftikçi, Wendt & Østergaard, 2008).

1.3 Kort om funksjonens historiske utvikling

Begrepet funksjon har, som vi har sett, en viktig plass i matematikken i skolen i dag. Som matematisk begrep er likevel funksjoner ganske nytt. Funksjoner som eget felt i matematikken dukket ikke opp før på 1600-tallet og har siden den gang utviklet seg betydelig (Ponte, 1992). Historien om funksjonsbegrepet inkluderer mange av matematikkens storheter. Noen av de grunnleggende ideene for begrepet kan spores tilbake til 1300-tallet og den franske matematikeren Nicole Oresme, og hans ideer om avhengige og uavhengige variabler. René Descartes viste på 1600-tallet at geometriske kurver kunne representere sammenhengen mellom to variable, og også uttrykkes ved hjelp av likninger med to variabler. Isaac Newton og Gottfried Wilhelm von Leibniz er også viktige skikkelser i begrepets utvikling på andre halvdel av 1600-tallet. Leibniz introduserte blant annet begreper som funksjon, variabel og konstant, og funksjonsbegrepet er sentralt i den matematiske analysen som de to sistnevnte regnes som grunnleggere av. Videre beveger historien seg til Jean Bernoulli og Leonhard Euler og inn på 1700-tallet (Ponte, 1992). Euler kom blant annet med følgende definisjon på begrepet funksjon: «*En funksjon av en variabel størrelse er et analytisk uttrykk som på en eller annen måte er sammensatt av denne variable størrelse og av tall eller konstante størrelser*». (Lützen, 1978, s. 7). Denne definisjonen har som svakhet at det den bare inkluderer det vi i dag kaller analytiske funksjoner, samt at den fordrer at funksjonen skal kunne uttrykkes algebraisk.

En viktig egenskap hos funksjoner slik vi kjenner de i dag, entydighet, altså det at den uavhengige variabelen knyttes til en, og bare en, avhengig variabel, ble introdusert igjennom Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet sin definisjon i første halvdel av 1800-tallet. Mot slutten av 1800-tallet og på begynnelsen 1900-tallet ble mengdelæren utviklet av blant andre Georg Cantor. På bakgrunn av denne utviklingen ble funksjonsbegrepet videre utvidet, av den franske matematikkgruppen kalt Nicolas Bourbaki, til å omfatte alle mengder, ikke bare de bestående av tall (Kleiner, 1989).

Boken *Calculus: a complete course* (Adams & Essex, 2013), som er en mye brukt bok i kalkulus-kurs verden over, også her i Norge. Her defineres begrepet funksjon på følgende måte: «*En* ***funksjon*** *f på en mengde D inn i en mengde S er en regel som tilegner et unikt element f(x) i S til hvert element x i D*» (Adams & Essex, 2013, s. 24 egen oversettelse). Denne definisjonen inneholder de viktigste historiske utviklingene fra gjennomgangen over. Regelen som tilordner elementer mellom de to mengdene er entydig, mengdene består av elementer, ikke bare tall og tilordningen som gjøres er vilkårlig. Vi kan med denne definisjonen si at vi har landet ved den moderne definisjonen av en funksjon.

1.4 Presentasjon av forskningsspørsmål

Med bakgrunn i egne erfaringer, og av hensyn til begrepets sentrale plass i skolematematikken falt valg av tema for oppgaven forståelse av begrepet funksjoner, og lys av den senere tids endringer i lærerutdanningen trådde dette frem som en interessant arena for undersøkelser.

Ved å studere studentenes forståelse for begrepet før de møter det i egen utdanning blir også forskningen aktuell fra minst to ulike perspektiver. Fra videregående skoles perspektiv vil det være interessant å se hva slags forståelse elevene sitter igjen med, noe tid etter at de forlot videregående skole. Fra grunnskolelærerutdanningen sitt perspektiv kan studien være verdifull da den søker å gi svar på hva slags forståelse lærerstudentene tar med seg inn i utdanningen, altså hvilket grunnlag har man å bygge videre kunnskap og forståelse ut ifra.

Jeg har derfor endt opp med to forskningsspørsmål jeg ønsker å belyse i denne oppgaven. Det første spørsmålet er følgende:

Hvilken forståelse har studenter ved grunnskolelærerutdanningen 5-10. trinn av funksjoner, før de møter begrepet i utdanningen?

For å belyse dette spørsmålet vil jeg blant annet ta i bruk DeMarois' og Talls (1996) sin modell over fasetter og lag av et begrep. Dette leder oss videre til det andre spørsmålet:

I hvilken grad egner DeMarois' og Talls modell seg som verktøy for å kartlegge studenters forståelse av funksjonsbegrepet?

I kapittel *2 Teori* vil det gjøres grundig rede for hva som i denne oppgaven menes med forståelse, samt modellen til DeMarois og Tall (1996) som det andre spørsmålet omhandler.

For å svare på det første forskningsspørsmålet har jeg gjennomført en matematisk test blant en gruppe på 43 lærerstudenter, og intervjuet fire av studentene fra den samme gruppen. De fire studentene ble valgt ut på bakgrunn av resultatene fra testen, med hensyn til å være eksemplifiserende for den totale studentmassen. Resultatene fra testen og intervjuet blir så analysert blant annet ved hjelp av DeMarois og Tall (1996) sin modell som deler begrepsforståelsen inn i lag og fasetter.

Det andre forskningsspørsmålet vil jeg forsøke å besvare ved hjelp av erfaringer gjort i forbindelse med arbeidet med denne oppgaven.

1.5 Oppgavens struktur

Denne masteroppgaven er delt inn i 8 kapitler. I det første kapittelet har jeg introdusert tema for oppgaven og videre avgrenset dette til to forskningsspørsmål. Jeg vil som avslutning på dette kapittelet gi en oversikt over tidligere forskning knyttet til forståelse av funksjoner. I kapittel 2 vil jeg først definere hva som i denne oppgaven menes med forståelse før jeg gjør rede for det teoretiske rammeverket om begrepsstrukturer som skal danne grunnlag for analysen. I kapittel 3 redegjør jeg jeg for valg av design og metode, utforming av oppgaver til test og intervju, gjennomføring av datainnsamling og hvordan datamateriale har blitt håndtert. Her vil jeg også vurdere oppgavens kvaliteter basert på troverdighet, generalitet og viktighet. Kapittel 4 er oppgavens klart største kapittel og omfatter analysen av det innsamlede datamateriale. Først analyseres den skriftlige testen gjennom en deskriptiv analyse før transkripsjonene fra intervjuene analyseres og settes i sammenheng med det teoretiske rammeverket og tidligere forskning. Strukturen i analysen følger de ulike fasettene av et begrep slik det kommer frem i modellen til DeMarois og Tall (1996). I slutten på analysekapittelet vil jeg gi en oppsummering av forståelsen til de fire studentene fra intervjuene. I kapittel 5 tar vil jeg trekke frem og drøfte noen hovedfunn fra analysen i forbindelse med det første forskningsspørsmålet og de implikasjonene disse medfører.. Det andre forskningsspørsmålet vil jeg drøfte ved hjelp av erfaringer gjort i forbindelse med bruken av modellen til DeMarois og Tall i arbeidet med oppgaven. Jeg vil også forsøke å besvare de to spørsmålene før jeg skisser mulige områder for videre forskning. I kapittel 6 kommer jeg med noen avsluttende refleksjoner over arbeidet med oppgaven og dens påvirkning for min videre utøvelse av læreryrket. Kapittel 7 inneholder kildeliste med referanser fra litteraturen brukt i oppgaven og kapittel 8 består av vedlegg som er relevante for oppgaven.

1.6 Tidligere forskning

I de påfølgende avsnittene vil jeg forsøke å gi en oppsummering av deler av den tidligere forskningen knyttet til studenters forståelse av funksjonsbegrepet og nærliggende temaer som har tilknytning til denne oppgaven. Aller først vil jeg vise til forskning som er med på å legitimere fokus for oppgaven og hvorfor faglig forståelse hos kommende lærere er en viktig faktor for elevers læring.

Hill, Rowan og Ball (2005) har studert det de kaller matematisk kunnskap for læring hos amerikanske lærere. Det vil si kunnskap som brukes i arbeidet med å lære bort matematikk. Dette inkluderer å forklare begreper, tolke elevers løsninger og kommentarer, eksemplifisering av fremgangsmåter og begreper etc. I studien samlet de inn data fra første- og tredjeklasseelever og deres lærere ved 115 amerikanske grunnskoler. De fant en klar sammenheng mellom lærernes matematiske kunnskap for læring og elevenes læringsutbytte. Dette sammenfaller med funn hos Danske Clearinghouse som utarbeidet en rapport for det norske Kunnskapsdepartementet (Nordenbo et al., 2008). Hensikten med denne rapporten var å avdekke hvilke kompetanser hos læreren som har størst påvirkning på elevers læring. I arbeidet med rapporten er over 6000 publikasjoner gjennomgått, og tre lærerkompetanser peker seg ut som viktige: relasjonskompetanse, regelledelseskompetanse og didaktikkompetanse. I beskrivelsen av didaktikkompetanse legges det vekt på at denne krever høyt faglig nivå. Et høyt nivå av faglig kunnskap fører til at læreren har større tiltro til egne evner innen faget og benytter seg av forskjellige tilnærmingsmetoder. De finner også at den matematikkdidaktiske forskningen viser at «… *læringen øker dersom læreren har et sikkert konseptuelt grep om faget og satser på problemorientert undervisning framfor utenatlæring*.» (Nordenbo et al., 2008, s 72).

Hansson (2006) sin PhD-avhandling, bestående av fem artikler, dreier seg om lærerstudenters syn på, og forståelse av, funksjonsbegrepet og tar i bruk begrepskart som en del av datainnsamlingen. Blant hovedfunnene i hans studie kommer det blant annet frem at hos flertallet av studentene ble ikke funksjonsbegrep fremkalt i forbindelse med uttrykket y=x+5. studentene relaterer heller uttrykket til numeriske sammenhenger og påpeker at det er snakk om to variabler (Hansson & Grevholm, 2003). Andre studier har også tatt for seg det samme uttrykket i andre aldersgrupper, blant annet Blomhøj (1997) og Persson (2013). I sistnevnte oppsummeres og sammenliknes funnene i de forskjellige studiene. Persson trekker frem at mens 20% av studentene i hans studie koblet uttrykket til likninger var det ingen av studentene hos Hansson og Grevholm som gjorde denne koblingen. Han peker også på at det virker til å være en gradvis, begrepsmessig utvikling hos elever over tid, likevel er det flere av lærerstudentene som ikke utvikler den begrepsmessige forståelsen som er nødvendig for yrket.

Begrepskartene fra Hansson (2006) sin studie viste at funksjonsbegrepet ikke bestod av rike strukturer hos studentene, men ofte var preget av prosedyrekunnskap og algoritmer. Mangelen på koblinger i begrepskartene kan anses som at deres forståelse av funksjoner bærer preg av compartmentalization, altså mangel på samsvar mellom ulike deler av begrepet. Lavere prestasjoner i matematikkfag viste seg å ha sammenheng med større grad av compartmentalization og færre betydningsfulle koblinger. Ingen av studentene i studien kunne gi en korrekt definisjon på funksjoner, men enkelte forklarte funksjonsbegrep ved sammenheng mellom to variable og kun unntaksvis med fokus på entydighet. Studentene refererte ofte til den grafiske fremstillingen av funksjoner i sine forklaringer, og de var i større grad i stand til å gjøre koblinger mellom ulike deler av funksjonsbegrepet innad i representasjonene enn mellom dem. Hos lavt presterende studenter var en operasjonell forståelse fremtredende, mens en konseptuell forståelse av funksjoner ikke var fremtredende blant studentene. Hansson (2006) viser til at læreres fagkunnskap har innvirkning på elevenes læring, og etterlyser muligheter for lærerstudenter til å møte funksjoner i varierte kontekster i løpet av lærerutdanningen.

Flere andre studier har også tatt for seg ulike gruppers forståelse av uttrykket y=x+5, blant annet Hansson & Grevholm (2003) som fokuserte på lærerstudenter, og som var en del av denne nevnte studien til Hansson. Blomhøj (1997)

DeMarois (1998) har i sin PhD-avhandling gjort en longitudinell studie av amerikanske studenter som tok et alternativt grunnleggende algebra-emne ved forskjellige community college i USA (et nivå mellom videregående skole og universitet/høyskole) sin forståelse av funksjoner. Studentene som deltok i studien blir av DeMarois beskrevet som «tidligere lite vellykkede» i matematikk. Studien hadde til hensikt å se om en alternativ introduksjon av funksjoner ved hjelp av et alternativt pensum kunne hjelpe studentene til å oppnå et prosessnivå av forståelse for begrepet. Studentene ble testet både før kurset og mot slutten, samt at en del studenter ble plukket ut til intervju. Studentenes forståelse ble testet og analysert ved hjelp av tilsvarende oppgaver og analyseverktøy som i denne masteroppgaven. Studien finner at studentene ved begynnelsen av kurset var i stand til effektivt å manipulere funksjonsmaskiner og bruke likninger til å evaluere funksjonsuttrykk. På tross av at studentene var effektive ved bruk av funksjonsmaskiner, var overgangen mellom denne representasjonen og andre vanskelig. Også den grafiske representasjonen av funksjoner viste seg å være vanskelig for studentene. Studentenes tolkning av notasjoner knyttet til funksjoner viste seg å være lite konsistente og avhengig av kontekst.

En større, komparativ studie av elever i England og Israel, utført av Watson, Ayalon og Lerman har resultert i flere artikler (Ayalon, Watson & Lerman, 2017; Watson, Ayalon & Lerman, 2017) Studien ser på elever i alderen 12-18 år, og tar for seg 10 elever fra hvert land på hvert klassetrinn, og undersøker deres forståelse av funksjoner.

I denne studien testes elevenes forståelse av funksjoner ved hjelp av fem oppgaver og resultatene for de forskjellige klassetrinnene sammenliknes for de to landene. Forskjeller i elevenes begrepsforståelse mellom de to landene blir forsøkt forklart gjennom forskjeller i pensum og pedagogiske fremgangsmåter (Watson et al., 2018). Noen av hovedforskjellene studien avdekket var blant annet at de israelske studentene i større grad tok i bruk formelle fremgangsmåter og fokuserte på korrespondanse mellom elementer, mens de engelske elevene i større grad handlet ut fra intuisjon og la vekt på sammenhengen mellom variabler. De fant også en tydelig sammenheng mellom studentenes prestasjoner og fokus i de to landenes pensum. Det israelske pensumet fokuserte i større grad på formelle definisjoner og fremgangsmåter, mens det engelske hadde et mer uformelt preg. Selv om forståelsen endret seg gjennom ulike mønstre i de to landene på bakgrunn av dette var prestasjonene hos de eldre elevene like for de to landene. Det er derfor ikke mulig å konkludere med at det ene fokuset i pensum er mer hensiktsmessig enn det andre, men at de bygger opp under og kan være med å skape ulike begrepsforståelser.

Elevenes beskrivelser og definisjoner av funksjoner ble også testet hos 40 engelske og 40 israelske elever (Ayalon et al., 2017). Hos de israelske elevene var en forståelse av funksjoner som sammenhenger mellom variabler mest gjeldene, flere av studentene viste også en forståelse i tråd med det som beskrives som samvariasjon, samt at noen elever viste en forståelse som fokuserte på inn-verdi/ut-verdi. Blant de engelske elevene var en slik inn-verdi/ut-verdi forståelse av funksjoner den klart mest dominerende, ofte støttet opp av algebraiske eksempler eller forklaringer. Blant de eldre, engelske elevene var det også en del elever som betraktet funksjoner som entydige avbildninger (mapping) fra en mengde til en annet. Uten at de ble oppfordret til det valgte flere av elevene å ta i bruk eksempler i sine beskrivelser av funksjoner. 53 eksempler ble funnet blant de israelske elevenes besvarelser og 25 hos de engelske. Mens de engelske eksemplene hovedsakelig dreide seg om lineære funksjoner, var de israelske mer varierte og hele 14 eksempler på at funksjoner kan være konstante ble registrert.

Sajka (2003) studerer en gjennomsnittlig, 16 år gammel elev sin proceptuelle forståelse av funksjoner ved hjelp av en samtale rundt funksjonslikningen $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Studien avdekker at eleven store utfordringer knyttet til funksjonsnotasjonen. Blant annet tolket eleven bokstaven f i notasjonen $f(x)$ som en forkortelse for ordet funksjon, og selve notasjonen som begynnelsen på en ny oppgave. Eleven assosierte notasjonen $f(3)$ med funksjonens nullpunkt, og de tre uttrykkene $f(x+y)$, $f(x)$ og $f(y)$ ble sett på som tre forskjellige funksjoner. Sajka (2003, s. 246) skisserer tre mulige forklaringer på elevens mistolkninger av funksjonsnotasjonen: for det første har matematisk notasjon en iboende tvetydighet. For det andre dukker symbolene opp kun i begrensede kontekster i undervisning og oppgaver. Og til sist elevens egen tolkning av matematikkoppgaver i skolen.

Even (1993) har studert faglig og pedagogisk kunnskap om funksjonsbegrepet hos kommende lærere i ungdomsskolen og videregående skole (secondary teachers). Fokus for artikkelen er spesielt de to egenskapene entydighet, at en funksjon knytter et element i definisjonsmengden entydig til et element i verdimengden, og vilkårlighet, at disse to mengdene kan være vilkårlige og ikke nødvendigvis behøver bestå av tall. Disse to egenskapene utgjør det hun beskriver som et moderne funksjonsbegrep. I studien fant Even blant annet at mange av studentene ikke hadde en moderne oppfatning av funksjoner. De kommende lærerne hadde tydelige forventninger til funksjoner, som blant annet at de er, eller alltid kan uttrykkes ved, algebraiske uttrykk, at grafene skal være jevne og pene og at funksjoner skal være kjente. Selv om noen av studentene kunne gi gode definisjoner av funksjoner når de ble bedt om det ble ikke disse definisjonene brukt når de skulle beskrive funksjoner for fiktive elever. I stedet benyttet de seg i større grad av sitt begrepsbilde, som ifølge studien ofte innehold feil eller mangler. Forklaringene de gav til de fiktive elevene bar også preg av prosedyrer og prosedyrebasert kunnskap heller enn matematiske definisjoner og moderne forståelse. Even peker på at begrepsbilde utvikler seg gjennom arbeid med funksjoner, og at funksjonene studentene møter, også gjennom lærerutdanningen, oftest er algebraiske uttrykk eller jevne, pene grafer, heller sjeldent møter de på andre typer funksjoner eller situasjoner der det er prekært å ta i bruk definisjonen heller enn begrepsbildet.

Tall og Bakar (1992) ser nærmere på elever og studenters oppfatninger av funksjoner. De gjennomførte en studie blant 28 engelske elever i alderen 16-17 år, samt 109 universitetsstudenter som enda ikke hadde møtt funksjonsbegrepet i sin utdanning. Studentene ble bedt om å avgjøre om en rekke grafer og funksjonsuttrykk var funksjoner eller ikke, samt at de 28 elevene ble bedt om å gjøre rede for hva en funksjon var og om mulig gi en definisjon. Ingen av disse elevene var i stand til å gi en korrekt definisjon av funksjoner, men mange av elevene gav forklaringer som beskriver funksjoner som prosesser, der inn-verdier gjøres om til ut-verdier gjennom en prosedyre. Når det kom til å avgjøre om funksjonsuttrykk og grafer var funksjoner kom det frem av både elever og studenter benyttet seg av det Tall og Bakar (1992) kaller eksempelprototyper av funksjoner og sammenlikner eksempler de blir stilt ovenfor med disse. Blant både elevene og studentene anså rundt 2/3 en sirkel for å være en funksjon. Konstante funksjoner i form av en graf ble ikke ansett som en funksjon av 44% av studentene. Og funksjonsuttrykket y=4 ble ikke ansett som en funksjon av 69% av studentene og 53% av elevene.

Rugland (2017)studerte lektorstudenter og studenter ved praktiskpedagogisk utdanning (PPU) med minst 60 studiepoeng i matematikk sine «meanings» av begrepet funksjoner. Med «meaning» menes anvendelsen av den begrepsmessige, kognitive strukturen hos et individ. I studien tegnes begrepskart for enkelte av studentene. Her finner Rugland at studentene utrykker ulike «meanings» om begrepet funksjoner. Flere av studentene hadde uklare og lite veldefinerte «meanings» om funksjonsbegrepet og uttrykte seg lite sammenhengende om forskjellige deler av begrepet.

2 Teori

Både i hverdagslivet og i skolesammenheng brukes begrepet *forståelse* ofte. I hverdagslivet kan vi snakke om å forstå situasjoner, bruksanvisninger eller vitser og i skolesammenheng kan matematikklæreren finne på å spørre eleven «Forstod du det?». Men hva er egentlig denne forståelsen? Jeg vil i dette kapittelet forsøke å klargjøre hva som i denne oppgaven vil menes med forståelse. Deretter vil jeg presentere teori som er med på å forklare hvordan vår forståelse av et begrep er bygget opp. Teorien som presenteres i denne delen av oppgaven vil danne et teoretisk rammeverk og analyseverktøy for analysen av datamateriale fra undersøkelsene i studien.

2.1 Hva er forståelse?

Skemp (1987) viser til at vi, gjennom gjentatte møter med et fenomen, blir oppmerksomme på visse egenskaper ved fenomener som ikke endrer seg fra møte til møte. Eksempelvis vil et barn etter å ha sett noen biler ha blitt oppmerksom på at bilen sier «brom» og har fire hjul. Denne prosessen kaller Skemp (1987) for abstraksjon. Samtidig kan det være mange egenskaper ved bilene barnet har møtt som ikke har vært like i de ulike møtene som farge på bilene, antall dører eller liknende som ikke abstraheres. På bakgrunn av tidligere abstraksjoner vil vi klassifisere nye fenomener ved å ordne dem i klasser med andre fenomener med tilsvarende egenskaper. Det er denne klassen av fenomener, med tilhørende egenskaper som Skemp (1987) definerer som selve begrepet. Altså er det gjennom gjentatte møter vi bygger opp vår mentale begrepsstruktur, med egenskaper ved og eksempler av selve begrepet. Skemp (1987) peker også på viktigheten av ikke-eksempler og kontraster i defineringen av begrepet. Gjennom møter med kontraster til begrepet, altså situasjoner der vi møter eksempler på begrepet samt ikke-eksempler, blir de invariante egenskapene tydeligere og sannsynligheten for at de blir abstrahert øker. Samtidig er ikke-eksempler med på å sette grensene for begrepet.

Figur 1 Kontrast og ikke-eksempel inspirert av Skemp (1987, s 11). Her er begrepet rett strek, ikke-eksempelet som skaper kontrasten og får egenskapene ved de de andre figurene til å tre frem tydeligere er halvsirkelen.

For eksempel kan barnet i som allerede har abstrahert begrepet bil peke på en traktor og si bil. Ved at voksne eller andre barn forklarer barnet at en traktor ikke er det samme som en bil, og gjør barnet oppmerksomt på forskjellene mellom de to vil grensene for begrepet bil bli tydeligere gjennom ikke-eksempelet traktor.

Prosessen med begrepsdannelse, slik den beskrives av Skemp (1987) kan kobles til Sierpinska (1992) sin beskrivelse av forståelse i artikkelen *On understanding the notion of function*:

> *Det er bare når vi har sett tilfeller og ikke-tilfeller av et definert objekt, når vi kan si hva dette objektet er og hva det ikke er, når vi er blitt klar over dets relasjoner med andre begreper, når vi har blitt oppmerksomme på at disse relasjonene er tilsvarende relasjoner vi er fortrolige med, når vi har innsett posisjonen det definerte objektet har innen en teori og hva de mulige anvendelsene er, at vi kan si at vi har forstått noe av det.* (Sierpinska, 1992 s. 26, egen oversettelse).

Hun mener matematisk læring i stor grad skjer i det hun beskriver som hopp. For eksempel kan dette være når vi endelig ser et mønster i en problemløsningsoppgave eller vi plutselig klarer å se sammenhengen mellom to ulike representasjoner for samme begrep. Etter at et slikt hopp har funnet sted kan vi betrakte den nye kunnskapen på to ulike, men utfyllende måter. Enten ved å fokusere på hva som hindret dette hoppet i læring å skje, altså hva som gjorde at dette hoppet ikke forekom før, eller vi kan betrakte det i lys av det nye vi nå vet eller er i stand til å se. Sierpinska (1992, s. 27) kaller disse to ulike bildene for *handling for å overvinne hindringer* (act of overcomming difficulties or obstacles) og *handling av forståelse* (act of understanding). Handlinger med utspring i forståelse deler Sierpinska (1992) inn i fire kategorier av handlinger:

Identifisering beskrives som å kunne identifisere et objekt i en mengde, for eksempel å kunne identifisere en graf eller en tabell blant andre objekter. Dersom vi er i stand til å identifisere en funksjon i form av et funksjonsuttrykk vil det som tidligere bare var en samling symboler og tall (funksjonen) i en større samling av tall og symboler (f.eks. en matematikkbok), fremstå som noe spesielt og vi vil kunne gjenkjenne denne funksjonen. Identifisering av funksjoner som et begrep fører også med seg ny mening til ordet funksjon, som nå har en mening utover den hverdagslige betydningen.

Diskriminering (discrimination) er en handling som ikke bare gjør oss i stand til å gjenkjenne et objekt, men å skille mellom ulike objekter og begreper basert på både forskjeller og spesielle egenskaper. Dette kan for eksempel være elever som skiller mellom lineære funksjoner og andregradsfunksjoner ved å se på formen på grafene, antall mulige nullpunkt eller andre egenskaper. Et annet eksempel er diskriminering mellom funksjoner og ikke-funksjoner basert på om grafen eller funksjonsuttrykket er entydig eller ikke.

Generalisering er kategorien av handlinger der vi overfører egenskaper til liknende objekter eller andre situasjoner. Dette innebærer også å bli oppmerksom på egenskaper eller sider som ikke lar seg overføre. Et eksempel her vil være at vi kan generalisere stigningstallet i lineære funksjoner. For lineære funksjoner $f(x) = ax + b$ vil koeffisienten a gi oss stigningstallet og med dette viktig informasjon om funksjonen, denne egenskapen er ikke direkte overførbare til andre typer funksjoner som andregradsfunksjoner av typen $g(x) = ax\hat{}2 + bx + c$. Selv om de konstante koeffisientene a og b gir oss viktig informasjon om denne funksjonen og dens stigning kan de ikke tolkes på samme måte.

Den siste kategorien av handlinger kaller Sierpinska (1992) *syntese* og beskrives som sammenkobling av forskjellige deler av kunnskap, egenskaper, sammenhenger etc. til større nettverk. Dette skjer blant annet når elever kobler sammen ulike representasjoner for funksjoner og egenskaper ved disse. Et eksempel kan være å knytte rette grafer til lineære funksjonsuttrykk. Gjennom syntese blir vi i stand til å se begrepene som en samlet enhet med flere sider.

Bruk av begreper beskrives som en egen kategori av handlinger som ikke har bakgrunn i forståelse, likevel er denne typen handlinger viktig for det er gjennom bruk av begreper at de ulike typene av handlinger av forståelse kommer frem. Det er gjennom bruk av funksjoner, ved å regne ut funksjonsverdier fra funksjonsuttrykk, lese av grafer, modellere situasjoner ved hjelp av funksjoner etc., at elevene møter begrepet og gjør de nødvendige mentale koblingene som gjør de i stand til å identifisere, skille, generalisere og knytte de ulike delene av begrepet sammen.

Sierpinska (1992) legger altså vekt på at vår forståelse av et begrep må sees i forbindelse med hvordan vi relaterer begrepet til andre begrep. Skemp (1987) skriver at vi kan si at et begrep er forstått dersom det er assimilert inn i et passende mentalt skjema. Han peker også på at en subjektiv opplevelse av å ha forstått noe også kan forekomme dersom vi assimilerer det med et skjema som ikke er riktig. Her kan vi for eksempel se for oss en elev som kun har møtt lineære funksjoner. Denne eleven vil kunne si at han eller hun forstått funksjoner og at disse kan vises grafisk som rette linjer i et koordinatsystem.

Skemp (1987) og Sierpinska (1992) sine syn på forståelse støttes opp av Hiebert og Carpenter (1992) som skriver at forståelse i stor grad handler om hvilke mentale koblinger vi gjør i forbindelse med et begrep. Når vi lærer noe nytt, for eksempel et matematisk konsept, skaper vi vår egen mentale representasjon av konseptet. Denne mentale representasjonen kan kobles sammen med andre representasjoner og andre begreper. Jo flere og sterkere koblinger som gjøres jo bedre og dypere er forståelsen.

Et eksempel på hvordan nye begreper kan bygges inn i eksisterende strukturer kan være elever som for første gang lærer om andregradsfunksjoner. Den nye mentale representasjonen for andregradsfunksjoner kan inkluderes i en struktur som omfatter funksjoner generelt, dermed knyttes den mentale representasjonen til andre typer funksjoner som eleven kjenner til fra før, som for eksempel lineære funksjoner. Koblingene til lineære funksjoner kan basere seg på likheter som at begge de to typene kan representeres grafisk eller har generell algebraiske uttrykk, eller forskjeller som ulikheter i de grafiske fremstillingene etc.

Hiebert og Carpenter (1992) peker på flere viktige implikasjoner av forståelse. Blant annet gjør større grad av forståelse det lettere for elever å generere ny kunnskap, altså å lære, ved at ny kunnskap kan kobles sammen med allerede godt organiserte og tett sammenvevde strukturer. Forståelse styrker også vår evne til å huske ved at sammenkobling og organisering av kunnskapen gjør at færre individuelle deler av et begrep hentes frem igjen når det skal tas i bruk.

Forståelse, slik det defineres av Sierpinska (1992), Hiebert og Carpenter (1992), og Skemp (1987) kan ikke betraktes som noe man enten har eller ikke har, men må heller sees på som et kontinuum med forskjellige grader av forståelse. Dermed gir ikke lærerens ja-nei-spørsmål til eleven i starten av kapittelet mening. Hvordan vi kan danne oss et bilde av elevers forståelse av et begrep vil jeg komme tilbake til under overskriften *To dimensjoner av begrepsforståelse.*

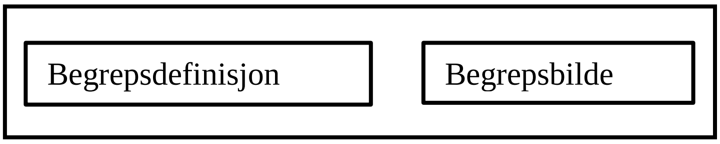
2.2 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Tall og Vinner (1981) bruker ordet *begrepsbilde* (concept image) til å beskrive den kognitive strukturen som er assosiert med et matematisk begrep. Et begrepsbilde vil dermed innehold alle mentale bilder, egenskaper, prosesser, representasjoner og andre mentale skjemaer vi knytter til begrepet. I lys av hva Skemp (1987), Sierpinska (1992) og Hiebert og Carpenter (1992) skriver om forståelse av begreper kan vi tolke det begrepsbildet en person har, som personens forståelse av begrepet. Eller som Vinner sier: «*Å forstå, slik vi ser det, betyr å ha et begrepsbilde*» (Vinner, 1991 s. 69 egen oversettelse).

En del av denne begrepsforståelsen er *begrepsdefinisjonen*, altså hvordan vi definere begrepet. Begrepsdefinisjonen deles inn i en formell begrepsdefinisjon, slik den fremkommer for eksempel i lærebøker, og en personlig begrepsdefinisjon slik definisjonen eksisterer mentalt hos en person. Den personlige begrepsdefinisjonen er individuell og kan i større eller mindre grad sammenfalle med den formelle. Når vi hører eller leser begrepsnavnet, eller støter på det i en annen representasjon vekkes deler av begrepsbilde vårt til live. I noen situasjoner vekkes kanskje begrepsdefinisjonen og i andre ikke, den delen som vekkes til live kaller Tall og Vinner (1981) for frembrakt begrepsbilde.

Dersom koblingene mellom de ulike delene av begrepsbildet ikke er tilstrekkelig gode kan deler av begrepsbilde utvikle seg uten at denne utviklingen finner sted i andre deler. Dette kalles *compartmentalization* (Vinner & Dreyfus, 1989; Vinner, Hershkowitz & Bruckheimer, 1981), og kan føre til at det i enkelte deler av begrepsbilde oppstår misoppfatninger eller mangler. Det kan for eksempel gi utslag i at en student er i stand til å gjengi en korrekt definisjon av en funksjon (ved bruk av entydighet), men ikke klarer å argumentere for at en sirkel tegnet i et koordinatsystem ikke er en funksjon. Tall og Vinner (1981) kaller slike uoverensstemmelser i begrepsbildet for potensielle konfliktfaktorer og peker på viktigheten av at slike ikke-samsvarende deler frembringes samtidig, så elevene får erfare den kognitive konflikten, slik at de så kan justere de mentale bildene og skape samsvar mellom dem.

Med utgangspunkt i figurer fra Vinner (1991, s 70) kan vi se for oss et begrepsbilde som i figuren under, bestående av to celler som inneholder henholdsvis begrepsdefinisjonen og begrepsbilde (resten av begrepsbildet).



Figur 2 Et begrepsbilde slik det beskrives av Vinner og Tall (1981) og av Vinner (1991), bestående av begrepsdefinisjon og begrepsbilde.

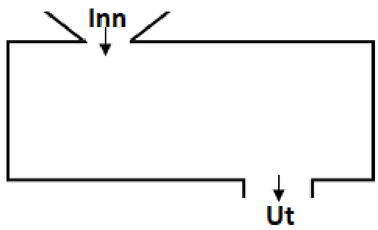
Vinner (1991) skisserer fire senarioer for hvordan vi nyttiggjør oss av de to delene av begrepsbildet i en oppgave eller problemløsningssituasjon. I tre av disse kobles begrepsdefinisjonen inn i løpet av prosessen. Disse tre senarioene peker Vinner på som fordelaktige, på grunn av den sentrale posisjonen definisjoner har i matematikken. I det siste, og ikke gunstige senarioet, baserer responsen på problemet seg bare på bruk av begrepsbilde. Dette senarioet er imidlertid det mest utbredte blant studenter og elever ifølge Vinner (1991), noe som kan begrunnes med at det likner mer på slik problemløsning foregår utenfor den matematiske konteksten. En stor hindring for å endre elevers problemløsningsstrategi ligger i at denne prosessen, der man kun frembringer og tar i bruk andre deler av begrepsbildet, ofte gir oss riktig svar, dermed er det vanskelig for elever å se noe grunnlag for å endre adferd (Vinner, 1991). En annen begrunnelse for verdien av å koble inn *både* begrepsbildet og begrepsdefinisjonen i en arbeidsprosess er at man på denne måten kan fremprovosere en kognitiv konflikt dersom det ikke er samsvar mellom deler av begrepsbildet og definisjonen, og på den måten bli klar over og rette opp i misoppfatninger.

2.2.1 Kognitiv rot – en plattform for begrepslæring

Fra teorien til Vinner og Tall (1981) kan vi se for oss et begrepsbilde i utvikling som en stadig mer kompleks kognitiv struktur. Det å holde oversikten og skape samsvar mellom de ulike komponentene vil være utfordrende. Tall, McGowen og DeMarois (2000) lanserer ideen om kognitive røtter. Med en kognitiv rot menes et grunnleggende bilde av et begrep som er enkelt å forstå og som kan utvikles videre når nye sider av begrepet læres. For at et begrep skal være en kognitiv rot stilles fire krav:

En kognitiv rot er et konsept som:

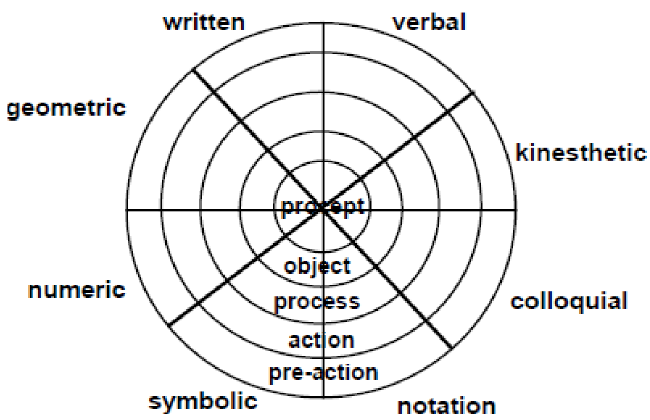
i) Er en meningsfull kognitiv enhet av kunnskap for studenten ved begynnelsen av læringsprosessen,
ii) Tillater begynnende utvikling gjennom en strategi for kognitiv utvikling fremfor betydelig kognitiv rekonstruksjon,
iii) Innehar muligheten for langsiktig mening i senere utviklinger
iv) Er robust nok til å forbli nyttig når mer sofistikert forståelse utvikles
(Tall, McGowen & DeMarois, 2000, s. 4, egen oversettelse)



Figur 3 Funksjonsmaskin. Verdier puttes inn, maskinen behandler verdien i tråd med funksjonen og sender ut en ut-verdi.

Med en kognitiv enhet menes en del av en kognitiv struktur som er enkel nok til at hele enheten kan være i fokus på en gang. Fra de fire punktene i sitatet over ser vi at en kognitiv rot må være enkel å forstå, ha potensiale for videre utvikling og at den videre utviklingen må være nettopp utvikling og ikke nye kognitive konstruksjoner. Videre lanserer Tall, McGowen og DeMarois (2000) funksjonsmaskinen som en kognitiv rot for funksjonsbegrepet. Med funksjonsmaskin menes et bilde av funksjoner som en maskin der inn-verdier puttes inn, maskinen behandler denne inn-verdien i henhold til funksjonsregelen for så å produsere en ut-verdi. Dette bildet av en funksjon oppfyller de fire kravene over i egenskap av å være en kognitiv enhet som kan utvikles videre og gjøres mer sofistikert ved å legge til andre egenskaper ved funksjoner som for eksempel entydighet, ved at maskinen skal gi én, og bare én, ut-verdi for hver inn-verdi. Styrken i en kognitiv rot ligger i at ettersom nye sider ved begrepet læres kan den kognitive roten utvikles til også å omfatte nye egenskaper og kan gjennom stadig utvikling virke som et referanseapparat for den kognitive strukturen som omhandler begrepet.

2.3 To dimensjoner av begrepsforståelse



Figur 4: DeMarois og Tall (1996) sin inndeling av et begrepsbilde i to dimensjoner. Lagene av forståelse er illustrert ved sirkler og de ulike fasettene er illustrert ved sektorinndelingen.

DeMarois og Tall (1996; DeMarois, 1998) deler i sin modell begrepsbilde inn to dimensjoner. Den første dimensjonen, breddedimensjonen, tar for seg de ulike delene av begrepsbilde. Disse kalles fasetter og er representert i figur 4 ved inndelingen i kakestykker. Den andre dimensjonen, dybdedimensjonen, tar for seg fem ulike nivåer av forståelse innad i de forskjellige fasettene og er i figuren representert ved sirklene lav til høy forståelse går fra ytterst til innerst. Jeg vil i de to påfølgende underoverskriftene gjøre rede for de forskjellige fasettene og lagene av forståelse og forsøke å knytte dette opp til begrepet funksjoner.

2.3.1 Fasetter av et begrep

Mens den vanlige inndelingen av aspekter knyttet til funksjoner gjerne dreier seg om Janvier (1987) sine fire representasjoner: graf, tabell, situasjon og formel, og overgangene mellom disse velger DeMarois og Tall (1996) og dele begrepet inn i åtte fasetter. Årsaken til dette er Thompsons (1994) sin kritikk av ideen om de fire representasjonene, som i korte trekk går ut på at ingen av de fire representasjonene representerer selve begrepet funksjon i sin helhet. De åtte fasettene, derimot, kan vi se på som forskjellige måter å representere ulike sider og aspekter ved begrepet

Den *skriftlige* fasetten av funksjonsbegrepet består av elevens definisjon og beskrivelse av funksjoner slik det fremkommer skriftlig. Beskrivelser og definisjoner slik de presenteres muntlig sorterer under den *muntlige* fasetten. Kobler vi dette til Vinner og Tall (1981) sin modell av begrepsbilde kan vi si at disse to fasettene sammen utgjør begrepsdefinisjonen.

Kinestetisk fasetten handler om fysisk demonstrasjon av begrepet. Denne fasetten blir lite behandlet av både DeMarois og Tall (1996) og DeMarois (1998) og blir helt utelatt når DeMarois og Tall (1999) ser på mulige koblinger mellom fasetter. Jeg velger derfor å ikke gå grundigere inn på den kinestetiske fasetten i denne oppgaven.

Den *hverdagslige* (colloquial) fasetten dreier seg om uformelle fremstillinger av funksjoner som for eksempel funksjonsmaskiner. Funksjoner representert på denne måten finner vi igjen flere bøker som ofte brukes i lærerutdanningen som for eksempel *Matematikk for lærere 1* (Birkeland, Venheim & Breiteig, 2011) og *Alfa. Lærebok : matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (Bjørnestad, Kongelf & Myklebust, 2013).

Notasjonsfasetten innebærer forskjellige notasjoner for funksjoner som for eksempel $f(x)$, $f: x \rightarrow$, $f(g(x))$ og betydningen av disse. Notasjonsfasetten skilles fra den *symbolske* som i sin tur handler om funksjoner i form av algebraiske uttrykk.

Den *numeriske* fasetten på sin side inneholder funksjoner ved opplisting av input og output i form av tabeller eller ved hjelp av ordnede tallpar som $(x, f(x))$.

Den siste fasetten er den *geometriske* som handler om ulike geometriske fremstillinger av funksjoner i grafer eller i diagrammer. Også tegninger av definisjonsmengde og verdimengde med piler som korrespondanser er en del av denne fasetten. Mens grafer kan tilgjengeliggjøre funksjoner som objekter kan tegninger over definisjonsmengde og verdimengde med piler imellom være med på å underbygge entydighetsprinsippet i funksjonsbegrepet, men gir også en punktvis fremstilling.

DeMarois og Tall (1996) understreker at dette ikke nødvendigvis er en komplett liste over alle sider ved funksjonsbegrepet, og at de forskjellige fasettene slik de er presentert her ikke er uavhengige av hverandre. En dypere forståelse innen en fasett vil kunne være med å påvirke hvordan vi ser på funksjoner i en annen fasett, på samme måte kan en misoppfatning i en fasett være med å påvirke forståelsen i andre fasetter negativt (DeMarois, 1996).

2.3.2 Lag av forståelse

Dybdedimensjonen, altså hvor dyp eller god begrepsforståelse eleven har, deler DeMarois og Tall (1996) inn i 5 lag: før-handling, handling, prosess, objekt og procept. Jeg vil nå gå igjennom de forskjellige lagene, hva som preger disse og forsøke å eksemplifisere disse ved funksjonsbegrepet.

Det første nivået, *før-handlingslaget*, preges av manglende erfaring med begrepet. Elever med en slik forståelse har ikke møtt begrepet et i en matematisk preget situasjon. Skjemaet som aktiveres når eleven støter på ordet funksjon knytter seg for eksempel i stedet til substantivet funksjon (knivens funksjon er å skjære) fremfor det matematiske begrepet.

Neste lag av forståelse kalles *handlingslaget*. For elever med en slik forståelse er forståelsen knyttet opp til stegvise prosedyrer og algoritmer. Stegene i en slik prosedyre må utføres steg for steg og i riktig rekkefølge, eleven er ikke i stand til å hoppe over steg eller utføre disse mentalt. En elev med denne forståelsen som skal plotte grafen til $f(x) = 2x - 6$ vil være avhengig av å regne ut funksjonsverdier for enkelte punkter ved hjelp av funksjonsuttrykket og ikke umiddelbart se sammenhengen med hvordan disse utvikler seg basert på input. Med andre ord knytter punktvis forståelse seg til handlingsforståelse (DeMarois, 1998). Eleven vil også anse $f(x) = 2x - 6$ og $f(x) = 2(x - 3)$ uttrykker to forskjellige grafer da utregningen (prosedyren/handlingen) for å komme frem til funksjonsverdi basert på input er forskjellig. Elever med en handlingsforståelse vil ifølge DeMarois (1998) oppleve arbeid med matematikk som vanskeligere da de ikke er i stand til å koble sammen ulike deler av begrepsforståelsen, men jobber med utgangspunkt i isolerte prosedyrer.

Dersom eleven klarer å se på begrepet som spesiell aktivitet med visse kjennetegn, uten å være avhengig av algoritmer og stegvise prosedyrer som på handlingsnivået vil eleven ha beveget seg over på *prosesslaget*. Eleven ser nå på hele transformasjonen fra input via en handling til en output som en sammenhengende prosess. Når det gjelder funksjoner vil elever på dette nivået kunne gjenkjenne en funksjon presentert i en tabell som en funksjon basert på for eksempel entydighetsprinsippet, uten å kjenne til et funksjonsuttrykk knyttet til tabellen. Elever på dette laget vil anse de to funksjonene i forrige avsnitt som like, basert på at lik input gir lik funksjonsverdi. Elever som klarer å kombinere ulike prosesser eller å reversere disse. Et eksempel på dette kan være at eleven både er i stand til å oppgi riktig funksjonsverdi basert på en x-verdi, og i tillegg kan reversere prosessen og gi rett(e) x-verdi basert på funksjonsverdi.

Det fjerde laget kalles *objektlaget*. Elever som har nådd denne graden av forståelse vil være i stand til å se begrepet som et objekt. Det sentrale ved å kunne betrakte et begrep som et objekt ligger i vår evne til å utføre handlinger på objekter. Altså må eleven kunne utføre handlinger på begrepet for å utvise en objektsforståelse. For funksjoner gjelder dette eksempelvis å sette sammen funksjoner ved funksjonssammensetning, manipulere funksjoner ved hjelp av addisjon, subtraksjon, etc.

Det innerste laget av forståelse kalles *procept*. Ordet procept er en sammenslåing av ordene process (prosess) og object (objekt) og først brukt av Gray og Tall (1991). I følge de er et procept en sammensmelting av et objekt og en prosess som begge kan representeres ved det samme symbolet. Et lettforståelig eksempel her er $\frac{3}{8}$ som både representerer divisjonen 3 delt på 8 (prosessen) og brøken tre åttendedeler (objektet). I vårt tilfelle med funksjoner vil $f(x) = 2x + 3$ representere både prosessen som kreves for å danne funksjonsverdi basert på en variabelverdi, og funksjonen som et objekt. Ifølge Grey og Tall (1991) er det en slik type forståelse, der man effektivt evner å se begreper som både objekter og prosesser som ligger til grunn for det de kaller suksessrik tankegang i matematikk.

DeMarois (1998) peker på at lagene ikke trenger tolkes som definitivt adskilte, men kontinuum, noe som gjør at en students forståelse i de ulike fasetten kan befinne seg i overgangen mellom forskjellige lag. Overgangen fra handlings- til prosessforståelse kan skje gradvis, noe som resulterer i at studenter og elever gjerne utviser tegn til begge lagene av forståelse i en og samme fasett. Overgangen fra prosess- til objektsforståelse er derimot mer plutselig, men også vanskeligere å gjøre.

Handling-prosess-objekt inndelingen av forståelse er på ingen måte unik for DeMarois og Tall (1996) sin modell. Tilsvarende inndeling benyttes blant annet i APOS-teorien (Action-Process-Object-Schema) (Arnon et al., 2014). Det som skiller DeMarois og Tall (1996) sin modell fra andre er derimot kombinasjonen av lag av forståelse og inndelingen av begrepet i ulike fasetter.

I modellen kombineres fasettene og lagene for å skape et bilde av en elevs begrepsforståelse. Begrepsbildet er i kontinuerlig utvikling og vi kan derfor ikke si at dette gir en avbildning av begrepsbildet slik det er, men slik det var på et gitt tidspunkt. DeMarois (1998) peker også på at ikke alle fasettene og lagene lar seg kombinere like godt. For eksempel er den numeriske fasetten mer primitiv i den forstand at den er sterkt knyttet til en punktvis forståelse, og dermed ikke egner seg like godt som for eksempelvis den symbolske til å betrakte funksjoner som sammenhenger eller objekter. Modellen tydeliggjør også at elever kan befinne seg på ulike lag av forståelse i de forskjellige fasettene for samme begrep.

3 Metode

For å kunne svare på forskningsspørsmålene i denne masteroppgaven har jeg vært avhengig av å samle inn data. I forbindelse med datainnsamlingen har en rekke valg og beslutninger vært nødvendige å fatte. I dette kapittelet vil jeg komme med en detaljert redegjørelse for valg og avveininger som er gjort i forbindelse med planlegging og gjennomføring av datainnsamling og analyse.

Jeg vil begynne med å presentere oppgavens forskningsdesign, deretter vil jeg legge frem de to forskningsmetodene jeg har valgt å benytte meg av, utformingen av disse og hvordan de er tenkt brukt i analysen. Avslutningsvis vil jeg gjøre rede for oppgavens troverdighet, generalitet og viktighet.

3.1 Casestudie

I følge Wellington (2015) er casestudie et vidt begrep og favner studier som tar for seg en situasjon, en hendelse, en gruppe mennesker, en klasse, en elev etc. og kan bestå av flere ulike metoder for datainnsamling. I denne masteroppgaven er casen jeg ønsker å undersøke en gruppe studenter på sitt første år ved lærerutdanningen og deres mentale bilde av begrepet funksjoner. Jeg vil beskrive dette som det Bryman (2016) kaller en eksemplifiserende case. Det vil si at casen er typisk for sin kontekst, og ikke for eksempel ekstrem eller unik, men utvalget som studeres kan betraktes som representativt eller typisk for populasjonen som studeres. For å gjennomføre denne undersøkelsen har jeg valgt å ta i bruk to former for datainnsamling: en skriftlig, matematisk test og individuelle intervju med fire utvalgte studenter. Bruken av to metoder for datainnsamling der den ene, intervjuet, er kvalitativ og den andre, testen, er kvantitativ gjør at metoden kan beskrives som blandede metoder (mixed methods) (Bryman, 2016).

I prosessen med utviklingen av de to instrumentene for datainnsamling har en tidligere studie vært en viktig kilde til ideer og inspirasjon. Siden denne masteroppgaven og den nevnte studien har store fellestrekk vil jeg aller først redegjøre for dette samt hvorfor denne oppgaven likevel er aktuell, før jeg gjør videre rede for de to metodene for datainnsamling.

3.2 En viktig kilde til ideer og inspirasjon

Den delen av det teoretiske rammeverket som vil danne hovedgrunnlaget for min analyse av data er DeMarois og Tall (1996) sin inndeling av begrepsforståelse i lag og fasetter. Dette rammeverket ble også brukt i DeMarois (1998) sin PhD-avhandling, der han forsket på hvordan collegestudenter, med tidligere dårlige erfaring med funksjoner, sin forståelse av funksjoner utviklet seg i løpet av et begynnerkurs i algebra. I den forbindelse ble det utviklet sett med oppgaver spesielt tilpasset å teste begrepsforståelse av funksjoner, samt måter for å analysere disse oppgave. Datainnsamlingen i min oppgave vil derfor ta utgangspunkt i det oppgavemateriale og analyseverktøyet som finnes i DeMarois (1998) sin avhandling. Selv om mye av det teoretiske rammeverket, analyseverktøyet og metoder for datainnsamling er lik med DeMarois (1998) er det også noen store forskjeller som gjør at denne masteroppgaven likevel er aktuell. DeMarois sin studie var en longitudinell studie som målte studentenes forståelse ved begynnelsen og avslutningen av et algebrakurs, med den hensikt å studere studentenes utvikling av funksjonsbegrepet. I min studie er det studentenes forståelse på et gitt tidspunkt, altså det utgangspunktet de bringer med seg inn i lærerutdanningen, som er fokus. Det er også vesentlige forskjeller mellom de to populasjonene som studeres. I DeMarois avhandling består populasjonen av studenter som beskrives å ha tidligere dårlige erfaringer med matematikk generelt og algebra spesielt. I denne studien er det lærerstudenter ved den nye, 5-årige, lærerutdanningen som studeres. Disse studentene har selv valgt å begynne på en utdanning for å bli matematikklærere og det er rimelig å anta at de ikke opplever matematikk som spesielt problematisk sammenliknet med jevnaldrende. I tillegg er ett av flere opptakskrav til denne utdanningen er karakteren 4 i gjennomsnitt i matematikk fellesfag (Samordna Opptak, 2017).

3.3 Matematisk test av funksjoner

Formålet med den skriftlige testen er todelt: 1) å danne et grunnlag for å vurdere studentenes begrepsbilde i seks av fasettene, nemlig skriftlig, numerisk, hverdagslig, notasjon, geometrisk og symbolsk. 2) å danne grunnlag for utvelgelsen av studenter til intervju. Oppgavene som er benyttet i testen er i stor grad hentet fra pre- og posttesten i Phil DeMarois sin PhD-avhandling (se DeMarois, 1998 Appendix). Da denne studien skal benytte seg av det samme analyseverktøyet for å analysere datamaterialet er det naturlig at også innsamlingen blir gjort på en liknende måte. Det er likevel gjort endringer på mange av oppgavene, og vanskelighetsgraden er justert noe ned. Endringene ble gjort på bakgrunn av at jeg antar at flere av oppgavene vil være ukjente for studentene ved lærerutdanningen, og at hensikten med denne studien ikke er å teste regneferdigheter, men forståelse. I DeMarois sin studie inkluderte begge testene en skala som skulle krysses av for hvert spørsmål som ble besvart og som skulle måle studentenes selvsikkerhet i arbeidet med besvarelsen på de ulike spørsmålene. Denne variabelen er utelatt fra dette prosjektet. I de kommende avsnittene vil jeg gjøre rede for de forskjellige oppgavene, hva de er ment til å måle og hvordan analysen av disse kan tenkes å foregå. I tabell 1 gis en oversikt over de ulike fasettene som testes i testen samt hvilke oppgaver de kan knyttes til (for fullstendig oversikt over oppgavene seg vedlegg 8.3 Matematisk test).

Fasett	**Oppgave**
Skriftlig	11, 12
Hverdagslig	1, 11
Symbolsk	2, 9, 11
Numerisk	3, 10, 11
Notasjon	5, 6, 7
Geometrisk	4, 8

Tabell 1 Oversikt over oppgaver fra testen og deres tilknytning til de ulike fasettene

3.3.1 Utforming av oppgaver og plan for analyse

Oppgave 1, 2, 3 og 4 er laget for å studere elevenes arbeid i henholdsvis den hverdagslige, symbolske, numeriske og geometriske fasetten. De fire spørsmålene er bygget opp på samme måte, se for eksempel oppgave 2 i figur 5. I oppgave a) blir studentene bedt om å produsere en funksjonsverdi basert på en x-verdi ved hjelp av en funksjonsmaskin, et funksjonsuttrykk, en tabell og en graf. Dersom studentene klarer dette er det en indikasjon på at studenten er på minimum et handlingsnivå i den aktuelle fasetten. I oppgave b) blir studentene bedt om å finne x-verdier basert på funksjonsverdier fra samme funksjonsmaskin, funksjonsuttrykk, tabell og graf som i oppgave a). Dette krever at elevene er i stand til å reversere prosedyrene fra a)-oppgavene. Riktig svar på disse oppgavene vil gi en indikasjon på at studentene er i stand til å se på funksjoner som prosesser i de respektive fasettene. I oppgave 3 og 4 har oppgave b) to riktige svar, dersom studenten oppgir begge svarene er dette en sterkere indikasjon på en prosessforståelse enn om bare en verdi oppgis.

2. Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 5$
a) Hva er funksjonsverdien(e) når x er 4?
b) Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er 1?

Figur 5 Oppgave 2 fra test

Oppgave 5, 6 og 7 er alle ment å teste forskjellige sider av notasjonsfasetten. I oppgave 5 testes studentene i om de klarer å gjenkjenne funksjonsnotasjonen og hvordan de tolker notasjonene $f(x)$, $y(x) = 2x$ og $a(b + c)$. I oppgave 6 skal studentene forklare om det er noen forskjell på $2f(3)$ og $3f(2)$. Her testes studentenes evner til å se på $f(2)$ som en funksjonsverdi og å skille dette fra multiplikasjon. Studenter som betrakter $f(2)$ som multiplikasjon kan tenkes å være på et før-handlingsnivå. Studenter som ser på $f(2)$ og $f(3)$ som funksjonsverdier uten å nyttiggjøre seg av en konkret funksjon vil være på et prosessnivå eller mer. I oppgave 7 testes studentene forståelse av tvetydigheten i notasjonen $f(x)$, studenter som her anser $f(x)$ som både funksjonsverdi og en regel kan å ha en proceptuell forståelse der de veksler mellom en objekt- og prosessforståelse.

I oppgave 8 presenteres studentene for åtte forskjellige grafer og skal merke av for hvilke de mener representerer funksjoner og beskrive fremgangsmåten de benytter, altså tester oppgaven deres forståelse i den geometriske fasetten. Noen av grafene vil være grafer studentene ikke har møtt på tidligere, hensikten med dette er å undersøke hvilke fremgangsmåter de velger i møte med nye situasjoner. Studenter som er avhengige av å forstå sammenhengen mellom variablene (f.eks. å kjenne til funksjonsuttrykket) for å kunne avgjøre om det er en funksjonssammenheng vil kunne plasseres på et handlingsnivå, mens studenter som fokuserer på entydighet, vil kunne være på et prosessnivå eller høyere.

Oppgave 9 tester den symbolske fasetten og inneholder ni forskjellige funksjonsuttrykk og studentene bes merke de som representerer funksjoner, samt oppgi hvilken fremgangsmåte de benytter seg av. Også her vil studentene støte på grafer de ikke tidligere har møtt. Studenter på som ser på funksjoner som handlinger kan tenkes å gjenkjenne bare de funksjonene der operasjonen for å gjøre variabelverdien om til funksjonsverdi er tydelig. Studenter som fokuserer på et entydig forhold mellom variabel og funksjonsverdi vil anslås til å ha en prosessforståelse eller høyere.

I oppgave 10 skal elevene skille mellom tabeller som representerer funksjoner og andre tabeller, og tester på denne måten den numeriske fasetten. En indikasjon på at elever har en handlingsforståelse kan være at han eller hun bare gjenkjenner tabellene der det er en tydelig sammenheng mellom x-verdier og funksjonsverdier, mens elever på prosessnivå eller høyere vil ikke være avhengige av å kjenne til sammenheng, men heller ta avgjørelser på bakgrunn av entydighet eller liknende.

I oppgave 8, 9 og 10 skal studentene identifisere funksjoner og diskriminere mellom funksjoner og ikke-funksjoner, dette er to av de fire handlignene Sierpinska (1992) omtaler som handlinger av forståelse. Videre i analysen vil disse oppgavene omtales som identifiserings- og diskrimineringsoppgaver.

Oppgave 11 tester den hverdagslige fasetten, den numeriske fasetten og studentenes evne til å koble disse sammen med sin egen definisjon av funksjoner. Hovedhensikten med oppgaven er å undersøke hva studentene legger til grunn for at to funksjoner skal være like. Studenter med en handlingsforståelse av begrepet kan fokusere på at prosedyrene for å komme frem til funksjonsverdien basert på x-verdi er forskjellig i de to funksjonsmaskinene. Studenter på prosessnivå eller høyere vil fokusere på at samme x-verdi i de to maskinene alltid vil produsere samme funksjonsverdi og at funksjonene dermed er like.

Oppgave 12 handler om studentenes skriftlige definisjon av begrepet funksjon og tester således studentenes forståelse langs den skriftlige fasetten. På grunn av at ikke alle studentene nødvendigvis har blitt presentert for definisjoner i like stor grad i sin skolegang legger oppgaven også opp til at de kan gi en beskrivelse. Oppgaven er plassert til sist i testen for studentenes svar på denne oppgaven ikke skal påvirke hvordan de svarer videre i testen.

3.4 Intervju

I denne masteroppgaven ønsker jeg å undersøke studenters forståelse av funksjonsbegrepet, men en slik forståelse er ikke direkte observerbar. Ifølge Wellington (2015) gir intervjuet oss muligheten til å studere ikke-observerbare fenomener som tanker, synspunkter og oppfatninger hos intervjuobjektet og få tak i deres syn på verden. Intervjuer plasseres langs et kontinuum ut fra graden av struktur, fra det strukturerte til det ustrukturerte eller åpne intervjuet. I mellom disse ytterpunktene finner vi det semi-strukturerte intervjuet med større eller mindre grad av struktur (Postholm & Jacobsen, 2011). I et strukturert intervju er spørsmålene fastsatt på forhånd og det finnes ikke rom for oppfølgingsspørsmål eller avsporinger. Slike intervjuer har som styrke at resultater fra ulike intervjuer i stor grad er sammenlignbare, men de gir ikke rom for å forfølge interessante tanker og ideer som dukker opp underveis. I motsatt ende av skalaen har det åpne intervjuet ingen plan for gjennomføring og det er ifølge Postholm og Jacobsen (2011) bare et vagt skille mellom ustrukturerte intervjuer og deltakende observasjon. Disse intervjuene kan avdekke interessante meninger og opplevelser hos intervjuobjektet, men det kan være vanskelig å forutsi hvilke spor samtalen vil følge, og resultater fra ulike intervjuer kan derfor være vanskelige å sammenlikne. I det ustrukturerte intervjue flyttes deler av kontrollen over intervjuet fra forskeren over til intervjuobjektet (Wellington, 2015). Jeg har valgt å benytte meg av semi-strukturerte intervju, med stor grad av struktur. Det vil si at det i forkant av intervjuene er laget en intervjuguide bestående av matematiske oppgaver som er styrende og ligger til grunn for intervjuet, det er likevel rom for å stille oppfølgingsspørsmål, avklarende spørsmål eller på andre måter avvikte den planlagte progresjonen dersom noe interessant skulle dukke opp. De planlagte spørsmålene og oppgavene i intervjuguiden og måten disse er knyttet til den planlagte analysen gir likevel en forsikring om at intervjuene resulterer i data som er hensiktsmessig og mulig å analysere.

Spørsmålene i intervjuguiden er i likhet med spørsmålene i testen hentet fra DeMarois (1998, Appendix C & D). En del endringer er likevel gjort. Blant annet er de grafiske fremstillingene av funksjoner som grafer skjermdumper fra graftegneren i Geogebra. De forskjellige funksjonsuttrykkene er byttet ut, mens strukturen og hensikten med de forskjellige oppgavene er beholdt. En del oppgaver, blant annet de som knyttes til testing av grenser mellom ulike fasetter er utelatt fra min intervjuguide, siden dette ikke er et fokusområde for denne oppgaven. For en mer detaljert innføring i de enkelte oppgavene og hensikten bak hver enkelt se neste delkapittel. I oppgavene, oppfølgingsspørsmål og oppklaringsspørsmål ble fem typer spørsmål forsøkt unngått, for dermed å påvirke intervjuobjektet i minst mulig grad. Dette dreier seg om kombinerte spørsmål, to-i-ettspørsmål, restriktive spørsmål, ledende spørsmål og ladde spørsmål (Wellington, 2015, s146-147). Til tross for at dette var fokus under intervjuet var det for en fersk forsker ikke til å unngå at slike spørsmål noen ganger dukket opp og dette blir tatt hensyn til i utvelgelsen av datamateriale til analyse. Det vil si at dersom det er mistanke om stor påvirkning fra intervjuers side vil det aktuelle svaret ikke tas med i analysen eller det vil bli kommentert eksplisitt dersom det tas med.

3.4.1 Utforming av oppgaver til intervju og plan for analyse

Under intervjuet jobbet studentene med oppgaver og forklarte sine fremgangsmåter (se vedlegg 8.5 Oppgaver fra intervju). Samtidig hadde jeg som forsker mulighet til å stille oppfølgingsspørsmål, avklare tvetydigheter og dykke dypere i studentene forståelse. I tabell 2 ser vi en oversikt over hvilke oppgaver i intervjuet som knyttes til hvilken fasett. Oppgaver i parentes er oppgaver som også benyttes i testen. Under intervjuet jobbet studentene først med en oppgave som beskrives nedenfor, deretter ble alle oppgavene fra testen gjennomgått, derfor har oppgavenumrene forskjøvet seg en opp fra testen, det vil si at når oppgave 2 står i parentes i tabellen er dette oppgave 1 fra testen som under intervjuet blir gjennomgått som nummer 2, i analysedelen av oppgaven vil oppgave 1 fra testen refereres til som nettopp oppgave 1 fra testen, mens oppgave 1 som vi straks skal se nærmere på vil bli omtalt som oppgave 1 fra intervjuet. Årsaken til at de samme oppgavene benyttes både i test og intervju er et forsøk på triangulering, dette vil jeg kommer tilbake til i kapittel 3.7.

Fasett	**Oppgave**
Muntlig	(12), (13), 14
Hverdagslig	(2), (12), 18
Symbolsk	(3), (10), (12), 14, 15, 19
Numerisk	(4), (11), (12), 17, 19
Notasjon	(6), (7), (8)
Geometrisk	(5), (9), 16, 19

Tabell 2 Oversikt over oppgaver fra intervju og hvilke fasetter de er ment å kunne knyttes til

I oppgave 1 i intervjuet skulle elevene sortere 21 kort med grafer, algebraiske uttrykk, funksjonsmaskiner og tabeller i to ulike bunker: funksjoner og ikke funksjoner. Etter sorteringen blir bunkene gått igjennom i fellesskap og studenten vil bli oppfordret til å forklare sorteringen av hvert enkelt kort. Flere av kortene vil være av samme funksjon i flere representasjoner, og studentene vil spørres om de kan koble sammen like funksjoner blant kortene. Hensikten med denne oppgaven er å teste studentenes evne til å gjenkjenne og skille funksjoner i fasettene symbolsk, numerisk, hverdagslig og geometrisk. Dette gir også mulighet til å se om studentene kan identifisere samme funksjon innen de ulike fasettene. Det er også ønskelig å undersøke om studentene bruker forskjellige fremgangsmåter og resonnement i de forskjellige fasettene. På samme måte som for oppgave 8, 9 og 10 på den skriftlige testen vil denne oppgaven omtales som en identifiserings- og diskrimineringsoppgave videre i analyse og drøfting da oppgavene baserer seg på Sierpinskas (1992) sine to handlinger av forståelse, identifisering og diskriminering.

I del to av intervjuet (oppgave 2-13) vil alle spørsmålene fra testen bli gjennomgått muntlig og studenten svarer på disse på nytt. Dette gjøres for å teste styrken i svarene fra testen. Oppgave 12 fra testen blir nå brukt til å teste studentenes forståelse i den muntlige fasetten.

Dersom studentene har problemer med å besvare oppgave 6 fra testen (i tabell 2 (7)), der de skal avgjøre om uttrykkene $2f(3)$ og $3f(2)$ representerer det samme eller noe forskjellig, vil de bli tilbudet et ark med en tabell, et funksjonsuttrykk og en graf dersom de står fast. Dette er ment som en hjelp til studentene for å kunne resonere ved hjelp av eksempler.

I oppgave 14 testes studentene innenfor notasjonsfasetten. Her blir de bedt om å gjøre rede for om de to funksjonsuttrykkene $f(x) = 3(2x - 3)$ og $g(x) = 6x - 9$ representerer samme eller forskjellige funksjoner (med unntak av navnene f og g). Studenter på handlingsnivå vil betrakte de to uttrykkene som forskjellig, da prosedyren som brukes for å gjøre x-verdiene om til funksjonsverdier er forskjellige i de to. Studenter som er i stand til å se på funksjoner som prosesser vil kunne se på de to funksjonene som like da lik x-verdi i de to funksjonene gir lik funksjonsverdi.

Oppgave 15 omhandler notasjonsfasetten og den symbolske fasetten. I 15b og 15e testes notasjonsfasetten ved at studentene skal gi mening til uttrykkene. I 15b utføres en handling på funksjonene, h trekkes fra g, og i 15e fungerer funksjonen h som uavhengig variabel i funksjonen g. Studenter med en objektsforståelse av funksjoner i notasjonsfasetten vil kunne gi mening til notasjonene og gjennom samtale vise seg i stand til å utføre handlinger på funksjonene. Studenter med en objektsforståelse av funksjoner i den symbolske fasetten vil kunne kombinere uttrykkene og skape et nytt uttrykk for $f(x)$ i oppgave b.

Oppgave 15. La $g(x) = 2x + 3$ og $h(x) = x^2 - 1$.
a. Hva er $g(5)$? $h(5)$?
b. Hva betyr $f(x) = g(x) - h(x)$?
c Hva blir $f(2)$?
d. Hva blir $f(x)$?
e. Hva betyr $g(h(x))$?

Figur 6 Oppgave 15 fra 8.5 Oppgaver fra interv
Oppgaven er ment å teste studentenes forståelse i notasjonsfasetten og den symbolske fasetten.

Oppgave 16 ser på studentenes geometriske forståelse, her blir de først bedt om å lese av verdier for to forskjellige grafer i samme koordinatsystem. Her vil studentene ha mulighet til å vise handlingsforståelse og prosessforståelse gjennom å lese av fra grafen og reversere prosessen og lese av motsatt vei. Deretter defineres $h(x) = f(x) - g(x)$, og studentene bes finne $h(4)$. Avslutningsvis blir studentene bedt om å forklare hvordan $h(x)$ ville sett ut. Studenter med en objektsforståelse i den geometriske fasetten vil kunne beskrive grafen til den sammensatte funksjonen ved hjelp av grafene for f og g.

I oppgave 17 testes studentenes forståelse i den numeriske fasetten. Handlingsnivå indikeres ved at studentene klarer å lese av de to tabellene for en gitt x-verdi. Studentene blir så bedt om å finne en funksjonsverdi for den sammensatte funksjonen og om å avgjøre om to funksjonsverdier for den sammensatte funksjonen er mulig å finne ved hjelp av tabellen. Den ene av disse vil ikke være mulig å finne. Resonnering rundt disse oppgavene vil gi studentene mulighet til å vise forskjellige nivåer av forståelse i den numeriske fasetten ved å kombinere de forskjellige tabellene.

Oppgave 18 tar for seg den hverdagslige fasetten. Studentene presenteres for to funksjonsmaskiner og testes først i om de klarer å komme frem til funksjonsverdier basert på inn-verdier for de to maskinene. Riktige svar her indikerer et minimum av et handlingsnivå av forståelse. Videre blir studentene utfordret på å komme frem til verdier for sammensatte funksjoner ved at en ny maskin beskrives: «Vi lager en ny maskin, h, denne maskinen tar inn-verdien, og gjør samme prosess som de to maskinene f og g, og legger så sammen ut-verdiene, hva blir da ut-verdien når du putter inn 4?». Studentene blir også bedt om å beskrive hvordan en slik maskin ville fungert. Studenter som klarer å komme frem til rette verdier kan befinne seg et sted langs kontinuumet mellom handling og prosess, mens dersom de klarer å beskrive den sammensatte funksjonsmaskinen vil dette kunne tyde på en objektsforståelse, da de klarer å utføre handlinger på funksjonene i denne fasetten.

Oppgave 19 er den siste oppgaven i intervjuet. Her testes studentenes evne til å veksle mellom ulike fasetter ettersom hva som egner seg best i situasjonen. Oppgavene inneholder en graf, et funksjonsuttrykk og en tabell som alle representerer samme andregradsfunksjon. Studentene skal svare på 7 deloppgaver knyttet til funksjonen og blir bedt om å oppgi hvilken representasjon de benytter seg av i hvert enkelt delspørsmål. Studentenes valg av fremgangsmåte, altså hvilke representasjoner de benytter seg av i de ulike deloppgavene vil være interessant å sammenlikne med hvilken forståelse de utviser i de forskjellige fasettene.

For eksempel om dypere forståelse innen en fasett vil gjøre at man i større grad benytter seg av denne eller liknende.

3.5 Gjennomføring av datainnsamling

Den første delen av datainnsamlingen, den matematiske testen, ble foretatt i en matematikklasse ved Grunnskolelærerutdanningen trinn 5-10 ved en utdanningsinstitusjon i Norge. Det ble av faglærer gitt dispensasjon til å gjennomføre datainnsamlingen under en forelesning i matematikk, i perioden *før* de skulle lære om funksjoner. Studentene visst ikke om testen på forhånd. Seansen i klasserommet startet med at testen ble presentert og studentene ble gjort oppmerksomme på at deltakelse var frivillig. Det ble også opplyst om at testen ville bli returnert ferdig rettet til de studentene som ønsket det, og kunne på den måten være en hjelp i deres eget læringsarbeid. Det ble også gitt beskjed om at det i etterkant av testen var aktuelt med intervju av fire studenter som hadde deltatt på testen. De som ønsket å delta på dette intervjuet kunne krysse av for dette på testarket og intervjudeltakere ville bli kompensert med et gavekort til en verdi av 250,- Testen ble så delt ut på ark til studentene (se vedlegg 8.3 Matematisk test) og de fikk om lag 25 minutter til rådighet til å besvare spørsmålene. Den aktuelle klassen besto av totalt 65 studenter, og 43 av disse var til stede den aktuelle forelesningen. Alle de oppmøtte valgte å ta del i undersøkelsen. Testene ble så samlet inn, rettet, svarene registrert elektronisk. Studenter som var aktuelle for intervju ble kontaktet. I etterkant av intervjuene ble testene returnert til studentene.

12 studenter hadde krysset av for at de kunne tenke seg å stille til intervju. Blant disse 12 finner vi en god del av studentene som skåret høyt, poengmessig, på den skriftlige testen. Som nevnt i tidligere er denne oppgaven ment å være en eksemplifiserende case-studie. Utvelgelsen av studenter til intervju er dermed gjort for å best mulig å representere den totale studentgruppen, dette innebærer blant annet at de ikke skiller seg ut markant i den ene eller andre retningen hva angår prestasjoner på den skriftlige testen. Unntaket er Dina som hadde en poengsum på 22,5, noe var et stykke under gjennomsnittet (28,3). Årsaken til at Dina likevel ble valg ut var at hun hadde latt være å svare på flere av spørsmålene under den skriftlige prøven noe som førte til den lave poengsummen, samtidig som hennes svar på andre av spørsmålene så ut til å kunne gi grunnlag for interessante resultater i intervjuet. Et annet hensyn som ble tatt i utvelgelsen var muligheten til å stille til intervju i løpet av en noe begrenset tidsperiode, da intervjuene skulle måtte gjennomføres før studentene skulle i gang med temaet funksjoner i egen utdanning.

Alle intervjuene fant sted i løpet av ti dager etter gjennomføring av testen og studentene ble kompensert med et gavekort pålydende 250,- for innsatsen. Intervjuene fant sted i egnede rom på studentenes egen campus. Dette for å skape trygge omgivelser for studentene under intervjusituasjonen. Intervjuene var antatt å vare om lag én time, men ble i praksis noe lengre og varte fra én time og 10 minutter til én time og 30 minutter. Det ble gjort lydopptak av intervjuene og disse ble, i tråd med godkjenningen fra NSD (se vedlegg 8.1 Godkjenningsbrev NSD), oppbevart på en passordbeskytet harddisk. Lydopptakene ble deretter transkribert og anonymisert. Alle navn som fremkommer i oppgaven er anonymiseringer og studentene er ikke gjenkjennbare. Alt datamateriale har blitt oppbevart i henhold til godkjenningen og vil slettes ved prosjektslutt. De fire studentene signerte samtykkeskjema i forbindelse med intervjuet (se vedlegg 8.2 Samtykkeskjema intervju) der de også fikk opplysninger om anonymisering, hensikten med prosjektet, retten til når som helst å trekke seg fra prosjektet etc.

Det ble også tatt enkelte notater underveis i intervjuet. Dette gjaldt særlig studentenes svar på oppgave 1, altså sortering av de forskjellige lappene, samt hvilke lapper de knyttet sammen og mente representerte samme funksjon.

Hensikten med intervjuene var å avdekke studentenes forståelse gjennom deres svar på de ulike spørsmålene, det var derfor ikke nødvendig med detaljerte observasjoner i forbindelse med kroppsspråk og transkriberingen gjaldt kun hva som ble sagt i intervjuet. Transkriberingsnøkkelen som ble brukt er egenutviklet og svært enkel:

… indikerer en pause (stillhet) inntil fem sekunder

[14:30-14:40] pause (stillhet) i det indikerte tidsrommet, mer enn fem sekunder.

M: utsagn starter [C: utsagn] utsagn fortsetter person C kommer med et utsagn mens person M snakker. Indikerer at begge personene snakker samtidig.

[U:X] Utydelig tale, anslagsvis X antall ord.

[…] Deler av utsagn før eller etter er klippet bort da det ikke er aktuelt eller relatert til situasjonen.

Videre ble alle utsagn nummerert fortløpende for å gjøre det enklere å holde oversikt over hvor i intervjuet eventuelle segmenter er hentet fra.

3.6 Koding og analysering

Etter at datainnsamlingen var gjennomført satt jeg igjen med et stort datamateriale i form resultater fra 43 gjennomførte tester og om lag 90 sider med transkripsjoner av intervju. Resultatene fra den skriftlige testen ble lagt inn i et regneark i Microsoft Excel med koder for enkelte av oppgavene og hele besvarelser for de oppgavene der det var snakk om tekstsvar. For eksempel vil spørsmål 1a ha følgende koder: R- rett svar, G – galt svar, I – ikke besvart. Ved hjelp av dette regnearket ble det gjennomført en hovedsakelig deskriptiv, univariat analyse. Det vil si at de ulike spørsmålene ble behandlet som variable og de ulike kodene som verdier (Postholm & Jacobsen, 2011). For oppgavene med tekstsvar ble ulike kategorier for svar utarbeidet slik at det også her var mulighet opptelling. For enkelte av oppgavene ble også svarene sett i lys av svar fra andre oppgaver.

For å analysere den store mengden med transkripsjoner var det nødvendig med en omfattende systematisering og koding av datamateriale. Denne kodingen foregikk i to omganger. I den første kodingsprosessen ble alle transkripsjonene gjennomgått, segmentert og kodet etter hvilken oppgave det ble arbeidet med og hvilke fasetter som var i spill i løpet av segmentet. Deretter ble de ulike segmentene tilhørende samme fasett samlet i egne dokumenter for hver av studentene. Disse dokumentene ble så kodet på nytt, i den andre runden med koding, ut fra tegn på ulike lag av forståelse, spesielle fremgangsmåter etc. Disse kodede dokumentene dannet så grunnlaget for analysen av de forskjellige studentenes forståelse i hver av fasettene.

3.7 Troverdighet, generalitet og viktighet

Kriteriene validitet og reliabilitet brukes ofte for å beskrive kvalitet i forskning. Disse begrepene og innholdet i dem er utformet med hensyn til kvantitativ forskning, og det kan diskuteres i hvilken grad de egner seg til å måle kvalitet ved kvalitativ forskning (Bryman, 2016). Selv om denne studien kan beskrives som en blanding av metoder er det den kvalitative delen som har hovedfokus, mens den kvantitative delen er ment til å beskrive heller enn å forklare, samt danne grunnlag for utvelgelse av informanter til intervju. Jeg vil derfor heller benytte meg av Schoenfeld (2007) sine tre dimensjoner av forskning:

troverdighet, generalitet og *viktighet*. Jeg vil nå gjøre greie for de tre aspektene samt hvordan denne oppgaven kan vurderes ut ifra disse.

Schoenfeld oppsummerer troverdighetsaspektet med spørsmålet «*Hvorfor skal man tro på det forfatteren sier?*» (Schoenfeld, 2007, s. 81 egen oversettelse). Jeg har i denne studien etterstrebet å gjøre et grundig, detaljert og dokumentert arbeide i de forskjellige fasene av studien. Dette inkluderer blant annet at oppgavene studentene jobbet med på testen og under intervjuet var nøye planlagt og utformet og det forelå en klar plan på hvordan datamateriale fra de ulike oppgavene skulle analyseres i etterkant. Tolkningene som er gjort i analysekapittelet av oppgaven er grundig gjort rede for gjennom empiri, teori og tidligere forskning. Til tross nøye planlegging ser jeg i ettertid at enkelte av oppgavene kunne vært utformet mer presist. Dette gjelder oppgave 7b og 10e fra testen og lapp nummer 18 i oppgave 1 i intervjuet. I oppgave 7b skulle studentene ta stilling til om notasjonen $f(x)$ representerer produktet av f og x, noe som kan tolkes både som produktet av en multiplikasjon og produktet av en prosess. I 10e var en tabell plassert sammen med teksten «I denne tabellen er funksjonsverdien alltid dobbelt så stor som x-verdien.». To av elevene ga skriftlig uttrykk for at de mente at -4 ikke var dobbelt så stort som -2. Dette kan også ha påvirket svarene til andre studenter til tross for at de ikke gav uttrykk for det. På lapp 18 var det en funksjonsmaskin med teksten «overse inn-verdien, trekk fra en». Flere av studentene hadde utfordringer med å forstå hva denne maskinen egentlig gjorde. Siden denne oppgaven var en del av intervjuet var det her mulighet til å oppklare misforståelser.

Triangulering går ut på å studere samme fenomen fra ulike vinkler, ved hjelp av ulike typer data. Ved å anvende flere datakilder kan disse være med på å bekrefte eller utfylle hverandre og på denne måten styrke troverdigheten i resultatene (Schoenfeld, 2007). I denne studien er triangulering gjennomført ved at alle oppgavene studentene jobbet med under testen også blir gjennomgått i intervjuene. Også oppgavene som gikk på anvendelser av de forskjellige fasettene for å finne funksjonsverdier eller variabelverdier ble også testet på ulike tidspunkt i intervjuet og med ulike funksjoner, både i gjennomgangen av testen og ved oppgave 15-18 hvor studentene jobbet i de forskjellige fasettene. Oppgavene der studentene skulle skille mellom funksjoner og ikke funksjoner ble også gitt på to forskjellige måter: ved fasettene hver for seg (oppgave 8-10 fra testen) og flere fasetter samtidig (oppgave 1 fra intervjuet).

En annen side ved forskningen som kan være med å styrke troverdigheten er i hvilken grad studien er replikerbar (Schoenfeld, 2007). Gjennom grundige redegjørelser for teoretisk rammeverk, innsamling av data og analyse i studien samt vedlagte oppgaver til de ulike delene av datainnsamlingen vil jeg hevde at de praktiske sidene ved studien er mulige å gjenskape for andre forskere, men uten at dette garanterer å generere de samme resultatene.

Videre styrkes troverdigheten i oppgaven ved at resultatene knyttes opp mot, og sammenliknes med tidligere forskning.

Generalitetsdimensjonen i forskningen illustreres med spørsmålet «*Hvilke situasjoner eller kontekster er forskningen gjeldene for?*» (Schoenfeld, 2007, s. 81 egen oversettelse). Med andre ord, er forskningen overførbar, og i hvilken grad? Bassey (1999) skiller mellom tre typer generalisering: vitenskapelig, statistisk og «fuzzy» generalisering. De to første typene er generaliseringer som henholdsvis sier *a fører til b*, eller *i x % av tilfellene fører a til b*. Slike typer generaliseringer er det ikke mulig å trekke fra en studie som dette. «Fuzzy» generaliseringer er generaliseringer av typen «a *kan* føre til b». Denne typen generaliseringer baserer seg på empiriske funn fra forskningen og innehar en grad av usikkerhet. «Fuzzy» generalisering åpner for at funnene også kan gjelde i andre, liknende, situasjoner, men gir ingen garantier. Spørsmål vi da må stilles oss er om det er sider ved denne casestudien som gjør resultatene overførbare til andre situasjoner. For alle studenter ved Grunnskolelærerutdanningen 5-10. trinn gjelder de samme opptakskravene til karakterer i norsk, matematikk og antall skolepoeng. Samtidig vil de fleste av disse studentene ha gjennomført videregående skole i Norge, med nasjonale læreplaner i de ulike matematikkfagene noe som sikrer at de i stor grad kommer til utdanningen med samsvarende faglig bakgrunn. Også ved lærerutdanningene er en felles rammeplan gjeldene for alle norske utdanningsinstitusjoner (Forskrift om plan for grunnskolelærerutdanning trinn 5–10, 2016) noe som bidrar til at også opplæring i lærerutdanningen er nokså lik på tvers av institusjoner. Dette igjen fører til at studentenes tidligere lærere i stor grad kommer fra samme tradisjon. Også læreverkene som benyttes, både i grunnskolelærerutdanningen og i videregående er begrenset og følger samme pensum. Alle disse faktorene tilsier at studenter ved grunnskolelærerutdanningene på mange måter kan betraktes som en nokså homogen masse, til tross for individuelle forskjeller blant studenter og læresteder. Utvalget av studenter til intervju er også med å styrke overførbarheten av studien ved at det er gjort med den hensikt å eksemplifisere, og dermed innebærer studenter ikke er ekstreme hverken i den ene elle andre retningen, men presterer på nivå med de fleste andre. Resultatene som avdekkes i denne studien kan dermed tenkes å også finnes andre steder.

Viktigheten av studien oppsummeres med spørsmålet «*Hvorfor skal man bry seg?*» (Schoenfeld, 2007, s. 81 egen oversettelse), og omhandler på hvilken måte studien har betydning for teori og praksis. Dette har blitt omtalt tidligere, men en oppsummering følger her.

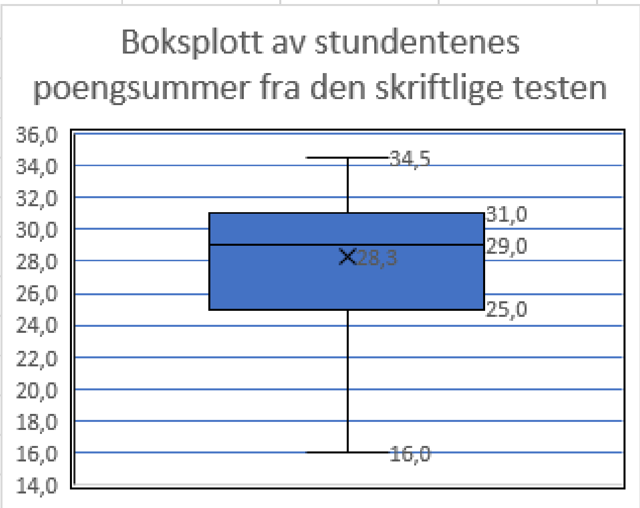
Grunnskolelærerutdanningen har de siste årene gjennomgått store endringer fra å være en fireårig profesjonsutdanning til å bli en femårig masterutdanning (Kunnskapsdepartementet, 2016), og inntakskravet i matematikk har blitt økt fra tre til fire i matematikk fellesfag, eller krav om minst ett av fagene S1, S2, R1 eller R2 (Samordna Opptak, 2017). Store samlingsstudier viser at lærerens faglige kunnskap i matematikk har innvirkning på elevenes læring (Hill et al., 2005; Nordenbo et al., 2008). Funksjonsbegrepet har en viktig plass i skolematematikken i dag, som et av seks hovedområder i matematikk fellesfag. Derfor vil en studie av lærerstudenters forståelse av nettopp dette begrepet være av verdi. Ved å gjennomføre studien før studentene møter begrepet i egen utdanning vil beskrivelsen av studentenes forståelse kunne være av verdi for ansatte i lærerutdanningen, ved at den kan være med å skape et bilde av forståelsen studentene bringer med seg inn i utdanningen. Samtidig vil studien ha verdi ved å måle studentenes forståelse en tid etter avsluttet undervisning om tema i videregående skole. På denne måten vil den skille seg fra en eventuell studie av elever i videregående sin forståelse, der resultatene i større grad vil kunne være påvirket av om elevene nettopp har jobbet med begrepet eller ei.

4 Analyse

Jeg vil i dette kapitelet ta for meg datamaterialet fra den skriftlige testen og de fire intervjuene hver for seg. I kapittel 4.1 vil jeg ta for meg svarene fra testen og presentere studentenes besvarelser. Videre vil jeg i kapittel 4.2 ta for meg datamateriale fra intervjuene med fire studenter og ved hjelp av empiri gjøre rede for deres forståelse i de ulike fasettene. Avslutningsvis vil jeg ta for meg én og én student og oppsummere deres forståelse i tråd med DeMarois' og Talls (1996) modell.

4.1 Analyse av skriftlig test

Jeg vil nå ta for meg besvarelsene fra den skriftlige, individuelle testen som ble gjennomført av studentene ved Grunnskolelærerutdanningen for trinn 5-10. Testen ble gjennomført i forkant av at studentene møtte begrepet funksjoner i lærerutdanningen. Besvarelsene på testen ble rettet, registrert, og deretter levert tilbake til studentene, for på den måten å kunne gi de en indikasjon på hvilke deler av funksjonsbegrepet de mestrer, og slik være en hjelp når de skal i gang med videre læring av begrepet. I forbindelse med rettingen av besvarelsene ble det gitt en poengscore til hver besvarelse der høyest antall oppnåelige poeng var 45. Det ble gitt poeng ved rett svar, og i noen tilfeller halve poeng ved delvis rett svar eller begrunnelse. I oppgavene som dreier seg om diskriminering mellom funksjoner og ikke-funksjoner, oppgave 8, 9 og 10, ble det gitt poeng både når studentene satt ring rundt for eksempel en graf som representerte en funksjon, og når det ikke var satt ring rundt de som ikke representerte funksjoner. Dersom oppgaven ikke var besvart i det hele tatt ble det ikke gitt noen poeng.



Figur 7 Boksplott over poengsummene fra den skriftlige testen som viser sentrale verdier som gjennomsnitt, median kvartiler og største og minste verdi

Fag	Antall
2P/2P-Y	12/5, totalt 17
2T	2
S1/S2	2/8 totalt 10
R1/R2	5/6 totalt 11
Ikke oppgitt	3
Totalt	43

Tabell 3 Fordeling av studentsvar på spørsmål om siste fullførte matematikk emne/fag

Poengsummene varierte fra 16 til 34,5 med et gjennomsnitt på 28,3 og et standardavvik på 4,1. Dette gir likevel ikke et helt riktig bilde av helheten da studenten som oppnådde 16 poeng skiller seg veldig fra de andre og nest laveste poengsum var 22. Boksplott-diagrammet i figur 7 viser også spredningen og sentrale verdier ved poengsummene.

Deltakelse på testen var frivillig, og av de totalt 43 studentene som møtte opp til forelesningen valgte alle å gjennomføre og levere testen. For å kunne se hva slags tidligere erfaring studentene hadde med matematikk ble de bedt om å oppgi siste fullførte emne eller fag i matematikk. fordelingen av studentsvarene kan sees i tabell 3. Studentene fordelte seg nesten likt mellom studenter med matematikk fellesfag (2P/2P-Y/2T) og studenter med matematikk programfag (S1/S2/R1/R2) med henholdsvis 19 og 21 studenter.

4.1.1 Funksjoner i fire fasetter

I de fire første oppgavene i testen bestod av en funksjonsmaskin, et funksjonsuttrykk, en tabell og en graf og studentene skulle finne funksjonsverdi basert på x-verdi/inn-verdi i a-oppgavene for så å finne verdien til x/inn-verdi fra en gitt funksjonsverdi i b-oppgavene. De to b-oppgavene, 3b og 4b, hadde to mulige svar. Oppgavene var ment å teste elevene innen den hverdagslige, den symbolske, den numeriske og den geometriske fasetten. Tabell 4 under gir en oversikt over svarene til studentene på de forskjellige oppgavene.

Spørsmål	Riktig/Begge/Galt/ikke besvart
1a (funksjonsmaskin): Hva blir ut-verdien(e) til funksjonsmaskinen når vi putter inn 5?	38/-/5/0
1b Hva var inn-verdiene dersom vi får ut 36?	37/-/4/2
2a (funksjonsuttrykk) er funksjonsverdien(e) når x er 4?	41/-/1/1
2b Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er 1?	23/-/18/2
3a (tabell) Hva er funksjonsverdien(e) når x er -1?	39/-/2/2
3b (to svar) Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er -1?	31/7/2/3
4a (graf) Hva er funksjonsverdien(e) når x er -1	40/-/0/3
4b (to svar) Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er 2?	19/14/7/3

Tabell 4 Oversikt over studentenes svar på oppgave 1-4 på den skriftlige testen

Fra tabellen ser vi antallet studenter som finner rett funksjonsverdi/ut-verdi for en gitt x-verdi/inn-verdi er ganske stabilt for de forskjellige representasjonene med 38-41 (88,4-95,4%) riktige svar, med færrest for funksjonsmaskinen og flest for funksjonsuttrykket. Når studentene skulle utføre motsatt operasjon og finne x-verdier/inn-verdier for funksjonsverdien blir forskjellene større. Mens 37 av studentene (86%) klarte å finne rett inn-verdi for ut-verdien for funksjonsmaskinen var det bare 23 stykker (53,5%) som klarte det samme for funksjonsuttrykket. Av de 18 som svarte feil på 2b hadde 10 stykker funnet funksjonsverdien for $f(1)$. For tabellen i 3b og grafen i 4b hadde henholdsvis 38 (88,4%) og 33 (76,7%) funnet minst ett rett svar. Bare 7 (16,3%) studenter fant begge de riktige svarene i tabellen mens dobbelt så mange, altså 14 (32,6%) studenter, leste av begge verdiene på grafen.

4.1.2 Identifisering og diskriminering i tre fasetter

I oppgave 8, 9 og 10 ble studentene presentert for henholdsvis åtte grafer, ni funksjonsuttrykk og fem tabeller og ble bedt om å sette ring rundt de som de mente representerte funksjoner. Studentene ble også bedt om å gjøre rede for fremgangsmåten de brukte i hver av oppgavene.

Den geometriske fasetten

I oppgave 8, der studentene skulle skille identifisere hvilke grafer som representerte funksjoner fordelte studentsvarene seg slik som vist i tabell 5.

Spørsmål (rett svar) / type graf	Rett/Galt
8a (ja) konveks parabel.	39/4
8b (ja) konstant, f(x)=k	23/20
8c (nei) liggende parabel	29/14
8d (ja) delt forskrift (lineær og parabel)	4/39
8e (ja) delt forskrift m/ «hopp»	4/39
8f (ja) lineær	40/3
8g (nei) / x=2	26/17
8h (nei) / loop	42/1

Tabell 5 Oversikt over studentenes svar i oppgave 8 fra testen som gikk ut på å avgjøre om åtte grafer representerte funksjoner eller ikke. Ja – funksjon, nei – ikke funksjon.

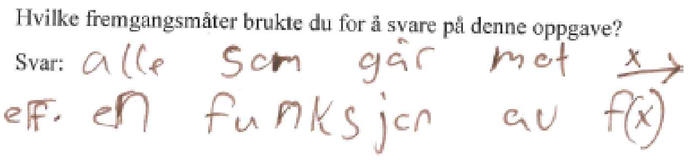
Fra tabellen ser vi at de fleste studentene, henholdsvis 40 (93%) og 39 (90,7%) identifiserte den lineære funksjonen og parabelen som funksjoner. Dette er funksjoner studentene gjerne har mye tidligere erfaringer med. Tidligere kjennskap til formen til en parabel kan være en mulig forklaring på hvorfor hele 14 studenter (32,6%) av studentene feilaktig identifiserer den liggende parabelen som en funksjon. En annen mulig forklaring her kan være tvetydigheten i oppgaven, som gjør at x kan sees på som en funksjon av f(x), men med tanke på at aksene i koordinatsystemet er korrekt merket med x og f(x) kan vi se bort fra denne forklaringen. Også i studien til Tall og Bakar (1992) ble en liggende parabel identifisert som en funksjon av 95% av elevene og 80% av studentene i studien. Det er verdt å nevne at i studien til Tall og Bakar (1992) var ikke aksene merket og oppgavene kunne i større grad misforståes.

Når det kom til den rette linjen x=2 mente en stor andel av studentene, 17 stykker (40%), at dette var en funksjon. Den siste grafen som ikke er en funksjon, 8h, mente alle studentene bortsett fra én at ikke kunne være en funksjon. Studenten som hadde satt ring rundt denne hadde i tillegg satt ring rundt alle de andre, og gitt begrunnelsen: «*alle, f(x) kan være så mangt*». Denne grafen skiller seg tydelig fra de andre grafene, og det er rimelig å anta at den også skiller seg mye fra grafer studentene har erfaring med fra før noe som kan gjøre diskrimineringen enklere.

De to funksjonene med delt forskrift ble begge identifisert som funksjoner av bare 4 studenter (9,3%) hver, og bare 2 studenter identifiserte begge to. Dette betyr at det var 4 studenter som bare identifiserte én av de to funksjonen med delt forskrift. Det er dermed rimelig å anta at det i disse tilfellene ikke var prototyper av funksjoner med delt forskrift eller tidligere erfaring med denne typen funksjoner som alene var gjeldene i fremgangsmåten.

21 av studentene gav en beskrivelse av hvilken fremgangsmåte de benyttet seg av. To av studentene skrev at de gjettet, mens en ikke visste hvorfor hun gjort det på denne måten. 7 av studentene, altså $\frac{1}{3}$ av de som oppgav noen fremgangsmåte svarte at de så etter kjente grafer, eller grafer som liknet på noe de hadde sett tidligere, og tre studenter forsøkte å koble grafene til kjente funksjonsuttrykk. Bare én av studentene skrev noe som kan kobles til entydige funksjonsverdier: «*en funksjon kan bare ha en x-verdi*». Det kan her tenkes at studenten forsøker å beskrive entydighetsegenskapen, men ikke helt klarer sette ord på det. Denne studenten har kun merket av 8a og 8f som funksjoner, dermed er det flere entydige funksjoner som ikke har blitt tatt med. Det kan likevel tenkes at argumentet om entydighet bare brukes i

tilfeller der det er *mangel* på entydighet, som i 8c, 8g og 8h. Kun én student fikk full uttelling på oppgave 8, hans svar på hvilken fremgangsmåte han benyttet seg av kan du se i figur 8.



Figur 8 Fremgangsmåte for den ene studenten som svarte rett på alle grafer i oppgave 8 på den skriftlige testen

Fra bildet over kan det være vanskelig å si hva studenten egentlig mener med beskrivelsen, men det er rimelig å anta at det kan ha noe med en endring i x-verdien å gjøre.

Den symbolske fasetten

I oppgave 9 ble studentene bedt om å sette ring rundt uttrykkene de mente var funksjoner. I tabell 6 under ser vi en oversikt over svarene de gav.

Spørsmål	Rett/Galt
9a (ja) $f(x) = x$	29/14
9b (nei) $f(x) = \pm\sqrt{2x}$	20/23
9c (ja) $f(x) = -2x + 3$	42/1
9d (ja) $x^2 = f(x) + 3$	21/22
9e (ja) $f(x) = 1$	17/26
9f (ja) $f(x) = \frac{2}{x}$	31/12
9g (nei) $x = 1$	43/0
9h (ja) $xf(x) = 6$	7/36
9i (ja) $f(x) = \begin{cases} x & hvis\ x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & hvis\ x \geq 1 \end{cases}$	17/26
Forklaringer	19

Tabell 6 Oppsummering av studentbesvarelser på oppgave 9. Her ble studentene bedt om å ringe rundt de uttrykkene de mente representerte funksjoner.

Fra tabellen over ser vi at hele 42 (97,7%) studenter identifiserte det lineære funksjonsuttrykket i 9c som en funksjon. Sammenlikner vi med 9a, som også er en lineær funksjon, men uten konstantledd, faller antallet studenter med rett svar til 29 (67,4%). Noe av forklaringen på dette kan vi finne hvis vi ser på hvordan studentene forklarer sin fremgangsmåte, her er to av studentenes beskrivelser av sine fremgangsmåter: «*Funksjonen trenger stigningstall og konstantledd*» og «*Tenker at det må stå mer enn en ting på høyre siden fordi jeg ser etter konstantledd og variabel*.»

I to av oppgavene, 9d og 9h var ikke uttrykkene stilt opp på «vanlig måte», det vil si med f(x) på venstre side og det algebraiske uttrykket på høyre. Henholdsvis 21 (48,8%) og 7 (16,3%) identifiserte disse som funksjoner. 9h er det naturlig å sammenlikne med 9f, siden begge disse tilsvarende funksjoner med kun forskjellige koeffisienter og oppstilling av uttrykkene. 9f, som er stilt opp på «vanlig måte» ble identifisert av 31 (72,1%) studenter. Den store forskjellen i antallet riktige svar i 9f og 9h kan vi tolke som en indikator på oppstillingen av utrykkene er avgjørende for om studentene anser sammenhengen som en funksjon eller ikke. I testen var det ikke noe andregrads funksjonsuttrykk å sammenlikne 9d med, men 39 (90,7%) studenter identifiserte den konvekse parabelen til en andregradsfunksjon som en funksjon i 8a. På spørsmålet om fremgangsmåte uttrykte to studenter at måten uttrykket er oppstilt på påvirker om det er en funksjon eller ikke: «*f(x) må stå før likhetstegnet for å vise at det er en funksjon. f(x) ≠kan ikke være tall*» og «*f(x) på venstre side av "="*». De to studentene som oppgav disse fremgangsmåtene hadde begge forkastet 9d og 9h.

Flere av studentene, i dette tilfellet 17 (39,5%) mot 4 (9,3%) i den geometriske fasetten, identifiserte funksjonen med delt forskrift, 9i. Samtidig mente 20 (46,5%) studenter at 9b var en funksjon, til tross for at denne ikke er entydig. Noen av fremgangsmåtene studentene oppgav kan være med å belyse dette: «*Alle funksjonsuttrykkene som inneholder f(x), x og tall*», «*Det skal være et uttrykk som viser hvordan grafen endrer seg ved forskjellige x-verdier*.» og «*Jeg tenker at en funksjon er et uttrykk med x som variabel og som gir f(x) verdi.*» I det første sitatet her ser vi at studenten fokuserer på de forskjellige delene av funksjonsuttrykket, mens studenten med det andre sitatet fokuserer på prosessen som x-verdien gjennomgår, samt kobler dette til den grafiske fremstillingen. I det siste sitatet fokuserer studenten på både prosessen og den symbolske fremstillingen.

Den numeriske fasetten

I oppgave 10 ble studentene presentert for fem tabeller og bedt om å sette ring rundt de tabellene de mente representerte en funksjon. 6 av studentene hadde ikke svart på denne oppgaven og de prosentsatsene som oppgis i dette underkapittelet regnes derfor ut fra 37 respondenter.

Spørsmål	Rett/galt
10a (ja) / lineær med konstantledd	35/2
10b (ja) / konstant -1	4/33
10c (nei) / ikke entydig	31/6
10d (ja) / 2.gradsfunksjon	25/12
10e (ja) / med forklaring på sammenheng	27/10
Forklaring	20

Tabell 7 Oversikt over studentenes svar på oppgave 10 der studentene skulle avgjøre om fem tabeller representerte funksjoner eller ikke. Seks studenter svarte ikke på oppgaven, dermed er det totale antall besvarelser per deloppgave 37

Som i de to fasettene vi har sett på tidligere klarte de fleste studentene, 35 av 37 (94,6%) å identifisere den lineære funksjonen i tabellen i 10a som en funksjon. Den ene av de to studentene som ikke ringet rundt denne tabellen oppgav «*gjett og sjekk*» som fremgangsmåte. Tabellen i 10e representerer også en lineær funksjon, men denne gangen uten konstant ledd. I tillegg ble sammenhengen som tabellen bygger på gitt, se figur 9 til høyre. 27 (73%) av studentene identifiserte denne tabellen som en funksjon. To av studentene som ikke ringet rundt ga uttrykk for at de mente sammenhengen mellom teksten og tabellen var korrekt: «*Er -2 dobbelt så stort som -1? Nei*», dette kan også ha påvirket andre studenter til å avvise 10e som funksjon. Mangelen på konstantledd i det tilsvarende funksjonsuttrykket kan også være en forklaring på hvorfor antallet riktige svar på 10e er lavere enn på 10a, da dette viste seg å ha innvirkning i oppgave 9.

e.
I denne tabellen er funksjonsverdien alltid dobbelt så stor som x-verdien.

x	$f(x)$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

Figur 9 Oppgave 10e fra den skriftlige testen. Her skal studentene avgjøre om tabellen representerer en funksjon. I tillegg til tabellen blir studentene gjort oppmerksomme i relasjonen som ligger til grunn for tabellen.

For den konstante funksjonen skiller den numeriske fremstillingen seg radikalt fra den geometriske og symbolske. Kun 4 (10,8%) av studentene mente dette var en funksjon da de møtte den som en tabell i 10b, mens henholdsvis 23 (53,5%) og 17 (39,5%) mente det samme da de møtte de som graf og funksjonsuttrykk i 8b og 9e. Resultatene for funksjonsuttrykk og graf sammenfaller godt med resultatene til Tall og Bakar (1992, s. 46-47), der 30% av universitetsstudentene mente $y = 4$ var en funksjon, mens 55% mente det samme da de ble presentert for den konstante grafen.

20 studenter oppgav en forklaring på fremgangsmåten de brukte for å undersøke tabellene i oppgave 10. 10 av disse dreide seg om å se etter system og mønstre i tabellene. Dette fokuset på system og mønster kan tolkes som at studentene forsøker å finne ut av hvilke prosedyrer eller handlinger de forskjellige funksjonene utfører. Dette kan sees på som et uttrykk for en handlingsforståelse i den numeriske fasetten. Mangelen på system i 10c kan ha vært en medvirkende faktor til at 31 (83,8%) studenter ikke anså dette som en funksjon, og at det ikke bare var mangel på entydighet som førte til dette. Ingen oppgav en forklaring som knyttet seg til entydighet, men 3 studenter mente at funksjonsverdien må variere når x varierer, noe som kan knyttes til det lave antallet studenter som svarte rett på 10b. 4 knyttet seg til den grafiske fremstillingen av funksjonen, som for eksempel «T*enkte hvordan grafen ville sett ut om jeg tok punktene til tabellene*».

4.1.3 Studentenes definisjoner av funksjoner

Kategori	Antall
Kobler til den symbolske fasetten	19
Kobler til den geometriske fasetten	7
Bruker eksempel	3
Bruker ord som stigningstall, konstantledd, variabel	12
Bruker ord som ukjent, likning.	4

Tabell 8 Viser kategorier som utkrystalliserte seg i analysen av 23 besvarelser på oppgave 12 der studentene ble bedt om å komme med en definisjon på en funksjon.

Oppgave 12, testens siste oppgave var følgende: «*Hva er en funksjon? Gi en så presis beskrivelse eller definisjon du klarer.*» 21 studenter gav et svar på denne oppgaven. Ingen av studentene gav en fullgod definisjon på en funksjon. Dette sammenfaller med funnene til Hansson (2006). Heller ingen av studentene gav noen beskrivelse eller definisjon der entydighetsegenskapen kom frem. Etter å ha lest gjennom og studert de forskjellige forklaringene krystalliserte 5 kategorier seg. En besvarelse kan havne i flere av disse kategoriene, en forklaring som eksemplifiserer med et algebraisk uttrykk vil for eksempel havne i både kategorien *kobler til den symbolske fasetten* og *bruker eksempel*. En oversikt over de forskjellige kategoriene og antall forklaringer som knyttes til de disse se tabell 8. Fra tabellen ser vi at hele 19 av 23 studenter (82,6%) velger å beskrive begrepet funksjon ved å knytte denne til den symbolske fasetten, for eksempel: «*En funksjon viser oss hvordan gitte verdier f.eks. x blir til andre verdier y når de går gjennom et funksjonsuttrykk f.*». 7 (30,4%) av studentene benyttet seg av elementer fra den geometriske fasetten for å forklare begrepet, for eksempel: «*en funksjon er et algebraisk uttrykk som kan illustreres i et koordinatsystem.*». Denne besvarelsen kan tolkes som at studenten mener at det er det algebraiske uttrykket som er selve funksjonen, mens den grafiske fremstillingen fungerer som et slags bilde.

12 studenter valgte å benytte seg av begreper som stigningstall, variabel etc. Dette er begreper som er med å beskrive egenskaper ved enkelte funksjoner og selv om de kan være viktige bestanddeler av en students begrepsbilde kan overforenklinger og generaliseringer være med på å skape feilaktige koblinger, som hos denne studenten: «*En funksjon er et uttrykk for å se vekst. En funksjon består av variabel, stigningstall og konstantledd*.». Det kan her se ut som om studenten har tatt egenskaper ved lineære funksjoner, som stigningstall og konstantledd og generalisert disse til å gjelde alle funksjoner.

De fire besvarelsene som blant annet bruker ord som likning og ukjent for å beskrive funksjoner kan tolkes som at studentene har problemer med å skille funksjoner fra andre, nærliggende matematiske områder som likninger. For eksempel beskrivelsen «*En funksjon er* *et uttrykk som har en ukjent x. For å løse funksjonen må man sette inn verdier for x.*» kan tolkes som at studenten ser på funksjoner som et problem, noe som må løses, heller enn som en sammenheng mellom variabler eller mengder.

Kun tre av studentene benytter seg av eksempler i sine beskrivelser. Dette står i sterk kontrast til funnene til Ayalon et al. (2017) hos engelske og israelske elever, som viste at særlig de israelske elevene benyttet seg av eksempler i stor grad i sine beskrivelser av funksjonsbegrepet.

4.1.4 Notasjonsfasetten

Oppgave 5, 6 og 7 var utformet for å teste elevens forståelse i notasjonsfasetten. I oppgave 5 skulle studentene forklare betydningen av følgende symboler: 5a: $f(x)$, 5b: $y(x) = 2x$ og 5c: $a(b + c)$. Etter gjennomlesning av svarene ble enkelte kategorier av forklaringer fremtredende for de tre uttrykkene, fordelingen av svar for de ulike kategoriene for 5a og 5b kan sees i henholdsvis tabell 9 og 10. Samme svar kan havne innenfor flere kategorier for eksempel svaret «*f(x)=funksjonsverdi. F er navnet på funksjonen og y er variabelen*» registreres i kategoriene c, d og e for 5a. Alle de 40 studentene som besvarte oppgave knyttet notasjonen til funksjoner

Kategorier for 5a	Antall
a. Funksjon av x/ funksjonen f av x	17
b. Funksjonsuttrykk	1
c. Funksjonsverdi	15
d. F er navnet på funksjonen	14
e. X er variabel	10

Tabell 9 Hovedkategorier av svar fra oppgave 5a i den skriftlige testen der studentene skulle gi en kort forklaring på uttrykket f(x). Totalt 40 studenter besvarte oppgaven.

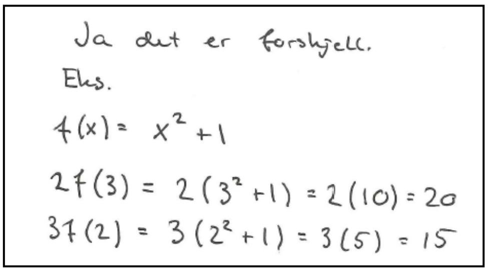
Kategorier for 5b	Antall
a. Y er navnet på funksjonen/ y er en funksjon	21
b. X er variabel	4
c. Multiplikasjon y(x) betyr y*x	7
d. Viser til sammenhengen mellom y og x	14
e. Viser til egenskaper ved funksjonen som stigningstall etc.	7
f. Viser til geometriske fremstillinger som grafer	5

Tabell 10 Hovedkategorier av svar fra oppgave 5b i den skriftlige testen der studentene skulle gi en kort forklaring av uttrykket y(x)=2x. Totalt 33 studenter besvarte oppgaven.

I tillegg til kategoriene i tabellen over viser enkelte studenter tegn til en forståelse av f-en i notasjonen $f(x)$ som en forkortelse for ordet funksjon. For eksempel «*funksjonen(x)*» det er likevel enkelte tvilstilfeller som er vanskelige å fastslå og kategorien er derfor ikke tatt med. Mens alle studentene som besvarte oppgave 5a knyttet uttrykket $f(x)$ til funksjoner ser vi fra tabell 10 at 7 av de 33 studentene som besvarte denne oppgaven (21,2%) mente $y(x)$ representerte en multiplikasjon $y * x$. En mulig forklaring på dette kan være at f er et vanlig navn for funksjoner, mens y ofte anvendes som y-verdi eller funksjonsverdi uten benytte notasjonen $y(x)$, altså at variabelen nevnes eksplisitt, og at dette kan ha hatt påvirkning på studentenes svar. Konteksten spørsmålet stilles i må også tas i betraktning. I Hansson (2006) frembrakte uttrykket $y = x + 5$ assosiasjoner til likninger fremfor funksjoner. Det er dermed mulig at studentene vil respondert annerledes på oppgave dersom den ble gitt i en kontekst som ikke var like preget av funksjoner. Den store forskjellen i antall besvarelser på de to oppgavene, 40 og 33, kan også tyde på at studentene i større grad var usikre på tolkningen av 5b.

I oppgave 5c der studentene skulle forklare notasjonen $a(b-c)$ gav 32 av studentene svar som viste til at dette representerte en multiplikasjon, mens 2 av studentene mente a var en funksjon. 9 studenter svarte blank på denne oppgaven.

I oppgave 6 skulle studentene svare på om det er noen forskjell på $2f(3)$ og $3f(2)$ og forklare hva den eventuelle forskjellen er. 13 studenter svarte ikke på oppgaven, 18 svarte ja og 7 nei, i tillegg var det fem studenter som gav en delvis forklaring uten å komme med et tydelig ja eller nei. Totalt var det 23 studenter som gav, eller forsøkte å gi, en forklaring. I studentenes forklaringer vise 8 studenter at de så $2f(3)$ som $2 * f(3)$, tre av studentene argumenterte med at $2f$ og $3f$ var navn på to ulike funksjoner og at uttrykkene derfor var forskjellige. To studenter tolket tallet 2 i $2f(3)$ som y-verdi eller funksjonsverdi for funksjonen når x var 3. Syv av studentene begrunnet forskjellen mellom de to uttrykkene med at variabelverdiene i de to uttrykkene var forskjellig. Én student valgte å argumentere for forskjellen ved hjelp av et eksempel, denne besvarelsen kan sees i figur 10.

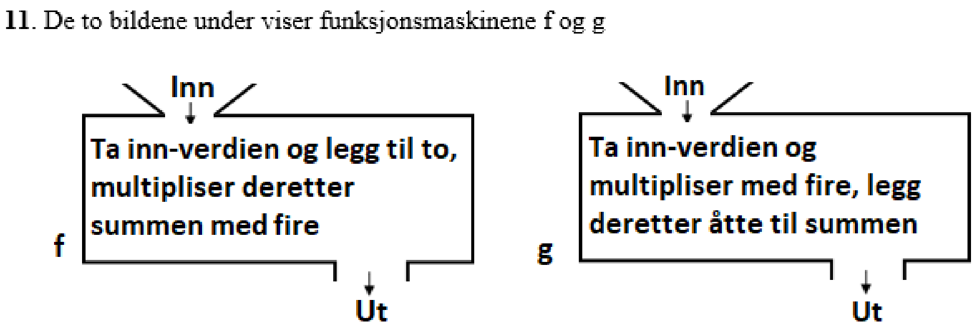


Figur 10 En students besvarelse på oppgave 6. Studenten bruker, som den eneste, en eksempel-funksjon til å vise at de to uttrykkene 2f(3) og 3f(2) ikke er like.

Alle studentene bortsett fra én svarte på oppgave 7 der studentene ble presentert for tre utsagn om notasjonen f(x) og skulle svare om disse var sanne eller usanne. Alle studentene som besvarte oppgaven krysset av for sant på påstanden om at $f(x)$ representerer funksjonsverdien når variabelverdien er x. Tre stykker mente at $f(x)$ representerer produktet av f og x. Det må her påpekes at oppgaven er noe upresis da produktet av f og x kan tolkes som produktet av en prosess og ikke bare produktet av en multiplikasjon, noe som kan ha vært med å påvirke svarene til de tre studentene som svarte at dette var sant. 22 studenter svarte sant på påstanden om at $f(x)$ representerer regelen vi bruker for å finne funksjonsverdien. Disse 22 (52,3%) anser altså $f(x)$ som representant for både funksjonsverdi og tilordningsregel. Ifølge DeMarois (1998) er grepet om denne tvetydigheten i funksjonsnotasjonen en indikasjon på proceptuell forståelse i denne fasetten. Det må også føyes til at 2 studenter krysset av for sant på alle tre påstandene.

4.1.5 Den hverdagslige fasetten og studentenes syn på to like funksjonsmaskiner

I oppgave 11 ble studentene presentert for de to funksjonsmaskinene i figur 11.



Figur 11 Funksjonsmaskiner fra oppgave 11 i den skriftlige testen.

Studentene skulle først finne ut-verdiene for de to maskinene med 5 som inn-verdi (11a og 11b), deretter skulle de putte inn x i de to maskinene (11c og 11d). Til slutt skulle studentene, i oppgave 11e, avgjøre om de to funksjonsmaskinene var samme funksjon eller to forskjellige. I tabell 11 til høyre ser vi en oversikt over svarene studentene gav på de forskjellige deloppgavene. Årsaken til at flere av studentene ikke har besvart denne oppgaven kan skyldes at det ble noe knapt med tid og at studentene ikke rakk å svare på alle oppgavene. 23 av studentene som deltok i testen besvarte både 11c og 11d korrekt, og hadde med det riktige forutsetninger til å svare på 11e. Av disse 23 mente 12 (52,2%) at de to maskinene var samme funksjon, mens 6 (26,1%) mente de var forskjellige. De resterende 5 gav ikke noe svar, eller argumenterte for begge sider uten å lande på noen konklusjon. I begrunnelsen for svaret fokuserte studentene som mente at de to maskinene var samme funksjon på at funksjonsuttrykkene ble like «*Ja, hvis man regner de ut ender de opp som samme uttrykk*» og at ut-verdiene blir like «*Ja, fordi du ender opp med samme resultat. Så selv om fremgangsmåten er ulikt blir svaret likt.*». For studentene som betrakter de to maskinene som like er dette en indikator på at de befinner seg på et prosessnivå eller høyere innen den hverdagslige fasetten, på grunn av at de ikke fokuserer på de ulike prosedyrene maskinen eller funksjonen utfører, men på prosessen som en helhet og/eller verdiene dette produserer. For studentene som ikke så de to maskinene som like lå fokuset i forklaringene på at regnerekkefølgen og dermed prosedyrene inn-verdien utsettes for er forskjellige, for eksempel «*nei, fordi rekkefølgen regneoperasjonene blir gjort i er forskjellige*.». Studentene som fokuserer dette og anser de to maskinene som forskjellige kan tenkes å være på et handlingsnivå i den hverdagslige fasetten.

Spørsmål	Rett/Galt/ Ikke besvart
11a	35/1/7
11b	35/1/8
11c	26/9/8
11d	27/6/10

Tabell 11 Studentbesvarelsene fra oppgave 11a-d. Kategorien Galt inneholder både feilaktige tolkninger og regnefeil.

4.2 Analyse av intervju

I denne delen av analysen vil jeg ta for meg datamateriale fra de fire intervjuene og analysere dette i lys av det teoretiske rammeverket som ble presentert i teorikapittelet. Jeg vil også forsøke å knytte resultatene opp mot tidligere forskning. Jeg vil først kort presentere de fire studentene, før den videre inndelingen av analysen vil følge de ulike fasettene av begrepet. Avslutningsvis vil jeg forsøke å oppsummere hver enkelt students forståelse i de ulike fasettene.

4.2.1 Presentasjon av informanter

Alle de fire informantene, Ane, Ben, Carl og Dina, som er blitt intervjuet i forbindelse med denne masteroppgaven er studenter ved Grunnskolelærerutdanningen for trinn 5-10, og er i sitt andre semester av totalt ti. Studentene hadde ikke tidligere hatt om temaet funksjoner på lærerutdanningen. De fire studentene hadde alle gjennomført prøven 1-2 uker i forkant av intervjuene. Ane hadde tidligere hatt 2P eller 2P-Y på videregående (hun var selv usikker) og fikk en poengsum på 29 på testen. Ben hadde erfaring med 2P-Y fra videregående og fikk en poengsum på 31,5. Carl hadde 2P på videregående og fikk en poengsum på 30 på testen. Dina hadde S2 som fag siste året på videregående og fikk en poengsum på 22,5 på testen. Den gjennomsnittlige poengsummen på testen var 28,3 (med et standardavvik på 4,1). Vi ser tre av studentene ligger godt innenfor ett standardavvik fra gjennomsnittet, mens Dina har en markant lavere sum. Dette skyldes at Dina lot flere oppgaver stå ubesvart på testen, og gikk dermed glipp av muligheten til en del poeng.

4.3 Studentenes begrepsdefinisjoner

I DeMarois og Tall (1996) sin inndeling av begrepet i fasetter deles begrepsdefinisjonen inn i de to fasettene muntlig og skriftlig. Jeg har her valgt å behandle disse under samme overskrift for lettere å kunne se på forskjeller og likheter i de to fasettene. Det er også viktig å påpeke at disse to fasettene ikke utelukkende består av definisjoner, men også av andre muntlige og skriftlige beskrivelser av funksjoner.

Oppgave 12 i den skriftlige testen var følgende *Hva er en funksjon? Gi en så presis beskrivelse eller definisjon du klarer.* Anes skriftlige svar på oppgaven var følgende: «*Et uttrykk med et konstantledd og en variabel som gjør det mulig å lage en graf i et koordinatsystem dersom man endrer variabelen*.» Vi kan tolke dette som at Ane definerer en funksjon til å være selve funksjonsuttrykket, mens den grafiske representasjonen i et koordinatsystem er et bilde som kan skapes ved hjelp av dette uttrykket. I beskrivelsen til Ane ser hun på funksjonen som en prosess der forskjellige variabelverdier skaper grafen (funksjonsverdier). Hun er i stand til å behandle begrepet uten et spesifikt funksjonsuttrykk eller annen representasjon å forholde seg til, noe som kan tyde på en prosessforståelse.

Under intervjuet ble testen gjennomgått på nytt og Ane ble igjen bedt om å beskrive en funksjon:

524. M: Ok. Kjempebra. Siste spørsmålet er en definisjon, altså den beste beskrivelsen du kan gi av en funksjon.
525. A: Eh, en funksjon er for meg et uttrykk som har en variabel og et konstantledd.

Vi ser den muntlige og skriftlige beskrivelsen er konsistente, men i den muntlige er den delen av beskrivelsen som dreier seg om den grafiske fremstillingen utelatt. Tidligere i intervjuet, under arbeid med oppgave 1 der hun skulle skille mellom funksjoner og ikke-funksjoner, kom Ane uoppfordret med en tilsvarende beskrivelse:

51. A: Og så her så er det, for meg så er, eller jeg tenker jo at en funksjon det er et uttrykk som har en, et konstantledd og en variabel.

Dette utsagnet ble brukt av Ane for å forklare hvorfor hun mente funksjonen $f(x) = -2x + 3$ var en funksjon. Det kan her se ut som om Ane tar i bruk sin begrepsdefinisjon i resonnementet rundt oppgaven, slik Vinner (1991) beskriver. Samtidig kan beskrivelsen Ane kommer med sees på som en generell prototype for funksjoner i den symbolske fasetten (Tall & Bakar, 1992).

I den skriftlige testen oppgav Ben følgende beskrivelse av en funksjon: «*En funksjon vil jeg si er et uttrykk for å vise verdier ved forskjellige variabler, x=1, 2, 3 ...*» Her ser vi at også Ben knytter sin beskrivelse til den symbolske fasetten. Eksemplifiseringen av variabelverdien kan tyde på at han ser på funksjonen som en prosess som utføres gjentatte ganger med forskjellige variabelverdier. Dette kan tyde på et handlingsnivå i den skriftlige fasetten.

Da Ben under intervjuet ble bedt om å gi en muntlig beskrivelse eller definisjon av en funksjon svarte han følgende:

476. B: Ja. Det jeg tenker en funksjon er, er eh, når vi bare skal finne ut av hva for eksempel f er.
477. M: mhm
478. B: At, vi har en utregning på andre siden, hvor vi da kan putte inn en x-verdi for å da finne ut av hva egentlig f er da. Det er jo sånn jeg ser på det.
479. M: Så som et sånt uttrykk?
480. B: Mhm

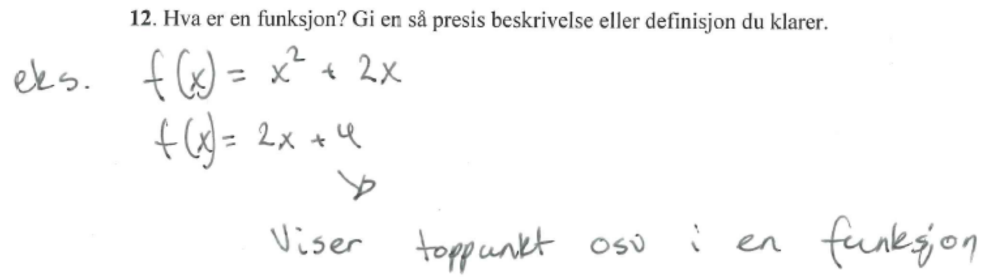
Også i den muntlige beskrivelsen benytter han seg av den symbolske fasetten og funksjonsuttrykket. I 478 ser vi at han fokuserer på selve utregningen for å produsere funksjonsverdien, noe som kan tyde på en handlingsforståelse. Samtidig er ikke forklaringen knyttet til en spesifikk funksjon, eller eksempel noe som kan tyde på en prosessforståelse der det generelle blir gjeldene.

Carl sin skriftlige beskrivelse av en funksjon var følgende: «*En funksjon er et uttrykk hvor man kan sette inn en verdi inn i variabelen i uttrykket for å få ut en funksjonsverdi.*». Som Ben og Ane kobler også Carl begrepet til den symbolske fasetten og funksjonsuttrykket. Beskrivelsen av hvordan man får en funksjonsverdi ved å putte inn for variabelen tyder på en handlingsforståelse i den skriftlige fasetten. Samtidig beskriver han det hele på en generell måte, uten å lene seg til eksempelfunksjoner noe som tyder på en prosessforståelse. Også i sin muntlige beskrivelse knytter han begrepet til funksjonsuttrykket:

523. C: En funksjon så tenker jeg det at du, ehm, har et uttrykk, som hvis du hiver, med en variabel eller flere variabler, og du setter inn verdier inn i de variablene, også får vi et resultat ut.
524. M: Ja.
525. C: Som du da kan lese av for eksempel på en graf eller noe sånt. Det blir en funksjon
526. M: Ja ok. Så det er selve uttrykket som er funksjonen?
527. C: Mhm

Som i Carls skriftlige beskrivelse kan utsagn 523 kan tyde på en handlingsforståelse i den muntlige fasetten siden han snakker om å sette inn verdier og få resultater. Også her er fokuset på inn-verdi og ut-verdi, og ikke selve prosedyrene verdiene går igjennom, noe som indikerer en prosessforståelse. Han kobler også inn den geometriske fasetten når han snakker om å lese av på en graf, men gir uttrykk for at det er funksjonsuttrykket som er selve funksjonen.

Dina sin beskrivelse av hva en funksjon er skilte seg tydelig fra de tre andre studentene. Hun valgte å eksemplifisere fremfor å beskrive, se figur 12.


12. Hva er en funksjon? Gi en så presis beskrivelse eller definisjon du klarer.

eks. $f(x) = x^2 + 2x$
$f(x) = 2x + 4$
Viser toppunkt osv i en funksjon

Figur 12 Dinas skriftlige beskrivelse av en funksjon.

Her eksemplifiserer Dina begrepet funksjon ved hjelp av en andregradsfunksjon og en lineær funksjon. Bruken av disse eksemplene kan tyde på at Dina er avhengig av spesifikke funksjoner eller eksempler for å forklare begrepet noe som kan tyde på en handlingsforståelse i den skriftlige fasetten. Hun kommer heller ikke med noen forklaring utover eksemplene, noe som kan indikere at Dina ikke har noen personlig definisjon av funksjoner, eller i det minste at denne ikke er en del av det frembrakte begrepsbilde i denne sammenhengen (Tall & Vinner, 1981). Som de tre andre studentene knytter hun begrepet til den symbolske fasetten gjennom eksemplene, mens henvisningen til «*toppunkt*» kan tolkes som en kobling til den geometriske fasetten.

Da hun under intervjuet ble bedt om å gi en beskrivelse gav hun først uttrykk for at hun synes dette var vanskelig, men kom etter hvert med en forklaring:

680. *D: Det er, det er på en måte et uttrykk som når du putter inn ulike verdier da, så kan du få, du kan få en graf liksom, [M: Ja] at du kan vise det her liksom, i Geogebra for eksempel, og at denne funksjonen viser, eller du kan lese av og få de ulike verdiene når funk, ja. Så du kan finne ut ved å se på denne, så kan du skrive tabellen og omvendt [M: Ja], og disse her. Så alt henger på en måte i sammen.*

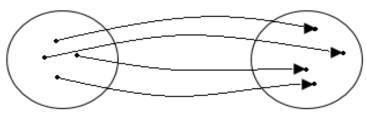
681. *M: Ja. Vil du si at noen av de er mer, altså, er det en av de som er funksjonen? Eller er alle funksjonen, eller er noen mer funksjonen enn andre? Nå har du jo de du i stad sa var like der.*

682. *D: Ja. Jeg ville kalt dette for funksjonsuttrykket på en måte, dette for funksjonen og dette for funksjonstabellen.*

Her knytter Dina sammen de forskjellige representasjonene hun har møtt i løpet av testen og intervjuet. Når jeg i oppfølgingsspørsmålet i utsagn 681henviser til «*de du i stad sa var like*» er dette lappene 3, 10, 11 og 18 (som alle representerer funksjonen $h(x) = -1$) fra oppgave 1 i intervjuet som Dina tidligere hadde koblet sammen og sagt var samme funksjon. Dina sier videre at hun ville kalt grafen for funksjonen. Her skiller Dina seg fra de tre andre studentene ved at hun fremhever grafen som selve funksjonen, mens de andre fokuserer på funksjonsuttrykket. Når Dina i utsagn 680 snakker om å putte inn verdier og få en graf kan dette tolkes som et tegn på et prosessnivå siden hun er i stand til å snakke om funksjonen uten å ha noe spesifikt funksjonsuttrykk å forholde seg til. Noen videre beskrivelse av begrepet kom ikke frem på dette punktet i intervjuet.

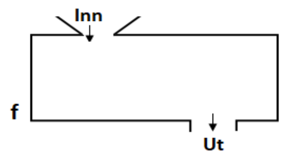
Avslutningsvis i intervjuet, slik at det ikke ville påvirke studentenes svar på andre spørsmål, ble de presentert for to alternative definisjoner på funksjoner, med tilhørende illustrasjoner og bedt om å kommentere disse i forhold til sine egne definisjoner (se figur 13 og 14).

En funksjon er en regel som til ethvert element i en mengde (definisjonsmengden) tilordner ett og bare ett element i en annen mengde (verdimengden).



Figur 13 Alternativ definisjon av funksjon nr. 1 fra intervju.

En funksjon kan sees på som en maskin der vi for hver enkelt verdi vi putter inn får ut én og bare én verdi i andre enden. Det vil si at om vi putter inn den samme verdien flere ganger vil vi alltid få samme verdi ut.



Figur 14 Alternativ definisjon av funksjon nr. 2 fra intervju.

Studentene ble også informert om at definisjonene ikke nødvendigvis var korrekte for at de lettere skulle kunne kommentere forskjeller eller likheter med egne definisjoner uten å frykte å si noe feil. Etter forklaring og gjennomgang av definisjon 1 (figur 13) hadde Ane og Ben ingen spesifikke kommentarer til definisjonen annet enn at det kunne høres riktig ut og samsvarte delvis med deres bilde. Dette kan skyldes at definisjonen er mer abstrakt enn hva de har møtt på tidligere, og at de ikke fikk tilstrekkelig med tid til å sette seg grundig nok inn i den. Carl derimot, koblet definisjonen til den numeriske fasetten og tolket på følgende måte:

771. *M: Kan du se noen likheter med det bilde du har fra før av?*

772. *C: Ja, egentlig, fordi, du har liksom et sett med verdier, i den balja eller tabellen, og så har du ett sett med verdier i den tabellen eller balja.*

773. *M: Mhm.*

774. C: Så det blir jo litt det samme som disse tabellene her.
775. M: Mhm
776. C: Så har du x-verdiene her også alle f av x verdiene der.

Dina på sin side sa hun aldri hadde hørt om en funksjon definert som en regel før, men mente likevel det var en riktig beskrivelse.

Også i den andre alternative definisjonen av en funksjon (figur 14) lå fokuset på entydighet, men denne gangen formidlet på en mer hverdagslig måte. Definisjonsmengde og verdimengde var utelatt fra definisjon nr. 2 for å gjøre den enklere og mer forståelig for studentene. Ane mente denne definisjonen hørtes riktig ut, så lenge det var en fast funksjon i maskinen. Ben koblet med en gang den alternative definisjonen til sin egen forståelse:

705. B: Ja den tenker jeg jo jeg er veldig enig i. den har jo litt med det jeg svarte i ste om at hvis vi putta inn samme x og det, at funksjonsverdien ble 1 og 3 selv om jeg putta inn x av 1. Så mente jeg jo at nei da stemmer det ikke, det er ikke en funksjon. Så det er vel mye det jeg lener meg til, at det stemmer det.

Han viser også hvordan han benyttet sin forståelse, og entydigheten som en del av denne, i en tidligere oppgave til å avgjøre at en tabell ikke representerte en funksjon. Det samme gjorde Carl, som også brukte en tidligere tabell (oppgave 1, lapp 16) som eksempel:

782. C: Mhm. Det gir også veldig mening. Det er jo det at det er et matematisk uttrykk, det endrer seg jo ikke. Så det at, med mindre du har en random numbers generator inni her, så vil det jo bli likt, hele tiden. Det følger de samme, samme reglene holdt jeg på å si.
[…]
792. C: Det er også litt som, de andre, det var noen tabeller her også, som ble, hvor tallene, sånn som den for eksempel.
793. M: Ja. Her putter vi inn 3, og da er det ikke det samme som kommer ut.

Også Dina viser til et eksempel med en tabell fra en tidligere oppgave (10c fra testen) når hun skal reflektere rundt definisjon 2.

1097. D: Det gir mening. Og det var en god forklaring det. Mhm.
1098. M: Er det noe av, noen av de to forklaringene her som liksom bryter noe med den opplevelsen du har hatt av funksjoner tidligere?
1099. D: Nei, for sånn som her, i hvert fall, så, sånn som vi så på en av disse her, at når x var 2 eller 1, så kom det ut to forskjellige verdier.
1100. M: Ja
1101. D: Og det sier jo den at ikke går an.
1102. M: Mhm
1103. D: Og det er jo også sånn jeg har lært det, eller har, at det ikke går da.

Her sier Dina at denne egenskapen ved funksjoner var noe hun kjente til fra før. Likevel kom ikke denne til syne i hennes beskrivelser av funksjoner. Etter å ha beskrevet entydighetsegenskapen i den første definisjonen med egne ord knytter Dina de to definisjonene samme:

1111. D: Så sier regelen eller funksjonsuttrykket at da kommer det ut som det tallet der.
1112. M: Ja
1113. D: Ja, og bare det tallet
1114. M: Mhm.

1115. *D: Og det sier igjen, ja det samme som den. På en måte at det ikke kan være forskjellig. Forskjellige tall.*

Med dette viser Dina at hun er i stand til å gi mening til, i hvert fall deler av, begge definisjonene og kobler dette til sitt eget bilde. Hun eksemplifiserer først med en gitt tabell, men i utsagn 1111 omtaler hun funksjoner generelt, og snakker om verdier som kommer ut av regelen eller funksjonsuttrykket noe som kan tyde på at hun betrakter funksjoner som prosesser og dermed er på et prosessnivå i den muntlige fasetten.

Ingen av de fire studentene produserte noen korrekt beskrivelse eller definisjon av begrepet funksjon når de ble bedt om dette, dette samsvarer med resultatene til Hansson (2006) og Tall og Bakar (1992) der ingen av studentene i de to studiene var i stand til å gi en korrekt definisjon på begrepet. I de skriftlige beskrivelsene knyttet alle studentene begrepet til den symbolske fasetten og funksjonsuttrykket, enten gjennom beskrivelser eller eksempler. Også i den muntlige beskrivelsen var funksjonsuttrykket viktig, men her kom det også frem at en av studentene mente at det var grafen til funksjonen som var selve funksjonen. Andre deler av studentenes begrepsbilde, som entydighetsegenskapen, kom frem da studentene ble bedt om å reflektere rundt alternative definisjoner og den hverdagslige definisjonen vise seg å være enklere for studentene å forstå og relatere til, dette kan skyldes at den er forklart på en enklere måte i form av mindre komplisert terminologi, handler om en håndfast maskin fremfor en mer abstrakt tilordningsregel og at definisjonsmengde og verdimengde er utelatt fra definisjonen noe som gjør at det er færre detaljer å fokusere på.

4.4 Den hverdagslige fasetten

Den hverdagslige fasetten innebærer funksjoner presentert gjennom uformelle metoder, for eksempel ved hjelp av funksjonsmaskiner.

4.4.1 Identifisering og diskriminering av funksjonsmaskiner

Alle de fire studentene som ble intervjuet mente de ikke hadde sett funksjonsmaskiner før de møtte disse på testen. Likevel svare alle fire rett på alle oppgaver i testen som gikk ut på å finne ut-verdi fra maskinene basert på inn-verdi, og alle bortsett fra Carl svarte også rett på oppgaven der de skulle finne inn-verdi basert på ut-verdi.

I den første oppgaven i intervjuet skulle studentene sortere 21 lapper med forskjellige representasjoner av funksjoner i to bunker ettersom studentene mente de var funksjoner eller ikke funksjoner. Blant disse var det fem funksjonsmaskiner. I tabellen under ser vi en oversikt over svarene til studentene for disse fem lappene.

	1.5 Multipliser inn-verdien med seg selv, og trekk fra en	1.8 La inn-verdien være eksponenten i en potens med grunntall 2	1.14 Legg til et tilfeldig tall mellom en og ti.	1.18 Overse inn-verdien og trekk fra en.	1.19 Ta tre, og trekk fra det dobbelte av inn-verdien
Ane	R	R*	R	G	R
Ben	R	R	R	G	R
Dina	R	R	R	R *	R
Carl	R	R	R	G	R
Fasit	Funksjon	Funksjon	Ikke funksjon	Funksjon	Funksjon

*Tabell 12: Oversikt over studentenes sortering av funksjonsmaskiner i oppgave 1 i intervjuet. R -riktig, G -galt, *- byttet svar til dette svaret.*

1.18 peker seg ut ved at tre av studentene ikke identifiserte denne som en funksjon. Dette er den konstante funksjonsmaskinen med teksten *overse inn-verdien, trekk fra en*. Felles for de tre som mente dette ikke var en funksjon var fremgangsmåten med å gjøre om funksjonsmaskinen til et funksjonsuttrykk, som for eksempel Ane:

100. M: Og så trekker vi fra en
101. A: Da får du jo bare minus en.
102. M: Ja, riktig.
103. A: Og da har du jo ikke noen variabel.
104. M: Nei, ikke i uttrykket nei.
105. A: Og da, for meg, blir det ikke en funksjon

Fra resonnementet til Ane i sitatet over kan vi anta at hun resonerer ved hjelp av sin personlige begrepsdefinisjon, slik den kommer frem i den skriftlige og den muntlige fasetten, eller ved hjelp av en prototype på funksjonsuttrykk (Tall & Bakar, 1992).

Dina, som var den eneste som betraktet 1.18 som en funksjon, hadde først plassert denne i bunken for ikke-funksjoner med begrunnelse at den ikke gav mening. På oppfølgingsspørsmål om hva slags ut-verdier maskinen produserer endrer Dina sitt syn seg.

238. M: Hva slags verdier ville vi fått ut?
239. D: Hvert fall noe med -1 da. Overse inn-verdien, bare slette hele inn-verdien kanskje, at det bare blir -1. hele tiden.
240. M: Ja.
241. D: Hmm, ja. Så den kan jo kanskje gi litt mening da.
242. M: Da gir den mening?
243. D: Ja.
244. M: Vil du beholde den i ikke-funksjonsbunken?
245. D: Hm, jeg tror kanskje jeg vil ta den over.
246. M: Så da tar vi den i den andre.
247. D: For det ble litt sånn som denne kanskje. Eller her kommer det jo i hvert fall ut med -1 hele tiden. Så at de likner.

Her er det ut-verdiene som gjør at Dina klarer gi mening til funksjonen. Dermed knytter hun funksjonsmaskinen til andre representasjoner, og avgjør at det er en funksjon likevel. Flere av studentene, deriblant Dina, hadde i første omgang problemer med å se hva denne funksjonsmaskinen egentlig gjør. Formuleringen i oppgaven «*overse inn-verdien og trekk fra en*» er upresis noe som kan spille inn på studentenes svar. At denne oppgaven ble arbeidet med i intervjuet gjorde likevel at det mulig å komme med forklaringer til oppgaven og oppklare eventuelle feiltolkninger underveis.

Fremgangsmåten med å oversette fra funksjonsmaskiner til funksjonsuttrykk for så å avgjøre på bakgrunn av uttrykket, ble benyttet av alle studentene i flere av oppgavene. Dette kan skyldes at studentene ikke hadde noen prototyper å avgjøre på bakgrunn av når det kom til funksjonsmaskiner, i og med at denne representasjonen var ny for dem. Denne fremgangsmåten fungerte for studentene i flere av tilfellene men i 1.14 viste den seg å by på utfordringer for Ben. Han ble først usikker på om det var inn-verdien eller det tilfeldige tallet som var variabelen i det eventuelle uttrykket, og endte etter hvert opp med at det kanskje kan være et funksjonsuttrykk med flere variabler:

90. B: Nei, altså, legg til et tilfeldig tall mellom en og ti. Nei det blir jo, det blir jo to forskjellige variabler her, altså inn blir jo selvfølgelig x da, og så det tilfeldige tallet, kall det y, må jo være mellom en og ti. så da var jeg usikker på *er det en funksjon da? Eller det er sikkert en funksjon med begrensa, ja hva du kan velge. Var veldig usikker.*

Videre fortalte han at noe slikt hadde han ikke sett før. Han valgte likevel å beholde 1.14 i ikke-funksjonsbunken. Ben sin usikkerhet kan blant annet skyldes at han ikke klarer å knytte maskinen til et funksjonsuttrykk eller andre prototyper for funksjoner (Tall & Bakar, 1992). Samtidig klarer han heller ikke klarer å knytte den til eksempler på ikke-funksjoner (Skemp, 1987). I følge Bens muntlige og skriftlige beskrivelser av hva han mener en funksjon er knytter han det tett til det symbolske funksjonsuttrykket, dermed kan hans avgjørelse om å beholde 1.14 som ikke-funksjonsbunken begrunnes med at han ikke klarer å skape noe godt funksjonsuttrykk for maskinen.

Studentenes fremgangsmåte med å oversette til andre fasetter viser at de i stor grad er i stand til å gjøre disse overgangene noe som var vanskelig for studentene i DeMarois (1998) sin studie.

4.4.2 Bruk og anvendelser av funksjonsmaskiner

Gjennom testen og i intervjuet viste Ane at hun kunne finne ut-verdier til forskjellige funksjonsmaskiner basert på inn-verdi. Dette kan tyde på at hun i det minste befinner seg på et handlingsnivå i denne fasetten. Hun svarte også riktig på 2b som var ment å måle om studentene kunne være på et prosessnivå eller høyere. I intervjuet forklarte hun også fremgangsmåten hun benyttet seg av:

212. *A: Og så den, på 36. jeg kan tenke meg, kanskje jeg delte på 4 og tok minus 1? 8.*
213. *M: Mhm. delte på 4 og tok minus 1. Fordi?*
214. *A: Fordi da gjør du det bare omvendt vei. Men jeg vet ikke om det blir riktig, jeg vet ikke om det var det jeg gjorde en gang.*
215. *M: Så du prøvde å tenke på det du gjorde i oppgave a, også gjorde du det bare motsatt vei?*
216. *A: Ja.*

Her ser vi at Ane er i stand til å reversere prosessen i funksjonen. Dette er ifølge DeMarois (1998) en indikasjon på at Ane befinner seg på et prosessnivå eller høyere i den hverdagslige fasetten. Også Carl brukte en tilsvarende fremgangsmåte, mens Ben og Dina gikk frem på en litt annen måte.

154. *B: Så greit, så greit. … ja for det måtte jeg tatt, jaja, selvfølgelig, hadde jeg puttet inn 7 multiplisert det med 4, fått 35 og så lagt til en. da har jeg snudd på det igjen.*
155. *M: Ja. Er 7 ganger 4 35?*
156. *B: Nei, feil, bare glem at jeg sa noe,*
157. *M: Så det du, måten du tenker på, det er at du prøver å tenke hva er det som går inn for at det må komme ut?*
158. *B: Ja det er det.*
159. *M: Ok*
160. *B: Det er det, det er det. Ja så var det det.*
161. *M: Så hvis du hadde*
162. *B: 9, det var vel. Eller det at 8, altså legge inn 8 legg til 1 og så multiplisere det med 4, var det jeg tenkte.*

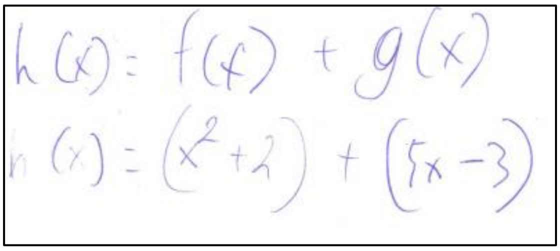
Her ser vi at Ben i stedet for å reversere prosessen i funksjonsmaskinen forsøker seg på en kvalifisert form for gjetting eller prøve-og-feile taktikk ved å sette inn verdier han mener kan stemme for så å studere hva som kommer ut. I utsagn 154 ser vi også at Ben er usikker på prosessen i maskinen, og det kan virke som han ikke klarer å tolke prosessen rett. På testen hadde derimot Ben svart rett på dette spørsmålet. En slik fremgangsmåte kan vi se på gjentatte prosedyrer til vi finner en verdi som passer, noe som tyder mer på et handlingsnivå enn et prosessnivå i denne fasetten. Dina brukte også en liknende taktikk der hun forsøkte å se for seg hvilket tall som skulle inn i maskinen for å få rett verdi ut.

> 287. *D: Mhm. Etterpå tenkte jeg at du har 36 her, så tenkte jeg hva må du legge til en og så gange 4 med, for å få 36.*

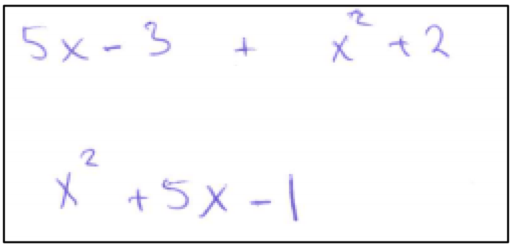
I oppgave 18b i intervjuet skulle studentene kombinere to funksjonsmaskiner, f og g, til en ny maskin, h, som utfører prosessene til f og g for inn-verdien og deretter legger sammen ut-verdiene. På spørsmålet om hva ut-verdien til den nye maskinen ville bli med 4 som inn-verdi regnet alle de fire studentene ut de to funksjonsmaskinene hver for seg for deretter å legge sammen ut-verdiene, som her eksemplifisert ved Ben:

> 650. *M: Hva ville da ut-verdien på den nye h-maskinen blitt om du puttet inn 4?*
> 651. *B: Ok. ... Ja, 35.*
> 652. *M: Ok. Hva tenkte du?*
> 653. *B: Det jeg tenkte var vel bare å sette det opp som to parenteser og så pluss. Altså egentlig h er lik, h av x er lik g x pluss f x.*
> 654. *M: Ja. Og så puttet du inn 4?*
> 655. *B: Ja det gjorde jeg. Så gjorde jeg jeg jo bare det samme her, 4 ganger 5, eh 20. trekk fra 3, 17. og så 17, så var det multipliser 4 ganger 4, 16, 18 og 18 pluss 17 det er vel 35.*

Da studentene ble bedt om å forklare hvordan den nye maskinen ville fungert valgte Ane, Ben og Carl å benytte seg av funksjonsuttrykk for de to maskinene og addere disse, slik vi så i utsagn 653 over i sitatet fra intervjuet med Ben over, eller som i bildet under, som viser notater Carl gjorde under intervjuet (figur 15).



Figur 15: Carls notater oppgave 18 der studentene skulle lage en sammensatt funksjonsmaskin h ved hjelp av maskinene f og g.



Figur 16: Dinas notater oppgave 18 der studentene skulle lage en sammensatt funksjonsmaskin h ved hjelp av maskinene f og g.

I motsetning til de andre valgte Dina å trekke uttrykket sammen slik vi ser i figur 16 over. Hun var også den eneste av studentene som kom med en forklaring for teksten som ville stått i maskinen:

> 1015. *D: Her får du, 5x-3. her får du x i andre pluss 2. og så skulle vi plusse de sammen. Ehm. Sånn, og da kan du jo si: multiplisere inn-verdien med seg selv, eh så legg til, at du, og så tar du 5 ganger inn-verdien [M: ja] og så minus 1.*
> 1016. *M: Ja, så da har vi en maskin som gjør begge prosessene i en?*
> 1017. *D: Ja*

Forenklingen Dina gjør av uttrykket i figur 16 viser at hun i større grad enn de andre studentene er i stand til å betrakte den nye funksjonen som en prosess. De tre andre studentene er i større grad låst til prosedyrene og handlingene som utføres på inn-verdien og rekkefølgen på disse, noe som peker i retning av en handlingsforståelse. Det er også viktig å påpeke at studentene i denne oppgaven ikke jobber direkte i den hverdagslige fasetten, men tar steget over i den symbolske fasetten, og bare Dina tar steget tilbake til den hverdagslige fasetten i sitt svar. Gjennom å skape en ny maskin for den sammensatte maskinen viser Dina at hun har en objektsforståelse i den hverdagslige fasetten.

En annen oppgave som også er i grenseland mellom den hverdagslige og den symbolske fasetten er oppgave 11e fra testen. Etter å ha puttet x inn i de to funksjonsmaskinene i oppgaven skulle studentene avgjøre om de to funksjonene var like eller forskjellige og komme med en begrunnelse for svaret sitt. På testen var det to av de fire studentene som ikke svarte på denne oppgaven, mens Ane og Carl begge svarte at funksjonene var forskjellige. Begrunnelsene de oppga var henholdsvis «*nei, i f adderer du før du multipliserer. I g multipliserer du før du adderer.* $f(x) = (x + 2) \cdot 4 \quad g(x) = 4x + 8$» og «*nei, de er ikke helt like*». I motsetning til Ane hadde Carl multiplisert inn i parentesen for f-maskinen og fikk dermed to like uttrykk for de to maskinene. I intervjuet ble Ane oppfordret til å multiplisere ut parentesen:

> *519. A: De er jo egentlig helt like da. Du får jo. X ganger 4 er jo det samme som 4 ganger x. Og så plusser du på 8. Det er det samme.*

Ane besluttet altså at de to maskinene var samme funksjon, mens Carl fremdeles holdt fast på at de to funksjonen ikke var helt like:

> *516. C: Som funksjon så er de jo litt forskjellige, men som ehm, ehm, resultatet av funksjonen så er de like.*
> *517. M: Ja.*
> *518. C: Tenker jeg. De har litt forskjellig utseende da.*

Begrunnelsen Ane gav på testen vitner om at hun er avhengige av at de forskjellige delene av prosessen utføres i rett rekkefølge noe som igjen indikerer et handlingsnivå innen denne fasetten, mens hennes besvarelse i utsagn 519, etter å ha blitt oppfordret til å multiplisere ut parentesen, viser at hun også er i stand til å se på de to maskinene som like uavhengig av regnerekkefølge, noe som peker i retning av et prosessnivå. Når vi også tar i betraktning at Ane var i stand til å reversere prosessen i oppgave 2b kan vi anslå at hun befinner seg på et prosessnivå innen denne fasetten.

Som Carl er også Dina tvilende til om de to funksjonene er samme funksjon eller ikke. På testen multipliserte hun ikke ut parentesen til maskin f, mens under intervjuet gjorde hun dette uten oppfordring. Hun viste også til at de to maskinene gir lik ut-verdi for lik inn-verdi. Etter noe frem og tilbake landet Dina på at de to maskinene var samme funksjon.

Ben på sin side mente at de to funksjonene var forskjellige:

> *470. B: Ehm. ..., [U: 2], for da kommer de alltid til å gjøre det, men hvis de alltid gir samme svar, eh, så er jo f og g det vil være det samme, men det er jo to forskjellige funksjoner tenker jeg.*
> *471. M: De er forskjellige fordi?*
> *472. B: Nei rett og slett bare, det er jo andre variabler eller andre tall rett og slett, så jeg vil jo si de er forskjellige, men f er lik g uansett.*
> *473. M: Så verdiene som kommer ut [B: Vil alltid være de samme] er like?*
> *474. B: Men jeg ser jo på det som to forskjellige funksjoner.*

Fra sitatet over kan det se ut som om Ben er klar over at de to maskinene vil produsere lik ut-verdi dersom inn-verdiene er like. Han argumenterer med at det er andre tall og variabler i de to maskinene, dette kan bety at han mener de to utfører forskjellige handlinger eller prosedyrer. Jeg vil derfor tolke observasjonen over som en indikator på at Ben er på et handlingsnivå i den hverdagslige fasetten.

Carl viser tegn til både å befinne seg på et handlingsnivå og et prosessnivå i den hverdagslige fasetten. At han er i stand til å reversere prosessen i oppgave 2b fra testen er et tydelig tegn på et prosessnivå, mens svarene han gir i 11e og 18 bærer preg av fokus på rekkefølgen til regneoperasjonene, fremfor hva de produserer, noe som igjen tyder på et handlingsnivå. Ifølge DeMarois (1998) er overgangen fra en handlingsforståelse til en prosessforståelse gradvis. De ulike observasjonene tyder på at Carl befinner seg et sted langs denne overgangen.

Dina sitt svar på 2b og 11e kan tyde på at hun, som Carl, befinner seg på et sted i overgangen mellom handlings- og prosessforståelse. Svaret hun gav på oppgave 18 skilte seg tydelig fra de andre studentenes besvarelser og var en indikasjon på forståelse på et objektnivå, hun var også den eneste studenten som sorterte alle funksjonsmaskinene rett på oppgave 1.

4.5. Den symbolske fasetten

Den symbolske fasetten av funksjonsbegrepet innebærer bruk og manipulering av symboler i forbindelse med funksjoner. En rekke oppgaver både i testen og i intervjuet var designet for å teste elevene i denne fasetten. Vi skal nå se nærmere på de fire studentenes svar på noen av disse oppgavene, og forsøke å tolke disse samt si noe om studentenes forståelse i denne fasetten.

4.5.1 Identifisering og diskriminering av funksjonsuttrykk.

Under intervjuets første oppgave skulle studentene, som nevnt tidligere, sortere 21 lapper med funksjoner og ikke-funksjoner i form blant annet funksjonsuttrykk i to bunker ettersom studentene betraktet disse som funksjoner eller ikke. I tabell 13 under ser vi en oversikt over de seks algebraiske uttrykkene i oppgaven samt studentenes diskriminering.

	1.2 $g(x) = x^2 - 1$	1.3 $h(x) = -1$	1.7 $x = 3$	1.9 $f(x)^2 = x^2 - 4$	1.12 $f(x) = -2x + 3$	1.13 $h(x) = 2^x$
Ane	R	G	R	R	R	R
Ben	R	G	R	G	R	R
Dina	R	R	R	G	R	R
Carl	R	G	R	R	R	R
Fasit	Funksjon	Funksjon	Ikke funksjon	Ikke funksjon	Funksjon	Funksjon

Tabell 13 Oversikt over studentenes sorteringer av seks algebraiske uttrykk fra oppgave 1 i intervjuet. R - rett, G - galt.

I den skriftlige testen, og senere også under intervjuene, ble studentene også bedt om å identifisere funksjonsuttrykk i oppgave 9, de ulike uttrykkene og studentenes svar ser vi i tabell 15 og tabell 14 under.

	9a	9b	9c	9d	9e	9f	9g	9h	9i
Ane	G/R	R/R	R/R	G/G	G/G	R/G	R/R	G/G	R/G
Ben	R/R	G/G	R/R	G/R*	G/G	R/R	R/R	G/R*	R/R
Carl	R/R	R/U	R/R	G/R	G/G	R/R	R/R	G/R	G/U
Dina	R/R	R/G	R/R	G/R	G/R	G/R	R/R	G/R	G/U
Fasit	F	F	F	F	F	F	I	F	F

*Tabell 14 Oversikt over studentenes besvarelser på oppgave 9 i test/intervju. G- galt, R - rett, U - usikker og ikke noe endelig svar, * - byttet fra motsatt. For fasit: I – ikke funksjon, F – funksjon. De forskjellige uttrykkene kan sees i tabell 15.*

Siden en del trekk går igjen i svarene studentene gav og fremgangsmåtene de brukte har jeg valgt å samle analysen av de to oppgavene. Den lineære funksjonen i 1.12 og 9c er samme funksjon. Her ser vi fra tabellene at studentene identifiserte denne som en funksjon i alle tilfeller. Under intervjuet nevnte Ane, Dina og Carl egenskaper som stigningstall og konstantledd i forbindelse med denne funksjonen og knyttet dette til den grafiske representasjonen. 9a er også lineær, og ble identifisert av alle i både intervju og test, bortsett fra Ane på den skriftlige testen.

$a.\ f(x) = x$	$b.\ f(x) = \pm\sqrt{2x}$
$c.\ f(x) = -2x + 3$	$d.\ x^2 = f(x) + 3$
$e.\ f(x) = 1$	$f.\ f(x) = \frac{2}{x}$
$g.\ x = 1$	$h.\ xf(x) = 6$
$i.\ f(x) = \begin{cases} x & hvis\ x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & hvis\ x \geq 1 \end{cases}$	

Tabell 15 Funksjonsuttrykk fra oppgave 9 i den skriftlige testen. Studentene ble bedt om å sette ring rundt de uttrykkene de mente representerte funksjoner, samt forklare fremgangsmåten de brukte. Svarene kan sees i tabell 14

Andregradsfunksjonen i 1.2 og eksponentialfunksjonen i 1.13 ble også identifisert av alle studentene. I beskrivelsene av fremgangsmåtene studenten brukte på disse oppgavene kom det frem at Ane, Dina og Ben hadde sett disse typene funksjoner før og avgjorde på bakgrunn av dette. Dette kan tolkes som at de kobler funksjonsuttrykkene til sine egne eksempelprototyper (Tall og Bakar, 1992). I oppgave 1.13 viste Carl og Ben en annen type resonnement:

53. C: Jeg tenker jo litt at det er enkelt og greit at det skjer noe her med en inn-verdi i x-en.
54. M: Ja. At du kan putte inn en verdi og så gjør vi noe med den og så blir det noe nytt?
55. C: Ja. Så endrer h seg.
56. M: Ja.
57. C: Så da blir jo h en funksjon av x.

Vi ser her at Carl er opptatt av at det skal skje noe med x-verdien og at funksjonsverdien skal endre seg. Oppfølgingsspørsmålet som stilles i utsagn 54 kan virke ledende, men er ment å bekrefte eller avkrefte en umiddelbar tolkning av Carls utsagn 53. Ben sin forklaring sammenfaller med Carls i den grad at de begge ser etter endring:

42. B: Kan sette inn x for å få et stadig økende eller synkende tall på den ene siden.

Denne fremgangsmåten viste seg å skape gale svar i enkelte av oppgavene, blant annet oppgave 1.9, 9b og 9e for Ben. I sitatet under ser vi Bens argumentere for at 9b er en funksjon.

334. B: Den tror jeg er en funksjon, som på en måte er, ja vi putter inn verdien, og så pluss minus kvadratroten av 2 ganger det jeg har puttet inn, så det tror jeg er en funksjon.

Her virker det som om Ben fokuserer på hva som skjer med x-verdien, og poengterer at verdien blir pluss/minus. Likevel blir ikke mangelen på entydighet tillagt noe mer betydning. Vi har tidligere sett at Ben i forbindelse med de alternative definisjonene under intervjuet var i stand til å relatere entydighetsegenskapen til eget begrepsbilde og den numeriske fasetten. Når han nå overser denne egenskapen i den symbolske fasetten kan dette tyde på det Vinner og Dreyfus (1989) kaller compartmentalization, altså at det er mangel på koblinger mellom ulike deler av Bens begrepsbilde.

Den konstante funksjonen ble testet både i oppgave 1.3 og 9e. Fra tabellene kan vi se at Ane, Ben og Carl svarte at disse ikke representerte en funksjon. Bare Dina identifiserte den konstante funksjonen i 1.3 som en funksjon. Også hun var usikker, men hadde plassert funksjonen i riktig bunke. På oppfølgingsspørsmål om hva funksjonsverdiene til uttrykket ville blitt, landet hun på at funksjonsverdien alltid ville bli -1, og koblet deretter uttrykket til grafen 1.10 som representerer samme funksjon. Denne koblingen kan også ha vært med på å påvirke Dina slik at hun endret svaret i oppgave 9e fra ikke funksjon på testen til å identifisere denne som funksjon under intervjuet:

> *510. D: for den blir litt som sånn som for eksempel den da.*
> *511. M: ja, den likner på den 3-ern fra første oppgaven.*
> *512. D: ja. at da kommer det alltid ut 1, ja. Konstant.*

Sett i lys resultatene fra testen der 60,5% svarte at 9e ikke var en funksjon tyder dette på en misoppfatning som er både konsistent og utbredt blant studentene. Dette stemmer også godt med resultatene til Tall og Bakar (1992). Ane avfeide dette som en funksjon fordi det ikke finnes noen variabel i uttrykket til høyre for likhetstegnet, mens Ben fokuserer på at funksjonsverdien er konstant. Carl er igjen opptatt av at det skal skje noe med variabelverdien:

> *138. C: Ja det blir jo bare, ehm, der er jo ikke noe funksjon på andre siden. Det er ikke noe som skjer. Så, h blir jo ikke en funksjon av x. For x ikke er på den siden.*

Ane oppgav fremgangsmåten på oppgave 9 på den skriftlige testen til å være «*Tenker at det må stå mer enn en ting på høyre siden fordi jeg ser etter konstantledd og variabel*.». Denne fremgangsmåten ble også tydelig når hun argumenterte for hvorfor 9f ikke var en funksjon:

> *413. A: Og, jeg tenker at det ikke er fordi at alltid, eller sånn f, tenker, for meg så har det alltid stått pluss eller minus mellom variabelen og konstantleddet*.

Sitatet kan tyde på at Ane bruker en slags eksempelprototype for funksjoner til å sammenlikne funksjonsuttrykkene med, og at denne prototypen inneholder både konstantledd og en variabel adskilt med addisjon eller subtraksjon.

Fra tabell 14 i starten av kapittel 4.5.1 ser vi at Dina endret svaret i fem av oppgavene fra den skriftlige testen til intervjuet, i tillegg er hun svært usikker i 9i der hun i intervjuet ikke lander på noe endelig svar. Også Ben og Carl endrer begge svarene sine i 9d og 9h. I intervjuet med Ben ble det stilt oppfølgingsspørsmål om man kunne endre på uttrykket i 9d, noe som kan ha vært med å påvirke svaret hans i begge de to oppgavene. Carl valgte å endre på uttrykket for så å konkludere med at dette var en funksjon på egenhånd.

4.5.2 Bruk og anvendelser av funksjonsuttrykk

I oppgave 2 fra testen skulle studentene først regne ut funksjonsverdien til $f(x) = 2x + 5$ når x er 4 i oppgave a, for deretter å finne x-verdien(e) når funksjonsverdien er 1. Alle de fire studentene svarte riktig på den første oppgaven, både på den skriftlige testen og på intervjuet. Det at studentene er i stand til å finne funksjonsverdier ut fra funksjonsuttrykket tyder på at de har en handlingsforståelse eller høyrere i den symbolske fasetten (DeMarois, 1998). I oppgave 2b svarte Ben og Carl rett på både testen og under intervjuet, mens Dina og Ane begge svarte feil på denne oppgaven på testen, men riktig under gjennomgangen i intervjuet. Et tydelig tegn på en prosessforståelse ser vi når studentene er i stand til å reversere prosessene i den aktuelle fasetten. I den symbolske fasetten vil det innebære for eksempel omorganisering av funksjonsuttrykket til å gi x-verdier basert på funksjonsverdier, for eksempel ved en inversfunksjon. Ingen av de fire studentene gjorde akkurat dette, men fremgangsmåten de benyttet alle sammen var en slags «prøve-og-feile», for eksempel slik som Ben:

172. *B: Funksjonsverdien. Det skal være en. Så hvis jeg tar 2 ganger minus 2, da får jeg minus 4 pluss 5 er lik 1.*
173. *M: Ja. Var det samme måte du tenkte på her som på forrige?*
174. *B: Ja det var jo egentlig det.*
175. *M: Ja.*
176. *B: Men prøvde jo å ja begrense meg selv, ok hva kan det være, skal ha 1 og har pluss 5, så da var det ok jeg må bare få 2x til å bli, ja et så lavt tall at det kan gå opp.*

Valget av denne fremgangsmåten kan skyldes at oppgaven er forholdsvis enkel og dermed lar seg løse enkelt ved denne metoden. Oppgavene var utformet til å være enkle for å teste studentenes forståelse av begrepet heller enn regneferdigheter, men her ser vi et eksempel på at vanskelighetsgraden med fordel kanskje kunne vært økt i noen oppgaver. Det skal likevel understrekes at alle studentene fant rett x-verdi i intervjuet. Som et eksempel på at studentene kan være i stand til å reversere prosessene i denne fasetten til tross de mer primitive fremgangsmåtene som ble brukt i 2b vil jeg trekke frem Dinas svar på oppgave 19g. Der hun presentert for en graf, et funksjonsuttrykk og en tabell valgte den mest hensiktsmessige representasjonen for å løse oppgaven og satte opp likningen som var nødvendig for å gjøre dette. Dette vil jeg komme tilbake til under overskriften *4.9 Hensiktsmessig valg av representasjoner*

I oppgave 14 under intervjuet ble studentene bedt om å avgjøre om de to funksjonsuttrykkene $f(x) = 3(2x - 3)$ og $g(x) = 6x - 9$ representerer den samme funksjonen. Det ble presisert i intervjuet at de skulle se bort fra den ene funksjonen var gitt navnet f og den andre g. Ane og Dina mente de to uttrykkene representerte samme funksjon, fordi de to utrykkene ble like etter å ha multiplisert ut parentesen for $f(x)$. Mens Ben holdt på at de var to forskjellige funksjoner til tross for at de alltid var like hverandre:

494. *B: Nei, ja, altså. Jeg svarer vel egentlig akkurat det samme som jeg gjorde på den forrige. At jeg ser på det som to forskjellige funksjoner, men at f er lik g egentlig uansett. Ja hvis det stemmer da. Jeg har jo ikke sjekket det, men jeg går ut ifra det.*

Som vi også kan se fra sitatet stemmer dette overens med svaret han gav angående de to funksjonsmaskinene i oppgave 11e fra testen. Carl på sin side hadde som Ben ment at de to maskinene i 11e var forskjellige, men kom i oppgave 14 til en noe annen konklusjon rundt de to uttrykkene:

539. *C: Ehm, de blir jo like. Det blir jo 3 ganger 2, som er 6x, 3 ganger 3 som er -9.*
540. *M: Ja*
541. *C: Så det ender opp på det samme.*

På oppfølgingsspørsmål om hva som gjorde funksjonsuttrykkene i 14 annerledes enn maskinene i 11e svarte han følgende:

545. *C: De gav samme resultat, det er jo litt som, det er samme her. Estetisk sett så ser de jo forskjellige ut. Men i bunn og grunn så blir de like.*

Svarene på denne oppgaven tyder på at Ane og Dina har en prosessorientert forståelse i den symbolske fasetten, mens Ben, til tross for at han er oppmerksomme på at de to prosessene gir samme resultat, i større grad fokuserer på prosedyrene som utføres og dermed i større grad har en handlingsforståelse i samme fasett. Carl kan se ut til å være et sted imellom.

Også oppgave 15 i intervjuet var designet for å teste den symbolske fasetten (se figur 17). Alle fire studentene klarte å finne de to funksjonsverdiene i oppgave a uten problemer. Dette er med å styrke antakelsen om at alle de fire studentenes forståelse i det minste er på et handlingsnivå.

Oppgave 15
La $g(x) = 2x + 3$ og $h(x) = x^2 - 1$.
a. Hva er $g(5)$? $h(5)$?
b. Hva betyr $f(x) = g(x) - h(x)$?
c Hva blir $f(2)$?
d. Hva blir $f(x)$?
e. Hva betyr $g\big(h(x)\big)$?

Figur 17 Oppgave 15 fra intervju. Designet for å teste notasjonsfasetten og den symbolske fasetten.

Etter å ha sett nærmere på notasjonen i oppgave b skulle studentene finne funksjonsverdien $f(2)$ for den sammensatte funksjonen. Også her kom alle studentene frem til riktig svar og benyttet seg av samme fremgangsmåte, ved først å regne ut $g(2)$ og $h(2)$ for så å trekke i fra. Carl hadde allerede i 15b laget et funksjonsuttrykk for $f(x)$ men valgte som sagt likevel å regne ut de to verdiene hver for seg. Funksjonsuttrykket Carl fant skrev han ikke ned, men forklarte det bare muntlig

557. *C: Så du kan jo bare legge inn parentes 2x pluss 3, minus parentes x i andre minus 1.*

Også Ben løste oppgaven muntlig på helt tilsvarende måte, med de to funksjonsuttrykkene i parenteser. Ane valgte å notere underveis og notatene kan sees vi figur 18.

d. Hva blir $f(x)$? $(2x+3)-(x^2-1) = 2x+3-x^2+1$

Figur 18 Anes svar på oppgave 15d.

Som forklaring til den første delen av svaret sier hun følgende:

588. *A: Så egentlig sette de inn bare og ta parentes rundt sånn at du vet at du skal løse de først.*

På oppfølgingsspørsmål om det er mulig å gjøre uttrykket enklere og med mye hjelp kommer hun til slutt frem til høyre side av likhetstegnet over. Her har hun løst opp parentesene, men ikke trukket sammen. Dette sammen med sitatet over, som kan tolkes som at vi fremdeles må regne ut de to funksjonsuttrykkene hver for seg først, for deretter å trekke sammen, tyder på at Ane ikke er på et prosessnivå i den symbolske fasetten, men heller befinner seg på et handlingsnivå.

$2x + 3 - (x^2 - 1)$

$2x + 3 - x^2 + 1$

$-x^2 + 2x + 4$

Figur 19 Dinas notater til oppgave 15d.

Også Dina velger å notere under denne delen av intervjuet og produserer uten oppfølgingsspørsmål eller hint utregningen i figur 19. Hun setter opp de to uttrykkene for de to funksjonene, løser opp parentesen og trekker sammen. Dette kan tyde på en objektsforståelse i denne fasetten hos Dina siden hun er i stand til å skape et nytt funksjonsuttrykk for den sammensatte funksjonen uten punktvis å regne ut for de to enkeltfunksjonene.

4.6 Den geometriske fasetten

Den geometriske fasetten handler om geometriske fremstillinger av begrepet. I tilfellet med funksjoner vil dette si grafiske fremstillinger som grafer.

4.6.1 Identifisering og diskriminering av grafer

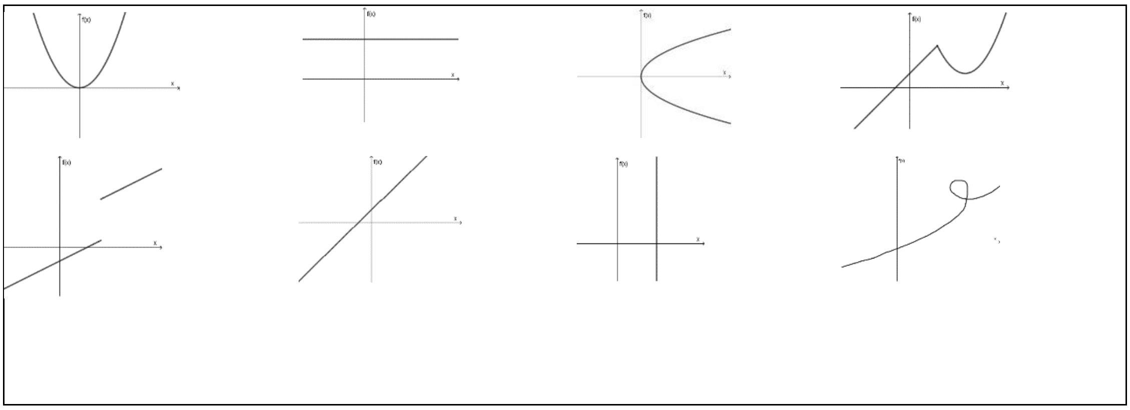
I oppgave 1 under intervjuet, sorteringsoppgaven, bestod fem av de 21 lappene av grafer. Og i oppgave 8 på den skriftlige testen, som også ble gjennomgått i intervjuet ble studentene presentert for 8 grafer og bedt om å identifisere de som representerte funksjoner. I tabellene under ser vi studentenes svar på de to oppgavene.

	1.1 Parabel	1.6 Lineær	1.10 Konstant	1.15 Sirkel	1.20 Eksponentiell
Ane	R	R	G	R	R
Ben	R	R	G	R	R
Carl	R	R	G	R	R
Dina	R	R	R	R	R
Fasit	Funksjon	Funksjon	Funksjon	Ikke Funksjon	Funksjon

Tabell 16 Oversikt over studentenes sortering av lapper fra oppgave 1 i intervjuet som inneholdt grafer. R – rett, G – galt.

	8a	8b	8c	8d	8e	8f	8g	8h
Ane	R/R	G/G	R/U	G/G	G/G	R/R	R/R	R/R
Ben	R/R	R/G	R/U	G/G	G/G	R/R	R/R	R/R
Carl	R/R	G/G	G/R	G/G	G/G	R/R	R/R	R/R
Dina	R/R	R/R	G/U	G/G	G/G	R/R	G/U	R/R
Fasit	Funksjon	Funksjon	Ikke Funksjon	Funksjon	Funksjon	Funksjon	Ikke Funksjon	Ikke Funksjon

Tabell 17 Oversikt over studentenes besvarelser på oppgave 8 test/intervju. De ulike grafene kan sees i figur 20. R -rett, G – galt, U - usikker



Figur 20 De åtte grafene a-h fra oppgave 8. 8a øverst til venstre, 8h nederst til høyre.

Sammenlikner vi de to tabellene med for eksempel de tilsvarende tabellene for funksjonsuttrykk i den symbolske fasetten ser vi at studentenes svar for den geometriske fasetten er mer konsistente. Bare i oppgave 8c viser studentene særlige tegn til lite sammenheng mellom intervju og test. Dette kan skyldes at studentene var svært usikre på denne grafen. Usikkerheten hos Ane og Dina går ut på at de er usikre på om de har sett denne typen graf før. Begge to sammenlikner med parabelen i 8a, og som Ane sier «*Men samtidig har jeg aldri sett en sånn funksjon som er den veien og ikke sånn som den.*».

Carl sitt resonnement kan tyde på at han kobler inn entydighetsegenskapen uten å nevne denne eksplisitt:

329. *C: For hvis du har f av x, så må jo, x-en gå begge veier holdt jeg på å si. Inn-verdien må gå frem og tilbake, men det kan den ikke gjøre. Tenker jeg.*

[...]

335. *C: På grunn av det at det, f av x, hadde det vært at det hadde vært f av y, da hadde du kunnet fått til den.*

For Ben er det også entydigheten som byr på utfordringer, men han er usikker på om dette gjør at det ikke kan være en funksjon:

295. *B: Den kan bli både, nei. Jo mer bort. Altså det jeg tenkte var rett og slett bare hvis vi har x 1 x 2 x 3, tenkte jeg bare at svaret kan bli både 1, -1, -2 det var egentlig bare det jeg tenkte nå.*
296. *M: Ja. Så du får ut to funksjonsverdier når du putter inn en?*
297. *B: Ja. Men det vet jeg ikke om går.*

I samtalen om alternative definisjoner i intervjuet (se kapittel 4.3) gav Ben mening til entydighetsegenskapen i definisjonen og gav uttrykk for at denne også var en del av hans begrepsforståelse. Han eksemplifiserte også denne forståelsen ved å trekke frem tabeller med manglende entydighet. Når Ben ikke helt klarer å avgjøre om uttrykket grafen over er en funksjon eller ikke tyder dette på manglende koblinger mellom de ulike fasettene altså en compartmentalization (Vinner & Dreyfus, 1989) av begrepsbildet. Liknende funn gjøres også i Hansson (2006), som beskriver studentenes begrepsforståelse som oppdelt og med manglende koblinger.

Alle studentene identifiserte den lineære funksjonen og parabelen i både oppgave 1 og 8, samt eksponentialfunksjonen i oppgave 1. Begrunnelsene for hvorfor disse var funksjoner gikk i hovedsak ut på at studentene hadde sett liknende funksjoner før. Ane, Ben og Carl bruker begrepet *eksponentiell vekst* for å beskrive 1.20 noe som indikerer at de kobler funksjonen til tidligere erfaringer. Det må i denne sammenhengen også nevnes at Ben også knytter dette begrepet til de to andre funksjonene 8a og 8f, parabelen og den lineære funksjonen. Dette tyder på at han ikke helt vet hva begrepet innebærer.

Ingen av studentene identifiserte funksjonene med delt forskrift, 8d og 8e, hverken på testen eller under intervjuet. Alle fire konkluderte også med at sirkelen i 1.15 og grafen med loop, 8h, ikke kunne være funksjoner. Ane og Dina argumenterte med at de ikke hadde sett liknende funksjoner før, her fra Dinas resonnement i 8d

455. *D: Jeg bare har aldri sett at den kan stoppe sånn. At det må være, ja.*
456. *M: Så det at den plutselig skiftet form, det hadde du ikke vært borti før?*
457. *D: Nei, men at hvis den hadde vært rund her holdt jeg på å si.*

Utsagn 457 tyder på den spisse formen på grafen i området ved skillet i definisjonsmengden gjør at Dina mener at dette ikke kan være en funksjon. Ben fokuserer også på den uvante formen på grafen, men heller å sammenlikne med tidligere grafer kan det virke som han forsøker å oversette til et tilsvarende funksjonsuttrykk, men ikke kommer på noe som passer:

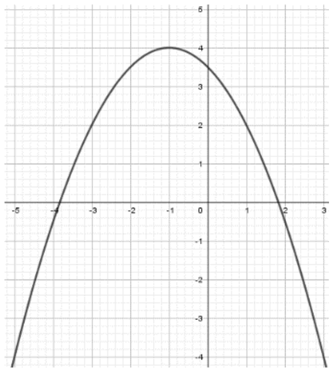
301. *B: Ja nummer 4, jeg trodde ikke det var en funksjon. Rett og slett bare på grunn av den, dippen, hvis man kan kalle det det, han tok på veien der så. Jeg klarte ikke å se noe veldig logisk måte å gjøre det på. Eller i hvert fall skrive det på. Så jeg gikk ut ifra at det ikke kunne være en funksjon.*

Dette er samsvarer med funnene til Even (1993) som fant at lærerstudentene hadde tydelige forventninger grafene til funksjoner, blant annet at disse skal være jevne og «fine» og at alle funksjoner skal kunne skrives som funksjonsuttrykk.

I oppgave 8b og 1.10 ser vi at Ane, Ben og Carl ikke anser det konstante funksjonen som en funksjon i den geometriske fasetten, mens Dina gjør dette i alle oppgavene. I den symbolske fasetten så vi også at hun først betraktet det konstante funksjonsuttrykket som en funksjon etter å ha koblet det til den grafiske representasjonen.

4.6.2 Bruk og anvendelser av grafer

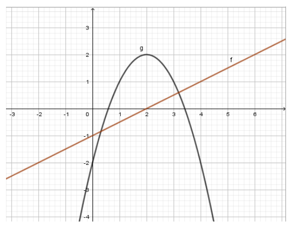
Oppgavene 4 i den skriftlige testen og oppgave 16 i intervjuet var designet med hensyn til å teste dybden av forståelsen til studentene i den geometriske fasetten. I oppgave 4 ble studentene presentert for en parabel og i oppgave a bedt om å finne funksjonsverdien(e) når x er -1, og i oppgave b skulle de finne verdien(e) til x når funksjonsverdien er 2. Alle fire studentene fant funksjonsverdi 4 i oppgave a, både på testen og under intervjuet. Dette tyder på at alle studentene har en forståelse i den geometriske fasetten på handlingsnivå eller dypere.



Figur 21 Grafen til oppgave 4 fra testen. Her skulle studentene lese av for funksjonsverdi og variabelverdier.

I 4b på den skriftlige testen fant Ane og Carl én verdi, x=1, som gav funksjonsverdi 2, mens Ben og Dina fant begge verdiene, x=1 og x=-3. Under intervjuet fant alle studentene begge verdiene. En mulig faktor som kan ha vært med å påvirke forbedringen i svarene under intervjuet kan være oppfølgingsspørsmål under gjennomgangen av oppgave 3b der det også var to mulige verdier som gav samme funksjonsverdi. Ane og Carl fant også én verdi på denne oppgaven og fikk da oppfølgingsspørsmål om det kunne være flere verdier, derpå begge raskt fant den andre verdien uten videre hjelp. Det er likevel slik at rett svar på denne oppgaven viser at studenten er i stand til å reversere prosessen, dette indikerer en prosessforståelse i den geometriske fasetten for samtlige av de fire studentene, men sterkere for Ben og Dina.

I oppgave 16 i intervjuet fikk studentene utdelt de to grafene i figur 22 og skulle løse oppgavene a-d. Ben og Carl fant raskt de to funksjonsverdiene i oppgave a. Ane og Dina hadde heller ikke problemer med å finne $f(2)$, men begge to skiftet fremgangsmåte når de skulle finne $g(0)$. I sitatet under har Ane nettopp funnet rett verdi for $f(2)$, og går løs på $g(0)$



a. Hva er $f(2)$? $g(0)$?
b. Når har f 1 som funksjonsverdi? Når har g 1 som funksjonsverdi?
La $h(x) = f(x) - g(x)$
c. Hva er $h(4)$?
d. Hvordan vil funksjonen $h(x)$ se ut?

Figur 22 Oppgave 16 fra intervjuet. Oppgaven er laget for å teste studentene i den geometriske fasetten

> 645. *M: Ja. Hva med g av 0?*
> 646. *A: Den får jo to, to ulike. Den, den kan jo få at y er 0, og x er 0 komma 5, og y er 0 og x er 3 komma 5 ca.*
> 647. *M: Ok. Så det er de to punktene på [A: som krysser der] x-aksen der?*
> 648. *A: Ja*
> 649. *M: Ok.*
> 650. *A: Nei vent da. Det blir, fordi at g og så 0. 0 er x.*

I 650 ser vi at Ane innser at hun har gått frem feil, hun går deretter tilbake og løser oppgaven på nytt, denne gangen med rett svar. Dina derimot oppdager ikke selv at hun har endret fremgangsmåte og trengte flere oppfølgingsspørsmål knyttet til fremgangsmåte før hun til slutt landet på rett svar. I arbeid med funksjoner dreier mange oppgaver seg om å finne nullpunkt, og det kan dermed bli naturlig for studentene å gjøre dette koblingen når de støter på tallet null i oppgaver med funksjoner. Dermed kan studentenes forventninger til oppgaven ha vært en medvirkende faktor til feil valg av fremgangsmåte. Liknende funn blir også gjort av Sajka (2003), hvor eleven knyttet notasjonen f(3) til funksjonens nullpunkt.

I oppgave 16b fant de fire studentene rett x-verdi for de gitte funksjonsverdiene, og alle fant begge verdiene for $g(x) = 1$. Dette tolkes som nok en indikator på at studentene befinner seg på et prosessnivå i denne fasetten.

Studentene hadde i oppgave 15 gjort rede for notasjonen $h(x) = f(x) - g(x)$ og skulle i oppgave 16c finne $h(4)$ ved hjelp av grafene til f og g. Carl tolket notasjonen rett, fant punktene på de to grafene og leste av funksjonsverdiene før han regnet ut den endelige funksjonsverdien til $h(4)$:

603. *M: Kan du finne h av 4?*
604. *C: Eh. da blir det, hvis f av x er 4, som blir der, som blir 1.*
605. *M: Mhm*
606. *C: Minus g av x som også var 4, og den blir da -2. som, 1 minus -2, så minus minus, det blir pluss, så da 3.*

Ane og Ben tolket også notasjonen rett og leste av de to punktene på grafene, men gjorde begge en regnefeil (fortegnsfeil) når de skulle regne ut $h(4)$, noe som resulterte i feil svar.

563. *B: Nei jeg så bare h 4, tenkte jeg jo bare f 4, prøve å finne den, ehm, tenkte det var 1 minus, så g var minus 2, egentlig det jeg tenkte. Så 1 minus 2.*

Dina på sin side hadde tolket notasjonen helt riktig i den symbolske fasetten, men opplevde problemer med å tolke samme notasjon i forbindelse med grafene:

842. *D: Bør jeg regne litt ut kanskje? Eller. Jeg vet ikke helt hvordan jeg skal, begynne.*

Dina gir uttrykk for at hun ikke helt vet hvor hun skal starte, etter henvisning til uttrykket $h(x) = f(x) - g(x)$ kan det se ut som om Dina kobler dette til oppgave 15 der hun jobbet med samme notasjon og funksjonsuttrykk.

858. *D: Mhm. men jeg ville kanskje skrevet funksjonsuttrykkene til f og g. For å finne.*

Etter noe betenkningstid kommer også Dina frem til hvordan hun skal løse oppgaven og leser av for de to punktene og trekker fra:

878. *D: Emh. Så da blir det 1 pluss 2, som er 3.*
879. *M: Ja.*
880. *D: H av 4 er 3*

Avslutningsvis i 16d skulle studentene forklare hvordan funksjonen $h(x)$ ville sett ut. Ingen av studentene var i stand til å besvare dette spørsmålet på strak arm. I alle de fire intervjuene ble det gitt hint i form av at en subtraksjon gir oss differensen mellom to verdier, og dette ble forsøkt koblet til svare i oppgave 16c, der h(4) måler avstanden mellom g(4) og f(4). Selv etter disse hintene var ikke Ane i stand til hverken å se for seg noen graf, eller identifisere noen egenskaper ved denne, og oppgaven ble forlatt. På spørsmål om h(x) ville ha noen nullpunkter svarte Ben og Dina at disse ville vært når f og g skjærer hverandre:

592. *B: Mhm. nei altså det ville vel blitt her og her.*
593. *M: Ja. I de krysningspunktene der?*

594. B: Ja. Hvor da g og f egentlig er det samme.

På spørsmål om hvordan grafen ville sett ut svarer Ben følgende:

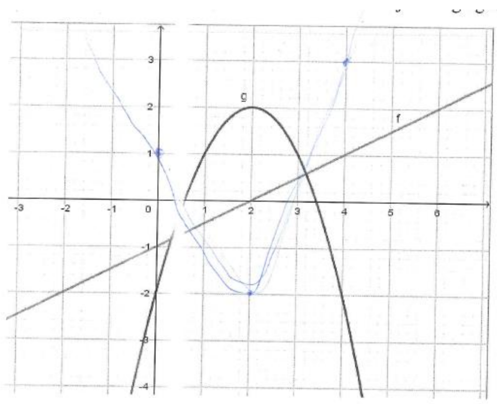
600. B: Eh. … skal vi se … ja for hvis jeg fant ut h 4 det var 3 pluss. Så jeg ville jo fått noe i form av her. Det ville vel blitt en bøy sånn.
601. M: Ja, en sånn [B: ja, ja rett og slett] smilende parabel
602. B: Ja som kommer ned herifra ja.

Han kobler sammen informasjonen om punktet han fant i oppgave c, og de to nullpunktene han fant gjennom oppfølgingsspørsmålet og bruker dette til å avgjøre at den sammensatt funksjonen må være en konveks parabel. Vi kan ikke si med sikkerhet at Bens avgjørelse beror på at han er i stand til å koble sammen egenskapene ved de to funksjonene, en annen mulighet er at den første grafen han kommer på, som kan gå igjennom alle de tre punktene nettopp er en parabel.

Dina på sin side hadde større problemer med å se for seg og forklare den sammensatte funksjonen, men kom etter mye hjelp frem til funksjonsverdien ville blitt større jo større x-verdien ble. Mengden hjelp og hint hun mottok underveis i resonnementet gjør likevel at dette ikke kan betraktes som noe Dina kunne prestert på egenhånd.

Carl begynte rett etter hintet om differensen og avstanden å regne ut enkelte verdier for $h(x)$, og ble derfor ikke stilt oppfølgingsspørsmålet om $h(x)$ sine eventuelle nullpunkt:

633. C: Åja sånn ja. Ja. Åja. Ja det kan jo gi litt mening. Så da blir det differensen av de to der også da. [U: 3] 2 og 2.
634. M: Ja
635. C: Som blir null, da er vi her. Nei det blir, vi ender opp, der. Nei, 2, og 2. ja 2, det blir -2 [U:1]
636. M: Ja
637. C: Så blir det her nede det da



Figur 23 Carls skisse over grafen til funksjonen h(x)=f(x)-g(x) fra oppgave 16d.

Videre regner han ut punktet (0,1) og har også punktet (4,3) fra oppgave 16c. Deretter skisserer han grafen gjennom de tre punktene og ender opp med en konveks parabel slik som Ben. I figur 23 ser vi skissen Carl laget mens han jobbet med oppgaven. Dersom vi ser på det høyre nullpunktet ser vi at dette ikke har samme x-verdi som krysningspunktet mellom f og g, vi kan derfor ta utgangspunkt i at Carl ikke har undersøkt akkurat denne egenskapen ved funksjonen, men kun tar utgangspunkt i de tre punktene han kjenner verdiene til. Det er også interessant at Carl har valgt å regne ut punktet (2,-2) og latt dette være ekstremalpunktet i sin nye parabel. Til tross for at dette punktet er noe lengre til høyre enn det faktiske bunnpunktet er plasseringen god, vi kan likevel ikke vite hva Carl tenkte rundt plasseringen av punktet da det ikke ble stilt oppfølgingsspørsmål knyttet til dette. Oppgave 16 var utformet med hensyn til å teste om studentene kunne befinne seg på et objektnivå av forståelse i den geometriske fasetten, da et tydelig kjennetegn på dette nivået av forståelse ifølge DeMarois (1998) er å kunne utføre handlinger på objektene. På tross av at Ben og Carl kommer frem til grafer for den nye funksjonen som i stor grad stemmer, er fremgangsmåten de bruker preget av gjentatte prosedyrer der de regner ut verdiene for enkelte punkter for så å tilpasse grafen etter disse. Dette ser vi tydeligst i eksempelet med Carl over. Disse fremgangsmåtene gir i større grad indikasjoner på et handlingsnivå enn et objektnivå.

4.7 Den numeriske fasetten

Den numeriske fasetten av begrepet funksjoner dreier seg om funksjoner presentert i form av tallpar, altså variabelverdien og den tilhørende funksjonsverdien. Vi møter funksjoner i denne fasetten gjennom tabeller, i notasjonen til avleste punkter til en graf $(x, f(x))$ og liknende. For å teste studentenes forståelse i denne fasetten ble det laget oppgaver som dreide seg om funksjoner i form av tabeller.

4.7.1 Identifisering og diskriminering av tabeller

I oppgave 1 under intervjuet skulle studentene diskriminere mellom funksjoner og ikke funksjoner i fire forskjellige representasjoner. Fem av lappene i denne oppgaven inneholdt tabeller, hvor tre av disse var funksjoner, en oversikt over studentenes svar på disse finnes i tabell 18. Også i oppgave 10 på den skriftlige testen ble studentene bedt om å avgjøre om fem tabeller representerte funksjoner eller ikke, denne oppgaven ble også gjennomgått under intervjuet og resultatene ser vi i tabell 19.

	1.4	1.11	1.16	1.17	1.21
Ane	-	-	-	-	-
Ben	G	G	R	R	R
Dina	G	R	R	R	R*
Carl	R	U	R	R	R
Fasit	Ikke funksjon	Funksjon	Ikke funksjon	Funksjon	funksjon

*Tabell 18 Oversikt over studentenes svar for de fem tabellene i oppgave 1 under intervjuet. R - rett, G - galt, U – usikker, * - byttet fra motsatt svar, - ikke svart.*

	10a	10b	10c	10d	10e
Ane	R/R	G/G	R/R	G/G	R/R
Ben	R/R	G/G	R/R	G/R	R/R
Carl	R/R	R/G	R/R	R/R	R/R
Dina	-/R	-/R	-/R*	-/R	-/R
Fasit	Funksjon	Funksjon	Ikke funksjon	Funksjon	Funksjon

*Tabell 19 Oversikt over studentenes svar på oppgave 10 fra den testen på test/intervju. R - rett, G - galt, * - byttet fra motsatt svar, - ikke svart.*

Under sorteringen av lappene i oppgave 1 opplyste Ane at hun aldri hadde jobbet med funksjoner som tabeller tidligere:

75. *A: Disse her. Jeg ser at disse her. Det er ingen av de som har havnet der, men det er fordi at sånn her har jeg heller ikke vært borti før, men jeg tenker jo at h x, hvis x er minus en … nei.*
76. *M: Du har ikke vært borti, på skolen, at vi har satt opp verdier i en tabell på den måten her?*
77. *A: Nei.*

Ane hadde derfor puttet alle tabellene i bunken for ikke-funksjoner, i tabellen over er Ane svar marker med *ikke svart* da det i denne sorteringen ikke er gjort noe forsøk på å skille de forskjellige tabellene. Ingen tidligere erfaring med funksjoner representert på denne måte, og manglende evne til å tolke tabellene indikerer et førhandlingsnivå i den numeriske fasetten.

Til tross for at Ane ikke hadde noen tidligere kjennskap til tabeller klarte hun i forbindelse med oppgave 10 å gi mening til tabellene og knytte de til en annen numerisk fremstilling:

433. *A: X er det liksom, er det liksom som å skrive x komma y? sånn som du gjør bare i en parentes.*
434. *M: Ja du kan tenke på det på den måten.*
435. *A: Så dette her er egentlig at x er 1 og y er 5.*
436. *M: Ja. Så du kan tenke på det som punkter i koordinatsystemet.*
437. *A: Ja, men også skal, så det er liksom det at de må, for at det skal være en funksjon må de følge at punktene skal komme for eksempel langs en linje.*

Her kommer også en del av Anes begrepsbilde fra den numeriske fasetten til syne, det kan virke som om et kriterium for at en tabell skal være en funksjon er at punktene tallene representerer danner en linje i den grafiske fremstillingen. Dette kan knyttes til Tall og Bakar (1992) og Even (1993) sine resultater som viste at studenter og elever hadde forventninger til funksjoners grafiske fremstillinger, blant annet at de skulle være jevne og «pene». I arbeidet med identifisering og diskriminering av tabellene benyttet Ane seg av oversettelser til den geometriske fasetten, for eksempel her i arbeidet med 10c:

461. *A: Nei for da har du x, x er lik en og y er lik null som blir da der, og så får du x det plutselig at x er lik en igjen. Og y er lik to. Så da får du jo sånn og så sånn, sikksakk tilbake igjen.*

Et interessant aspekt ved Anes besvarelser på oppgave 10 er at alle besvarelsene er like i intervjuet og på testen. I oppgave 1, som tidsmessig fant sted i mellom de forskjellige besvarelsene på oppgave 10, og før samtalen i utsagn 433-437 valgte Ane som nevnt tidligere å ikke svare på oppgavene, da hun ikke hadde vært borti tabeller tidligere. Ane kategoriserte 10d som ikke funksjon på bakgrunn av at hun ikke fant noe mønster eller sammenheng i hvordan funksjonsverdien endret seg. Dette kan tyde på at Ane er avhengig av å forstå eller kjenne til prosedyrene som skaper forandringen i funksjonsverdi basert på variabelverdi, noe som indikerer et handlingsnivå i denne fasetten.

Ben velger også å oversette tabellene til en annen representasjon, men bruker heller funksjonsuttrykket og den symbolske fasetten:

398. *B: Ja, ehm, måten jeg tenkte på her var vel nesten å bare sette de opp, eh, ja sånn som de på forrige side, for meg, og se om det gikk, så her var det jo*
399. *M: Så prøve å finne funksjonsuttrykk som representerte tabellene?*
400. *B: Mhm, det var sånn jeg tenkte. ...*

Fremgangsmåten med å oversette til funksjonsuttrykk kan tyde på at Ben er avhengig av å se hvilke prosedyrer som utføres i prosessen fra variabelverdi til funksjonsverdi. Dette kan dermed bety at han har en handlingsforståelse i den numeriske fasetten.

1.11 og 10b representerte konstante funksjoner. Igjen ser vi at det kun er Dina som betrakter disse som funksjoner i alle besvarelser, mens Carl anså 10b som en funksjon under testen, men endret svaret i intervjuet. Under arbeidet kom han med et interessant resonnement rundt tabellen:

142. *C: det er også veldig rar. For den funksjonen der, i tilfellet, den må jo være sånn x minus x, minus 1. eller noe sånn.*
143. *M: ja.*
144. *C: for da vil du hele tiden ende opp på -1.*
145. *M: ja.*
146. *C: så den kan jo for så vidt være en funksjon. Når en liksom først får se på det. Nei, det kan kanskje være en funksjon.*

[...]

153. *C: altså, på den her så kan du se at det ikke er noe variabler på denne siden, mens der vet du jo ikke. Tenker jeg da. Så man kan jo formulere den, og tenke det at det er x minus x og på denne siden er det minus 1, og det blir jo til dels en funksjon, men det blir jo allikevel bare en rett linje, på y-aksen.*

Vi ser her at Carl benytter en fremgangsmåte for å avgjøre om tabellen kan være en funksjon ved å forsøke å oversette til et mulig funksjonsuttrykk. I beskrivelsen av fremgangsmåten han benyttet seg av for å avgjøre om de algebraiske uttrykkene i oppgave 1 under intervjuet var funksjoner beskrev han «*at det skjer noe med en inn-verdi i x-en*». Vi ser i utsagn 142 over at Carl her lager et funksjonsuttrykk for den konstante funksjonen som passer med hans bilde av et funksjonsuttrykk. I 153 ser vi at Carl opplever en kognitiv konflikt der ulike deler av begrepsbildet ikke stemmer over ens. Dette tyder på at Carl, på samme måte som Ben, er avhengig av å kjenne til prosessen fra variabelverdi til funksjonsverdi noe som tyder på et handlingsnivå i denne fasetten.

Ser vi bort i fra de tabellene som inneholdt konstante funksjoner svarte Carl rett på alle oppgavene. Selv om han også noen ganger benyttet seg av andre representasjoner og oversatte til disse i sine resonnement, brukte han også flere ganger entydighetsegenskapen, eller rettere sagt mangelen på denne, til å avgjøre at tabeller ikke var funksjoner:

132. *C: Hvis du har samme verdien inn i funksjonen, så får du to verdier ut.*
[…]
175. *C: Ehm, samme verdien inn på x hele tiden. Men så forskjellige verdier på y-aksen. Og det tenker jeg går ikke.*
[…]
472. *C: Nei. C-en var hvis x er 1 så er y 0, x er 3 så blir y 1, men så tuller det seg. Når du har to like verdier på x, og så får du ut to forskjellige verdier. Så det blir rart.*

De tre sitatene er hentet fra henholdsvis oppgave 1.4, 1.16 og 10c. en slik fremgangsmåte med fokus på inn-verdiene og ut-verdiene, uten fokus på prosedyrene imellom indikerer en prosessforståelse eller høyere innen den numeriske fasetten.

4.7.2 Anvendelser og bruk av tabeller

Oppgave 3 fra testen og 17 i intervjuet var utformet for å teste studentene i den numeriske fasetten. I oppgave 3 (se figur 24) var svarene til studentene svært like både på testen og under intervjuet. Dina svarte ikke på oppgaven på testen, mens de tre andre studentene fant rett funksjonsverdi, 7, i oppgave a, og alle studentene fant én verdi for x i oppgave b. Det samme gjentok seg under intervjuene og her svarte også Dina det samme som de tre andre. På oppfølgingsspørsmål om det kunne finnes flere svar på denne oppgaven fant alle fire den manglende verdien til x. Dette tyder på at alle studentene har en handlingsforståelse eller dypere i den numeriske fasetten. Studentenes svar på 3b kan også indikere at de er i stand til å reversere prosessen i tabellen, likevel fant ingen av

Oppgave 3

x	$f(x)$
-1	7
0	2
1	-1
2	-2
3	-1

a) Hva er funksjonsverdien(e) når x er -1?
b) Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er -1?
a)

Figur 24 Oppgave 3 fra testen, oppgaven ble også gjennomgått under intervjuet.

studentene begge de to verdiene uten oppfølgingsspørsmål, dette kan tyde på at forståelsen befinner seg rundt overgangen mellom de to nivåene.

I oppgave 17a og 17b ble studentene bedt om å lese av for de to funksjonene f(3) og g(2) i tilhørende tabeller, og deretter finne x-verdiene når funksjonsverdien var 3 for de to funksjonene. I møte med denne oppgave har Ane problemer med å lese av tabellen på riktig måte:

707. A: Ja, så f av 3, da er jo x 1 og y 3.
708. M: Ok.
709. A: Eller f av 3 er, eller f av x er 3 liksom. Og g minus to hmm. X er jo 3,
710. M: Hm
711. A: Så f x blir 1.

Underveis i utsagn 709 oppdager Ane at det ikke finnes noen -2 verdi under g(x) i tabellen og oppdager dermed at hun har lest av tabellen feil vei. Dette kan skyldes at hun først tolker notasjonen feil, men også, som hun selv oppgir, har lite eller ingen tidligere erfaring med tabeller. Etter selv å ha innsett feilen går Ane tilbake og leser av tabellene for riktige verdier og finner deretter riktige x-verdier for funksjonsverdiene. De tre andre studentene leste av tabellene uten problemer i begge oppgavene. Noe som videre styrker den tidligere antakelsen om at forståelsen hos disse tre befinner seg omkring overgangen mellom handlings- og prosessnivå. På oppgave 17c og 17d skulle studentene jobbe med den sammensatte funksjonen $h(x) = g(x) + f(x)$. Tidligere oppgaver hadde vist at studentene var fortrolige med notasjonen, og alle fire fant verdien for $h(1)$ ved å lese av de to tabellene og addere. På spørsmål om det er mulig å finne h(-2) og h(2) svarer Ben, Carl og Dina at det ikke er mulig å finne $h(-2)$. Også Ane er uttaler at vi ikke kan finne funksjonsverdien med tabellene vi har tilgjengelige, men ifølge utsagn 745 kan det virke som om Ane mener det finnes andre måter å finne funksjonsverdien på:

741. A: Og så skal du ha pluss f x når x er minus 2.
742. M: Ja
743. A: Og her så er det jo ingen som har x minus 2.
744. M: Nei,
745. A: Men det kan du vel sikkert finne på en eller annen måte.
746. M: Men med de tabellene som vi har nå?
747. A: Så kan vi jo ikke svare på det.

Tall og Bakar (1992) fant at studenter og elever hadde klare forventninger til at funksjoner skulle kunne uttrykkes som funksjonsuttrykk. Utsagn 745 over kan tyde på at Ane mener det må finnes bakenforliggende funksjon som produserer sammenhengene i tabellen, og at tabellen bare gir uttrykk for noen av disse sammenhengene. Setter vi dette i sammenheng med Anes muntlige og skriftlige definisjoner av begrepet kan dette det tolkes som at Ane ser på funksjonsuttrykket som denne bakenforliggende funksjonen.

4.8 Notasjonsfasetten

Notasjonsfasetten for begrepet funksjoner inneholder den forståelsen studentene har for forskjellig notasjoner knyttet til funksjoner. På den skriftlige testen, og i gjennomgangen av denne under intervjuet ble studentenes forståelse knyttet til notasjoner som $f(x)$ undersøkt i oppgave 5, 6 og 7. Tvetydigheten knyttet til I oppgave 15 under intervjuet ble også studentenes forståelse av notasjonen rundt sammensatte funksjoner undersøkt.

I oppgave 5 ble studentene bedt om kort å forklare hva de mente de følgende symbolene/uttrykkene betød: a) $f(x)$, b) $y(x) = 2x$ og c) $a(b + c)$. På den skriftlige testen knyttet alle fire studentene notasjonen i a til funksjoner. Ane mente notasjonen var navnet på en funksjon eller viste at det var en funksjon. Ben hadde skrevet «*funksjonsverdi*», mens Carl og Dina begge hadde skrevet «*funksjon av x*» og Carl føyde til «*x er variabel*» i parentes. I intervjuet ble studentene i tillegg utfordret på å forklare de ulike delene av $f(x)$ og alle fire koblet f-en til navnet på funksjonen og x til å være variabelen. Som her fra intervjuet med Ben:

> *209. B: Eh. kort forklart. A er vel bare funksjonsverdiene, altså uttrykket for hva, hva skal jeg si. Eh.*
> *210. M: For det er jo en f og en parentes med en x inni. Hva kan vi tenke oss at f-en er? Og hva er x-en?*
> *211. B: Eh, f-en pleier jo jeg bare å se på nesten som navnet på en eventuell graf eller uttrykket. Hvorav x, x-en som står der, den tenker jo jeg, det er de verdiene jeg må putte inn på andre siden av likhetstegnet.*

Ben, Carl og Dina snakket om notasjonen på en generell måte, vi ser for eksempel i sitatet over at Ben knytter f-en til navnet på en graf eller et uttrykk uten å være avhengig av et spesifikt uttrykk eller en graf, dette kan tyde på en prosessforståelse eller dypere i notasjonsfasetten. Ane på sin side eksemplifiserer med et konkret funksjonsuttrykk for å gi mening til notasjonen:

> *277. A: X-en er vel på en måte hvis, hvis du har 2x pluss 1, så er x, hvis du da setter at x skal være fire så skal x være fire der også. X-en er liksom, den viser bare at x-en er den som er variabel i det kommende uttrykket liksom.*

Behovet for et eksempel for å forklare notasjonen kan være en indikasjon på at hun befinner seg på et handlingsnivå i denne fasetten.

Også i 5b kobler studentene notasjonen til begrepet funksjon. Ben som i 5a på testen svarte «*funksjonsverdi*» svarte «*funksjon*» på 5b. Dette tyder på at Ben tillegger notasjonen forskjellige betydning avhengig av om det algebraiske funksjonsuttrykket er gitt eller ikke. Også svarene i intervjuet stemmer overens med svarene fra testen. Tvetydigheten i notasjonen $f(x)$ ble også testet i oppgave 7. I denne oppgaven svarte Ben at f(x) både representerer funksjonsverdien til funksjonen og regelen vi bruker for å finne funksjonsverdien. Under intervjuet viser det seg at Ben har endret svaret på 7c og spørsmålet om $f(x)$ representerer regelen:

> *266. B: Ehm, representerer regelen det vet jeg nå, det vet jeg nå ikke. For det, ja altså bare jeg ser f av, jeg ser jo bare navnet på selve funksjonen og så ser jeg hva jeg skal putte inn.*
> *267. M: Mhm*
> *268. B: På x, så jeg vil jo ikke si at det er en regel vi bruker for å finne det.*

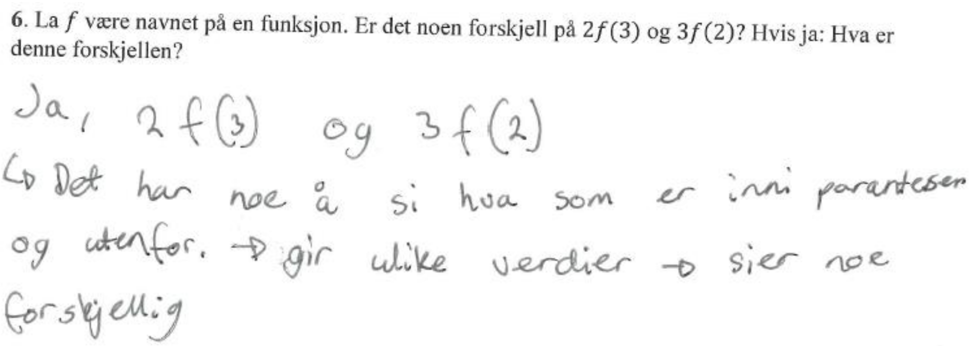
Spredningen i svarene kan tyde på at Ben er usikker og ikke helt har grep om tvetydigheten i notasjonen.

Som nevnt hadde Ben krysset av for sant på oppgave 7c under testen, Dina svarte ikke på oppgave 7 under testen, mens Ane og Carl krysset av for usant. Alle studentene hadde krysset av for sant 7a og mente dermed at f(x) representerte funksjonsverdien. Ingen av studentene mente at f(x) representerte produktet av f og x, hverken på testen eller i intervjuet. Ane og Carl gav like svar i alle deloppgavene på oppgave 7, både under test og intervju, mens Ben som sagt endret svaret sitt i oppgave 7c til usant. Dinas svar på 7c skiller seg fra de andre studentene i intervjuet, hun mener at utsagnet kan være sant:

443. *D: Regelen? Hm. På en måte. For du vet jo hva du skal gjøre. Eller du vet hva du skal tenke, hva du skal putte inn da. Om det representerer regelen vet jeg ikke helt. Hmmm. Jo. Kanskje sant på den. Men at f av x representerer en regel det var nytt. ... du vet jo at du må putte inn x-ene inn i funksjonsuttrykket.*
444. *M: Mhm*
445. *D: Så ja. Sant.*

Fra sitatet ser vi at Dina ikke er helt sikker, og heller ikke har møtt denne tolkningen før, likevel konkluderer hun med at det er sant.

I oppgave 6 på testen skulle studentene avgjøre om det er noen forskjell på $2f(3)$ og $3f(2)$, og hva eventuelt denne forskjellen består i. Ane og Ben lot oppgaven stå ubesvart på testen. Carl skrev «$2 * f(3)$ *og* $3 * f(2)$», men kom ikke med noe svar på om dette gjorde de forskjellige eller like. Dinas besvarelse kan sees i figur 25.


6. La f være navnet på en funksjon. Er det noen forskjell på $2f(3)$ og $3f(2)$? Hvis ja: Hva er denne forskjellen?

Ja, $2f(3)$ og $3f(2)$
↳ Det har noe å si hva som er inni parentesen og utenfor. → gir ulike verdier → sier noe forskjellig

Figur 25 Dinas svar på oppgave 6 fra testen.

Også under intervjuet fokuserer Dina på hva som står inni parentesene og at f(2) og f(3) gir forskjellige verdier, dette eksemplifiserer hun også ved hjelp av å ta i bruk tabellen på støttearket (se vedlegg 8.4 Støtteark til oppgave 6). Hun er usikker på hvordan hun skal tolke tallet som står til venstre i de to utrykkene, men ender etter hvert opp med at det kan være snakk om multiplikasjon:

423. *D: Mhm. og da kan det jo for eksempel, jeg vet ikke om det er sant. Men da kan det jo for eksempel stå 2 ganger 7 der, eh.*
424. *M: Ja*
425. *D: Og her 3 ganger 5. og da blir det ulikt.*

Selv om Dina i intervjuet benyttet seg av tabellen på støttearket for å eksemplifisere forskjellen på de to uttrykkene viser svaret fra den skriftlige testen at hun også er i stand til å skille de to uten en gitt funksjon å forholde seg til.

Carls svar under intervjuet samsvarer med svaret fra testen:

292. *C: Ja, det er nok det. Og da tenker jeg jo bare det at det, forskjellen her er egentlig bare det at det er forskjellig inn-verdier i de to, eller den samme funksjonen, så to ganger funksjonen av 3, og 3 ganger funksjonen av 2.*

Carl benytter seg ikke av støttearket under intervjuet, men gir likevel mening til notasjonen og formidler denne. Dette tyder på en forståelse på prosessnivå eller høyere i notasjonsfasetten for Carls del.

Ben er usikker i tolkningen av den venstre delen av uttrykkene og mener det kan bety to forskjellige ting:

236. *B: Ehm, nei altså enten så må det jo være at du skal multiplisere, eller at det egentlig bare er for å sortere de i forskjellige navn.*

Her konkluderer han med at dersom de to tallene er en del av navnet til funksjonen vil dette gi to forskjellige funksjoner og dermed er uttrykkene forskjellige. Etter å ha studert støttearket i over 30 sekunder lander han på at også tolkningen som multiplikasjon gir forskjellige svar.

Ane er også svært usikker på hvordan den venstre delen av uttrykket skal tolkes, men sier det kanskje er multiplikasjon det er snakk om. Etter mye hjelp og flere oppfølgingsspørsmål klarer Ane å finne to forskjellige verdier for de to uttrykkene ved hjelp av funksjonsuttrykket på støttearket. Det er rimelig å anta at hun ikke ville kommet frem til et tilsvarende svar uten denne hjelpen. Ane er tydelig avhengig av konkrete eksempler for å gi notasjonen mening noe som indikerer et handlingsnivå i denne fasetten.

I oppgave 15b og 15e skulle studentene forklare notasjonene $f(x) = g(x) - h(x)$ og $g(h(x))$. Oppgave 15-18 handler om sammensatte funksjoner i fire forskjellige fasetter. I forkant av intervjuet ble det laget to sett med oppgaver, der de sammensatte funksjonene som ble benyttet i de fire oppgavene i det ene settet var av typen $f(x) = g(x) - h(x)$ og i det andre settet av typen $g(h(x))$. Hensikten med dette var at notasjonen ikke skulle stå i veien for studentenes resonnement i disse oppgavene. Begge settene ble tatt med til første intervju og etter gjennomgangen av oppgave 15 ble det tatt en avgjørelse om å benytte oppgavesettet med den førstnevnte funksjonstypen for å best mulig å kunne studere studentenes forståelse.

Av studentene var det bare Dina som mente hun kanskje sett notasjonen $f(x) = g(x) - h(x)$ før. Likevel tolket alle studentene notasjonen riktig, i denne oppgaven og videre i intervjuet.

516. *B: Nei altså da, hvis vi skal finne ut av hva f av x er så kan vi rett og slett ta g av x minus h av x*
517. *B: I eksempelet her vil det jo blitt 13 minus 24*

Her ser vi at Ben eksemplifiserer notasjonen ved hjelp av svarene han fikk i oppgave a. I forklaringen velger han å benytte seg av de allerede ferdig utregnede funksjonsverdiene i stedet for funksjonsuttrykkene som også ble gitt i forbindelse med 15a. Dette kan tyde på at Bens tolkning er knyttet til at prosedyrene i de to funksjonene som kombineres fremfor å den sammensatte prosessen. En likende tolkning finner vi hos Ane:

555. *A: Jeg tenker jo at det betyr funksjonen eller g x minus, hvis du setter inn noe for x så tar du det minus det som du får som svar på den andre funksjonen da.*

I Anes forklaring over ser vi at hun fokuserer på å finne de to funksjonsverdiene først, for deretter å trekke fra. Som for Ben ligger fokuset på prosedyrene som kan indikere at de har en forståelse på handlingsnivået i denne fasetten.

Carl og Dina forklarte notasjonen på en annen måte og begge knyttet forklaringen til funksjonsuttrykket og den symbolske fasetten. I sitatet under ser vi Carl forklare notasjonen

553. *C: Nei, det er nytt. Men det var jo for så vidt egentlig helt greit, egentlig. For f av x er jo bare de to funksjonene g av x minus h av x.*
554. *M: Ja*
555. *C: Så i det funksjonsuttrykket der, f av x, så kan du jo bare legge inn funksjonen til g av x og funksjonen til h av x.*

Forklaringen til Carl, der han forklarer at de to funksjonsuttrykkene kan kombineres til et nytt funksjonsuttrykk for den sammensatte funksjonen tyder på at han i større grad fokuserer på prosessen som skaper funksjonsverdien til den sammensatte funksjonen, og ikke tolker notasjonen som en prosedyre der det er funksjonsverdiene som må behandles. Dette kan være en indikasjon på et prosessnivå i notasjonsfasetten. Også Dina har en liknende tolkning av notasjonen:

> 719. *D: At f av x det er dette minus det. At det er en ny, et nytt funksjonsuttrykk da.*

Videre i kombinerer hun de to funksjonsuttrykkene til en ny funksjon, dette ser vi nærmere på i analysen av den symbolske fasetten. Måten hun kombinerer funksjonsuttrykkene og sitatet over er indikasjoner på et objektnivå i denne fasetten, da handlingene hun utfører utføres på selve funksjonen og ikke kun enkelte funksjonsverdier.

I tolkningen av uttrykket $g\big(h(x)\big)$viser Ane igjen en punktvis tolkning. Hun har innledningsvis sagt at hun tolker uttrykket til å være de to funksjonene g og h multiplisert med hverandre:

> 627. *M: Skal vi gange de?*
> 628. *A: Jeg tror det.*
> 629. *M: Ok. Så det du ville tatt, hvis du skulle laget et funksjonsuttrykk for den, det er å gange 2x pluss 3 med x i andre minus en?*
> 630. *A: Ehm, ja. At g, at du liksom skal, jeg tenker at du skal løse h x, du skal løse den, og så skal du gange det med løsningen av den. Fordi at g står uten noe sånt tegn mellom. Men jeg tenker jo at det kan jo også bety at g er på en måte navnet på funksjonen og h x er variabelen.*

Videre i samtalen forteller Ane at hun er usikker på hvilken tolkning som er riktig, og kommer heller ikke med noe forslag på hvordan den nye funksjonen skal fungere eller tolkes dersom $h(x)$ er variabelen. Ben gav uttrykk for at han var usikker på notasjonen, men tolket den til slutt som: «[…] *Eller jeg ser jo selvfølgelig at h av x er det som skal være g-en sin ukjente her, men.»*. Bens brukt av ordet *ukjente* kan tolkes som å være ensbetydende med *variabel*. Dermed har han en riktig tolkning av notasjonen, men som nevnt gir han uttrykk for å være usikker og velger å ikke gjøre mer rede for uttrykket.

Carl tolker notasjonen riktig og tyr til et eksempel for å vise hva han mener:

> 572. *C: Da er det jo det at x-verdien i g funksjonen, blir da resultatet av h av x.*

Han setter så $x = 2$ og regner ut $h(2) = 3$

> 580. *C: Så legger du inn 3 som altså hvor da du putter 3 inn i funksjonen g.*

Vi ser her at Carl tar i bruk den symbolske og den numeriske fasetten for å eksemplifisere. Forklaringen hans tyder på at han har en riktig, men punktvis, forståelse av notasjonen. Dina tok også i bruk den symbolske fasetten, noe som ikke er overaskende da andre deler av oppgave 15 dreide seg om nettopp funksjonsuttrykk og arbeid med disse. Hun valgte å sette funksjonsuttrykket for h inn i notasjonen og skapte følgende uttrykk: $g(x^2 - 1)$. På oppfordring om å finne funksjonsverdien for x=2 regnet hun først ut for uttrykket i parentesen og benyttet seg deretter av funksjonsuttrykket for g:

> 765. *D: Nei det kan være jeg hadde tatt 2-eren her da.*
> 766. *M: Ja. Satt den inn i det nye [D: 4 minus 1] uttrykket der, som du lagde*
> 767. *D: Mhm*
> 768. *M: Så 4 minus 1.*
> 769. *D: Ja.*
> 770. *M: Mhm. så da står det g av 3?*
> 771. *D: Ja, og da kanskje satt 3eren inn her.*
> 772. *M: Ok. Så da setter du 3eren inn i det originale uttrykket for g?*
> 773. *D: Mhm, ja*

Selv om dette er et steg i retning av å skape et nytt funksjonsuttrykk for den sammensatte funksjonen ser vi likevel at Dina er nødt til å benytte begge funksjonsuttrykkene hver for seg. Det blir dermed en punktvis fremgangsmåte til tross for at funksjonen her i større grad blir kombinert sett i forhold til de andre studentenes besvarelser.

Som nevnt tidligere var denne oppgaven utformet for å teste studentenes notasjonsforståelse for å undersøke om denne kunne være på et objektnivå. I følge DeMarois (1998) vil studenter på et objektnivå være i stand til å utføre handlinger på disse objektene. I eksemplene over som handler om sammensatte funksjoner har vi sett at studentene i flere tilfeller er i stand til å tolke notasjonene og gi mening til dem, men at det ikke er funksjonene som benyttes, men funksjonsverdier, og at forståelsen i stor grad ser ut til å være punktvis fremfor global. Unntaket er Dina som i forbindelse med notasjonen $f(x) = g(x) - h(x)$ viste tegn til en objektforståelse av begrepet. Studentene viste seg i stand til å skille mellom notasjon knyttet til funksjoner og andre typer notasjoner som multiplikasjon. Alle studentene viste tegn til å være på et handlingsnivå eller bedre i notasjonsfasetten, og flere av studentene viser også tegn til prosessforståelse.

4.9 Hensiktsmessig valg av representasjoner

I oppgave 19 i intervjuet fikk studentene utlevert en tabell, en graf og et funksjonsuttrykk som alle representerte samme funksjonen. Studentene ble så bedt om å finne totalt syv ulike funksjonsverdier og variabelverdier. Intensjonen med oppgaven var å undersøke om studentene valgte å benytte seg av den representasjonen som var mest hensiktsmessig. Tabellen under viser hvilke representasjoner studentene benyttet seg av i de ulike oppgavene. Alle de syv oppgavene kunne løses ved hjelp av funksjonsuttrykket, men dette blir ikke regnet som det mest hensiktsmessige i alle tilfeller siden dette gjerne innebærer tidkrevende utregning, og for eksempel avlesning i tabellen vil være mer effektiv. I oppgave d, e og g er funksjonsuttrykket det mest hensiktsmessige da det ikke er mulig å finne svarene i c og d ved hjelp av de andre representasjonene samt at tabellen gir bare én rett verdi (av to) for g. Oppgave a kan løses ved hjelp av alle tre representasjoner, men tabellen regnes som mest hensiktsmessig da den både er effektiv og nøyaktig, deretter rangeres grafen på grunn av effektivitet. I oppgave 19f og 19g vil kjennskap til at andregradsfunksjonen kan ha samme funksjonsverdi for to variabelverdier være nødvendig for å velge den mest hensiktsmessige representasjonen. Både grafens form, mønsteret i tabellen og egenskapene til funksjonsuttrykket er tegn på denne egenskapen. De må også ha kjennskap til at man kan finne begge verdiene ved hjelp av funksjonsuttrykket. Ved å koble disse forskjellige deler av begrepsbildet sammen, ved det Sierpinska (1992) kaller syntese, vil de være i stand til å velge den mest hensiktsmessige representasjonen i disse oppgavene.

	19a	19b	19c	19d	19e	19f	19g
Ane	T	T	G	F	F	T*	T*
Ben	T	T	G	F	F	T*	T*
Carl	T	T	G	F	F	T*	T*
Dina	T	T	G	F	F	G	F

*Tabell 20 Oversikt over hvilke representasjoner studentene valgte å bruke i de forskjellige deloppgavene på oppgave 19 under intervjuet. T - tabell, G - graf, F- funksjonsuttrykk, * - én av to mulige verdier.*

Fra tabellen ser vi at studentene valgte samme representasjon i oppgave a-e. representasjonene som ble valgt i disse oppgavene var også hensiktsmessige. I oppgave f og g valgte Ane, Ben og Carl å benytte seg av tabellen. Dette medførte at de bare fant én av to verdier for x. Dina valgte i denne oppgaven å benytte seg av grafen, og fant dermed begge funksjonsverdiene. Hun gav ikke noen begrunnelse for hvorfor hun valgte denne representasjonen. Også i oppgave 19g valgte Ane, Ben og Carl å benytte seg av tabellen og fant ved hjelp av denne én x-verdi for den gitte funksjonsverdien, mens Dina denne gangen valgte å benytte seg av funksjonsuttrykket:

> *1053. D: At jeg putter 8-eren her, som f av x.*
> *1054. M: Ok. Så du setter funksjonsverdien lik f av x, og så lik [D: ja] funksjonsuttrykket.*
> *1055. D: Ja*
> *1056. M: Mhm*
> *1057. D: Jeg vet ikke om det går an altså.*
> *1058. M; Hva ville du gjort nå?*
> *1059. D: Nei, nå ville jeg, ehm. Jeg tenker å putte 8-eren over her. X i andre minus 3x minus 18.*
> *1060. M: Ja*
> *1061. D: Og så tar jeg abc-formelen eller, nei vent vi har jo ikke noe, jo. Ja.*

$$x^2 - 3x - 10 = 8$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

Figur 26 Dinas notater fra oppgave 19g der hun skulle finne x-verdien når funksjonsverdien er 8.

Dina fikk så beskjed om at videre utregning ikke var nødvendig siden dette intervjuet dreide seg om forståelse og ikke regneferdigheter. Fra sitatet over, samt Dinas påbegynte utregning i figur 26 ser vi at Dina er i stand til å reversere prosessen til funksjonsuttrykket for å finne de tilhørende x-verdiene. I analysen av den symbolske fasetten, finner vi oppgave 2b som er utformet for å teste om studentene er i stand til å gjøre nettopp dette, men som tilsynelatende ble for enkel slik at studentene var i stand til å løse den uten nødvendigvis å reversere prosessen på denne måten. Setter vi de to oppgavene i sammenheng ser vi i Dinas tilfelle at anvendelsen av en slags «prøve-og-feile»-fremgangsmåte i 2b ikke nødvendigvis betyr at studenten ikke er i stand til å reversere prosessen. Vi kan, på bakgrunn av hennes besvarelse over, anta at hun har en prosessforståelse eller bedre i den symbolske fasetten. En mulig feilkilde, som kan ha spilt inn på de tre andre studentenes valg av tabell i de to oppgavene 19f og 19g er ordlyden i oppgavene. I motsetning til oppgave 1-4 på testen spør ikke oppgavene etter x-verdien(e), men x-verdien. Dette kan ha medvirket til at studentene sa seg fornøyd med én verdi fremfor å finne begge to.

4.10 Koblinger mellom forskjellige fasetter

I oppgave 1 i intervjuet, som allerede har blitt omtalt under flere forskjellige overskrifter i analysekapitelet, skulle studentene sortere 21 lapper med algebraiske uttrykk, maskiner, grafer og tabeller i to bunker: funksjoner og ikke-funksjoner. Flere av disse lappene bestod av samme funksjon i forskjellige representasjoner. Tabell 21 viser oversikten over hvilke lapper som representerte samme funksjon/ikke-funksjon og hvilke representasjoner de forskjellige lappene viser. Etter at studentene var ferdige med og sortere lappene og bunkene var gjennomgått med fremgangsmåter for hver enkelt lapp ble studentene spurt om noen av lappene de hadde vært igjennom representerte samme funksjon.

Uttrykk	Graf	Maskin	Tabell
2 ($g(x) = x^2 - 1$)	1	5	
3 ($h(x) = -1$)	10	18	11
12 ($f(x) = -2x + 3$)	6	19	17, 21
13 ($h(x) = 2^x$)	20	8	
7 ($x = 3$)			16

Tabell 21 Oversikt over funksjoner/ikke-funksjoner fra oppgave 1 som representerer samme funksjon/ikke-funksjon. numrene refererer til lappene og de algebraiske uttrykkene er tatt med for å gi et overblikk.

Ane koblet samme lappene 3&10, 12&16, 1&2 og 13&20. Fra tabellen ser vi at alle koblingene Ane gjorde var mellom funksjonsuttrykk og graf. Det er her verdt å minne om at Ane selv, i forbindelse med denne oppgaven, sa hun aldri hadde møtt funksjoner representert som tabeller og lot være sortere disse.

Lappene som Ben koblet samme var følgende: 2&5, 3&11&18, 12&19, 6&17, 13&8 og 7&10 Ben var den av studentene som gjorde flest koblinger mellom lappene, men også den eneste som gjorde en feilaktig kobling, nemlig 7 og 10. I denne sammenkoblingen knyttet han samme grafen til h(x)=-1, altså en rett, horisontal linje, og uttrykket x=3. Dette var den første koblingen Ben gjorde:

> *96. B: Ja det var en del. Spesielt den her i ikke, så var det jo den, tenker jeg jo gjerne 10 7, bare forskjellige tall da selvfølgelig.*

Ben peker selv på at funksjonene har «*forskjellige tall*», men ser ellers ut til å mene de er like eller av samme type og at begge er ikke-funksjoner.

Av de seks koblingene Ben gjør innebærer fem det algebraiske uttrykket. Den ene koblingen som ikke inneholder noe algebraisk uttrykk er 6 og 17 som involverer graf og tabell. Det er her interessant at Ben i tillegg gjorde koblingen mellom 12 og 19 som er uttrykket og maskinen som representerer samme funksjon som 6 og 17, uten å koble disse parene sammen.

Carl koblet sammen lappene 3&10&11&18 og 8&13. I tilfellet for den konstante funksjonen har Carl dermed knyttet sammen alle de fire representasjonene, og han anser ingen av disse for å være funksjoner. I 13 og 8 er det funksjonsuttrykket og funksjonsmaskinen for eksponentialfunksjonen som knyttes sammen.

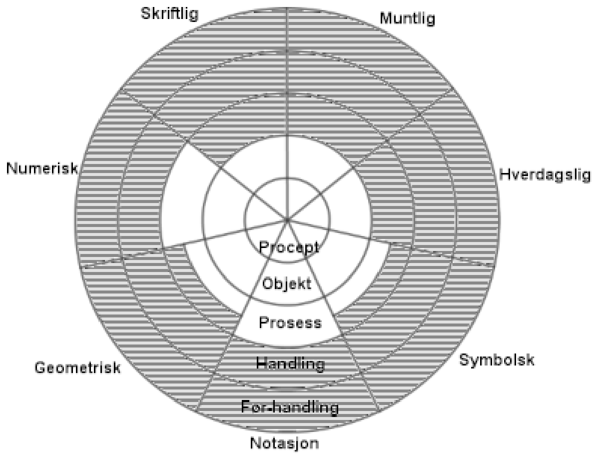
Dina knyttet sammen 1&2, 3&10&11&18, 6&17 og 6&21. Dina knyttet også sammen alle de fire representasjonene for den konstante funksjonen, men i motsetning til Carl mente hun disse var funksjoner. Hun koblet også grafen til den lineære funksjonen til begge de to tabellene for samme funksjon, men på forskjellige tidspunkt i arbeidet. Begge disse koblingene ble gjort mens hun jobbet med å avgjøre om tabellene var funksjoner eller ikke. Dette kan tyde på at hun i dette arbeidet forsøkte å knytte tabellene til en geometrisk representasjon for så å avgjøre på bakgrunn av dette.

Av de totalt 16 sammenkoblingene av lapper studentene gjorde inngikk funksjonsuttrykket som en av lappene i 13 av disse. De tre resterende koblingene dreide seg om grafen på lapp 6 og tabellene i 17 og 21. For Ane og Carl innebar alle grupperingene de gjorde funksjonsuttrykk. Alle de fire studentene gjorde sammenkobling mellom funksjonsuttrykket til den konstante funksjonen (lapp 3) og en eller flere andre representasjoner for samme funksjon. Dette til tross for at det blant de fire bare var Dina som anså denne som en funksjon.

4.11 Oppsummering av studentenes forståelse i de ulike fasettene

Jeg vil nå forsøke å gi en kort oppsummering av hver av de fire studentenes forståelse i de syv fasetten. For å illustrere studentenes forståelse har jeg laget et diagram for hver student etter modellen til DeMarois og Tall (1996, s. 2) der laget studentenes forståelse befinner seg på i en gitt fasett skravert inn. Til forskjell fra den originale modellen består denne bare av syv fasetter, da den kinestetiske fasetten er utelatt i denne oppgaven. I de tilfellene der studentene befinner seg i overgangen mellom handlings- og prosessnivå er prosesslaget skravert halvveis inn.

4.11.1 Ane



Figur 27 Oversikt over Anes forståelse av funksjonsbegrepet i syv ulike fasetter. Det innerste laget som er skravert i hver fasett antas å være det laget studenten befinner seg på i den aktuelle fasetten. Der halve prosesslaget er skravert antas studenten å befinne seg i overgangen mellom handlings- og prosesslaget.

Anes muntlige og skriftlige beskrivelse av begrepet funksjon som «*Et uttrykk med et konstantledd og en variabel*» knytter seg i stor grad til den symbolske fasetten. Til tross for dette viser hun tegn til en prosessforståelse av begrepet i den skriftlige og muntlige fasetten ved å samtale om funksjoner på generell basis, og uten å ty til eksempler. Misoppfatningen om at funksjonsuttrykket må inneholde konstantledd og variabel kan stamme fra en overgeneralisering av egenskaper ved lineære funksjoner. Den personlige begrepsdefinisjonen kom også til uttrykk i arbeid med sorteringen av funksjonsuttrykk.

I den symbolske fasetten viste Ane tydelige tegn til å befinne på et handlingsnivå ved å beherske anvendelse av funksjoner i form av funksjonsuttrykk. Også noen tegn en prosessforståelse ble observert, for eksempel ved at hun betraktet de to funksjonsuttrykkene $f(x) = 3(2x - 3)$ og $g(x) = 6x - 9$som samme funksjon. I arbeidet med det sammensatte funksjonsuttrykk viste hun også tegn til en handlingsforståelse gjennom punktvise fremgangsmåter, det er dermed rimelig å anta at Ane ligger et sted imellom en handlings- og prosessforståelse i den symbolske fasetten.

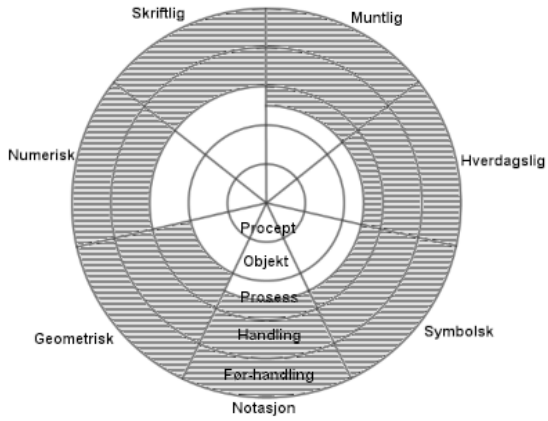
Også i den geometriske fasetten utviste hun flere tegn på handlingsforståelse og enkelte tegn på prosessforståelse. Prosessforståelsen kom frem ved at hun var i stand til å skifte mellom fremgangsmåter for å finne funksjonsverdier og variabelverdier for ulike funksjoner representert ved grafer. Samtidig blandet hun de to fremgangsmåtene i arbeidet med en av oppgavene og kom dermed frem til galt svar. Vi kan dermed anta at Ane befinner seg et sted mellom de to lagene av forståelse også i den geometriske fasetten.

I forbindelse med tabellene som ble brukt for å teste den numeriske fasetten sa Ane først at hun aldri hadde sett denne representasjonen før, men koblet etter hvert fremstillingen i tabeller til tallpar av typen $(x, f(x))$ og viste med det at hun ikke befant seg på før-handlingsnivået i denne fasetten. Hun viste deretter at hun var i stand til å benytte seg av tabellene til avlesning av funksjonsverdier, og til å lese av motsatt vei for å finne x-verdier. Fremgangsmåten til Ane i forbindelse med sortering av funksjoner/ikke-funksjoner viser at hun er avhengig av å se et mønster i funksjonsverdiene, og tyder på et handlingsnivå i den numeriske fasetten.

Også i notasjonsfasetten viser Ane tydelige tegn til en handlingsforståelse, blant annet ved stadig bruk av eksempler og en punktvis tolkning av notasjoner for sammensatte funksjoner.

Ane oppgav selv at hun aldri hadde sett funksjonsmaskiner forut for testen, men viste både på testen og intervjuet at hun behersket bruken av disse. Hun viste blant annet at hun var i stand til å reversere prosessen i funksjonsmaskinen og hun betraktet de to funksjonsmaskinene med tekstene «*Ta inn-verdien og legg til to, multipliser deretter summen med fire*» og «*Ta inn-verdien og multipliser med fire, legg deretter åtte til summen*» som like. Dette tyder på at Ane har en prosessforståelse i den hverdagslige fasetten.

4.11.2 Ben



Figur 28 Oversikt over Bens forståelse av funksjonsbegrepet i syv fasetter. Det innerste laget som er skravert i hver fasett antas å være det laget studenten befinner seg på i den aktuelle fasetten. Der halve prosesslaget er skravert antas studenten å befinne seg i overgangen mellom handlings- og prosesslaget.

Ben knytter sin muntlige og skriftlige beskrivelse av begrepet funksjon til den symbolske fasetten og funksjonsuttrykket. Fokus på funksjonsuttrykket og at vi ved å putte inn verdier kan skape funksjonsverdier tyder på at han har en handlingsforståelse i både den muntlige og skriftlige fasetten, samtidig som han er i stand til å skrive og snakke om funksjoner uten å ta i bruk eksempelfunksjoner, noe som kan tyde på en prosessforståelse. Det er dermed rimelig å anta at han befinner seg et sted i overgangen mellom de to nivåene av forståelse i disse fasettene.

I notasjonsfasetten viste Ben tegn til en prosessforståelse da han beskriv de ulike delene av funksjonsuttrykket generelt og uten å ty til eksempler. I forbindelse med notasjonen av sammensatte funksjoner kom også en punktvis forståelse til syne, noe som tyder på et handlingsnivå. Også her kan vi anta at han befinner seg et sted i overgangen mellom de to nivåene av forståelse.

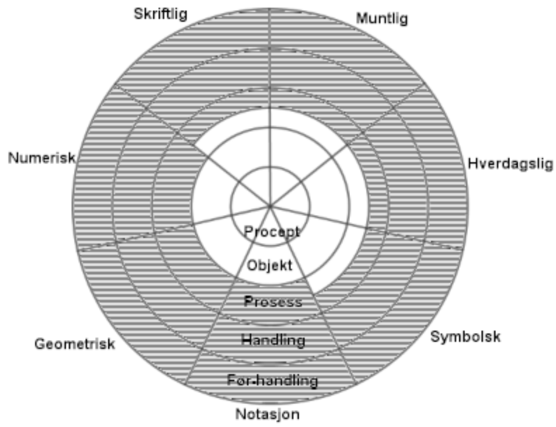
I kapittel 4.4 om den hverdagslige fasetten så vi at Ben var i stand til å produsere ut-verdier fra inn-verdier, og motsatt selv om fremgangsmåten han da benyttet ikke kan beskrives som å reversere prosessen. Ben gav uttrykk for at de to funksjonsmaskinene: «*Ta inn-verdien og legg til to, multipliser deretter summen med fire*» og «*Ta inn-verdien og multipliser med fire, legg deretter åtte til summen*» var forskjellige funksjoner til tross for at de alltid ville gi samme ut-verdier dersom de fikk lik inn-verdi. Dette tyder på at Ben ikke har en prosessforståelse i denne fasetten enda.

Også i den symbolske fasetten viste Ben tegn til både handlings- og prosessforståelse. Ved hjelp av funksjonsuttrykk var han i stand til både å finne funksjonsverdier og variabelverdier, men sistnevnte fant han heller ved hjelp av kvalifisert gjetting fremfor å reversere prosessen. I forbindelse med den sammensatte funksjonen $f(x) = g(x) - h(x)$ med gitte funksjonsuttrykk for funksjonene g og h var Bens muntlige beskrivelse punktvis og bar preg av en handlingsforståelse.

I arbeidet i den geometriske fasetten var Ben i stand til å finne begge x-verdiene for en gitt funksjonsverdi ved hjelp av grafen til en kvadratisk funksjon, både på den skriftlige testen og under intervjuet, noe som tyder på en prosessforståelse. Også i arbeidet med grafer og sammensatte funksjoner viste Ben at han behersket representasjonen godt, og fant også frem til formen for den sammensatte funksjonen, men ved hjelp av en punktvis fremgangsmåte. Samlet sett er indikasjonene på en prosessforståelse tydeligere enn på en handlingsforståelse i den geometriske fasetten for Ben.

I den numeriske fasetten at Ben var i stand til å løse oppgave knyttet til tabeller, noe som indikerer at han befinner seg på et handlingsnivå eller høyere. Resonnementet han gav i forbindelse med identifisering av tabeller som funksjoner, der han oversatte til mulige funksjonsuttrykk og avgjorde på bakgrunn av dette tyder på at han er avhengig av å gjenkjenne prosedyrene som skaper tabellene, vi kan derfor konkludere med at Ben befinner seg på et handlingsnivå i denne fasetten.

4.11.3 Carl



Figur 29 Oversikt over Carls forståelse av funksjonsbegrepet i syv fasetter. Det innerste laget som er skravert i hver fasett antas å være det laget studenten befinner seg på i den aktuelle fasetten. Der halve prosesslaget er skravert antas studenten å befinne seg i overgangen mellom handlings- og prosesslaget.

Carls muntlige og skriftlige beskrivelser av begrepet funksjon gir indikasjoner på både handlings- og prosessnivå i disse fasettene. I begge de to beskrivelsene knytter han funksjonsbegrepet til den symbolske fasetten og funksjonsuttrykket. Fokuset på handlingene som utføres på variabelverdien, noe som tyder på en handlingsforståelse. Samtidig omtaler han funksjoner generelt uten å støtte seg på eksplisitte eksempler noe som kan knyttes til en prosessforståelse.

I den hverdagslige fasetten viste Carl seg i stand til å reversere prosessen til funksjonsmaskinen noe som kan indikere en prosessforståelse i denne fasetten, samtidig mente han de to funksjonsmaskinene «*Ta inn-verdien og legg til to, multipliser deretter summen med fire*» og «*Ta inn-verdien og multipliser med fire, legg deretter åtte til summen*» representerte forskjellige funksjoner, til tross for at han var oppmerksom på at resultatene fra de to maskinene ville være like. Dette kan tyde på at Carl ikke helt har tatt steget over på prosessforståelse, men befinner seg i overgangen mellom prosess- og handlingsforståelse i den hverdagslige fasetten.

I den symbolske fasetten var Carl tilbøyelig til å se de to funksjonsuttrykkene $f(x) = 3(2x - 3)$ og $g(x) = 6x - 9$ som samme funksjon noe som tyder på en prosessforståelse. Dette støttes også opp av at han ved hjelp av et funksjonsuttrykk og en gitt funksjonsverdi var i stand til å finne rett x-verdi, til tross for en forenklet fremgangsmåte. Carls muntlige beskrivelse av funksjonsuttrykket for den sammensatte funksjonen $f(x) = g(x) - h(x)$ der uttrykkene for g og h var gitt bærer preg av en punktvis forståelse. Han antas derfor å være et sted langs overgangen mellom de to lagene av forståelse i den symbolske fasetten.

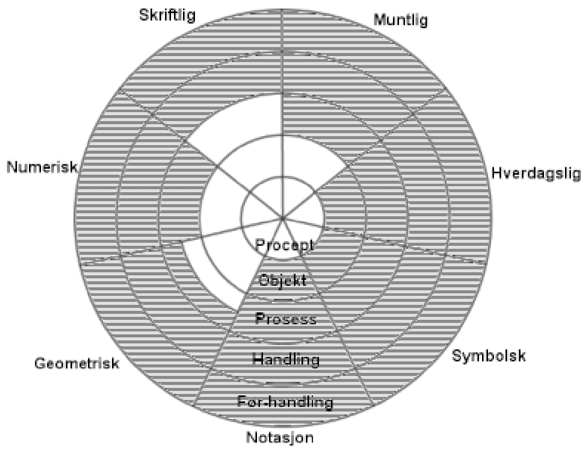
Ved hjelp av grafene til funksjoner viste Carl at han var i stand til å finne funksjonsverdier for variabelverdier og motsatt, noe som indikerer en prosessforståelse i den geometriske fasetten. Carl viste også at han ved hjelp av grafene for funksjonene f og g kunne finne funksjonsverdier for den sammensatte funksjonen $h(x) = f(x) - g(x)$ og brukte disse for å finne grafen for $h(x)$. Fremgangsmåten han benyttet her var punktvis og vitner om at han ikke behandler funksjonene som objekter ved å kombinere grafene, men heller benytter seg av funksjonsverdiene for gitte variabelverdier.

I den numeriske fasetten viste Carl at han var i stand til å bruke tabeller til å finne funksjonsverdier og variabelverdier, noe som indikerer en prosessforståelse. Dette underbygges av at han i arbeidet med både grafer og tabeller implisitt viste en forståelse av entydighetsegenskapen ved funksjoner, dette kom også til uttrykk i samtalene om de alternative definisjonene av funksjonsbegrepet der han eksemplifiserte definisjonene ved hjelp av en tabell fra en tidligere oppgave. En slik forståelse, der fokuset ligger på variabelverdier og funksjonsverdier fremfor selve prosedyrene funksjonen utfører og indikerer en prosessforståelse i den numeriske fasetten.

I notasjonsfasetten viste Carl tydelige tegn på en prosessforståelse gjennom redegjørelser for notasjoner som $f(x)$, $y(x) = 2x$, og ved argumentasjon rundt hvorfor $2f(3)$ og $3f(2)$ ikke betyr det samme. I denne argumentasjonen benyttet han seg ikke av eksempler, men klarte likevel å gi mening til notasjonen. I forbindelse med notasjoner knyttet til sammensatte funksjoner viste Carl en mer punktvis forståelse, i tråd med et handlingsnivå av forståelse, men indikatorene for en prosessforståelse i denne fasetten viser at han helt klart har en prosessforståelse av funksjoner i notasjonsfasetten.

4.11.4 Dina

Dinas skriftlige beskrivelse av begrepet funksjon bestod utelukkende av eksempler og en henvisning til egenskapen «*toppunkt*», noe som tyder på et handlingsnivå i denne fasetten. I den muntlige beskrivelsen utviser hun en prosessforståelse ved å samtale om begrepet uten konkrete eksempler og med et fokus på inn- og ut-verdier. Hun knytter også samme tabell graf og funksjonsuttrykk i forklaringen og mener at det er grafen som er selve funksjonen.



Figur 30 Oversikt over Dinas forståelse av funksjonsbegrepet i syv fasetter. Det innerste laget som er skravert i hver fasett antas å være det laget studenten befinner seg på i den aktuelle fasetten. Der halve prosesslaget er skravert antas studenten å befinne seg i overgangen mellom handlings- og prosesslaget.

Gjennom tolkninger av notasjonene $f(x)$ og $y(x) = 2x$ viste Dina at hun også her har en prosessforståelse. Ved å argumentere for $2f(3)$ og $3f(2)$ ikke betyr det samme uten å benytte seg av eksempler underbygger hun antakelsen om prosessforståelse i notasjonsfasetten. Hennes tolkning av notasjonen knyttet til sammensatte funksjoner bærer også preg av en objektsforståelse, noe hun også viser gjennom hvordan hun kombinerer funksjonsuttrykk i den symbolske fasetten. Hun var også den eneste av studentene som betraktet notasjonen $f(x)$ både som en representant for funksjonsverdien og for regelen som skaper denne. Noe usikkerhet rundt tvetydigheten av notasjonen $f(x)$ gjør at kan se bort fra et proceptnivå, hun kan derfor tenkes å være på et objektslag av forståelse i notasjonsfasetten

I den hverdagslige fasetten viste Dina at hun var i stand til å finne både ut- og inn-verdier ved hjelp av funksjonsmaskiner, noe som tyder på et minimum av prosessforståelse. Videre kombinerte hun to ulike maskiner, f og g, for å skape en ny sammensatt funksjonsmaskin h. Dette gjorde hun ved å gå via den symbolske fasetten og kombinere funksjonsuttrykkene tilhørende de to maskinene for så å skape en ny maskin basert på det sammensatte uttrykket. Med dette viser Dina tegn til en objektsforståelse i den hverdagslige fasetten.

Gjennom å sette opp en likning for å finne x-verdiene når funksjonsverdien er 8 for andregradsuttrykket $f(x) = x^2 - 3x - 10$ viste Dina at hun er i stand til å reversere prosesser i den symbolske fasetten, noe som tyder på en prosessforståelse eller dypere. Hun viste også tegn til en objektsforståelse i samme fasett da hun kombinerte funksjonsuttrykkene for to de to funksjonene g og h for å skape et nytt, forenklet, funksjonsuttrykk for funksjonen $f(x) = g(x) - h(x)$

Til tross for at hun flere ganger viste seg i stand til å lese av grafer for både funksjonsverdier og variabelverdier virket hun mer usikker i disse oppgavene, og valgte enkelte ganger feil fremgangsmåte. I oppgaven med sammensatte funksjoner og grafer var hun tydelig usikker på hvordan hun skulle gå frem, men kom etter hvert frem til riktige svar. Ut fra de observasjonene som er gjort kan hun samlet sett plasseres et sted imellom handlings- og prosessforståelse i den geometriske fasetten.

I den numeriske fasetten viste Dina at hun var i stand til å finne funksjonsverdier og variabelverdier ved hjelp av tabeller, samt kombinere tabeller for å finne verdier for sammensatte funksjoner. Hun kan dermed tenkes å ha en prosessforståelse i denne fasetten.

Alt i alt ser vi at det i flere fasetter kan være vanskelig å plassere studentenes forståelse på nøyaktig ett lag i DeMarois og Tall (1996) sin modell av forståelse. Studentene utviser gjentatte ganger tegn til ulike lag av forståelse innen samme fasett, og det må dermed være rimelig å anta at de befinner seg et sted i overgangen mellom de to lagene. Vi ser også at Dinas forståelse i notasjonsfasetten samt den symbolske og den hverdagslige fasetten skiller seg ut ved at hun viser tegn til en objektsforståelse.

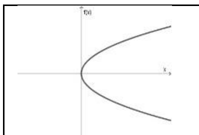
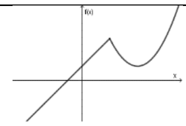
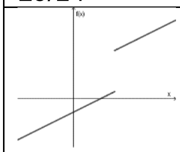
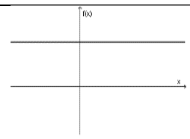
.

5 Drøfting av hovedresultater og deres implikasjoner

Jeg vil i dette kapittelet returnere til de to forskningsspørsmålene «*Hvilken forståelse har studenter ved grunnskolelærerutdanningen 5-10. trinn av funksjoner, før de møter begrepet i utdanningen?*» og «*I hvilken grad egner DeMarois og Talls modell seg som verktøy for å kartlegge studenters forståelse av funksjonsbegrepet*». I 5.1 og 5.2 vil jeg drøfte hovedfunn for hver av de to spørsmålene og hvilke implikasjoner disse funnene kan ha for undervisningen av matematikk i videregående skole og lærerutdanningen. I 5.3 vil jeg forsøke å besvare forskningsspørsmålene i korte trekk. I 5.4 vil forslag til mulig videre forskning foreslåes. Ved hjelp av resultater fra analysen i denne studien og refleksjoner rundt disse vil jeg forsøke å svare på de to spørsmålene og gjøre rede for hvilke implikasjoner dette kan ha

5.1 Studentenes forståelse av funksjonsbegrepet

Fra analysen av diskrimineringsoppgavene fra testen så vi at studentene hadde problemer med å identifisere flere av funksjonsuttrykkene, for eksempel $f(x)$ =1 og $x^2 = f(x) + 3$ (se figur 31 for flere eksempler).

 29/14	 4/39
 4/39	 23/20
$f(x) = \pm\sqrt{2x}$ 20/23	$xf(x) = 6$ 7/36
$f(x) = 1$ 17/26	$x^2 = f(x) + 3$ 21/22
$f(x) = \begin{cases} x & hvis\ x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & hvis\ x \geq 1 \end{cases}$ 17/26	

Figur 31 Utvalgte diskrimineringsoppgaver fra oppgave 8 og 9 fra den skriftlige testen, tallene i rutene markerer riktige/gale svar blant de 43 besvarelsene.

Mange av de algebraiske uttrykkene studentene har problemer med å avgjøre om er funksjoner eller ikke er gjerne uttrykk som skiller seg fra de studentene er vant med å møte i skolematematikken.

Vi observerer det samme i den geometriske fasetten: grafer som ikke likner på de studentene tidligere har erfaring med finner de vanskelig å vurdere med hensyn til om grafene representerer en funksjon eller ikke. Dette gjelder særlig grafene som ikke er jevne og pene. Liknende resultater har tidligere blitt identifisert av Even (1993) og Tall og Bakar (1992) i deres undersøkelser.

Anvendelse av den konstante funksjonen $f(x) = k$ (der k er et konstant tall) i testene og intervjuene i studien har avdekket brister i studentenes begrepsbilder. Den konstante funksjonen utgjør en mental utfordring for studentene både innenfor de numeriske, geometriske og symbolske fasettene. Mitt funn samsvarer med hva Tall og Bakar (1992) fant i sin studie.

En fremgangsmåte som kom frem i flere av oppgavene i intervjuet og på testen var at de sammenlikner uttrykkene, grafene, tabellene og funksjonsmaskinene de har foran seg med grafer og uttrykk de kjenner til fra før, det Tall og Bakar (1992) beskriver som prototyper eller eksempelfunksjoner. Dette vitner om at studentene i sine resonnementer i stor grad nyttiggjør seg av begrepsbildet i stedet for begrepsdefinisjonen. Med de store andelene gale svar på mange av diskrimineringsoppgavene er det grunn til å tro at studentenes begrepsbilde har uklare grenser. Med uklare grenser mener jeg her at studentenes begrepsbilder ikke tydelig definerer hva som er funksjoner og ikke. Dette funnet støttes opp av resultater fra testen som viste at ingen av studentene var i stand til å beskrive eller definere begrepet «funksjon» fullstendig. Heller ingen av studentene viste til entydighetsegenskapen for funksjoner i sine beskrivelser av begrepet.

For å gjøre studentenes begrepsbilde tydeligere og dets grenser klarere kan to fremgangsmåter være hensiktsmessige å anvende i undervisningen ved lærerutdanningen.

For det første er det grunn til å tro at erfaringer med ikke-eksempler kan være med å gjøre grensene for begrepet tydeligere. Som Skemp (1987) poengterer vil egenskapene ved funksjoner tre tydeligere frem dersom de presenteres sammen med ikke-funksjoner og dermed danner kontraster. Her kan for eksempel studentene arbeide med funksjonssammenhenger og sammenhenger som ikke representerer en funksjon. På denne måten kan studentene få muligheten til å se nytten av funksjoner og gjennom egne erfaringer utvide begrepet og tydeliggjøre grensene til begrepet. Eksempler på slike sammenhenger kan være sammenhengen mellom arealet til en sirkel og dens omkrets (funksjon) og arealet til et rektangel og dets omkrets (ikke funksjon).

En annen fremgangsmåte som også vil være aktuell med hensyn til å styrke studentenes begrepsbilde vil være å i større grad fokusere på definisjonen av begrepet slik for eksempel det israelske pensumet legger opp til ifølge Watson et al. (2018). I følge samme studie fokuserte de israelske elevene som hadde vært gjennom et mer definisjonsfokusert pensum i større grad på korrespondansen mellom elementene i definisjons- og verdimengde. Et noe større fokus på definisjoner kan også være med å rettferdiggjøre funksjonenes viktige plass i skolematematikken overfor studenter og elever ved at det gjennom en tydelig definisjon er lettere å skille funksjonssammenhenger fra andre sammenhenger og viktigheten ved nettopp funksjoner blir tydeligere.

Resultater fra testen og intervjuene viste at studentene i stor grad behersket bruk av de ulike representasjonene de ble møtt med i denne studien til å finne funksjonsverdier fra variabelverdier og variabelverdier fra funksjonsverdier. På den skriftlige testen svarte 82,5-100% (prosent regnet ut fra de som besvarte oppgavene) riktig på oppgavene 1-4 som gikk ut på å finne funksjonsverdier og variabelverdier i forskjellige fasetter, med unntak av oppgaven der de skulle finne verdien for x når funksjonsverdien til uttrykket $f(x) = 2x + 5$ er 1. Blant svarene på denne oppgaven var kun 56,1% riktige. Dette er et tydelig eksempel på compartmentalization, altså ikke-samsvarende utvikling i deler av begrepsbildet (Vinner & Dreyfus, 1989; Vinner et al., 1981). Dette funnet samsvarer også med funn gjort av Hansson (2006) og Rugland (2017) som viser at ulike deler av studentenes begrepsbilder kan mangle sammenheng, også senere i utdanningen. Den lave prosentandelen riktige svar i den symbolske fasetten kan tyde på at studentene i større grad ser på funksjonsuttrykket som en oppskrift for å regne variabelverdien om til en funksjonsverdi enn en sammenheng mellom de to verdiene. Her kan det tenkes at arbeid med oppgaver hvor studentene skal finne variabelverdier for gitte funksjonsverdier ved hjelp av funksjonsuttrykk, og der også andre fasetter tas i bruk, fortrinnsvis fasetter studentene allerede viser bedre forståelse i, kan være med å fremprovosere en kognitiv konflikt hos studentene og hjelpe til med å skape samsvar mellom forståelsen i de forskjellige fasettene.

Resultater fra testen og intervjuet viser også at studentene i stor grad behersket bruk av funksjonsmaskiner til å finne funksjonsverdier og variabelverdier på lik linje med grafer tabeller og funksjonsuttrykk. Også i intervjuet pekte den hverdagslige fasetten seg ut ved at den var en av tre fasetter der det ble observert tydelige tegn til en objektsforståelse. Studentene viste også større tegn til å forstå definisjonen av funksjoner som ble gitt ved hjelp av funksjonsmaskiner enn den mer formelle og abstrakte definisjonen, ved å i større grad knytte definisjonen til eget begrepsbilde og trekke frem eksempler som brøt med denne definisjonen. Studentene viste også i sine resonnementer evne til å knytte funksjonsmaskinene til andre fasetter. Dette kan tyde på at funksjonsmaskiner som en kognitiv rot for funksjonsbegrepet slik Tall et al. (2000) beskriver kan være en hensiktsmessig plattform for videre læring av funksjonsbegrepet. Dersom funksjonsmaskiner skal brukes som kognitiv rot for å styrke funksjonsbegrepet hos studenter og elever er det viktig at det brukes som nettopp kognitiv rot og ikke bare blir nok en representasjon elevene må lære i tillegg. Med dette mener jeg at funksjonsmaskinene brukes som et bilde på begrepet, der ulike egenskaper og sider ved funksjonsbegrepet knyttes til dette bildet etter hvert som de læres. En titt i læreverket *Alfa matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (Bjørnestad et al., 2013, s. 323-324) viser at her brukes funksjonsmaskiner til å introdusere begrepet ved hjelp av en tekst på fire linjer samt et bilde av en funksjonsmaskin som representerer en funksjonssammenheng. På en liknende måte er funksjonsmaskiner presentert i *Matematikk for lærere 1* (Birkeland et al., 2011 s. 287) der funksjonsmaskinen blir brukt som et bilde på funksjoner. Brukt på denne måten kan muligens funksjonsmaskiner fungere som introduksjon, men uten at nye sider ved begrepet knyttes til det samme bilde kan det ikke beskrives som en kognitiv rot. Det blir derfor opp til lærere og forelesere ved lærerutdanningen å eventuelt bygge videre på dette bildet. Eksempler på sider ved funksjonsbegrepet som godt lar seg illustrere ved hjelp av funksjonsmaskiner er:

- Entydighet – en funksjonsmaskin fungerer på den måten at for hver verdi vi putter inn i maskinen kommer en, og bare en, verdi ut. Putter vi inn samme verdi flere ganger vil alltid ut-verdien være den samme.
- Vilkårlighet – funksjonsmaskiner fungerer også med andre variabler enn tallverdier. Eksempelvis en funksjonsmaskin hvor det puttes inn navn på elever og elevenes favorittgodteri kommer ut.
- Definisjonsmengde – samlingen av alle de verdiene funksjonsmaskinen er laget for å fungere med. I det forrige eksempelet kan klassens elever være definisjonsmengde, funksjonsmaskinen vil da fungere med alle elevenes navn, men ikke navn fra parallellklassen.
- Verdimengde – samlingen av de verdiene funksjonsmaskinen kan produsere ved hjelp av verdiene fra definisjonsmengden. I eksempelet med godterimaskinen vil da verdimengden være samlingen av alle elevenes favorittgodteri.
- Inversfunksjoner – For funksjonsmaskiner som er en-til-en (injektive) kan vi lage motsatte maskiner. Eksempelvis kan vi ha funksjonsmaskinen som tar inn-verdien og legger til tre. Den motsatte maskinen vil da ta sin inn-verdi og trekke fra tre, og dermed ha som egenskap at den gjør den opprinnelige funksjonsmaskinens ut-verdier om til opprinnelige inn-verdier.
- Sammensatte funksjoner av typen $f(g(x))$ - dersom vi har to funksjonsmaskiner f og g kan den sammensatte funksjonsmaskinen $f(g(x))$ illustreres ved å lage en ny maskin der inn-verdien først går igjennom prosessen fra g-maskinen før den nye verdien så går igjennom prosessen til f.

Denne listen er kun eksempler og flere andre sider ved begrepet kan tenkes illustrert på tilsvarende måter.

Utvalget som studeres i denne studien er begrenset og ikke gir rom for statistiske eller vitenskapelige generaliseringer (Bassey, 1999). Likevel er flere faktorer med på å bygge opp under en antakelse om at lærerstudenter ved ulike utdanningsinstitusjoner i Norge på flere områder er en nokså homogen masse. Dermed kan det tenkes at funnene som er gjort i denne studien også kan forekomme hos lærerstudenter ved andre institusjoner enn der denne undersøkelsen er gjennomført.

5.2 DeMarois og Talls modell som analyseverktøy

DeMarois og Tall (1992) sin modell om fasetter og lag av et begrep har dannet hovedstrukturen til analyseverktøyet som har blitt anvendt i denne oppgaven. Under utforming av oppgavene til den skriftlige testen var det nødvendig å gjøre prioriteringer i forbindelse med antall fasetter som skulle undersøkes og hvor grundig de utvalgte fasettene skulle testes. Med hensyn til ønsket om å teste flest mulig av fasettene måtte antall oppgaver knyttet til hver fasett begrenses for ikke å overskride den tilmålte tiden jeg hadde tilgang til studentene. I DeMarois (1998) sin beskrivelse av oppgavene fra hans studie vil for eksempel studenter som for et funksjonsuttrykk er i stand til å finne x-verdien basert på funksjonsverdien være på et prosessnivå i den symbolske fasetten på bakgrunn av at studenten er i stand til å reversere prosessen i funksjonen. Empiri fra intervjuene i denne studien viser at flere av studentene var i stand til å svare korrekt på denne oppgaven ved hjelp av en slags kvalifisert gjett-og-sjekk strategi. Det oppleves vanskelig å skulle avgjøre om dette er en indikasjon på prosessforståelse eller ikke. Da denne teknikken baserer seg på gjentatte handlinger inntil ønske resultat oppnås, samtidig som studentene viste at gjettingen ikke var helt tilfeldig og baserte seg på antakelser om hvilke verdier som kunne passe. Studentenes valg av fremgangsmåte på denne oppgaven trenger ikke skyldes at de ikke er i stand til for eksempel å sette opp en likning for å løse samme oppgaven, men kan også skyldes vanskelighetsgraden på oppgaven, som tillot andre fremgangsmåter. En utfordring i bruken av denne modellen som analyseverktøy vil derfor være å utvikle oppgaver av passende vanskelighetsgrad. Det vil si oppgaver som er utfordrende nok til at studentene får vist rekkevidden av sin forståelse i den aktuelle fasetten, og enkle nok til at ikke manglende regneferdigheter eller liknende hindrer studentene i å vise nettopp dette.

Erfaringer fra denne oppgaven viser at modellen er egnet til å vise den store kompleksiteten i forståelsen av et begrep ved både å ta hensyn til bredde- og dybdedimensjonen. Denne kompleksiteten gjør at analysen av en students forståelse av et begrep som funksjoner i alle de ulike fasettene forutsetter store mengder empiri, noe jeg mener gjør det til en lite egnet modell for analyse av forståelsen hos større grupper studenter eller elever, men i større grad egnet til mer detaljerte studier av enkeltstudenter med muligheter for virkelig å dykke ned i studentenes forståelse.

DeMarois (1998) beskriver overgangen mellom handlingsnivå og prosessnivå som glidende. Flere av studentene fra denne studien viste under intervjuet tegn til både prosess- og handlingsforståelse i en eller flere fasetter og blir derfor antatt å være et sted langs denne glidende overgangen. Allikevel ligger det en implisitt antakelse til grunn for denne og liknende modeller for analyse av forståelse om at det er mulig å objektivt måle og plassere studentenes forståelse på et spesifikt nivå (eller mellom to) i de forskjellige fasettene. Et spørsmål som dermed reiser seg er om denne antakelsen er rimelig. Vil for eksempel den samme studenten besvare samme spørsmål likt under forskjellige omstendigheter?

Nettopp kontekstenes innvirkning på studentenes svar er bakgrunnen for bruk av triangulering i datainnsamlingen og ble nærmere beskrevet i avsnittet om oppgavens troverdighet. Det vil dermed ikke være rimelig å anta at studentene alltid vil svare likt på samme spørsmål. Eksempler på faktorer som kan være med å påvirke studentenes svar kan være konteksten rundt oppgaven, språklige formuleringer i oppgaven, studentens motivasjon for å svare, dagsform og liknende. Disse faktorene vil være med på å påvirke *den observerte forståelsen* som vi som forskere har tilgang til. Vi kan derfor heller omtale bildene som dannes av studentene ved bruk av dette verktøyet for bilder av forståelsen de har utvist, fremfor bilder av forståelsen de har (eller har hatt).

Til tross for enkelte svakheter og begrensninger i bruken av DeMarois og Tall (1996) sin modell av begrepsforståelse til å beskrive studenters forståelse av funksjonsbegrepet mener jeg likevel at modellen skaper et detaljert og rikholdig bilde av de fire studentenes begrepsforståelse av funksjoner i de ulike fasettene.

5.3 Svar på forskningsspørsmålene

Hvilken forståelse har studenter ved grunnskolelærerutdanningen 5-10. trinn av funksjoner, før de møter begrepet i utdanningen?

Studentene som har deltatt i denne undersøkelsen viser en forståelse for funksjonsbegrepet som i stor grad lener seg på eksempler eller prototyper for funksjoner. Studentenes begrepsstrukturer mangler eksempler på sammenhenger som ikke er funksjoner, spesielt geometriske og symbolske fasetten. Studentene mangler også tydelige definisjoner på begrepet og benytter seg i stedet av ufullstendige beskrivelser som i stor grad knytter seg til den symbolske fasetten og funksjonsuttrykket. Intervjuer med fire av studentene viste at hver enkelt student hadde varierende nivå av begrepsforståelse i de ulike fasettene, og det var også variasjon studentene i mellom. Flere av studentene viste tegn til både handlings- og prosessforståelse i en og samme fasett. Det er ikke mulig å konkludere med en felles forståelse for alle studentene, men den symbolske fasetten peker seg ut som en fasett der mange studenter kan ha problemer med å ta steget fra en handlingsforståelse og over til en prosessforståelse.

I hvilken grad egner DeMarois og Talls modell seg som verktøy for å kartlegge studenters forståelse av funksjonsbegrepet?

Erfaringer jeg har gjort meg gjennom arbeidet med denne oppgaven tilsier at DeMarois' og Talls (1996) modell over fasetter og lag i forståelsen av et begrep i stor grad kan være egnet til å kartlegge og beskrive studenters forståelse av funksjonsbegrepet. Samtidig har modellen sine svake sider og begrensninger. For å gi et troverdig bilde av forståelsen hos en student kreves store mengder empiri, noe som gjør at modellen i større grad egner seg for kvalitative studier med et mindre antall deltakere, enn større kvantitative studier. Antakelsen om at studenter befinner seg på et visst lag av forståelse i de forskjellige fasettene virker også å være urimelig. Vi må derfor i vurderingen av en students forståelse også regne med at faktorer som kontekst, oppgavens formulering og studentens dagsform er med på å spille inn på hvilken forståelse studenten viser i arbeidet med en oppgave.

5.4 Muligheter for videre forskning

Etter å ha gjennomført denne studien og forsøkt etter beste evne å svare på forskningsspørsmålene i oppgaven melder nye og andre spørsmål seg. Jeg vil her presentere noen av disse spørsmålene som det i fremtidig forskning ville vært interessant å studere nærmere.

Hvordan undervises funksjonsbegrepet i videregående skole? Grunnlaget for den forståelsen studentene har med seg inn i grunnskolelærerutdanningen skapes når studentene er i videregående skole. Det vil derfor være interessant å undersøke hvordan opplæringen i funksjonsbegrepet i videregående skole foregår og hva dette har å si for studentenes forståelse.

Et sentralt spørsmål som er knyttet til det første forskningsspørsmålet i denne oppgaven er hvordan studentenes forståelse av funksjonsbegrepet ser ut *etter* at studentene er ferdige i grunnskolelærerutdanningen.

Hvordan undervises funksjonsbegrepet i grunnskolelærerutdanningen? Dette spørsmålet kan sees i sammenheng med det forrige. Satt sammen kan de to spørsmålene være med å belyse hvordan begrepet undervises og hvordan denne undervisningen virker inn på studentenes forståelse.

En longitudinell studie av studenter eller elever som gjennomgår undervisning der funksjonsmaskiner aktivt brukes som en kognitiv rot for funksjonsbegrepet vil være interessant for å se potensiale av denne ideen.

6 Noen avsluttende ord

Jeg har gjennom arbeidet med denne oppgaven fått muligheten til å studere et tema jeg synes er interessant i en kontekst som jeg mener er aktuell. Både gjennom litteratur på tema og egen forskning på studentenes forståelse har jeg fått et innblikk i hvordan studentene forstår begrepet og hvordan dette kommer til uttrykk i arbeid med oppgaver. Jeg har også blitt mer oppmerksom på hvordan utformingen av oppgaver kan være med på å avdekke (eller ikke avdekke) ulike deler av begrepsforståelsen hos elever og studenter. Til tross for at jeg gjennom arbeidet har lært mye har det i store perioder opplevdes som vanskelig, tidkrevende og uoverkommelig. Det er derfor ekstra motiverende å endelig kunne si at arbeidet med oppgaven og syv års studier nå går mot slutten.

Når jeg nå ser tilbake på arbeidet innser jeg at enkelte ting kunne vært gjort annerledes. Blant annet kunne jeg med fordel ha avgrenset studien til kun å inneholde enkelte av fasettene fra modellen til DeMarois og Tall (1996), og på den måten hatt muligheten til å gå enda dypere i forståelsen i hver enkelt fasett og studert fasettene fra flere sider.

Hvordan morgendagens lærere forstår et sentralt begrep som funksjoner er av betydning for deres elevers læring. Jeg håper denne oppgaven kan være til nytte for lærerutdannere ved å skissere et bilde av mulige forståelsesgrunnlag de kan ha å bygge videre på hos sine studenter. Det er også slik at implikasjonene som skisseres i drøftingskapittelet, deriblant behovet for tydeliggjøring av begrepsbilde gjennom arbeid med ikke-eksempler og kontraster, eller bruken av funksjonsmaskiner som kognitiv rot ikke bare gjelder grunnskolelærerutdanningen, men også kan tas i bruk i videregående skole for å styrke og utvikle begrepsforståelsen.

For min egen del vil denne oppgaven ha betydning i form av at jeg i større grad enn før er blitt oppmerksom på hvordan studenter og elever kan befinne seg på ulike nivåer av forståelse for et og samme begrep. Jeg har fått god erfaring med hvordan studenters svar på oppgave kan gi viktig informasjon om deres forståelse, og dermed også hvilke deler av et begrep som trenger videre utvikling. Disse erfaringene vil jeg ta med meg når jeg denne høsten går ut i ny jobb som lærer, og jeg tror de vil være viktige i mitt arbeid for å skape en best mulig begrepsforståelse hos mine elever. I egen praksis vil jeg også forsøke å anvende funksjonsmaskiner som en kognitiv rot for funksjonsbegrepet og dermed fortsette undersøkelsen av denne ideens potensiale.

7 Referanser

Adams, R. A. & Essex, C. (2013). *Calculus: a complete course* (8 utg.). Toronto: Pearson.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Trigueros, M., Fuentes, S. R. & Weller, K. (2014). *APOS theory: a framework for research and curriculum development in mathematics education*. Hentet fra https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-1-4614-7966-6.pdf

Ayalon, M., Watson, A. & Lerman, S. (2017). Students' conceptualisations of function revealed through definitions and examples. *Research in Mathematics Education, 19*(1), 1-19.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Birkeland, P. A., Venheim, R. & Breiteig, T. (2011). *Matematikk for lærere : 1* (5 utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa. Lærebok : matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (2 utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Blomhøj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrebsforståelse. *Nordisk Matematikk Didaktikk, 5*(1), 7-29.

Bryman, A. (2016). *Social research methods* (5th ed. utg.). Oxford: Oxford University Press.

DeMarios, P. & Tall, D. (1999). *Function: Organizing principle or cognitive root?* Paper presentert på PME 23, Haifa.

DeMarois, P. (1998). *Facets and layers of function for college students in beginning algebra* (Ph. D thesis, University of Warwick). Hentet fra http://wrap.warwick.ac.uk/3968/1/WRAP_THESIS_DeMarois_1998.pdf

DeMarois, P. & Tall, D. (1996). *Facets and layers of the function concept.* Paper presentert på PME 20, Valencia.

Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.

Forskrift om plan for grunnskolelærerutdanning trinn 5–10. (2016). *Nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanningen 5.-10. trinn av 7 juni 2016*. Hentet fra https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2016-06-07-861?q=grunnskolel%C3%A6rerutdanning

Gray, E. & Tall, D. (1991). *Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking.* Paper presentert på PME 15, Assisi.

Hansson, Ö. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function* (Doctoral thesis, Luleå University of Technology). Hentet fra http://hkr.diva-portal.org/smash/get/diva2:319554/FULLTEXT01.pdf

Hansson, Ö. & Grevholm, B. (2003). *Preservice Teachers' Conceptions about Y=X+5: Do They See A Function?* Paper presentert på the 27th International Group for the PME Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference, Honolulu.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 65-97.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal, 42*(2), 371-406.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300.

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Slik blir den nye lærerutdanningen*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/slik-blir-den-nye-larerutdanningen/id2503270/

Lützen, J. (1978). Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet. *Nordisk Matematisk Tidskrift, 25*, 5-32.

Nordenbo, S. E., Larsen, M. S., Tiftikçi, N., Wendt, R. E. & Østergaard, S. (2008). *Lærerkompetanser og elevers læring i førskole og skole - Et systematisk review utført for Kunnskapsdepartementet, Oslo* Hentet fra https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/vedlegg/grunnskole/larerkompetanser_og_elevers_laring.pdf

Persson, P.-E. (2013). Understanding Relatons between Variables: Revisiting a \`Node\` in the Development of Algebraic Thinking. I B. Grevholm, P. S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko & P.-E. Persson (Red.), *Nordic research in didactics of mathematics : past, present and future* (s. 421-444). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2). Hentet fra http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/article/download/32/25.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Rugland, M. (2017). *Matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet : En pilotstudie av hva instrumentet MMTsm avslører i forhold til norske matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet* (Mastergradsavhandling, Universitetet i Agder). Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2455726/Rugland%2c%20Magnhild.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sajka, M. (2003). A Secondary School Student's Understanding of the Concept of Function--A Case Study. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 229-254. doi: 10.1023/A:1026033415747

Samordna Opptak. (2017). *Tidligere endringer*. Hentet 21.04.2018 fra https://www.samordnaopptak.no/info/om/lover-og-regler/tidligere-endringer/

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: Vol. 1* (s. 69-107). Charlotte, N.C: Information Age.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25*, 23-58.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillesdale, N.J: Lawrence Erlbaum.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(1), 39-50. doi: 10.1080/0020739920230105

Tall, D., McGowen, M. & DeMarois, P. (2000). *The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept*. Paper presentert på 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. doi: 10.1007/BF00305619

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. I E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Red.), *Research in collegiate mathematics education, I*. Rhode Island: American Mathematical Society, in cooperation with Mathematical Association of America.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. I D. Tall (Red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education, 20*(4), 356-366. doi: 10.2307/74944110.2307/749441

Vinner, S., Hershkowitz, R. & Bruckheimer, M. (1981). Some Cognitive Factors as Causes of Mistakes in the Addition of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(1), 70-76. doi: 10.2307/748660

Watson, A., Ayalon, M. & Lerman, S. (2017). Comparison of students' understanding of functions in classes following English and Israeli national curricula. *Educational Studies in Mathematics, 97*(3), 255-272. doi: 10.1007/s10649-017-9798-8

Wellington, J. (2015). *Educational research : contemporary issues and practical approaches* (2 utg.). London: Bloomsbury.

8 Vedlegg

8.1 Godkjenningsbrev NSD

Per Sigurd Hundeland
Serviceboks 422
4604 KRISTIANSAND S

Vår dato: 13.12.2017	Vår ref: 57509 / 3 / HIT	Deres dato:	Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 30.11.2017 for prosjektet:

57509	*Funksjonsbegrepet hos lærerstudenter ved begynnelsen av deres matematikklærerutdanning.*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Agder, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Per Sigurd Hundeland*
Student	*Mathias Bang Tøndevold*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
• opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
• vår prosjektvurdering, se side 2
• eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS | Harald Hårfagres gate 29 | Tel: +47-55 58 21 17 | nsd@nsd.no | Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data | NO-5007 Bergen, NORWAY | Faks: +47-55 58 96 50 | www.nsd.no

Ved prosjektslutt 01.07.2019 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Marianne Høgetveit Myhren

Hildur Thorarensen

Kontaktperson: Hildur Thorarensen tlf: 55 58 26 54 / hildur.thorarensen@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Mathias Bang Tøndevold, mathit15@student.uia.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 57509

Dere har opplyst i meldeskjema at utvalget vil motta skriftlig informasjon om prosjektet, og samtykke skriftlig til å delta. Vår vurdering er at informasjonsskrivet til utvalget er godt utformet.

Personvernombudet forutsetter at dere behandler alle data i tråd med Universitetet i Agder sine retningslinjer for datahåndtering og informasjonssikkerhet. Vi legger til grunn at bruk av mobil lagringsenhet er i samsvar med institusjonens retningslinjer.

Prosjektslutt er oppgitt til 01.07.2019. Det fremgår av meldeskjema/informasjonsskriv at dere vil anonymisere datamaterialet ved prosjektslutt. Anonymisering innebærer vanligvis å:
- slette direkte identifiserbare opplysninger som navn, fødselsnummer, koblingsnøkkel
- slette eller omskrive/gruppere indirekte identifiserbare opplysninger som bosted/arbeidssted, alder, kjønn
- slette lydopptak
- slette eller sladde bilde- og videoopptak

For en utdypende beskrivelse av anonymisering av personopplysninger, se Datatilsynets veileder: https://www.datatilsynet.no/regelverk-og-skjema/behandle-personopplysninger/hvordan-anonymisere-personopplysninger/

8.2 Samtykkeskjema intervju

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

" Funksjonsbegrepet hos lærerstudenter ved begynnelsen av deres matematikklærerutdanning."

Bakgrunn og formål

Formålet med denne studien er å undersøke hvordan studenter ved grunnskolelærerutdanningene oppfatter begrepet funksjoner *før* de møter på begrepet i utdanningen. Studien vil se på hvordan studentene forstår begrepet og hvordan i hvilken grad de klarer å nyttiggjøre seg av denne forståelsen. Studien gjennomføres som en del av en mastergradsstudie i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder.

Du inviteres til å delta i studien på bakgrunn av at du er student ved grunnskolelærerutdanningen.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelse i studien er delt opp i to deler. En matematisk test og et intervju. For deltakelse i intervjudelen av studien er det ønskelig at du også har gjennomført den matematiske testen på forhånd.

Deltakelse i intervjudelen av studien innebærer et individuelt intervju på om lag 60 minutter. Det vil gjøres lydopptak av intervjuet. Spørsmålene i intervjuet vil dreie seg rundt tema funksjoner og vil innebære drøfting av enkelte oppgaver og løsninger fra testen, samt nye oppgaver knyttet til samme tema.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Lydopptak av intervjuet vil raskest mulig bli transkribert, og all identifiserende informasjon vil anonymiseres. Kun mastergradsstudent og veileder vil ha tilgang til lydopptakene, som vil oppbevares på en passordbeskyttet, ekstern harddisk.

I publikasjonen av masteroppgaven vil alle personopplysninger som kan gjøre deg identifiserbar være anonymisert. Ingen deltakere vil være identifiserbare.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 01.07.2019. Alle personopplysninger som dukker opp i lydopptakene vil anonymiseres fortløpende i arbeidet med transkriberingen slik at alle deltakere forblir anonyme. Opptakene vil slettes når transkriberingen er ferdig og alle opptak vil slettes *senest* ved overnevnte prosjektslutt.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli slettet samt alle lydopptak og transkriberinger.
Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med:

Mastergradsstudent:
Mathias Bang Tøndevold
Tlf: 93897353
Mail: mathit15@student.uia.no

Veileder:
Per Sigurd Hundeland
Tlf: 99645889
Mail: per.s.hundeland@uia.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS med prosjektnummer 57509.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta på individuelt intervju (lydopptak)

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

8.3 Matematisk test

Kjære student.

Takk for at du velger å delta i dette forskningsprosjektet. Deltakelse i prosjektet er helt frivillig. Grunnen til at du blir bedt om å oppgi navn på denne testen er dersom du ønsker testen rettet og returnert til deg, slik at du selv kan danne deg et bilde av din forståelse funksjoner er på nåværende tidspunkt. Navn på testen har også den hensikt at jeg ønsker 3-4 studenter til intervju i etterkant av testen, og det er ønskelig å kunne knytte intervju og test sammen. I forskningsprosjektet vil alle besvarelser anonymiseres og du vil ikke kunne identifiseres.

Dersom du IKKE ønsker testen returnert, og IKKE ønsker å stille til intervju er det heller ikke nødvendig å skrive navn på prøven.

Informasjonen som samles inn i denne testen er ment til å være en del av datagrunnlaget i min masteroppgave som dreier seg om lærerstudenter sin forståelse av begrepet funksjoner, før de støter på begrepet i matematikkutdanningen. Denne testen og dine svar vil ikke påvirke din karakter i MA-173 eller andre forhold. Alle svar vil bli anonymisert i den endelige avhandlingen og ingen informasjon vil kunne spores tilbake til deg. Testbesvarelsene vil bli makulert/destruert så snart de har blitt registrert, og senest innen juni 2019.

Jeg trenger også 3-4 studenter til individuelle intervju. Intervjuet vil ta utgangspunkt i besvarelsen på testen, og vil videre dreie seg om andre oppgaver. Dette vil gi meg mulighet til å gå dypere inn på tankegang, valg av fremgangsmåte, etc. Dersom du kunne tenke deg å stille til intervju (mot en økonomisk kompensasjon på 250,-) må du krysse av lengre ned samt skrive på navn og en måte jeg kan kontakte deg på. Studenter til intervju vil bli valgt ut på bakgrunn av denne testen. Tidspunkt for intervjuet er ikke låst, men det er ønskelig at det finner sted raskest mulig. Det er anslått at intervjuet vil vare i underkant av en time.

Navn:

Siste fullførte matematikk emne/fag (f.eks. 2P, R1 etc.): ________________

Jeg ønsker at testen rettes og returneres til meg ❑

Jeg kan tenke meg å stille til intervju, og godtar dermed at Mathias kan ta kontakt for å avtale tidspunkt ❑

Mobilnummer/epost som Mathias kan kontakte meg på:

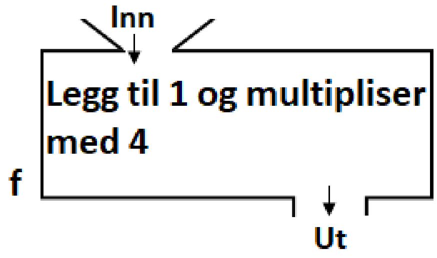
____

Dette forskningsprosjektet er meldt inn til og godkjent av NSD Personvernombudet med prosjektnummer 57509.

Takk for hjelpen! Hilsen Mathias Bang Tøndevold

I den første delen av testen (oppgave 1-4) vil hver deloppgave kunne ha flere svar

1. Gitt funksjonsmaskinen



a) Hva blir ut-verdien(e) til funksjonsmaskinen når vi putter inn 5?

Svar:

b) Hva var inn-verdien(e) dersom vi får ut 36?

Svar:

2. Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 5$

a) Hva er funksjonsverdien(e) når x er 4?

Svar:

b) Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er 1?

Svar

3. Gitt tabellen

x	$f(x)$
-1	7
0	2
1	-1
2	-2
3	-1

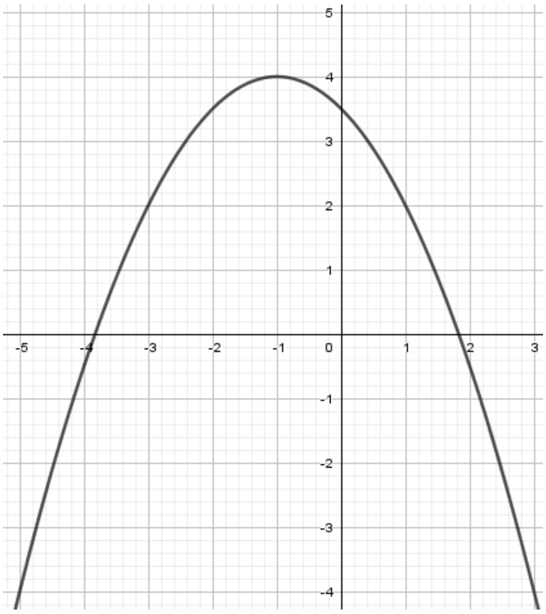
a) Hva er funksjonsverdien(e) når x er -1?

Svar:

b) Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er -1?

Svar:

4. Gitt grafen til høyre



a) Hva er funksjonsverdien(e) når x er -1

Svar:

b) Hva er verdien(e) til x når funksjonsverdien er 2?

Svar:

5. Forklar kort hva du mener de følgende symbolene/uttrykkene betyr

a) $f(x)$

b) $y(x) = 2x$

c) $a(b + c)$

6. La f være navnet på en funksjon. Er det noen forskjell på $2f(3)$ og $3f(2)$? Hvis ja: Hva er denne forskjellen?

7. La f være navnet på en funksjon og la x være variablene til funksjonen. Vi skal nå se på tre utsagn om notasjonen $f(x)$, kryss av for sant eller usant for hver påstand.

a) $f(x)$ representerer funksjonsverdien til funksjonen når variabelverdien er x

Sant ❑ Usant ❑

b) $f(x)$ representerer produktet av f og x.

Sant ❑ Usant ❑

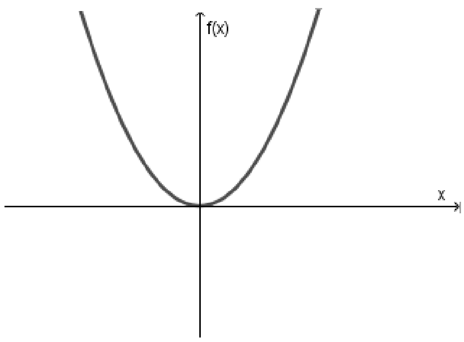
c) $f(x)$ representerer regelen vi bruker for å finne funksjonsverdien.

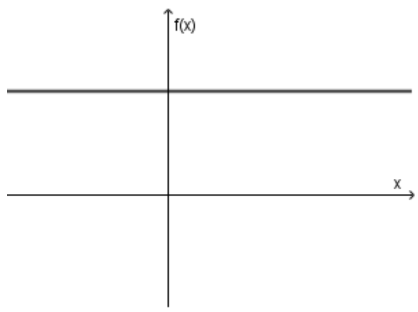
Sant ❑ Usant ❑

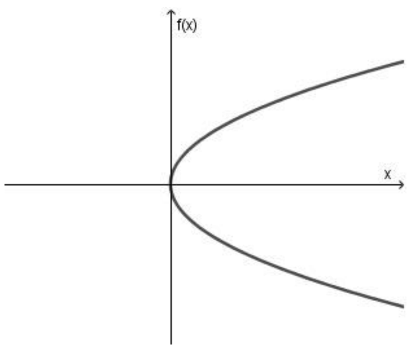
8. Under og på neste side ser du til sammen 8 grafer, sett ring rundt de du mener representerer f som en funksjon av x

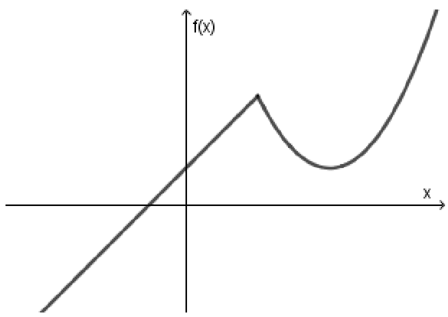
Hvilke fremgangsmåter brukte du for å svare på denne oppgave?

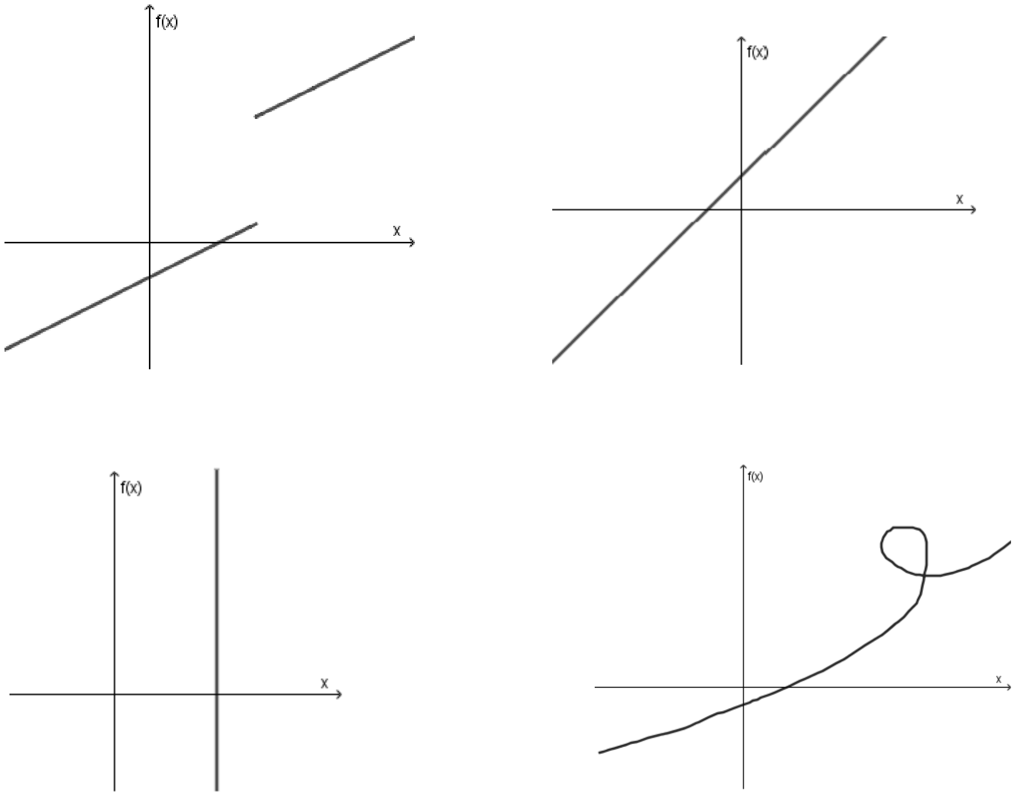
Svar:











9. Under ser du 9 funksjonsuttrykk, sett ring rundt de du mener representerer en funksjon. Hvilke fremgangsmåter brukte du for å svare på oppgaven?

Svar:

$a.\ \ f(x) = x$

$b.\ \ f(x) = \pm\sqrt{2x}$

$c.\ \ f(x) = -2x + 3$

$d.\ \ x^2 = f(x) + 3$

$e.\ \ f(x) = 1$

$f.\ \ f(x) = \frac{2}{x}$

$g.\ \ x = 1$

$h.\ \ xf(x) = 6$

$i.\ \ f(x) = \begin{cases} x & hvis\ x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & hvis\ x \geq 1 \end{cases}$

10. Under ser du en rekke tabeller, sett en ring rundt de du mener representerer en funksjon

Hvilke fremgangsmåter brukte du for å svare på oppgaven?

Svar:

a.

x	$f(x)$
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

b.

x	$f(x)$
-10	-1
-5	-1
0	-1
5	-1
10	-1

c.

x	$f(x)$
1	0
3	1
1	2
5	3
6	4

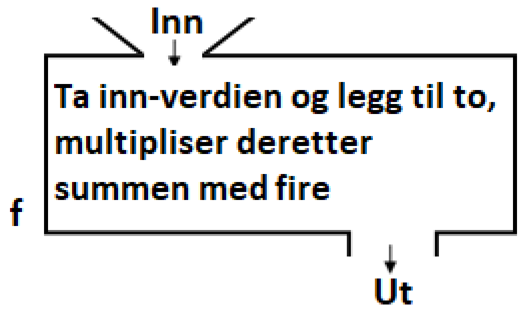
d.

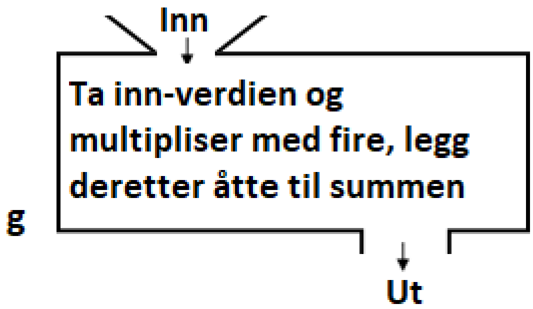
x	$f(x)$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

e.
I denne tabellen er funksjonsverdien alltid dobbelt så stor som x-verdien.

x	$f(x)$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

11. De to bildene under viser funksjonsmaskinene f og g





a) Hva får du ut dersom du putter inn 5 i f-maskinen?

b) Hva får du dersom du putter inn 5 i g-maskinen?

c) Hva får du dersom du putter x inn i f-maskinen?

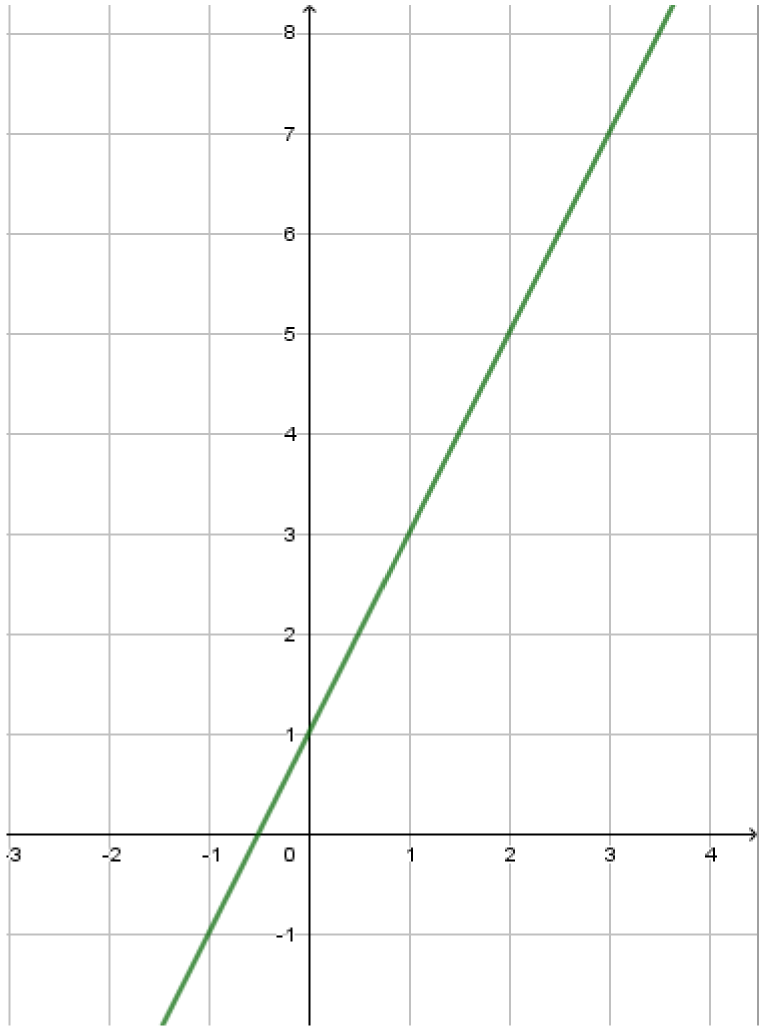
d) Hva får du dersom du putter x inn i g-maskinen?

e) Anser du f og g for å være samme funksjon? Hvis ja hvorfor, hvis nei hvorfor ikke?

12. Hva er en funksjon? Gi en så presis beskrivelse eller definisjon du klarer.

8.4 Støtteark til oppgave 6

$$f(x) = 2x + 1$$



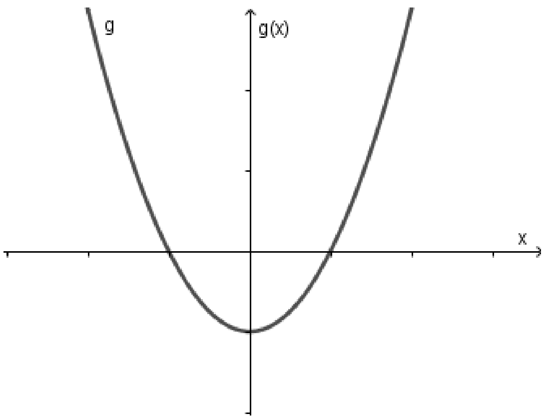
x	$f(x)$
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

8.5 Oppgaver fra intervju

Oppgave 1

De 21 følgende lappene klippes opp og legges utover bordet fremfor studenten. Studenten skal deretter sortere de forskjellige lappene i to bunker, en for funksjoner og en for ikke-funksjoner.

1



2

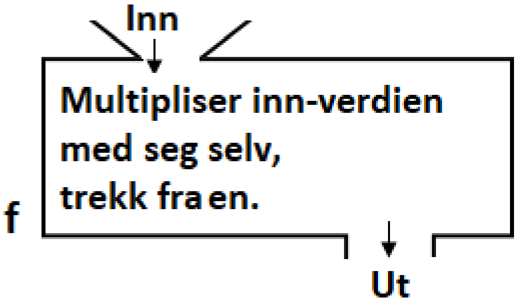
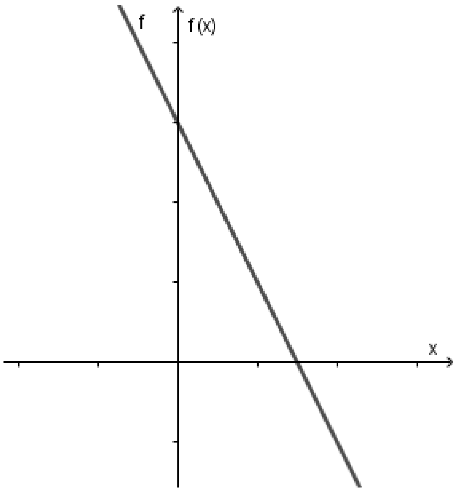
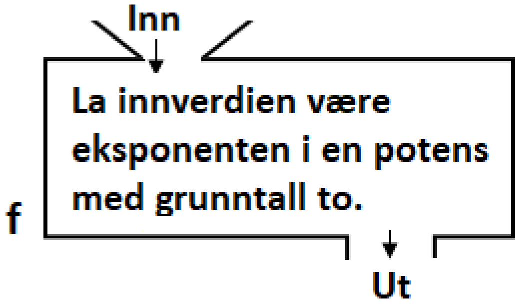
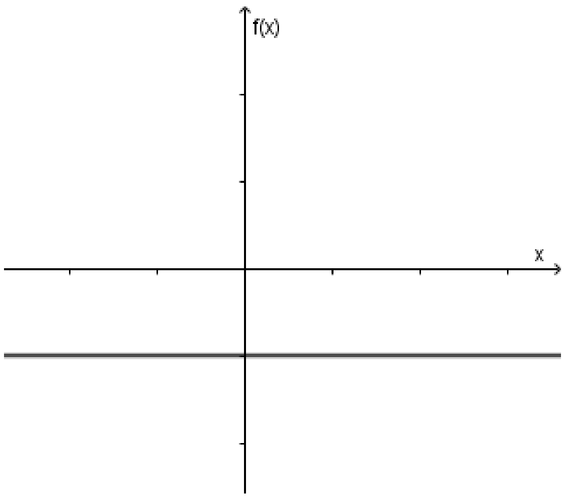
$$g(x) = x^2 - 1$$

3

$$h(x) = \; -1$$

4

x	$k(x)$
0	0
1	1
1	-1
2	2
2	-2

5 	6 
7 $x = 3$	8 
9 $f(x)^2 = x^2 - 4$	10 

11

x	$h(x)$
1	-1
2	-1
3	-1
4	-1
5	-1

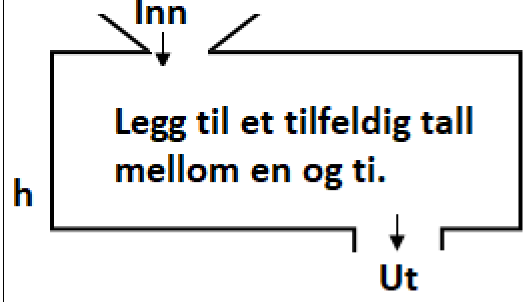
12

$$f(x) = -2x + 3$$

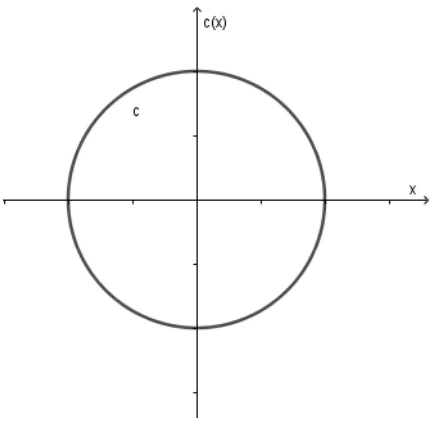
13

$$h(x) = 2^x$$

14



15



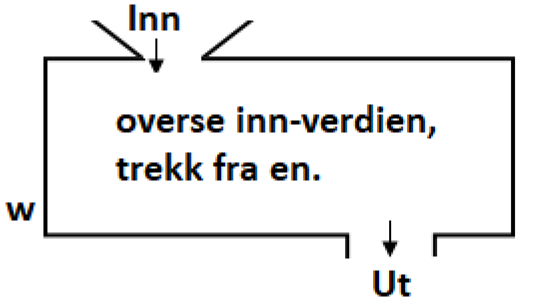
16

x	$g(x)$
3	1
3	2
3	3
3	4
3	5

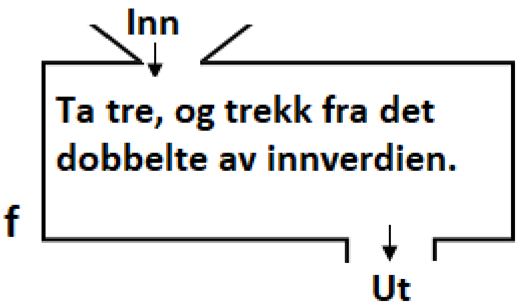
17

x	$g(x)$
-1	5
0	3
1	1
2	-1
3	-3

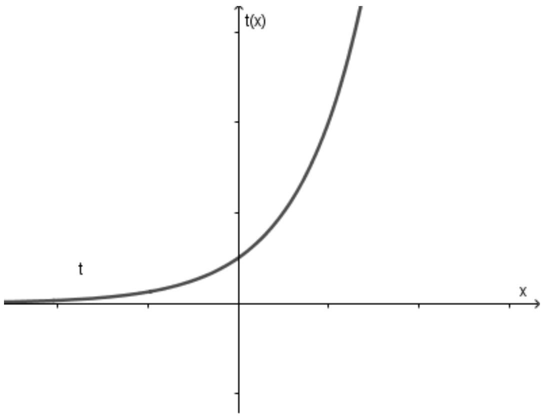
18



19



20



21

x	$g(x)$
1	1
2	-1
3	-3
4	-5
5	-7

Oppgaver til intervju

Oppgave 14

Representerer disse funksjonsuttrykkene samme funksjon?

$$f(x) = 3(2x - 3)$$

$$g(x) = 6x - 9$$

Oppgave 15

La $g(x) = 2x + 3$ og $h(x) = x^2 - 1$.

a. Hva er $g(5)$? $h(5)$?

b. Hva betyr $f(x) = g(x) - h(x)$?

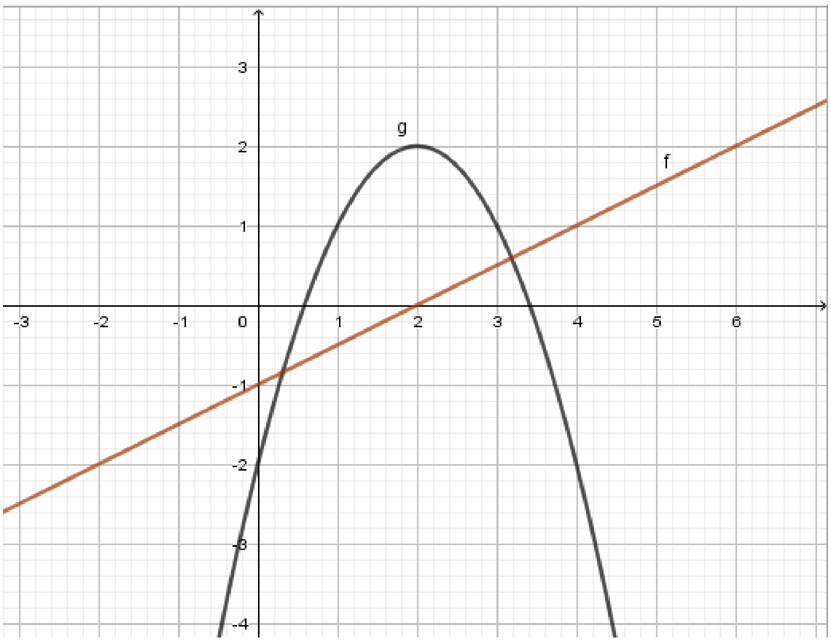
c Hva blir $f(2)$?

d. Hva blir $f(x)$?

e. Hva betyr $g\big(h(x)\big)$?

Oppgave 16

I utklippet under ser du to grafer som tilhører funksjonene g og f.



a. Hva er $f(2)$? $g(0)$?

b. Når har f 1 som funksjonsverdi? Når har g 1 som funksjonsverdi?

La $h(x) = f(x) - g(x)$

c. Hva er $h(4)$?

d. Hvordan vil funksjonen $h(x)$ se ut?

Oppgave 17

Under ser du to tabeller for funksjonene f og g.

x	$f(x)$
1	3
2	-1
3	1
4	0
5	-2

x	$g(x)$
-2	3
-1	1
0	5
1	2
2	4

a. Hva er f(3), g(-2)?

b. Når har funksjonene funksjonsverdi 3?

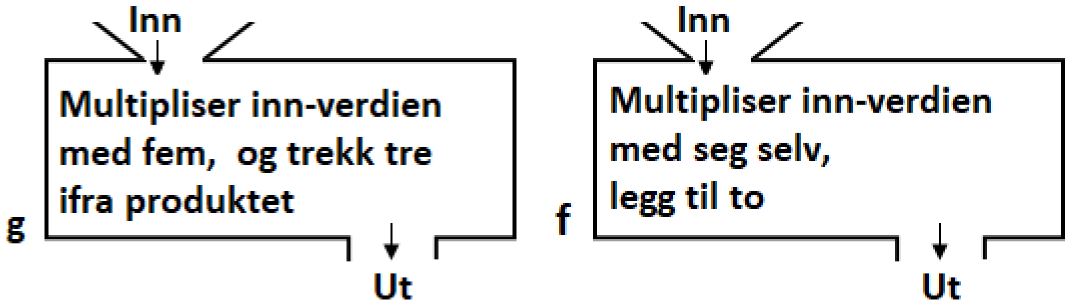
La $h(x) = g(x) + f(x)$

c. Hva er $h(1)$?

d. Er det mulig å svare på «hva er $h(-2)$?»? «$h(2)$?»?

Oppgave 18

Under ser du to funksjonsmaskiner.



a. Hva er får du om du putter 3 inn i f-maskinen? Inn i g?

b. Vi lager en ny maskin, h, denne maskinen tar inn-verdien, og gjør samme prosess som de to maskinene f og g, og legger så sammen ut-verdiene, hva blir da ut-verdien når du putter inn 4?

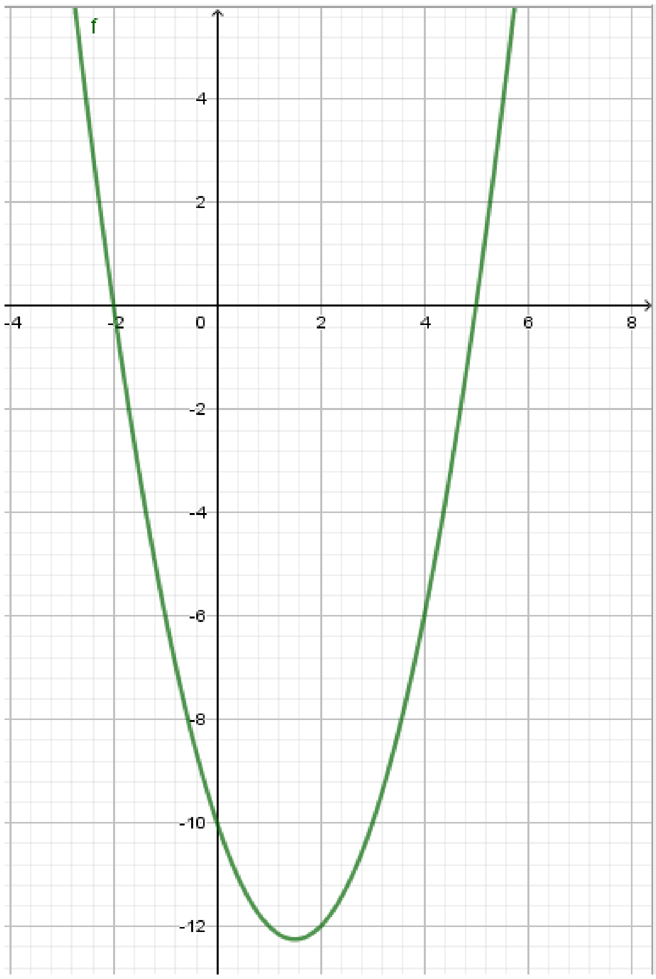
Kan du forklare hvordan en slik maskin ville fungert?

Oppgave 19

Under ser du et funksjonsuttrykk, en tabell og en graf. Alle representerer den samme funksjonen f.

$f(x) = x^2 - 3x - 10$

x	$f(x)$
-5	30
-4	18
-3	8
-2	0
-1	-6
0	-10
1	-12



De neste syv spørsmålene dreier seg om funksjonen du ser over, det er ønskelig at du for hvert delspørsmål oppgir hvilken av de tre representasjonene du brukte for å komme frem til et svar.

a. Hva er funksjonsverdien når x-verdien er -1?

b. Hva er funksjonsverdien når x-verdien er -5?

c. Hva er funksjonsverdien når x-verdien er 4?

d. Hva er funksjonsverdien når x-verdien er 10?

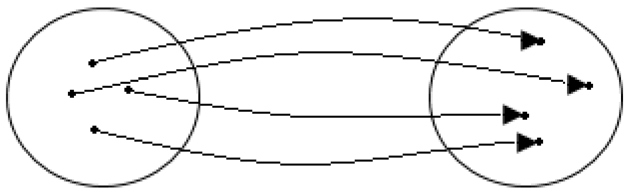
e. Hva er funksjonsverdien når x-verdien er *k*?

f. Hva er x-verdien når funksjonsverdien er 0?

g. Hva er x-verdien når funksjonsverdien er 8?

8.6 Alternative definisjoner fra intervju

1. En funksjon er en regel som til ethvert element i en mengde (definisjonsmengden) tilordner ett og bare ett element i en annen mengde (verdimengden).



2. En funksjon kan sees på som en maskin der vi for hver enkelt verdi vi putter inn får ut én og bare én verdi i andre enden. Det vil si at om vi putter inn den samme verdien flere ganger vil vi alltid få samme verdi ut.