

Utvikling av inquiry-basert undervisning i matematikk

Kvalitative erfaringar frå eit intensivt og forskingsbasert utviklingsprosjekt med to lærarar i den vidaregåande opplæringa

HÅVARD ANDREASSEN

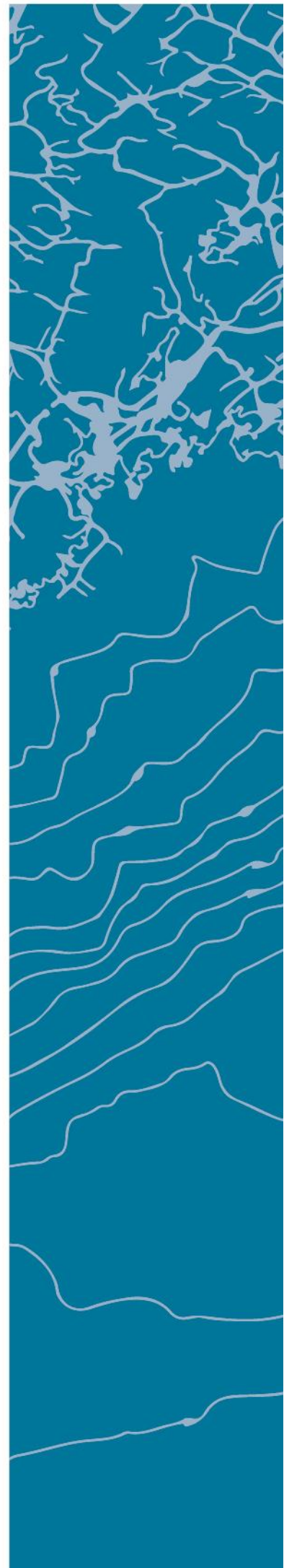
RETTLEIAR

Anne Berit Fuglestad

Universitetet i Agder, 2017

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag



Håvard Andreassen

Utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk

Kvalitative erfaringar frå eit intensivt og forskingsbasert utviklingsprosjekt
med to lærarar i den vidaregåande opplæringa

Masteroppgåve i matematikdidaktikk

Rettleiar

Anne Berit Fuglestad

14. mai 2017

© Håvard Andreassen 2017

Omslagsdesign: Universitetet i Agder

Masteroppgåve er gjennomført som ledd i utdanninga ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanninga. Denne godkjenninga inneber ikkje at universitetet står inne for dei metodane som er brukt og dei konklusjonane som er trekt.

Masteroppgåva er tilgjengeleg digital i Agder university research archive (AURA): <http://uia.no/aura>.

Forord

Dette er eit av mest omfattande prosjekta eg nokon gong har gitt meg i kast med, men etter tallause timar på datasal 255 i Helga Engs hus, legg eg nå plutsleg siste hand på verket. Det er ei merkeleg kjensle. I det eine sekundet er eg letta og i det neste litt vemodig. Aller mest er eg glad, stolt og takksam.

På kvar sin måte er det mange som har vore del av dette arbeidet og som eigentleg fortener meir enn å få namna sine på trykk. Tenk at eg skulle vera så heldig at to så engasjerte lærarar som «Grete» og «Magne» ville la seg rettleia av ein masterstudent mest utan luft under vengene. Og kva er sjansen for at dei skulle ha så imøtekommande og seriøse elevar? Takk for at de ville vera med og for innsatsen de la ned.

Å skriva ei masteroppgåve for første gang er litt som å bli kasta ut på havet i ein litt mindre båt enn du helst skulle hatt. Då er det godt å ha ein driven sjøulk ombord eller ein professor med Skype som rettleiar. Takk for mange lærerike samtalar og for tilbakemeldingar som utan tvil har styrka denne oppgåva. Ein takk går òg til Håvard Johnsrud Evang for inspirasjon og refleksjonar frå læraren sitt perspektiv.

Med dette arbeidet er denne tida mi ved Universitetet i Agder over, og eg vil retta ein stor takk til alle medarbeidarane der som i stort og smått har lagt til rette for ein fjernstudent med utdanning frå fleire andre plassar, spesielt rådgivar Trine Engeland. Løysingsorienterte menneske burde få litt ekstra skatt til gode.

Sjølv om det aldri er godt å seia kva ein har i vente, markerer denne oppgåva uansett, på ein eller annan måte, ei avslutning for utdanninga som starta då eg nervøs gjekk opp bakkane til min første skuledag på Vågen skule i 1997. Frå den dagen, til i dag har eg hatt to foreldre som alltid har heia på meg og sagt «godt nok», og det vil eg takka dykk for. Eg har òg hatt ein bror som alltid har vore tilgjengeleg på telefonen – med mindre eg har prøvd å kombinera praten med daglegvarehandlinga – og mange interesserte slektningar og venner. Mange av desse er til og med namngitte i eitt av dei seinare kapitla.

Til slutt står det igjen ei som har venta tålmodig på meg kveld etter kveld, ikkje berre i vår, men gjennom seks studieår. Lite kan måla seg med smilet ditt, eller maten du lagar, etter ein litt lenger dag på universitetet enn lova. Eg set stor pris på interessa du har vist, reisefølget du har vore og for fritida du har ofra for å lesa korrektur. Tusen takk, kjære Karina Disha, for dette og mykje meir.

Viss det er nokon lesarar som har halde ut til dette avsnittet, vil eg ønska dykk god lesing. Det har vore viktig for meg at det du sit med i handa eller på skjermen skal kunna gjera ein forskjell, så eg håpar du vil sitta igjen med den same oppfatninga.

Oslo, 11. mai 2017
Håvard Andreassen

Samandrag

Inquiry-basert undervising er kjennteikna av at elevane undersøker, resonnerer, samarbeider og diskuterer rundt opne og gjerne realistiske oppgåver der læraren inntar rolla som moderator eller coach. Dei seinare åra har slik undervising fått auka merksemd i samband med norsk matematikkopplæring og er eit satsingsområde for retningsgivande aktørar. Sidan desse ideane framleis er fjerne for mange matematikklasserom, er føremålet her å kasta lys over lærarar (og elevar) si utvikling av ny praksis i samsvar med dette idealet. Spørsmålet er: Kva utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar pregar denne prosessen og korleis heng dei saman?

For å få innsikt i dette, blei det gjennomført eit intensivt utviklingsprosjekt med to lærarar med kvar sin klasse i den vidaregåande matematikkopplæringa. Over tre veker gjennomførte dei fem inquiry-basert undervisingssekvensar i kontrast til den eksisterande undervisinga prega av videoførelingar og individuell oppgåverekning. Dei viktigaste eigenskapane ved prosjektet kan oppsummerast i fem kjenneteikn: Gjennomføringa (a) skjedde over eit kort, samanhengende tidsrom ved hjelp av (b) forskingsbasert rettleiing og (c) forskingsbasert ressursmateriale (d) tett knytta til praksis og (e) refleksjon i fellesskap.

Samtidig med dette blei det gjennomført ein kvalitativ studie med utviklingsprosjektet som case. Hovudsakleg gjennom djupneintervju med lærarane, ei fokusgruppe med fire elevar, videoobservasjon av sekvensar og planleggingsmøte, blei det henta inn data om prosessen. Inspirert av «grounded theory» og tematisk analyse blei dataa koda og kategorisert med utgangspunkt i eit todelt teoretisk rammeverk. Inquiry-basert matematikkundervising blir forstått som eit perspektiv på undervising (Wells, 1999) med sentrale kjenneteikn (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013), medan profesjonell utvikling blir konseptualisert som samla utvikling i oppfatningar, kunnskap og praksis. I tillegg blir rammeverka til Gueudet og Trouche (2012) og Clarke og Hollingsworth (2002) om høvesvis «documentational genesis» og «change environment» brukt til å analysere situasjonen, i kombinasjon med eksisterande forskning om utvikling av inquiry.

Studien stadfestar at utviklinga av inquiry-basert undervising i matematikk er krevande for både lærarane og elevane, og dei fleste utfordringane som går fram av dette datamaterialet, er òg dokumentert i eksisterande forskning. Når det er sagt, utmerkar studien seg i forhold til liknande prosjekt ved å visa at både lærarane og elevane gjorde vesentlege framsteg med tanke på oppfatningar, kunnskap og praksis. Mest framtrudande var det at mange elevgrupper utvikla utforsknings- og kommunikasjonsmønster langt på veg i samsvar med idealet. Den same trenden kom òg til syne under heilclassesamtalane og i lærarane sin kontakt med elevane, men her var utviklinga meir moderat. Alle tilfella såg ut til å vera uttrykk for auka kunnskap og positive oppfatningar og ein konsekvens av utslagsgivande faktorar som dei fem kjenneteikna, med vekt på dei to siste, i tillegg til engasjerte og utviklingsvillige lærarar og seriøse elevar. Sjølv om funna impliserer at utvikling av inquiry-basert matematikkundervising er ein krevande og kompleks prosess, viser dei altså òg at markant utvikling er mogleg under samansette forhold. Sjølv om fleire eigenskapar ved konteksten talar for generalisering til andre tilfelle, gjer nokon av dei fordelaktige kvalitetane ved situasjonen at det er urimeleg å forventa den same utviklinga i andre høve med dårlegare kår.

Summary

Inquiry-based teaching is characterized by engaging students in inquiry, collaboration and discussions on the basis of rich, perhaps realistic, problems with the teacher acting as moderator or coach. In recent years, this type of teaching has gained increasing attention within Norwegian mathematics education and is a focus area for influential contributors. Since these ideas are remote for many mathematics classrooms, the object of this thesis is to shed light on teachers' (and students') process of developing new practices in accordance with this ideal. I ask: What developments, challenges and key factors affect this process, and how are they connected?

To gain insight into this, a short term development program was initiated in collaboration with two upper secondary school teachers. Over a period of three weeks, the teachers conducted five inquiry-based teaching sequences in contrast to their existing practice where the students mainly watched video lessons and solved tasks individually. The description of this program can be summarized in five key features: The implementation (a) occurred over a short, coherent period of time and was based on (b) research-based mentoring and (c) research-based resources and was (d) closely linked to practice and (e) reflection in collaboration.

Simultaneously a qualitative study was carried out with this development program as case. Data was mainly gathered by interviewing the teachers, carrying out a focus group with four students and observing both lessons and planning meetings. Inspired by grounded theory and thematic analysis, the data was coded and categorized in light of a twofolded theoretical framework. Inquiry-based mathematics teaching is understood as a perspective on teaching (Wells, 1999) with several key characteristics (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013), while professional development is conceptualized as the joint development in beliefs, knowledge and practice. Additionally the frameworks of Gueudet and Trouche (2012) and Clarke and Hollingsworth (2002), documental genesis and the change environment respectively, are used to analyze the situation, in combination with existing research on the development of inquiry.

This study confirms that inquiry-based mathematics teaching is demanding for both teachers and students, and most of the challenges posed by this data are also documented in existing research. That being said, this study also distinguishes itself from similar projects by demonstrating significant progress in terms of beliefs, knowledge and practice among the teachers and the students. The most outstanding finding was the observation that many student groups developed inquiry and communication patterns largely in compliance with the ideal. The same growth was also visible for the plenary talks and the teachers' interactions with the students, but to a lesser extent. All cases indicated increased knowledge and positive beliefs and appeared to be consequences of key factors such as the five features, with emphasis on the last two, as well as the devotion of the teachers and the commitment by the students. Although the results advocate the demanding and intricate nature of inquiry-based mathematics teaching, they also demonstrate that significant development is possible under complex conditions. Even though several characteristics of the context imply generalization to other cases, other favorable qualities of the situation indicate that it would be unreasonable to expect all the same outcomes in less fortunate occasions.

Innhold

Forord	iii
Samandrag	v
Summary	vii
1 Innleiing	1
1.1 Tematisk bakgrunn	1
1.2 Mål, kontekst, forskingsspørsmål og presiseringar	3
1.3 Svaret på forskingsspørsmålet og disposisjon	4
2 Teoretisk rammeverk	7
2.1 Inquiry-basert undervising i matematikk	7
2.1.1 Definisjonar og kjenneteikn	7
2.1.2 Læringsteoretisk grunnlag	9
2.1.3 Tilnærming til matematisk kompetanse	10
2.2 Profesjonell utvikling	12
2.2.1 Definisjonar	12
2.2.2 Oppfatningar, kunnskap og praksis	13
2.2.3 Endringsmiljømodellen	13
2.2.4 Dokumentasjonell og profesjonell danning	15
2.3 Utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar	16
3 Eksisterande forskning	17
3.1 Utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk	17
3.1.1 Oversikt over utslagsgivande faktorar og utfordringar	17
3.1.2 TBM-LBM-prosjektet	18
3.1.3 PRIMAS-prosjektet	19
3.2 Operasjonalisering av inquiry-basert undervising i matematikk	20
3.2.1 Fem aktivitetar for gjennomføring av matematikksamtar	20
3.2.2 Utforming av <i>rike oppgåver</i> i matematikk	21
3.2.3 Kommunikasjon og samtaletrekk	22
4 Metode	25
4.1 Forskingsstrategi og metodologiske perspektiv	25
4.2 Gjennomføring av utviklingsprosjektet	26
4.2.1 Deltakarane og eksisterande undervising	26
4.2.2 Kjenneteikn på utviklingsprosjektet	27
4.2.3 Undervisinga i prosjektet	28

4.2.4	Det matematiske temaet og dei rike oppgåvene	29
4.3	Forskningsdesign og metodar for datainnsamling	31
4.3.1	Djupneintervju av lærarane og fokusgruppe med fire elevar	32
4.3.2	Videobservasjon av undervisinga og refleksjonsmøtene	33
4.3.3	Spørreundersøking og fortløpande tilbakemeldingar frå elevane	33
4.4	Metodar for dataanalyse	34
4.5	Etiske vurderingar	36
5	Resultat	37
5.1	Overblikk over lærarane si utvikling	38
5.2	Oppfatningar	39
5.2.1	Lærarane sine oppfatningar om matematisk kompetanse	39
5.2.2	Lærarane sine oppfatningar om inquiry-basert undervising i matematikk	40
5.2.3	Lærarane sine oppfatningar om utvikling som matematikklærer	41
5.2.4	Lærarane sine oppfatningar om seg sjølv og elevane	42
5.2.5	Elevane sine oppfatningar om matematisk kompetanse	43
5.2.6	Elevane sine oppfatningar om inquiry-basert undervising i matematikk	44
5.3	Kunnskap	45
5.3.1	Lærarane sine kunnskapar om inquiry-basert undervising i matematikk	45
5.3.2	Elevane si forståing av kva dei skulle gjera	46
5.4	Klasseromspraksis	48
5.4.1	Utforminga og følgene av dei rike oppgåvene	48
5.4.2	Instruksjonar, oppsummering og den inquiry-baserte matematikkundervisinga	50
5.4.3	Gruppearbeida	51
5.4.4	Heilklassemøtet	56
5.4.5	Tidsbruk i klasserommet	58
5.5	Trekk ved utviklingsprosjektet	59
5.5.1	Kjenneteikn 1: Det korte tidsrommet	60
5.5.2	Kjenneteikn 2 og 3: Ressursar og rettleiing basert på forskning	60
5.5.3	Kjenneteikn 4 og 5: Praksisnær refleksjon i samarbeid	62
5.6	Status to månader seinare	63
6	Drøfting	65
6.1	Matematikkundervisinga i heilskap i forhold til idealet	65
6.1.1	Lærarane si tolking av inquiry-basert undervising i matematikk	65
6.1.2	Undervisinga i forhold til kjenneteikna på inquiry	66
6.2	Lærarane si utvikling som dokumentasjonell danning	67
6.2.1	Ressursar i prosjektet	68
6.2.2	Prosjektet som ressurs	68
6.2.3	Inquiry-basert undervising som ressurs i matematikk	69
6.3	Dei viktigaste utviklingstrekk, utfordringande og utslagsgivande faktorane i forhold til eksisterande forskning	69
6.3.1	Dei viktigaste utviklingstrekk	70
6.3.2	Dei viktigaste utfordringar	70
6.3.3	Dei viktigaste utslagsgivande faktorane	71
6.4	Samspelet mellom ulike aspekt av lærarane si utvikling	72
6.4.1	Dei fire domena i denne studien	72

6.4.2	Endringssekvensar mellom <i>to</i> domene	73
6.4.3	Vekstnettverk og overordna refleksjonar	74
7	Avslutning	77
7.1	Ei drøfting av kvaliteten på studien	77
7.1.1	Reliabilitet	77
7.1.2	Validitet	78
7.1.3	Generalisering	79
7.1.4	Tilbakeblikk og endringsforslag	80
7.2	Konklusjon	81
7.3	Implikasjonar	83
7.4	Avsluttande refleksjonar om arbeidet og produktet	84
	Referansar	87
A	Forarbeid	93
A.1	Informasjonsskriv med samtykkebrev til lærarane	93
A.2	Informasjonsskriv med samtykkebrev til elevane	97
A.3	Godkjenningsskriv frå Norsk senter for forskingsdata	98
B	Materiale i utviklingsprosjektet	101
B.1	Utviklingsmåla	101
B.2	Ressurshftet	103
B.3	Eksempel på rike oppgåver	110
C	Oppgåvene	115
C.1	Oppgåve 1: «Utforskning i GeoGebra»	115
C.2	Oppgåve 2: «Angrepsstigen»	116
C.3	Oppgåve 3: «Arveoppgjøret» – Del 1	119
C.4	Oppgåve 3: «Arveoppgjøret» – Del 2	120
C.5	Oppgåve 4: «Norges trigonometriforbunds flagg»	125
D	Datainnsamling	129
D.1	Intervjuguide for det innleiande djupneintervjuet med lærarane	129
D.2	Intervjuguide for det avsluttande djupneintervjuet med lærarane	130
D.3	Intervjuguide for den avsluttande fokusgruppa med elevane	132

Kapittel 1

Innleiing

Jeg likte veldig godt oppgavene. Ofte i boken er det en teoridel og så oppgaver, men da vet man på forhånd at man (mest sannsynlig) skal bruke for eksempel formelen man lærte i teoridelen. Oppgavene vi fikk nå derimot var mye åpnere og utfordrene. Jeg likte veldig godt at vi samarbeid og at alle presenterte sin løsning, det gjøre at jeg lærte mer av andre.

Eleven som skreiv dette, oppsummerer på ein jordnær måte fleire eigenskapar ved inquiry-basert matematikkundervising og kva slik undervising kan ha å seia for enkeltelevlar. Meir utfyllande er dette undervising der elevane undersøker, resonnerer, samarbeider og diskuterer rundt opne og gjerne realistiske oppgåver der læraren inntar rolla som moderator eller coach.

Som det går fram av tittelen, er dette temaet for denne masteroppgåva, men tittelen synleggjer òg at det er utviklinga av denne typen undervising som er i fokus. I dette kapittelet blir utgangspunktet for studien presentert i form av ei kortfatta statusoppdatering for tematiken og avklaringar om retninga i prosjektet og forskings spørsmålet. Til slutt kjem ei oversikt over korleis oppgåva er bygd opp.

1.1 Tematisk bakgrunn

Sentrale aktørar frå ulike delar av skule-Norge har dei siste åra vist aukande interesse for inquiry-basert matematikkundervising. Matematikksenteret har for eksempel utvikla ei rekkje undersøkende undervisningsopplegg i samarbeid med praktiserande lærarar (sjå t.d. Matematikksenteret, 2017), og i 2016 gjekk Holmboeprisen til ein lærar inspirert av denne filosofien (Holmboeprisen, 2016). Dette har òg prega diskursen i det profesjonsretta tidsskriftet *Tangenten* (sjå f.eks. Streitlien, 2004; Kristensen, 2008; Larsen, Skagestad & Torkildsen, 2010; Drageset, 2014; Wæge, 2015). På det utdanningspolitiske planet har desse ideane mellom anna sett spor i rapporten frå Ludvigsen-utvalet, *Fremtidens skole*, (NOU 2015: 8, 2015) og regjeringa sin femårige strategiplan for realfag, *Tett på realfag*, (Kunnskapsdepartementet, 2015). I akademia har interessa komme til uttrykk gjennom prosjekt som *Bedre matematikkundervising* og *Lære bedre matematikk* ved Universitetet i Agder (sjå f.eks. Carlsen & Fuglestad, 2010) og *Lærings-samtalen i matematikkfagets praksis* ved Høgskolen i Bergen (sjå f.eks. Johnsen-Høines & Alrø, 2012, 2013).

Denne utviklinga samsvarar med ein internasjonal trend som har pågått i fleire tiår (Artigue & Blomhøj, 2013; Goldsmith, Doerr & Lewis, 2014), og denne er godt grunngeven. I ein gjennomgang av eksisterande forskning på temaet hevdar Barron og Darling-Hammond (2008, s. 2), for eksempel, at «[d]ecades of research illustrate the benefits of inquiry-based and cooperative

learning [as opposed to traditional teaching] to help students develop the knowledge and skills necessary to be successful in a rapidly changing world». Slik undervising fremmar djupare læring og betre prestasjonar i samband med komplekse problemstillingar både på individnivå og gruppenivå. I ressursboka *Principles for action* blir åtte prinsipp for effektiv matematikkundervising presentert (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). Desse bygger på funn frå kognisjonsvitskap og utdanningsvitskap om at «learners should have experiences that enable them to (...) construct knowledge socially, through discourse, activity, and interaction related to meaningful problems» (s. 9). I samband med det europeiske PRIMAS-prosjektet (*Promoting Inquiry in Mathematics And Science education across Europe*) viste gjennomgangar av eksisterande forskning at inquiry-basert matematikkundervising har fleire fordelar (PRIMAS, 2011; Bruder & Prescott, 2013). Elevane blir meir motiverte, utviklar betre forståing, «higher order thinking skills» og evne til å bruka kunnskap i nye situasjonar. I tillegg kjem tilleggskompetanse i gruppearbeid, tverrfagleg arbeid så vel som innblikk i forskingsfeltet. I sin velkjente komparative studie viser Boaler (1998) at elevar gjennom opne prosjektbaserte arbeidsmåtar utviklar betre og meir fleksibel kompetanse enn gjennom lærebokstyrt undervising.

Desse positive erfaringane blir òg framheva i norske rapportar. I *Realfag: relevante, engasjerende, attraktive og lærerike* tar for eksempel ekspertutvalet for realfag til orde for at det i større grad bør leggest til rette for at elevane skal utvikla djupare forståing av omgrep og samanhengar mellom dei som dei kan bruka i problemløysing (Bergem et al., 2015). Dette bør skje gjennom bruk av utforskande arbeidsmåtar, dialogar i grupper og plenum og kognitivt utfordrande oppgåver der elevane sjølv vel strategi. Dei same tankane går òg igjen i Matematikksenteret sin rapport til Ludvigsen-utvalet, *Sentrale kjennetegn på god læring og undervising i matematikk*, der det i tillegg blir påpeika fordelar knytta til for eksempel tilpassa opplæring (Nosrati & Wæge, 2015).

For ordens skuld bør det òg påpeikast at det over denne tida òg har blitt fremma ulike former for kritikk av inquiry-basert matematikkundervising. På den eine sida meiner mange at det er vanskeleg å oppnå eller utvikla dette som ein effektiv klasseromspraksis (Barron & Darling-Hammond, 2008; Inoue & Buczynski, 2011; Carlsen & Fuglestad, 2010). Lærarar opplever at tilnærminga er meir tidkrevande, fører til motstand hjå elevane og mindre kontroll hjå dei sjølve (PRIMAS, 2011), for å nemna noko. På den andre sida, er det òg dei som kritiserer dei grunnleggande prinsippa ved inquiry-basert undervising. Kirschner, Sweller og Clark (2006) hevdar at studier over 50 år viser at denne forma for undervising er langt mindre effektiv enn mange trur og meiner, i likskap med Moreno (2004), at elevar treng tettare oppfølging enn inquiry-basert undervising legg til rette for slik dei ser det. Sjølv om nokon tilbakeviser kritikk som dette (Hmelo-Silver, Duncan & Chinn, 2007), er det likevel nyttig å ta han på alvor som ein nyanse i tilnærminga til korleis denne typen undervising kan gjennomførast i klasserommet (Bruder & Prescott, 2013), slik denne oppgåva gjer.

Kanskje delvis på grunn av denne kritikken, men truleg òg på grunn av av faktorar knytta til oppfatningar, kunnskap, praksis og rammefaktorar, ser inquiry-basert undervising ut til å vera lite utbreidd i Norge trass fordelane i forskingslitteraturen og tilretteleggina i utdanningspolitikken. Studiar av PISA- og TIMSS-undersøkingane, der elevane og lærarane svarar på kva aktivitetar dei arbeider med i undervisinga, viser at lærarane først presenterer eksempeloppgåver i tråd med læreverket og at elevane etterpå arbeider med liknande oppgåver (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010; Klette, 2013; Bergem & Klette, 2008). Utover dette er det liten variasjon i aktivitetane ved at lærarane sjeldan brukar opne, samansette problem eller diskusjon.

Dette manglande, eller svake, samsvaret mellom praksisfeltet på den eine sida og forskinga og politikken på den andre sida, kan tyda på at norsk matematikkundervising står framfor ei interessant tid. Viss støtten til inquiry-basert undervising vedvarer, blir profesjonell utvikling

stadig meir aktuelt, i tråd med tilrådinga frå Bergem et al. (2015). Dette er altså eit heitt tema i utdanningspolitikken (sjå òg St.meld. nr. 11 (2008-2009), 2009) så vel som i matematikkdidaktisk forskning (Smith, 2001; Goldsmith et al., 2014) mellom anna som ein viktig støttefunksjon i samband med inquiry-basert matematikkundervising (Maaß & Doorman, 2013; Clarke & Hollingsworth, 2002). Dei to prosjekta ved Universitetet i Agder og PRIMAS-prosjektet er eksempel på korleis dette er ein fruktbar kombinasjon.

1.2 Mål, kontekst, forskingsspørsmål og presiseringar

I kombinasjon med meir generelle vurderingar knytta til det å engasjera seg i eit så omfattande prosjekt som dette, motiverer denne bakgrunnen tre overordna mål som har prega denne masteroppgåva frå start til slutt. For det første har det vore eit ønske at produktet skulle kunna bidra til mi eiga og andre matematikklærarar si opplæring i inquiry-basert undervising. Eit anna siktemål har vore at studien skulle kunna vera eit innspel i utdanningsdebatten ved å auka merksemd om temaet og synleggjera fordelar og ulemper. Det tredje og siste ønsket har vore å tilnærma seg inquiry-basert matematikkundervising på ein slik måte at resultatane både blir samanlikna med eksisterande forskning, men òg slik at dei gir ny innsikt i og auka forståing for læraren si utvikling av inquiry-basert matematikkundervising.

I samsvar med desse tre måla har prosessen og produktet blitt styrt av to sentrale prinsipp, nemleg at tilnærminga til lærarar si utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk skulle vera *heilskapeleg* og *praksisnær*. Som følge av dette, ligg både forskingsspørsmålet, resultatane og handsaminga av desse på mesonivå for å gi eit dekkande bilete av dei vesentlegaste sidene av lærarar si gjerning. På same måte har det teoretiske rammeverket med den eksisterande forskinga blitt utforma ut frå meir handfaste rammeverk og konkrete studiar framfor komplekse og meir nyanserte modellar. Denne profileringa som samsvarar med det Kvale (2001) kallar *pragmatiske forskingsinteressa*, har tydelege fordelar i samband med dei overordna måla, men medfører òg ulemper som påverkar tolkinga og bruken av resultatane frå studien. Knytta til det første punktet går ein glipp av djupare funn ein ville gjort med eit snevrare fokus, for eksempel på heilklassekommunikasjon, medan ei anna innvending er at eit praksisnært rammeverk medfører tap av nyansar og presisjon.

Ut frå denne bakgrunnen og desse ønska innleia eg eit samarbeid med to etablerte matematikklærarar på ein vidaregåande skule i hovudstadsområdet som i lita grad brukte inquiry-basert matematikkundervising. I løpet av fem etterfølgande økter i overgangen mellom januar og februar i 2017 gjennomførte dei fem inquiry-basert undervisningssekvensar i trigonometri som me fortløpande planla og evaluerte i fellesskap. Sidan eg som student hadde mindre erfaring med praktisk gjennomføring av slik undervising og profesjonelle utviklingsprogram, blei prosjektet i stor grad basert på eksisterande forskning. Dette har seinare blitt oppsummert i fem kjenneteikn, nemleg at gjennomføringa (a) skjedde over eit kort, samanhengende tidsrom (b) ved hjelp av forskingsbasert rettleiing og (c) forskingsbasert ressursmateriale (d) tett knytta til praksis og (e) refleksjon i fellesskap. Sjølv om alle fem kjenneteikna bygger på eksisterande forskning, gjer dei tre første at dette prosjektet skil seg klart frå dei tidlegare nemnte ved Universitetet i Agder som elles er relativt like i formål og tematikk.

Med utgangspunkt denne tematiske bakgrunnen, desse overordna måla og denne situasjonen, søker denne masteroppgåva å svara på følgjande forskingsspørsmål:

Kva utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar pregar lærarar si utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk, og korleis heng desse saman?

Dette er eit innhaldsrikt spørsmål, og for å tydeleggjera retninga i studien, er det nyttig med nokon presiseringar. For det første, er det læraren som er i fokus sidan han eller ho er den viktigaste enkeltfaktoren for det som skjer i klasserommet (Carlsen & Fuglestad, 2010). Likevel blir både elevane og mine erfaringar trekt inn der dei anten har særleg noko å seia for lærarane si utvikling eller seier noko om denne utviklinga. For det andre, omfattar desse erfaringane alle nivåa av prosjektet, både gjennomføringa i klasserommet og planlegginga og evalueringa på møterommet. For det tredje, er det sjølve undervisinga, med vekt på samhandling og kommunikasjon og i lys av det teoretiske rammeverket og den eksisterande forskning, som er i fokus. Det betyr at andre faktorar som læringsutbytte, motivasjon, tilpassa opplæring og vurdering blir neglisjert. Studien er for eksempel ikkje utforma for å kunna svara på om inquiry verkeleg medfører betre læring enn alternativa.

Når det, for det fjerde, gjeld omgrepa i forskingsspørsmålet blir utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar i hovudsak brukt relativt synonymt med daglegtalet. Når det er sagt, er det omgrepa inquiry-basert matematikkundervising og profesjonell utvikling slik dei blir konseptualisert og operasjonalisert i kapittel 2 og 3 som fyller dei med innhald. Utviklingstrekk viser såleis til framsteg i forhold til kjenneteikn på «god» inquiry-basert matematikkundervising, medan utfordringar omfattar hinder for dette, anten det er eigenskapar ved teorien eller situasjonen. Utslagsgivande faktorar gjeld val og handlingar som bidrar til utvikling på ein positiv måte, slik at dei «negative utslagsgivande faktorane» er å rekna som utfordringar.

For å gjera teksten meir lesarvennleg og intuitiv blir engelske omgrep som hovudregel omsett til norsk. Det går klart fram av teksten der omsettinga er henta frå andre norske forfattarar eller der det medvite blir brukt alternativ til slike. Likevel blir ikkje «inquiry» omsett til for eksempel «undersøkande», slik Nosrati og Wæge (2015) gjer, fordi eg delar Carlsen og Fuglestad (2010) si oppfatning om at det ikkje finnest dekkande norske erstatningar til det internasjonalt etablerte omgrepet. Vidare er det i lys av forskingsspørsmålet ikkje gagnleg å skilja mellom ulike variantar av inquiry, inquiry-basert undervising, -læring, -utdanning og så vidare, og resten av teksten vekslar difor mellom dei to første. Tilsvarande blir inquiry-basert matematikkundervising og inquiry-basert undervising i matematikk brukt om kvarandre.

1.3 Svaret på forskingsspørsmålet og disposisjon

Denne masteroppgåva tilnærmar seg forskingsspørsmålet på ein konvensjonell måte. Dei følgjande kapitla presenterer først teoretisk rammeverk, eksisterande forskning og metode før resultatata frå studien og drøftinga av desse blir lagt fram. Dette blir så oppsummert i det avsluttande kapitlet med det endelege svaret på forskingsspørsmålet. Her følger ei meir detaljert oversikt over desse kapitla.

I det følgjande kapitlet, kapittel 2, blir teoretiske grunnlaget presentert i to delar om inquiry-basert matematikkundervising og profesjonell utvikling. Begge delane opnar med ei drøfting av ulike definisjonar, men der den første delen drøftar undervisinga i lys av læringsteoriar og ein kompetansmodell for matematikk, held den andre fram med å presentera ulike teoretiske tilnærmingar til utvikling. To sentrale idear i dette kapitlet er kjenneteikn på inquiry-basert undervising ut frå struktur, oppgåveutforming, kommunikasjon og kultur og dei tre aspekta oppfatningar, kunnskap og praksis av profesjonell utvikling.

Todelinga blir vidareført, men på ein meir integrert måte, i kapittel 3 der det blir gjort greie for eksisterande forskning. Den første delen konsentrerer seg om utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar i utviklinga av inquiry-basert undervising i matematikk mellom anna i samband med dei to prosjekta ved Universitetet i Agder og PRIMAS-prosjektet. Den andre delen presenterer fleire operasjonaliseringar av kjenneteikna på inquiry-basert undervising som

blei brukt aktivt i dette utviklingsprosjektet. Sidan storparten av forskinga på dette feltet er gjort innanfor ein amerikansk eller europeisk skulekontekst og desse skil seg frå den norske på fleire punkt (Schoenfeld & Kilpatrick, 2013), blir val av modellar og forskning ofte grunngitt ut frå norsk eller skandinavisk forskning.

Kapittel 4, om den metodiske tilnærminga i studien, opnar med det strategimessige og metodologiske grunnlaget før gjennomføringa av utviklingsprosjektet blir utdjupa. Det siste omfattar både den eksisterande situasjonen, dei fem kjenneteikna og den nye undervisinga. Etter dette blir metodane for datainnsamling og analyse av dataa lagt fram før kapitlet blir runda av med nokon etiske refleksjonar. Innhentinga av data blei gjort gjennom pre- og postintervju med lærarane, ei avsluttande fokusgruppe fire elevar, videoobservasjon av alle møta og undervisningssekvensane og fortløpande, skriftlege tilbakemeldingar og svar på spørreundersøking frå elevane. Dataa blei koda og kategorisert inspirert av mellom anna «grounded theory» og tematisk analyse.

Resultata frå desse prosessane blir presentert i kapittel 5 fordelt på dei tre aspekta av profesjonell utvikling, oppfatningar, kunnskap og praksis, i tillegg til ein ekstra kategori om utviklingsprosjektet i metaperspektiv. For kvar av desse delane og dei respektive underdelane blir det drøfta korvidt ein faktor svarar til eit utviklingstrekk, ei utfordring, ein utslagsgivande faktor eller fleire av dei. Resultata blir analysert i lys av det todelte teoretiske rammeverket, men det er òg lagt stor vekt på å gjengi transkripsjonar eller hendingar slik at lesaren sjølv kan vurdera kvalitet og generalisering. I tillegg blir data frå dei ulike innsamlingsmetodane og dei ulike aktørane samanlikna.

Sidan resultatkapitlet på mange måtar gir eit fyldig svar på særleg den første delen av forskningsspørsmålet, er føremålet med kapittel 6 å gå djupare inn i materien. Først blir matematikkundervisinga som heilskap oppsummert og samanlikna med idealet i det teoretiske rammeverket for å analysere lærarane si utvikling nærmare. Deretter blir dette utviklingsfokuset vidareført til prosjektnivået og dei fem kjenneteikna med ein analyse ut frå rammeverket til Gueudet og Trouche (2012) om dokumentasjonell danning. I den tredje delen blir resultata for dei tre kategoriane i forskningsspørsmålet oppsummert og drøfta i lys av den eksisterande forskinga om dette i kapittel 5. Til slutt blir endringsmiljømodellen til Clarke og Hollingsworth (2002) brukt for å drøfta samanhengar mellom dei ulike aspekta av lærarane si utvikling så vel som dei tre kategoriane i forskningsspørsmålet.

Det siste ordinære kapitlet, kapittel 7, oppsummerer oppgåva i fire ledd. Først blir kvaliteten på studien drøfta i lys av dei tre indikatorane reliabilitet, validitet og generalisering, før den andre delen konkluderer ut frå forskningsspørsmålet. Deretter blir implikasjonane drøfta i lys av dei overordna måla for oppgåva, og til slutt reflekterer eg kort over arbeidet og produktet og kva det har hatt å seia for meg. Etter dette kapitlet følger referanselista og fleire tilleggskapittel (appendiks) som inneheld materiale knytta til forarbeidet, utviklingsprosjektet, undervisinga og datainnsamling. Kvart tilleggskapittel blir innleia med nødvendige avklaringar og kommentarar til utvala.

Kapittel 2

Teoretisk rammeverk

Forskingsspørsmålet bygger på tre tema: inquiry-basert matematikkundervising, profesjonell utvikling og erfaringar knytta til utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar. I dei tre følgande delane blir det gjort greie for det teoretiske grunnlaget for desse, og fordi dei to første er mest komplekse og elementære blir det lagt størst vekt på desse. Dessutan fyller dei, som sagt, den siste kategorien med innhald. Dei teoretiske rammeverka i dette kapittelet blir seinare brukt som analyseverktøy, og i det følgande kapittelet blir dei tre delane her vidareført og integrert med funn frå eksisterande forsking. Viss ikkje anna blir sagt, er eksempla laga i samband med denne oppgåva.

2.1 Inquiry-basert undervising i matematikk

Inquiry-basert matematikkundervising er eit samansett fenomen, og i den første følgande underdelen blir det difor presentert to delvis ulike definisjonar så vel som fleire kjenneteikn ved konseptet som denne studien bygger på. For å nyansera denne framstillinga ytterlegare og fordi all undervising bygger på syn på læring (Säljö, 2013), blir det deretter gjort greie for det læringsteoretiske grunnlaget for inquiry. Sidan dette er ein *matematikkdidaktisk* master, går den siste underdelen inn på kva forståing av matematisk kompetanse som blir vektlagt i samband med denne forma for undervising.

2.1.1 Definisjonar og kjenneteikn

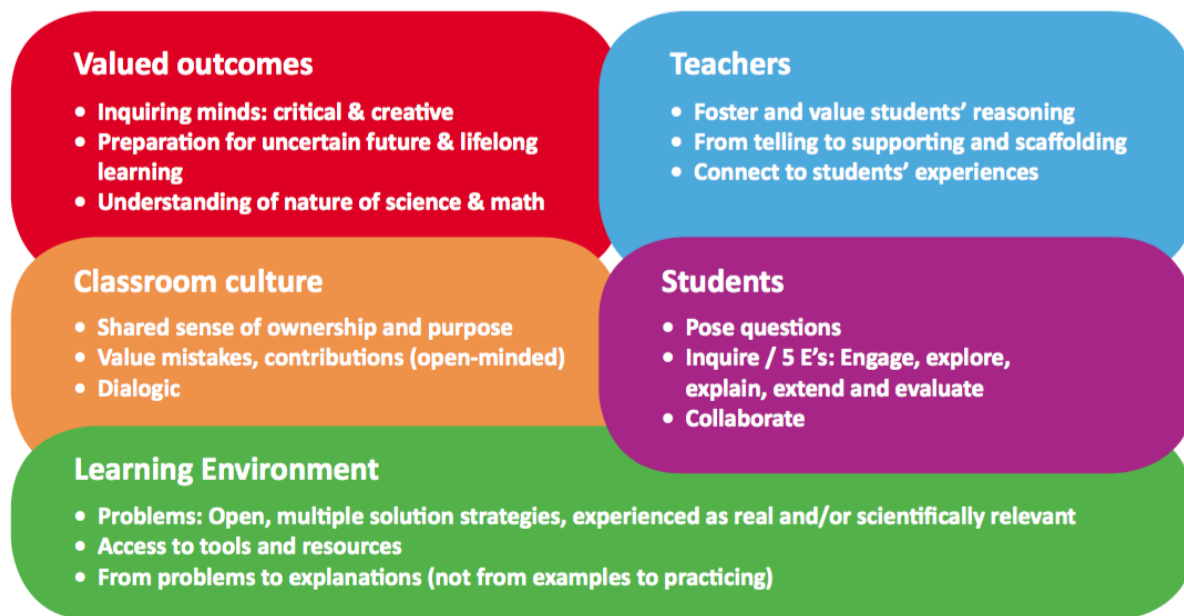
På grunn av den aukande oppslutninga dei siste tiåra, har inquiry-basert undervising blitt definert og karakterisert på mange ulike måtar. I samband med PRIMAS-prosjektet hevdar Maaß og Doorman (2013, s. 887) at

‘inquiry-based learning’ [IBL] refers to a teaching culture and to classroom practices in which students inquire and pose questions, explore and evaluate. Learning is driven by open questions and multiple-solution strategies. Teachers are proactive: they support pupils who are struggling and challenge those who are succeeding through the use of carefully chosen strategic questions. In the classroom, a shared sense of ownership exists. IBL aims to develop and foster inquiring minds and attitudes that are vital for enabling students to face and manage uncertain futures.

Denne definisjonen, som blir ytterlegare skildra av Maaß og Reitz-Koncebovski (2013) i figur 2.1, er i likskap med andre tilnærmingar (sjå f.eks. Barron & Darling-Hammond, 2008) relativt praksisnær, sjølv om det kulturelle aspektet blir understreka. I dei kombinerte norske prosjekta

Bedre matematikkundervisning og Lær bedre matematikk (TBM-LBM-prosjektet) legg derimot Carlsen og Fuglestad (2010) og Goodchild, Fuglestad og Jaworski (2013) meir vekt på Wells (1999, s. 121) si forståing:

inquiry does not refer to a method (...), still less to a generic set of procedures for carrying out activities. Rather, it indicates a stance toward experience and ideas – a willingness to wonder, to ask questions, and to seek to understand by collaborating with others in the attempt to make answers to them.



Figur 2.1: Essensielle ingrediensar i inquiry-basert undervisning i PRIMAS-prosjektet (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013, s. 8).

I utgangspunktet la denne studien størst vekt på definisjonen til Wells (1999), men etter kvart, og særleg i planlegginga med lærarane, har den meir konkrete og praksisnære definisjonen til Maaß og Doorman (2013) fått større plass. Når det er sagt, har desse definisjonane svært mykje til felles i samanlikning med såkalla «*tradisjonelle undervisningsformer*». Desse er ofte kjenneteikna av at læraren først presenterer fagstoffet med eksempel og at elevane etterpå, kvar for seg, løysar liknande, relativt lukka og avgrensa oppgåver (Alrø & Skovsmose, 2004; Barron & Darling-Hammond, 2008; Nosrati & Wæge, 2015). Samla sett blir altså inquiry, som hjå Wells (1999), forstått som eit perspektiv som kan operasjonaliserast på mange ulike måtar innanfor rammene i definisjonen til Maaß og Doorman (2013) og figur 2.1.

Figur 2.1 oppsummerer fleire sentrale kjenneteikn ved inquiry-basert matematikkundervisning fordelt på kategoriane *verdsette utfall* («valued outcomes»), *lærarane* («teachers»), *klasseromskultur* («classroom culture»), *elevane* («students») og *læringsmiljøet* («learning environment»). Sidan figuren er relativt sjølvforklarande og blir kommentert fortløpande i teksten, blir han ikkje skildra ytterlegare her. Det er derimot nødvendig å synleggjera koplinga til operasjonaliseringa i del 3.2. Designmodellane som blir presentert der, blir fordelt på tre kjenneteikn ved inquiry-basert matematikkundervisning, nemleg struktur på undervisninga, oppgåveutforming og kommunikasjonsmønster, og desse kan i større eller mindre grad motiverast av figur 2.1. Kommunikasjonsidealet går igjen i dei fleste kategoriane, særleg under «elevane» og «lærarane», og oppgåveutforming er i hovudsak knytta til «læringsmiljø». Når det blir referert til den nye

lærarrolla og den nye elevrolla, omfattar dette kjenneteikna i denne figuren i tillegg til andre skildringar i dette kapittelet og i del 3.2. Struktur på undervisinga er derimot eit eksempel på korleis inquiry-basert matematikkundervising kan operasjonaliserast på ei rekke ulike måtar. Artigue og Blomhøj (2013) påpeikar for eksempel at dette perspektivet har mykje til felles med andre matematikdidaktiske retningar som problemløysing, realistisk matematikkundervising og modellering. I resten av oppgåva blir figur 2.1 brukt i større grad enn dei to definisjonane både fordi han er meir innhaldsrik, men òg fordi dei ulike kjenneteikna på inquiry-basert matematikkundervising kjem tydelegare fram i han.

Eit avsluttande, men likevel vesentleg, poeng i forlenging av denne karakteristikken er at inquiry-basert undervising kan praktiserast i ulike grader (Bruder & Prescott, 2013; Inoue & Buczynski, 2011). I likskap med fleire andre (sjå f.eks. Tafoya, Sunal & Knecht, 1980; Fradd, Lee, Sutman & Saxton, 2001) presenterer Hufferd-Ackles, Fuson og Sherin (2004, s. 88-90) ein firetrinnsstaksonomi som går frå «traditional teacher-directed classroom with brief answer response from students» til «[t]eacher as co-teacher and co-learner». På det høgste nivået i denne taksonomien følger læraren aktivt og engasjert med på kva som skjer og er klar til å assistera, men nå i ei meir perifer rolle som «coach» eller assistent.

2.1.2 Læringsteoretisk grunnlag

Som sagt, er undervising uløyselig knytta til korleis ein forstår læring (Säljö, 2013), og ei tilstrekkeleg skildring av inquiry-basert undervising må difor synleggjera eit læringsteoretisk grunnlag. «Undervising kan likevel aldri helt motiveres med henvisning til *et* teoretisk perspektiv på læring» (Säljö, 2013, s. 77, mi kursivering), og, som hjå Brodie (2010), blir inquiry-basert undervising difor i det følgjande knytta opp mot fleire teoriar om læring. Sjølv om teoriane i utgangspunktet har motstridande tilnærmingar til læring, går det fram at inquiry med fordel kan forankrast i pragmatisme, sosialkonstruktivisme og sosiokulturell læringsteori (Skovsmose & Säljö, 2008).

For den *pragmatiske* filosofen John Dewey (1059-1952) er læring ein adaptiv prosess der den fortløpande koplinga mellom sansar og idear blir driven av erfaring i ein kontrollert og reflektiv prosess som han kalla reflektiv inquiry, og det er difor vanleg å tilskriva han opphavet for undervisningsperspektivet ved same namn (Artigue & Blomhøj, 2013). Ved å arbeida meir som matematikkarar og med meir autentiske problem, meinte han at elevane ville utvikla inquiry «as a way of being» (Skovsmose & Säljö, 2008; Artigue & Blomhøj, 2013). Demokrati var for Dewey både mål og middel (Säljö, 2013), og i forlenging av det forfekta han då, som andre gjer i dag, for større innslag av spørsmål, undring, undersøking, utforskning eller eksperimentering i matematikkundervisinga (Säljö, 2013; Skovsmose & Säljö, 2008). I så måte var språk og kommunikasjon òg ein vesentleg del av teorien hans (Säljö, 2013).

Sosiokulturell læringsteori etter Lev Vygotsky (1896-1934) er ein annan teori som ofte blir brukt i samband med inquiry-basert undervising (sjå f.eks. Wells, 1999; Fuglestad, 2009). Her er premisen at det er eit dialektisk forhold mellom eleven og den (klasseroms-) kulturen han eller ho er del av og at det er gjennom samhandling i denne at han eller ho utviklar seg (Bråten & Turmann-Moe, 1996). Ved å appropriera (tileigna seg) allereie eksisterande kulturelle verk-tøy gjennom denne samhandlinga, blir eleven forma som sosiokulturelt vesen og får del i sin sosiokulturelle tradisjon (Säljö, 2013; Skovsmose & Säljö, 2008). Eksempel på slike verktøy er matematiske omgrep (f.eks. reelle tal) og ustyr (f.eks. dataprogrammet GeoGebra), og desse har ein viktig funksjon i å mediera verda for eleven som ikkje har tilgang på ho på andre måtar (Säljö, 2013). Det er dette det sosiokulturelle perspektivet ser på som læring, når denne prosessen medfører transformasjon i eleven sin mentale funksjon (Kazak, Wegerif & Fujita,

2015). Vygotsky (1978, s. 57, kursiv i original) seier det slik: «Every function in the child's cultural development appears twice: first, on the social level, and later, on the individual level; first, *between people (interpsychological)*, and then *inside the child (intrapsychological)*. (...) All the higher functions originate as actual relations between human individuals». Det sosiale eller kommunikative aspektet ved læring blir ytterlegare forsterka gjennom teorien om den nærmaste utviklingssona. Ideen er at eleven ut frå den kompetansen som han eller ho har, har to utviklingsnivå: det aktuelle som han eller ho kan nå på eigahand og det potensielle som eleven først og fremst kan nå under rettleiing eller i dialog med ein meir kapabel partner (Bråten & Turmann-Moe, 1996). Goos (2004) viser korleis ein lærar kan utnytta dette aktivt for å fremma effektiv inquiry-basert undervising ved at både læraren og elevane fungerer som kapable partnarar for kvarandre.

Med tanke på slik inquiry-basert undervising tidlegare blei definert, er det nyttig å utfylla sosiokulturell læringsteori på eitt punkt, i samsvar med Hufferd-Ackles et al. (2004). Ifølge det *sosialkonstruktivistiske* perspektivet gjer eleven meir enn å læra gjennom samhandling, han eller ho bidrar òg til konstruksjonen av ein kollektiv kunnskap eller ei intersubjektiv forståing i den konteksten han eller ho er del av (Björkqvist, 1993). Gjennom interaksjon oppstår det stadige og vekselvise kognitive konflikter og likevektssituasjonar som bidrar til ei intersubjektiv forståing av det matematiske temaet, analogt med individkonstruktivismen si forståing av kva som skjer inni eleven (Brodie, 2010; Kazak et al., 2015).

Koplinga mellom inquiry-basert undervising i denne studien og desse tre læringsteoriane blir enda tydelegare ved samanlikning med for eksempel figur 2.1. Medan pragmatismen tydelegast er å finna i kategoriane verdsette utfall, læringsmiljø og elevane, har kategoriane klasseromskultur, lærarane og elevane det største sosiokulturelle innslaget. Sosialkonstruktivismen kjem hovudsakleg til syne i klasseromskultur.

2.1.3 Tilnærming til matematisk kompetanse

Sidan inquiry-basert undervising ofte blir knytta til naturfag (sjå f.eks. Pozuelos, González & de León, 2010; Nam, Seung & Go, 2013) og lett kan medføra eit preg av generell didaktikk, er føremålet med denne delen å manifestera det *matematikkdidaktikken* i denne oppgåva. Dette svarar til «verdsett utfall» i figur 2.1 og den heilskepelege tilnærminga til matematisk kompetanse som Bergem et al. (2015) og Barron og Darling-Hammond (2008) etterlyser.

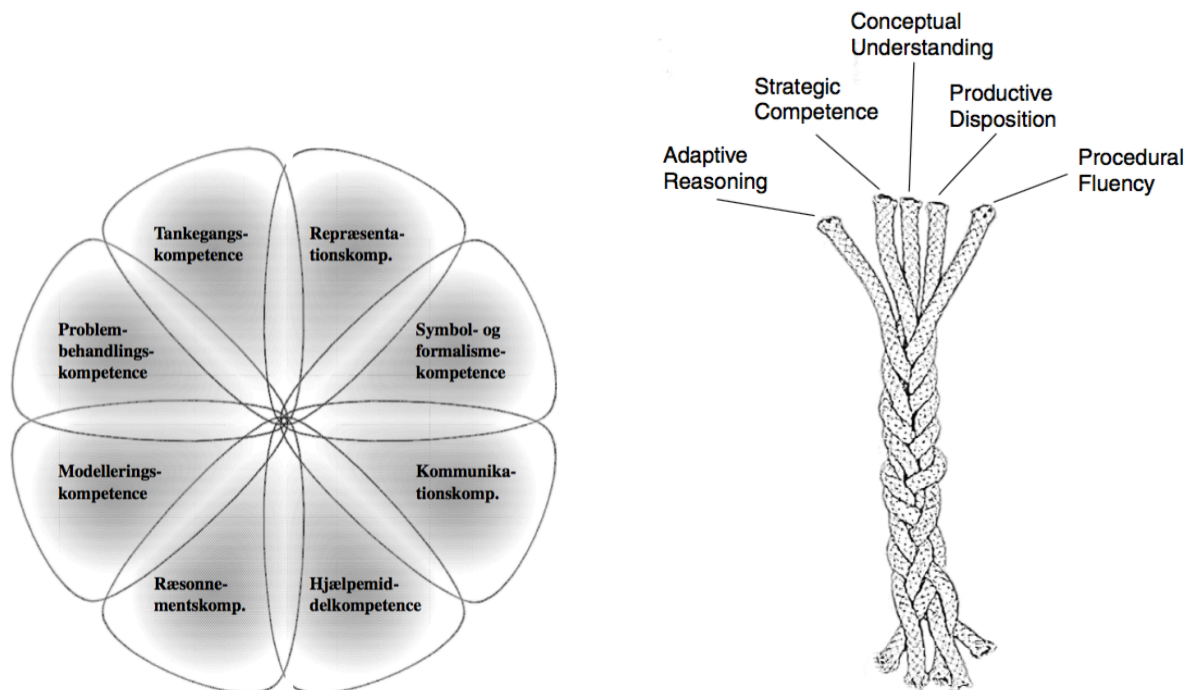
Niss og Jensen (2002, s. 43) definerer matematisk kompetanse som «indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer», noko læreplanen utdjupar slik:

Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Dette har òg språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnerare omkring idear. I det meste av matematisk aktivitet nyttar ein hjelpemiddel og teknologi. Både det å kunne bruke og vurdere ulike hjelpemiddel og det å kjenne til avgrensinga deira er viktige delar av faget (Kunnskapsdepartementet, 2013, s. 2).

Sitatet viser at allereie eksisterande læreplan oppfordrar til praksis i tråd med inquiry-basert undervising, noko Ludvigsen-utvalet føreslår å styrka (NOU 2015: 8, 2015). Likevel går det fram av den tematiske bakgrunnen i del 1.1 at dette er lite operasjonalisert i norske klasserom. Dette kan tyda på at ein mellom anna med fordel kan utdjupa den magre omtalen i læreplanen.

I norsk samanheng er det særleg åttefeltsmodellen utvikla for det danske Undervisningsministeriet (Niss & Jensen, 2002, sjå figur 2.2a) og «trådmodellen» utvikla for National Research

Council i USA (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, sjå figur 2.2b) som har utmerka seg. Trass i enkelte mindre forskjellar som ulik inndeling i delkompetansar og vektlegging av ulike tema, er dei to tilnærmingane likevel meir like enn ulike i forhold til ei «tradisjonell forståing» der prosedurale ferdigheiter, oppskrifter og reglar blir vektlagt.



(a) Illustrasjon av dei åtte matematiske kompetansane (Niss & Jensen, 2002, s. 45).

(b) «Trådmodellen» (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 117).

Figur 2.2: To tilnærmingar til matematisk kompetanse

På grunn av omfangsomsyn, er det berre trådmodellen som blir brukt vidare, mellom anna fordi denne a priori blei oppfatta som enklast å forstå for dei deltakane lærarane og fordi Matematikksenteret brukar denne i strategiplanen sin (Matematikksenteret, 2015).

Kilpatrick et al. (2001, s. 116) utdjuar dei fem trådane i figur 2.2b slik:

Mathematical proficiency, as we see it, has five strands: (a) *conceptual understanding*—comprehension of mathematical concepts, operations, and relations (b) *procedural fluency*—skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately (c) *strategic competence*—ability to formulate, represent, and solve mathematical problems (d) *adaptive reasoning*—capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification (e) *productive disposition*—habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one's own efficacy.

I tillegg bør det understrekast at «the five strands are interwoven and interdependent» (s. 116). På norsk kan omgrepa omsettast til høvesvis omgreps-, prosedyre-, strategi-, resonnerings- og appliserings- eller haldningskompetanse.

Med nok eit avrundande tilbakeblikk på figur 2.1 blir koplinga mellom trådmodellen og inquiry-basert undervising enda tydelegare. Sjølv om heile trådmodellen kan knyttast til verdsette utfall, kan han òg relaterast til dei andre kategoriane. Resonnering blir eksplisitt nemnt

under «lærarane», og det same blir strategi under «læringsmiljø». Haldningar eller applikasjon er kanskje mest knytta til kategoriane verdsett utfall og klasseromsklutur medan omgrepsforståing òg er ein viktig del av verdsette utfall i tillegg til læringsmiljø. Prosedyrekompetanse er minst synleg, men er likevel ein viktig del av kategorien elevane. Når dette er sagt, bør alle trådane likevel gå igjen i alle felta på ein slik måte at trådmodellen er ein viktig del av inquiry-basert undervising og visa versa.

2.2 Profesjonell utvikling

Av den tematiske bakgrunnen i del 1.1 går det fram at profesjonell utvikling (av ny praksis) er ei viktig side av inquiry-basert matematikkundervising, og føremålet her er å kasta lys over dette temaet. Etter at omgrepet er definert, blir oppfatningar, kunnskap og praksis trekt fram som tre sentrale aspekt av fenomenet, og denne dekomponeringa blir seinare brukt som kategoriar i analysen. Forskarar har lagt fram ei rekke rammeverk for å skildra hovudtrekka ved profesjonell utvikling og samanhengane mellom desse (Zaslavsky, Chapman & Leikin, 2003), og denne oppgåva drar nytte av to slike som blir presentert her. Det er Clarke og Hollingsworth (2002) sitt endringsmiljø og Gueudet og Trouche (2012) si dokumentasjonelle danning.

2.2.1 Definisjonar

Sjølv om profesjonell utvikling («professional development») er eitt heitt tema innanfor både utdanningsforskning, matematikdidaktikk og inquiry-basert matematikkundervising (sjå f.eks. respektivt Clarke & Hollingsworth, 2002; Smith, 2001; Goldsmith et al., 2014), omtaler dei fleste omgrepet utan å definera det. Fullan og Steigelbauer (1991, referert i Capps, Crawford & Constan, 2012, s. 295) skil seg difor ut ved å presisera profesjonell utvikling som «[the] sum total formal and informal learning experiences throughout one's career from preservice teacher education to retirement». Det same gjer Smith (2001, s. 40) som meiner at «professional development is seen as a contextual, collaborative, and ongoing venture, involving both teachers and professional developers and intended to promote teacher growth and development over time». Dei to definisjonane utfyller kvarandre ved å vektlegga ulike aspekt av utviklingsprosessen, og sjølv om begge er i tråd med forståinga som ligg til grunn for denne studien, er det fokuset i den siste som ligg nærmast profilen i denne oppgåva.

Profesjonell utvikling blir ofte knytta til fleire liknande, meir eller mindre synonyme omgrep. Clarke og Hollingsworth (2002) koplar for eksempel profesjonell utvikling til både profesjonell vekst («professional growth»), læraren si læring («teacher learning») og endring hjå læraren («teacher change»). Dei skriv mellom anna at

[i]f we are to facilitate the professional development of teachers, we must understand the process by which teachers grow professionally and the conditions that support and promote that growth, [and in] this paper, professional growth is represented as an inevitable and continuing process of learning (s. 947).

Endring hjå læraren blir derimot, som hjå Tirosh og Graeber (2003), knytta enda tettare opp mot konkrete tiltak eller aktivitetar. Andre legg stor vekt på samanhengen mellom profesjonell utvikling og læraren som forskar på eigen praksis (Postholm & Jacobsen, 2011; Goodchild, 2008). Desse sidene av omgrepet blir ikkje utdjupa meir i denne studien, men, som empirien viser, er dei likevel relevante nyansar av situasjonen.

Som dei to innleiande definisjonane synleggjer, viser litteraturen både til profesjonell utvikling som ein naturleg del av lærarlivet eller eit planlagt program anten som del av utdanninga

(Kværnes, 2013) eller i form av eit etterutdanningsprogram (Smith, 2001; Brand & Moore, 2011). Sjølv om denne studien naturlegvis er eit eksempel på den siste kategorien, er det naturleg å understreka at dei ulike typane kan både læra av kvarandre og analyserast ved hjelp av dei følgjande teoretiske analyseverktøya (sjå f.eks. Clarke & Hollingsworth, 2002; Maaß & Doorman, 2013).

Eit siste poeng i denne samanhengen er koplinga mellom denne forståinga av profesjonell utvikling og det læringsteoretiske grunnlaget. For eksempel viser Zaslavsky et al. (2003) korleis moderne utviklingsprogram bygger på både sosiokulturell læringsteori ved å bruka samhandling (sjå òg Gueudet & Trouche, 2012) og pragmatisme ved å vektlegga refleksjon over praksis. Dette går kapittel 3.1.1 nærmare inn på.

2.2.2 Oppfatningar, kunnskap og praksis

Fleire har argumentert for å forstå profesjonell utvikling som utvikling i oppfatningar («beliefs»), kunnskap og praksis (Gueudet & Trouche, 2012; Goldsmith et al., 2014). Sidan denne tredelinga har vist seg å vera nyttig for analysen i kapittel 5, blir desse omgrepa kort omtalt her.

Ifølge Philipp (2007) er *oppfatningar* slik ein person individuelt forstår verda på ein slik måte at han eller ho i ei eller anna grad er overtygd om at dette er rett samtidig som han eller ho forstår at andre kan vera ueinige. I tillegg til å knytta oppfatningar til profesjonell utvikling generelt, argumenterer mange for at både lærarar og elevane sine oppfatningar er avgjerande for utviklinga av inquiry-basert undervising i matematikk (sjå f.eks. Engeln, Euler & Maaß, 2013; Goldsmith et al., 2014). I kapittel 5 blir det lagt fram resultat for lærarane og elevane sine oppfatningar om kompetanse og inquiry-basert undervising i matematikk i tillegg til lærarane sine oppfatningar om profesjonell utvikling, seg sjølv og elevane.

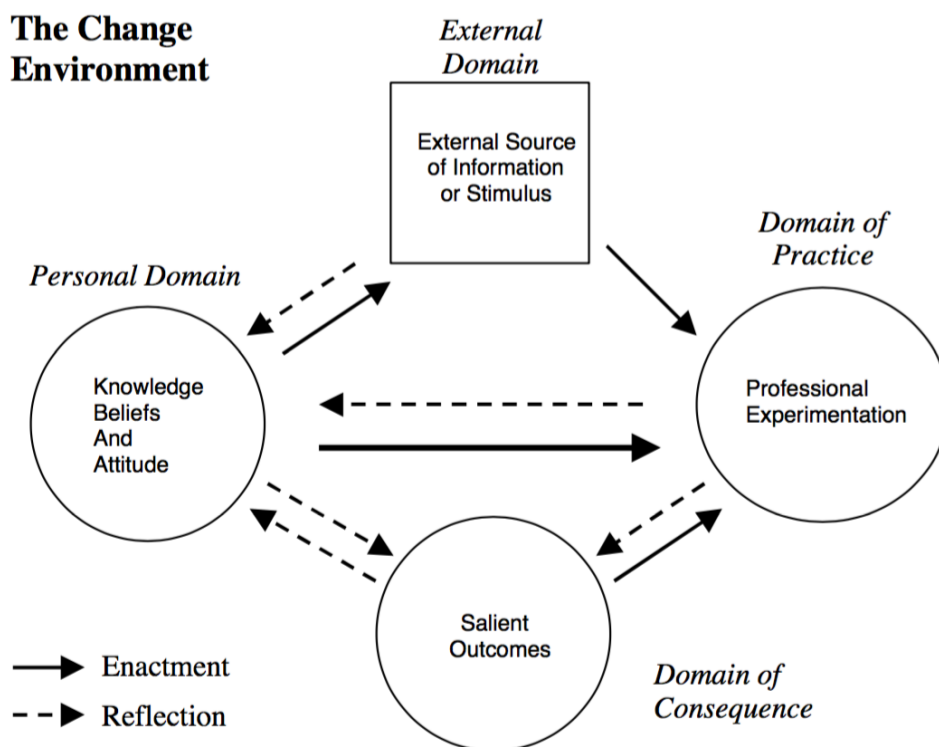
På grunn av det avgrensa omfanget i denne masteroppgåva, blir *kunnskap* forstått noko meir pragmatisk enn meir nyanserte rammeverk. Velkjente eksempel på slike er kunnskapskvartetten («the knowledge quartet») (Rowland & Turner, 2007) eller Ball, Thames og Phelps (2008) si inndeling av undervisningskunnskap i matematikk («mathematical knowledge for teaching»). Resultata som har blitt plassert i kategorien kunnskap har vore knytta til forståinga til lærarane og elevane av dei nye rollene deira. Dette omfattar med andre orde ord kva informasjon om inquiry-basert matematikkundervising dei har tatt til seg i motsetning til oppfatningane som er relatert til meiningane deira.

Tilsvarende blir *praksis* forstått som det lærarane og elevane faktisk gjer i lys av det teoretiske rammeverket. For lærarane sin del gjeld dette hovudsakleg i klasserommet, men òg delvis i planleggings- og evalueringsfasane (Goldsmith et al., 2014). Når det er sagt, presiserer Gueudet og Trouche (2012) at det kan vera vanskeleg å skilla mellom kunnskap og praksis, noko som naturlegvis gjeld alle tre aspekta. Dei resultata som er plassert i kategorien praksis er eksempel frå eksperimenteringa i klasserommet som viser korleis lærarane og elevane brukar inquiry, medan resultata i kategorien kunnskap viser korleis dei eksternt frå praksis forstår fenomenet.

2.2.3 Endringsmiljømodellen

«Endringsmiljømodellen» («The Change Environment») av Clarke og Hollingsworth (2002) er ei teoretisk tilnærming til korleis ulike faktorar i læraren si profesjonelle utvikling heng saman og påverkar kvarandre. Modellen er utvikla på grunnlag av tre empiriske, langsgåande klasseromsstudiar (longitudinell) i matematikk og naturfag i Australia og er sidan brukt av mange, for eksempel av Goldsmith et al. (2014) og PRIMAS (2011) i samband med inquiry-basert undervising. Clarke og Hollingsworth (2002) sin motivasjon for arbeidet var erfaringa av at ek-

sisterande, lineære modellar ikkje var i stand til å fanga kompleksiteten i profesjonell utvikling. Lenge hadde ein for eksempel tenkt seg at utvikling først skjer i kunnskap og oppfatningar, så i klasseromspraksis og endeleg i elevane sitt læringsutbytte, men så kunne ein òg finna eksempel på andre tilfelle: mellom anna kunnskapsheving til praksisendring til auka læringsutbytte hjå elevane til endring i oppfatningar hjå læraren. Resultatet blei ein modell som rommar ulike slike kjedar, og denne er illustrert i figur 2.3.



Figur 2.3: Ein samanhengande modell for profesjonell utvikling (Clarke & Hollingsworth, 2002, s. 951).

Slik sigur 2.3 viser, er endringsmiljøet delt inn i fire domene. Det *eksterne domenet* («external domain») representerer eksterne kjelder for informasjon og stimuli, for eksempel litteratur om endring og samtalar med kollegaer, medan det *personlege domenet* («personal domain») omfattar kunnskapen, oppfatningane og haldningane til læraren. *Praksisdomenet* («domain of practice») gjeld den profesjonelle eksperimenteringa til læraren i, for eksempel, overgangen til inquiry-basert undervising, og *konsekvensdomenet* («domain of consequence») er knytta til elevane sitt læringsutbytte og andre følgar av endringar, som endring i lærarkontroll, elevmotivasjon og kommunikasjonsmønster, slik læraren oppfattar dei. Det siste betyr at det som er framsteg for ein, kan vera tilbakesteg for ein annan.

Domene kan delast inn i to typar. Dei tre siste, illustrert ved sirkular, gjeld læraren si livsverd, medan det første, illustrert ved ein firkant, rommar faktorar utanfor denne. Clarke og Hollingsworth (2002) presiserer at i utgangspunktet er endringar i eitt domene isolert innanfor det domenet, men at dei to medierande prosessane refleksjon og iverksetting («enaction») fører til påverknad mellom domena, slik pilene viser. Den siste prosessen blir omtalt slik:

The term ‘enaction’ was chosen to distinguish the translation of a belief or a pedagogical model into action from simply ‘acting’, on the grounds that acting occurs in the domain of practice, and each action represents the enactment of something a teacher knows, believes or has experienced (Clarke & Hollingsworth, 2002, s. 951).

I den empiriske dokumentasjonen av modellen demonstrerer Clarke og Hollingsworth (2002) korleis ulike *endningssekvensar* («change sequences») og *vekstnettverk* («growth networks») kan oppstå for ulike lærarar. Det første refererer til korleis endring i fleire domene blir knytta saman gjennom refleksjon og iverksetting på kort sikt, medan det siste gjeld meir stabile samankoplingar som manifesterer seg i profesjonell vekst eller utvikling (sjå s. 958). Eksempel på dette blei nemnt i første avsnitt.

Seinare blir denne modellen brukt som eit analytisk verktøy for å setta ord på kva utvikling, utfordrinar og utslagsgivande faktorar som kom til å prega overgangen deira til inquiry-basert undervising. Etter kvart blir det òg samanlikna med funna gjort i same studie.

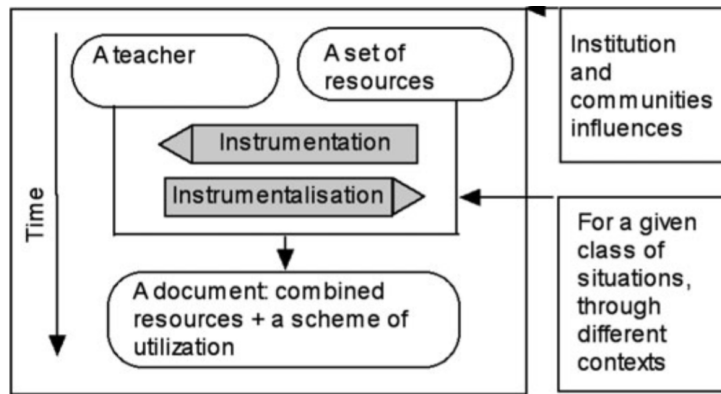
2.2.4 Dokumentasjonell og profesjonell danning

Der den føregåande modellen er eigna for å analysere overordna samanhengar mellom ulike aspekt av utviklingsprosessen, fokuserer denne modellen på kva rolle ulike ressursar har i denne prosessen. Gueudet og Trouche (2012) argumenterer for at profesjonell utvikling skjer når lærarar utviklar eit forhold til slike ressursar, for eksempel designmodellane i del 3.2, materiale eller refleksjonsmøte gjennom utviklingsprosjektet og inquiry-basert undervising som heilskap. Litt forenkla kan ein seia at modellen gir ein meningsfull måte å analysere og drøfta korleis lærarane tolkar og brukar desse.

Denne versjonen av modellen, nemleg dokumentasjonell tilnærming («documentational approach»), er ei vidareutvikling av den instrumentelle tilnærminga («instrumental approach») (Gueudet, Buteau, Mesa & Misfeldt, 2014). Gueudet og Trouche (2012) brukar rammeverket først og fremst i samband med to lærarar si utvikling knytta til digitale verktøy i matematikkundervising, men som denne studien vil visa, kan ideane overførast til inquiry-basert undervising òg.

Ifølge Gueudet og Trouche (2012) spelar altså ressursar ei avgjerande rolle for lærarar si profesjonelle utvikling, eller profesjonelle danning («professional genesis»). Meir presist kan ressursar både vera materielle artefaktar, som ei tavle, eller immatrielle som interaksjon mellom elevane. Gjennom prosessen *dokumentasjonell danning* («documentational genesis») utviklar læraren eit dokument som er (ein modifikasjon av) ressursen i kombinasjon med eit nyttegreringsskjema («scheme of utilisation»). Det siste er «an invariant organisation of the activity to achieve a type of task; however, it can evolve in the course of the documentation work» (Gueudet & Trouche, 2012, s. 26). I tavle-eksempelen vil det seia at læraren i løpet av danningprosessen modifiserer tavla, gjerne i kombinasjon med andre ressursar som projektor, i tillegg til å utvikla eit kognitivt skjema for korleis han kan bruka tavla i undervisinga. Dokument vil med andre ord bli kopla til nettverk av andre dokument, kalla dokumentasjonssystem.

Slik figur 2.4 illustrerer, forstår Gueudet og Trouche (2012) dokumentasjonell danning som ein tidkrevande prosess sett saman av to delprosessar. På den eine sida blir læraren påverka og forma av ressursen, noko forfattarane kallar instrumentasjon («instrumentation»), og på den andre sida blir ressursen påverka av læraren, ein delprosess kalla instrumentalisasjon («instrumentalisation»). Med tanke på utviklingsprosjektet som ressurs, er det rimeleg å gå ut frå at læraren som deltakar og aktør både blir påverka av prosjektet og påverkar korleis det blir utvikla. I samsvar med figuren går det òg fram at dei to delprosessane mellom lærarane og ressursane i prosjektet er avhengig av prosjektutforminga, og at heile den profesjonelle danninga deira blir påverka av samfunns- og skulekonteksten ho føregår i.



Figur 2.4: Skjematisk representasjon av dokumentasjonell danning (Gueudet & Trouche, 2012, s. 26).

2.3 Utviklingstrekk, utfordringer og utslagsgivende faktorer

Den siste komponenten av forskingsspørsmålet er erfaringar knytta til dei tre faktorane utviklingstrekk, utfordringer og utslagsgivende faktorer. I samband med dette blei det i innleiinga presisert at desse omgrepa òg blir brukt relativt pragmatisk. Nærmare bestemt svarar utviklingstrekk til framsteg ut frå kjenneteikna på inquiry-basert matematikkundervising, medan utslagsgivende faktorer er trekk ved situasjonen som bidrar til dette. Utfordringer er anten kjenneteikn ved undervisinga som det er krevande å utvikla, eller eigenskapar i konteksten som hindrar utviklinga generelt eller meir spesifikt.

I innleiinga blei det òg slått fast at det er omgrepa i dei to føregåande delane, inquiry-basert matematikkundervising og profesjonell utvikling, som fyller desse tre kategoriane med teoretisk innhald. Det betyr at det er definisjonane av inquiry-basert matematikkundervising og kjenneteikna i figur 2.1 i kombinasjon med definisjonane og rammeverka for profesjonell utvikling som avgjer kva som er vesentlege faktorer. I tillegg kjem tilsvarande funn frå eksisterande forskning og operasjonaliseringane av kjenneteikna på inquiry-basert matematikkundervising i neste kapittel.

I kapittel 5 blir det drøfta fortløpande korvidt resultatata for oppfatningar, kunnskap og praksis svarar til éin eller fleire av dei tre kategoriane i forskingsspørsmålet. Det same gjeld resultatata for utviklingsprosjektet meir overordna. I samband med drøftinga i kapittel 6 blir resultatata oppsummert og samanlikna med eksisterande forskning og analysert ved hjelp av dei to rammeverka for profesjonell utvikling.

Kapittel 3

Eksisterande forskning

Dette kapitlet supplerer det teoretiske rammeverket ved å presentera funn frå eksisterande forskning relevant for forskingsspørsmålet i tillegg til å integrera dei tre komponentane i det førre kapitlet ytterlegare. Medan den første delen fokuserer på utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar i liknande prosjekt, presenterer den andre forskingsbaserte modellar som konkretiserer kjenneteikna på inquiry-basert matematikkundervising. Saman utgjer dei utgangspunktet for dei fem kjenneteikna for utviklingsprosjektet i del 1.2.

3.1 Utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk

I den tematiske bakgrunnen i del 1.1 såg ein korleis *etablert* inquiry-basert matematikkundervising kan bidra positivt til læringa og motivasjonen til elevane. Det sentrale temaet her, derimot, er *utviklinga* av slik undervising, og kva eksisterande forskning seier om dette blir først gjort greie for meir generelt før funn frå eitt norsk og eitt europeisk utviklingsprosjekt blir presentert.

3.1.1 Oversikt over utslagsgivande faktorar og utfordringar

Frå tidlegare å fokusera på utbetring av tradisjonell undervising, har program for profesjonell utvikling dei siste tiåra gått over til å invitera lærarar til å aktivt ta del i si eiga utvikling gjennom refleksjon (Zaslavsky et al., 2003, s. 878): «The overarching assumption is that professional knowledge cannot be transferred; it is actively constructed individually and socially through personal experiences with the surrounding environment and interactions with others, involving reflection and adaptation». Ifølge Nam et al. (2013), som skriv om utvikling av inquiry-basert undervising, er det gjennom refleksjon at lærarar utviklar nye oppfatningar, ny kunnskap og eit nytt repertoar av undervisningsverktøy.

Sjølv om «mentoring», eller rettleiing, er mindre omtalt enn refleksjon, er det forskning som tyder på at dette òg kan vera ein utslagsgivande faktor for utvikling av ny praksis. Med utgangspunkt i at eksisterande forskning tilrår mentoring som ein måte å møte utfordringar i implementeringa av inquiry-basert undervising, designer og gjennomfører Nam et al. (2013) eit utviklingsprogram basert på dette og refleksjon. Dei definerer mentoring som «collaborative, in that interactions between a mentor and the beginning teacher were equal in status, not directive or mentor-centered» (s. 817), og refleksjon over situasjonar framfor «overlevering» av kunnskap, er difor essensielt. Resultatet av mentorprosjektet var at alle dei tre deltakande lærarane forbetra undervisinga si ved å auka innslaget av inquiry. Dei la til rette for fleire labøvingar og gruppediskusjonar, utvida synet sitt på naturfagleg kompetanse (analogt med trådmodellen), og klasseromskulturen blei vesentlig meir prega av interaksjon mellom lærarane og elevane.

Sjølv om studien er forankra i naturfagdidaktikk, er det likevel rimeleg å gå ut frå at tilsvarende ordningar kan fungera i matematikk. I samband med MAM-prosjektet (*Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning*) ved Matematikksenteret gir Valenta og Wæge (2017) i deira pilotstudie fleire døme på korleis rettleiing i samband med praktisk trening kan bidra til utvikling hjå praktiserande lærarar.

I tillegg til refleksjon og rettleiing er det ifølge Smith (2001) fleire andre faktorar det er viktig å ta omsyn til i samband med profesjonell utvikling: Utviklingsprogrammet må ta utgangspunkt i synet på lærarar som både agentar og objekt for den profesjonelle utviklinga og vedkjenninga at lærarar treng støtte gjennom heile prosessen. Hovudmålet med utviklinga bør vera å betra elevane si matematiske læring, men kortsiktige og langsiktige mål for lærarane basert på kva dei treng, bør òg vera klart uttrykte. Programmet bør anerkjenne og nyttegjera seg av lærarane sin eksisterande kompetanse, og det bør oppfordra til og leggja til rette for samarbeid mellom lærarar og ta omsyn til konteksten utviklinga skal skje i, det vil seia kven lærarane og elevane er, korleis dei har undervist tidlegare, alle dei andre oppgåvene til læraren, læringsmiljøet, leiinga ved skulen og skulekontekst. Utfallet blir best om prosjektet er vedvarande og samanhengande, fører lærarane utav likevekt og inn i ubehag og reflekterer den forma for undervisning som er målet med prosjektet. Innhaldet er viktigare enn strukturen på programmet, og arbeidet bør halda fram etter at programmet er avslutta, resten av karrieren.

Sjølv om eit utviklingsprosjekt tilfredsstillar desse kriteria i høg grad, oppsummerer Barron og Darling-Hammond (2008) eksisterande forskning med at dei store forskjellane mellom tradisjonell og inquiry-basert undervisning rimelegvis medfører store utfordringar for både elevar og (erfarne) lærarar i overgangen til dei nye rollene. Med utgangspunkt i at nyutdanna lærarar ofte lar vere å bruka opplæringa si i inquiry-basert undervisning, gjennomfører Inoue og Buczynski (2011) ein studie av kva utfordringar som kan ligga til grunn for dette. Dei nyutdanna lærarane i studien har vanskar fordelt i tre grupper: (a) å disponera tida og velga aktivitetar, (b) å handtera uventa eller manglande responnar og knytta innspel til forkunnskapar, samt å verdsetta og gi tilstrekkeleg merksemd til bidrag frå elevane og (c) endeleg, å stilla produktive spørsmål, introdusera materiale på rett tid, bygga bruar og ikkje vera fasisit. I si ressursbok for lærarar som vil byrja med samtalebaseret undervisning i matematikk, presenterer Chapin, O'Connor og Anderson (2013) ei lang liste med utfordringar som lærarar må rekna med å støta på. Eksempel på dette er at ingen eller berre nokon få elevar deltar, at elevane ikkje lytter til kvarandre og at elevane er på så ulike nivå at dei ikkje relaterer til eller forstår kvarandre. I underdel 3.2.3 den overordna tilnærminga til Chapin et al. (2013) på desse problema presentert.

3.1.2 TBM-LBM-prosjektet

I perioden 2007-2010 inngjekk didaktikarar ved Universitetet i Agder i prosjektet *Bedre matematikkundervisning* eit samarbeid med lærarar i prosjektet *Lær bedre matematikk* om utvikling og forskning for å utvikla betre matematikkundervisning (Fuglestad, 2010a) (her slått saman til TBM-LBM-prosjektet). Dette var på mange måtar ei forlenging og utviding av tidlegare prosjekt (KUL-prosjekta) (Carlsen & Fuglestad, 2010) som Skovsmose og Säljö (2007, 2008) omtaler som både omfattande i ein nordisk perspektiv og vellukka mellom anna med aksept av inquiry hjå lærarar og effektivitet i den profesjonelle utviklinga.

Det teoretiske grunnlaget for TBM-LBM-prosjektet har mykje til felles med grunnlaget for denne oppgåva og bygger på dei to grunnleggande ideane inquiry og læringsfellesskap (Fuglestad, 2010b). I tillegg til skildringa i underdel 2.1.1, kan ein leggja til at prosjektet opererte med inquiry på tre ulike nivå: inquiry i elevane si læring av matematikk, i lærarane si utforming og implementering av undervisningsaktivitetar og i didaktikarane si forskning på utvik-

ling av matematikkundervisning (Jaworski, 2006). Læringsfellesskap kan dannast på og mellom desse nivåa og blir utvikla som følge av etablering av felles verksemd, gjensidig engasjement og felles repertoar gjennom arbeid (Fuglestad, 2010b) prega av samhandling, diskusjon og refleksjon rundt spørsmål og problem (Carlsen & Fuglestad, 2010) i tillegg til kritisk tilpassing mellom partane (Goodchild et al., 2013).

I samsvar med det teoretiske rammeverket blei prosjektet utforma slik at lærarane og forskarane skulle vera likeverdige partnarar som bidrog til kvarandre si læring og utvikling (Carlsen & Fuglestad, 2010). Difor blei det arrangert verkstadar på universitetet tre gonger kvart semester med innlegg frå forskarane og vidareføring i gruppearbeid rundt faglege tema som geometri, bevis, resonnering, opne oppgåver og kommunikasjon med fokus operasjonalisering til inquiry-aktivitetar (Carlsen & Fuglestad, 2010). Sjølv om forskarane fleire gonger deltok på lærarane sine lokale planleggingsmøte, inntok dei ikkje roller som mentorar eller rettleiarar, men heller som samtalepartnarar og deltakande observatørar (Goodchild et al., 2013).

Det er rapportert mange funn frå prosjektet. Carlsen og Fuglestad (2010) dokumenterer at prosjektet var vellukka ved å etablere læringsfellesskap prega av ein inquiry-kultur i alle nivå av prosjektet. Dette kom til syne gjennom engasjement om felles verksemd og kritisk tilpassing på verkstadane og sitat frå deltakarane. Dette meiner dei i hovudsak skuldast «nøkkelfaktorar» som «har vært med på å etablere og opprettholde et læringsfellesskap preget av inquiry, både som redskap og som væremåte» (s. 56). Dette er mellom anna gjensidig eigarskap til prosjektet, oppleving av inquiry som relevant, praktisk bruk av inquiry, kritisk refleksjon over eigen praksis ut frå eit inquiry-standpunkt, etablering av samlæring, medvite arbeid med haldningar og samsvar mellom inquiry og offentlege styringsdokument. I forlenging av dette understreker Robutti et al. (2016) korleis lærarar og forskarar utfylte kvarandre ved å bidra med ulike former for kunnskap og erfaringar. Goodchild et al. (2013) stadfester enkelte aspekt ved denne positive utviklinga, men framhever òg fleire utfordringar i prosjektet. I deira case går det tydeleg fram at inquiry-perspektivet medfører usikkerheit og risiko, særleg for lærarar. I tillegg dokumenterer dei spenning både *i* læraren sin praksis og *mellom* læraren sin praksis og forskarane sin praksis mellom anna fordi læraren syntest at inquiry-basert undervisning stiller for store krav til tid.

3.1.3 PRIMAS-prosjektet

PRIMAS (2010-2013) er det andre prosjektet nemnt i samband med definisjonen av inquiry-basert undervisning. Dette er eit samarbeid mellom tolv europeiske land, inkludert Norge, med føremålet «to contribute to a widespread implementation of IBL [Inquiry-Based Learning] in day-to-day mathematics and science teaching» (Maaß & Doorman, 2013, s. 895).

Likskapane og ulikskapane mellom dette prosjektet og TBM-LBM-prosjektet si forståing av inquiry-basert undervisning (sjå underdel 2.1.1) medfører nokon fellestrekk og nokon forskjellar i den praktiske gjennomføringa. PRIMAS-prosjektet òg legg for eksempel vekt på ein vekslende kombinasjon av seminar og reell praksis over lang tid (to år) med diskusjon, refleksjon og utveksling av erfaringar, fordelar og ulemper ved relevansen av inquiry-basert undervisning som viktige verkemiddel (Maaß & Doorman, 2013). På den andre sida brukar PRIMAS-prosjektet, i likskap med denne studien, eksplisitt forskingsbaserte ressursar som rettningslinjer for lærarane, utdelingsark til undervisinga, videoeksempel på undervisinga og ferdige utkast til undervisningsplanar (Maaß & Doorman, 2013). Det er òg viktig å påpeika at prosjektet blei tilpassa konteksten i kvart deltakarland.

Òg med tanke på funn, kan ein spora enkelte likskapar mellom prosjekta. I ei kvantitativ evaluering av prosjektet slår Engeln (2013) fast at matematikkundervisinga blei markant betra gjennom eit vesentleg auke innslag av inquiry-basert undervisning og positive haldningar til in-

quiry hjå lærarane mellom anna med tanke på læring og motivasjon. Ho oppsummerer at «we were able to prove that our efforts not only reached the teachers, even students were aware of these changes, which shows the high impact of the courses. This is a great success» (s. 39). I den tilsvarande kvalitative evalueringa vidareførar Maaß (2013) noko av dette, men påpeikar samtidig at casestudiane viser at haldningar og praksis med djupe røter, biografisk bakgrunn og systemfaktorar kan hindra utfoldinga av inquiry-basert undervising. Utfordringar som blir løfta fram er lærar si eksisterande opplæring, dårleg tilgang på undervisningsmateriale og, i likskap med TBM-LBM-prosjektet, det store kravet til tid før, under og etter undervisinga. Dokumentasjonen viser at det er krevande å støtta lærarar og elevar i tilpassinga deira til dei nye rollene. Dette forsterkar Engeln et al. (2013) ved å presentera tre typar utfordringar lærarar kan stå overfor i overgangen til inquiry-basert undervising. Eksempel på ressursutfordringar er mangel på undervisningsmateriale og læreverk utan inquiry-preg, medan klasseleiingsutfordringar gjeld når læraren fryktar å mista kontroll og ikkje kjenner seg trygg på dei nye arbeidsmåtene. Den siste kategorien, systemutfordringar («system restrictions»), blir eksemplifisert med mangel på samsvar med læreplan og eksamensordning, for store klassar og hektisk timeplan, noko Dorier og García (2013) underbygger. Når det er sagt, peikar Maaß (2013) òg på at utfordringane kan overkommast gjennom utforminga av PRIMAS-prosjektet slik det blei skildra i førre avsnitt, viss lærarane er villige til å engasjera seg i og akseptera inquiry-basert undervising.

3.2 Operasjonalisering av inquiry-basert undervising i matematikk

I samband med definisjonane og figur 2.1 i underdel 2.1.1 blei det framheva tre sentrale kjenneteikn på inquiry-basert matematikkundervising knytta til strukturen på undervisinga, oppgåveutforminga og kommunikasjonen. Her blir desse tre trådane tatt opp i tre respektive underdelar om eit utval forskingsbaserte ressursar som blei brukt aktivt i utviklingsprosjektet i samsvar med dei fem kjenneteikna. Når dette er sagt, er det viktig å påpeika at inquiry-basert matematikkundervising som definert av Wells (1999) og Maaß og Doorman (2013), kan operasjonaliserast på mange andre måtar enn dette.

3.2.1 Fem aktivitetar for gjennomføring av matematikksamalar

Føremålet med dette rammeverket utvikla av Stein, Engle, Smith og Hughes (2008) er å letta og effektivisera gruppe- og samtalebaseret matematikkundervising for noviser, noko som har vist seg å vera krevande (Wæge, 2015). I så kjem dei følgjande karakteristikkar av Barron og Darling-Hammond (2008, s. 8) i møte: «Successful inquiry-based approaches require careful planning and the development of strategies for collaboration, classroom interaction, and assessment». Sidan kvar av dei fem aktivitetane i modellen allereie er godt dokumentert kvar for seg, er forfattarane sitt bidrag å sameina dei i ein integrert fellesskap. Modellen er populær både internasjonalt (National Council of Teachers of Mathematics, 2014) og i Norge (Drageset, 2016; Nosrati & Wæge, 2015) og liknar andre tilsvarande tilnærmingar (sjå f.eks. Kaendler, Wiedmann, Rummel & Spada, 2015).

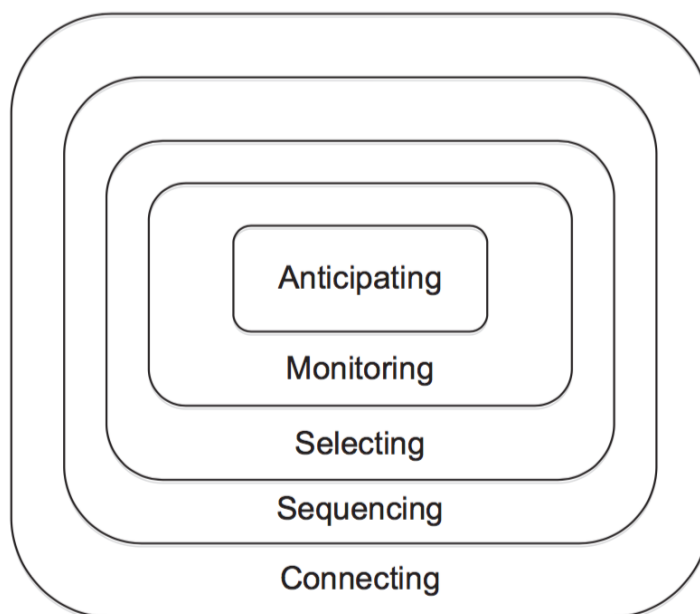
Dei fem aktivitetane er illustrert i figur 3.1 slik at det kjem fram at kvar aktivitet bygger på dei aktivitetane som ligg innanfor. Meir utfyllande skriv Stein et al. (2008, s. 321, mi kursivering) at

the five practices are: (1) *anticipating* likely student responses to cognitively demanding mathematical tasks, (2) *monitoring* students' responses to the tasks during

the explore phase, (3) *selecting* particular students to present their mathematical responses during the discuss-and-summarize phase, (4) purposefully *sequencing* the student responses that will be displayed, and (5) helping the class make mathematical *connections* between different students' responses and between students' responses and the key ideas.

På norsk kan disse omsettest til høvesvis å forventa, observera, plukka ut, ordna og knytta saman. Forfattarane føreslår vidare å praktisera alle fasane ved hjelp av ein tabell med følgande kolonner: (a) *strategiar elevane kan komma til å bruka*, (b) *elevane og kva representasjonar dei har brukt*, og (c) *koplingar mellom representasjonar og strategiar*.

I lys av det læringsteoretiske grunnlaget for inquiry-basert matematikkundervisning, bygger denne modellen særleg opp under sosiokulturell og sosialkonstruktivistisk læring. Ved å la elevane først jobba i grupper for så å diskutera funna i plenum blir elevane, i tillegg tillæraren, aktivert som kapable partnerar for kvarandre, og i desse samtalanene får aktørane sjanse til å forhandla fram ei felles forståing.



Figur 3.1: Dei fem aktivitetane for gjennomføring av matematikksamtaler (Stein et al., 2008, s. 322).

krite

3.2.2 Utforming av rike oppgåver i matematikk

På same måte som at det finnest ulike former for (eller grader av) inquiry-basert undervisning, finnest det òg ulike typar oppgåver slik undervisning kan ta utgangspunkt i. Undersøkingsskap er eit velkjent eksempel på ein open situasjon der målet er at elevane skal leita etter mønster utan at det nødvendigvis er eit konkret problem som skal løysast (Alrø & Skovsmose, 2004) slik ein gjerne gjer i problembasert læring (Olafsen & Maugesten, 2015). Andre har utdjupa dette med diverse taksonomiar (sjå f.eks. Valenta, 2016; National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

Det er eit viktig poeng at desse skilja ikkje er særleg vesentlege i denne studien. Her tar ein heller utgangspunkt i Hedrén, Taflin og Hagland (2005) si forståing av *rike oppgåver* (for

tilsvarende definisjoner, sjå Gilderdale & Kiddle, 2014, september). I samband med RIMA-prosjektet («Rika problem i matematikkundervisningen») dokumenterer Hedrén et al. at desse er gjennomførbare i praksis og presiserer at dei oppfyller sju kriterium: Problemet skal (a) introdusera til viktige matematiske idear eller visse løysingsstrategiar; (b) vera lett å forstå slik at alle skal ha sjanse til å arbeida med det; (c) opplevast som eit oppdrag, krevja hardt arbeid og kunna ta tid; (d) kunna løysast på fleire ulike måtar, med ulike strategiar og representasjonar; (e) kunna initiera ein matematisk diskusjon ut frå elevane sine ulike løysingar, ein diskusjon som viser ulike strategiar, representasjonar og mateamtiske idear; (f) kunna fungera som brubyggar mellom ulike matematiske område; og (g) kunna føra til at elevar og lærarar formulerer nye interessante problem. Dei matematiske sidene av desse kriteria er knytta til trådmodellen i underdel 2.1.3, og i underdel 4.2.4 blir dette konkret knytta til læreplannen i teoretisk matematikk.

Denne definisjonen samsvarar godt med det Stein et al. (2008) kallar «cognitive challenging tasks» og er dessutan etablert i Norge (Botten, Daland & Dalvang, 2008; Nosrati & Wæge, 2015). Utforming av rike, meir autentiske problem etter desse kriteriene er hovudsakleg forankra i den pragmatismen som læringsteori, men av natur legg dei òg betre til rette for læring i tråd med dei to andre perspektiva.

På same måte som det er krevande å gjennomføra inquiry-basert matematikkundervisning utelukkande basert på definisjonar, er det utfordrande å utforma rike oppgåver. I samband med dette føreslår Prestage og Perks (2001) fleire teknikkar med utgangspunkt i lærebokoppgåver for britisk «secondary school». Ein kan for eksempel (a) laga tankekart som inkluderer alt frå læringsmål til kreative idear, (b) fjerna, leggja til eller endra nokon av avgrensingane i oppgåva, (c) gi svaret i plassen for spørsmålet, og (d) byta ut ressursar (konstruksjonsverktøy, data o.l.) eller format (tekst, figur, gjenstandar o.l.). I kombinasjon utgjer rike oppgåver og desse strategiane eit viktig verktøy for praktikantar av inquiry-basert undervisning.

3.2.3 Kommunikasjon og samtaletrekk

I konseptualiseringa av inquiry-basert matematikkundervisning går det klart fram at kommunikasjonsmønster er ei av dei større skilnadane mellom tradisjonell og inquiry-basert undervisning. Ei populær og skandinavisk tilnærming til dette er IC-modellen («inquiry co-operation») av Alrø og Skovsmose (2004, 2002) som knytter inquiry-basert undervisning til åtte dialogiske handlingar («dialogic acts»). På grunn av den sentrale rolla til dei to lærarane i denne studien, var det viktig å bruka intuitive og praksisnære rammeverk, og difor blei tilnærminga til Chapin et al. (2013) valt over det skandinaviske alternativet. Sjølv om denne er meir lærarretta, risikerer ein sjølv sagt å tapa nokon teoretiske nyansar.

Chapin et al. (2013) hevdar at dei viktigaste oppgåvene, eller aktivitetane, til læraren i samband med matematikksamtal er å (a) hjelpa elevane til å uttrykka og dela sine eigne tankar, (b) ta stilling til medelevane si tenking, (c) utdjupa si eiga resonnering og (d) engasjera seg i medelevane sin argumentasjon ved å stilla spørsmål til eller bygga vidare på han. I kombinasjon med rollene som blir skissert i figur 2.1, hovudsakleg fordelt på kategoriane «lærarane», «elevane» og «klasseromskulturen», utgjer dette idealet for kommunikasjon i samband med inquiry i dette prosjektet. Grunnlaget for dette kan førast tilbake til samtlege av dei tre læringsteoriane. Denna auka vekta på kommunikasjon og sosialisering er størst verdsett i sosiokulturell læringsteori, men sidan spørsmåla og samtalane helst skal vera undersøkjande og forhandlande, ser ein òg tydelege spør av pragmatisme og sosialkonstruktivism.

For å oppnå målet med desse fire oppgåvene kan læraren ifølge Chapin et al. (2013) over tid bruka eit sett med *samtalegrep* («talk moves») som pregar undervisninga til lærarar som er dyktige i samtalebasert matematikkundervisning. Sjølv om desse blei lansert i ein amerikansk

kontekst for det som svarer til det norske gruntrinnet, kan dei brukast på alle klasstrinn òg i Norge (Wæge, 2015). Fordelt på dei fire aktivitetane, kan ein stikkordvis oppsummera dei slik:

- (a) Vent; «Snakk med sidemannen.»; «Skriv ned det du tenker»; «Vil du dela det med resten av klassen?»; «Kan du utdjupa det?»; «Så du seier at ...?»
- (b) «Kven kan repetera/forklara det med eigne ord?»; «Fortell kva sidemannen din tenkte.»
- (c) «Korfor tenker du det?»; «Kva bevis har du?»; «Korleis kom du fram til det?»; «Eg er ikkje sikker på om eg forstår, kan du forklara det steg for steg?»
- (d) «Kva tenker du om det?»; «Er du einig eller ueinig? Korfor?»; «Kven kan bygga vidare på det?»

I forlenging av dette kjenneteiknet og i samsvar med kategorien «klasseromskulturen» i figur 2.1 kunne ein lagt til eit fjerde kjenneteikn om klasseromskultur. Dette ville i enda større grad sett ord på dei andre normene og verdiane som skil inquiry-basert og tradisjonell matematikkundervising (Yackel & Cobb, 1996; Rangnes, 2012). Sidan det var planen frå starten av å bruka mellom anna Yackel og Cobb (1996) sitt omgrep sosiomatematiske normer, har dette prega utviklingsmåla i tillegg B.1. Når det er sagt, overlapper dette eventuelle fjerde kjenneteiknet langt på veg med kjenneteiknet for kommunikasjon, særleg på kort sikt og omgrepet sosiomatematiske normer blei i lita grad brukt eksplisitt i gjennomføringa. På grunn av dette, avgrensingane i omfanget av denne oppgåva og mesonivået i forskingsspørsmålet er dette difor utelatt.

Kapittel 4

Metode

Etter at teorien og forskinga som ligg til grunn for både utviklingsprosjektet og studien, er presentert, er det naturleg å drøfta dei metodiske sidene av arbeidet. Over fem delar blir det gjort greie for forskingsstrategi og metodologiske perspektiv, gjennomføringa av studien, forskingsdesign og metodar for datainnsamling, metodar for datanalyse og etiske vurderingar. Analysen av metoden i lys av kvalitetsindikatorar er lagt til del 7.1.

4.1 Forskingsstrategi og metodologiske perspektiv

I samsvar med svært mykje matematikdidaktisk forskning, brukar denne studien ein kvalitativ strategi for å svara på forskingsspørsmålet. I det følgande blir det gjort kort greie for kva konsekvensar dette får i tillegg til fleire overordna metodiske presiseringar.

I forhold til ein alternativ kvantitativ strategi medfører dette eit sterkare fokus på å forstå korleis lærarane opplever utviklinga av inquiry-basert undervising framfor å forklara årsakssamanhengar mellom ulike faktorar i denne situasjonen (Tjora, 2010; Bryman, 2012). I samsvar med dette var gjennomføringa prega av nærleik og open interaksjon mellom lærarane og meg for å letta leitinga etter lærarane sine erfaringar og deira meiningsskaping. Det er altså informantperspektivet som er i fokus, og målet med gjennomføringa var difor å samla inn rike, djupe data om dette i ein naturleg kontekst (Bryman, 2012). Ifølge Tjora (2010) gir dette ei større grad av forskarsubjektivitet og ei anna (ikkje like kraftig) form for generalisering, noko eit seinare kapittel drøftar nærmare. Når dette er sagt, ville sjølv sagt ei kvantitativ tilnærming til forskingsspørsmålet òg hatt fleire likskapstrekk med denne.

Strategivalet får òg følger for teorien si rolle i studien, men sjølv om kvalitative studiar ofte blir assosiert med eit deduktivt forhold til teori (Bryman, 2012), er dette forholdet det Tjora (2010) kallar abduktivt, i denne studien. Som del 4.4 om metodar for dataanalyse utdjupar, tar ein abduktiv strategi, i likskap med ein induktiv strategi, utgangspunkt i empirien, men i plassen for å utelukkande å sjå teori som eit produkt av dette, blir studien aktivt prega av teori både i forkant og i løpet av prosessen. Når det gjeld teori som utfallet av studien, kan denne klassifiserast ein plass mellom det Bryman (2012) kallar (*naiv*) empirisme og «*middle range theories*» knytta til eit avgrensa felt eller tema, i dette tilfelle inquiry-basert matematikkundervising. Denne mellomposisjonen skuldast at studien korkje utelukkande presenterer dei empiriske funna eller utviklar eit nytt teoretisk rammeverk. I del 4.4 om analysemetodar og del 7.3 om implikasjonar blir dette utdjupa.

Når det for det siste gjeld det epistemologiske grunnlaget, det vil seia tilnærming til kva som er god kunnskap (Bryman, 2012), ser studien forskingsspørsmålet i lys av ein *interpretivistisk* posisjon. Meir presist bygger studien på fenomenologi og symbolsk interaksjonisme

(Bryman, 2012; Tjora, 2010), i tillegg til vektlegginga av forståing framfor forklaring. Lærarane si meiningsskaping i samband med inquiry-basert undervising og forskingsspørsmålet blir altså tilnærma gjennom det fenomenologiske perspektivet som «views human behavior (...) as a product of how people interpret the world. (...) In order to grasp the meanings of a person's behavior, the phenomenologist attempts to see things from that person's point of view» (Bogdan & Taylor, 1975, i Bryman, 2012, s. 30). I tillegg er symbolsk interaksjonisme relevant for det sosiale aspektet ved prosjektet gjennom perspektivet si vektlegging av korleis lærarane sin interaksjon påverkar deira kommande interaksjon, sosialisering og utvikling av normer, kultur og samfunn (Tjora, 2010; Bryman, 2012). Med tanke på ontologisk posisjon, det vil seia tilnærming til sosiale einingar sin natur (Bryman, 2012), har studien i forlenginga det epistemologiske perspektivet og det teoretiske rammeverket eit klart *konstruksjonistisk* utgangspunkt i synet om at sosiale einingar blir skapa kontinuerleg av aktørane (Bryman, 2012). Når det er sagt, kan ein òg spora snev av objektivisme, som at element av inquiry-basert undervising og matematisk kompetanse blir tatt for gitt.

Sidan desse metodiske presiseringane berre er meint som eit grunnlag for resten av metodekapittelet, blir dei ikkje vesentleg utdjupa eller kommentert seinare.

4.2 Gjennomføring av utviklingsprosjektet

Det relativt omfattande utviklingsprosjektet som blei gjennomført i overgangen mellom januar og februar i 2017, blir skildra meir nyansert i løpet av dei følgjande fire underdelane. Først blir det gjort greie for den eksisterande situasjonen, og deretter blir dei fem kjenneteikna på prosjektet utdjupa meir detaljert. Til slutt presenterer dei to siste delane undervisinga og dei matematiske oppgåvene i prosjektet.

4.2.1 Deltakarane og eksisterande undervising

Hovudinformatantane i denne studien var dei to lærarane, heretter kalla for Grete og Magne i samsvar med kjønna deira, på ein vidaregåande skule i Oslo, heretter kalla Ølensvåg vidaregåande skule (vgs.). Sidan eg kjente Magne frå før, blei han kontakta først, og då han deretter fortalte kollegaane sine om prosjektet, meldte Grete si interesse. Begge lærarane fekk informasjonsskrivet i tillegg A.1 og signerte på det tilhøyrande godkjenningbrevet. For at utviklingsprosjektet skulle lukkast, var det viktig at lærarane visste kva dei takka ja til, og det var difor informasjonsskrivet blei meir omfattande enn vanleg. Med unntak av at det var eit mål å velga lærarar i vidaregåande opplæring og at eg kjente Magne frå før, var det nokså tilfeldig at det blei nett desse to. Sidan begge to framstod som typiske lærarar, var dette likevel ikkje noko problem for tilnærminga til forskingsspørsmålet. Medan Magne var relativt nyutdanna med fem års erfaring, hadde Grete jobba som lærar i omtrent ti år. Begge to hadde mastergrad i realfag og difor matematikk som andrefag. Sjølv om dette først blir omtalt grundig i resultatkapittelet, er det verdt å merka allereie her at både Grete og Magne var positive til utviklingsprosjektet og hadde god kjemi med elevane sine.

Sidan lærarane underviste kvar sin klasse i faget Matematikk 1T (teoretisk) utan overlapp i timeplanen, var det desse klassane som blei plukka ut til å delta i studien. Alle elevane fekk utdelt inforskrivet i tillegg A.2 som er vesentleg kortare enn det lærarane fekk. I godkjenningbrevet måtte elevane dessutan kryssa av for kva former for datainnsamling dei godtok. Alle elevane deltok i undervisinga, men i Grete sin klasse var det nokon som ikkje blei filma fordi dei ikkje ønska det. Vidare er det viktig å påpeika at på grunn av høge inntakskarakterar på Ølensvåg vgs., hadde eit overveldande fleirtal av elevane høg kompetanse i matematikk, noko

som kjem i tillegg til at mange svaktpresterande elevar velger matematikkfaget 1P (praktisk) framfor 1T.

Den eksisterande matematikkundervisinga i 1T på Ølensvåg vgs. var svært prega av tre komponentar. For det første var formidlinga hovudsakleg organisert som omvendt undervising ved hjelp av den nettbaserte tenesta til Campus Inkrement (sjå <https://campus.inkrement.no>). Meininga var at elevane skulle sjå (tradisjonelle) videoførelingar heime og gi tilbakemeldingar på desse, noko lærarane fekk statistikk på, men i praksis brukte mange elevar tid på dette i timane. Medan Grete brukte statistikkverktøyet meir aktivt, sa Magne at han var mindre konsekvent dette året. I prinsippet kunne den «ledige» undervisingstida brukast til ulike arbeidsmåtar, men hovudtendensen var at elevane løyste oppgåver i nettportalen Kikora (sjå <http://www.kikora.no>), som er den andre komponenten. Sjølv om oppgåvene der har same karakter som tradisjonelle lærebokoppgåver, er element som interaktivitet og kontinuerlige tilbakemeldingar lagt til. Den siste hovudkomponenten av undervisinga var såkalla «oppgåverekningar» anna kvar veke, som på mange måtar tilsvarte tradisjonelle, skriftlege prøvar, men der elevane sjølv hadde ansvar for å retta og gi tilbakemeldingar på eigne svar. Føremålet med denne eigenvurderinga var å aktivera elevane i si eiga læring og gi dei oversikt over eiga utvikling.

Sjølv om matematikkundervisinga på Ølensvåg vgs. inneheldt fleire moderne, digitale element, samsvarte ho likevel godt med definisjonen på tradisjonell undervising frå underdel 2.1.1 særleg i lys av dei tre kjenneteikna struktur, oppgåveutforming og kommunikasjonsmønster. Situasjonen var altså ideell for å svara på forskingsspørsmålet sidan han både inkluderte sentrale element frå tradisjonell undervising og nye, digitale.

4.2.2 Kjenneteikn på utviklingsprosjektet

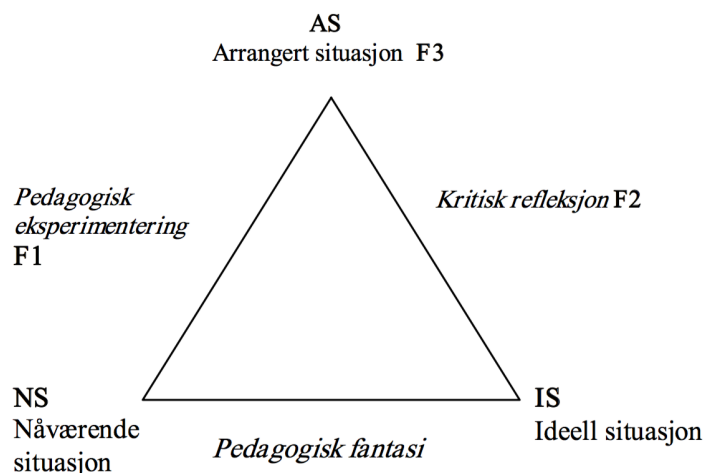
Utviklingsprosjektet i denne studien blei utforma med utgangspunkt i situasjonsskildringa over og den eksisterande forskinga på profesjonell utvikling presentert i underdel 3.1.1. I samsvar med tilrådinga frå Smith (2001) blei for eksempel utviklingsmåla i tillegg B.1 som bygger på operasjonaliseringa av inquiry-basert undervising i del 3.2. Samtidig var utviklingsprosjektet òg eit resultat av eit ønske om å skilla seg ut i forhold til utforminga av det innflytingsrike TBM-LBM-prosjektet i underdel 3.1.2. Føremålet her er i forlenging av dette å utdjupe skildringa av utviklingsprosjektet frå innleiinga gjennom fem kjenneteikn.

I motsetning til eksisterande forskingsprosjekt som TBM-LBM-prosjektet, PRIMAS-prosjektet, og Nam et al. (2013) sitt prosjekt, blei dette prosjektet, for det første, designa for å gå over eit mykje *kortare tidsrom*, nemleg fire veker. Sidan mange har vist at profesjonell utvikling er ein tidkrevande prosess, var det eit ønske å studera konsekvensane av å «pusha» desse grensene.

Både for å kompensera for dette og for å ta ein annan retning enn TBM-LBM-prosjektet, blei det, for det andre, lagt til eit stort innslag av *forskningsbasert rettleiing*. Ved at eg sjølv inntok rolla som mentor og deltakar på refleksjonsmøta, liknar studien tilnærmingane hjå Nam et al. (2013) og Valenta og Wæge (2017) slik dei blei presentert i underdel 3.1.1. I forlenging av dette blei det, for det tredje, i likskap med PRIMAS-prosjektet, brukt fleire konkrete *ressursar* på refleksjonsmøta. Dei viktigaste var ressursheftet i tillegg B.2, utviklingsmåla i tillegg B.1, eksempeloppgåvene i tillegg B.3 og eit videoeksempel på matematikksamalar (sjå Gilderdale & Kiddle, 2014). Ressursane baserte seg på definisjonen av inquiry-basert undervising i underdel 2.1.1, trådmodellen i underdel 2.1.3 og operasjonaliseringa av desse i del 3.2.

For det fjerde og femte var denne studien òg, i samsvar med den eksisterande forskinga, *tett knytta til praksis* og basert på *refleksjon* mellom deltakarane. Modellen til Skovsmose og Borba (2004), gjengitt i figur 4.1, illustrerer denne mekanismen på god måte. Begge lærarane

gjennomførte i alt fem inquiry-baserte undervisningssekvensar, og i forkant av kvar av desse tok planleggingsmøta utgangspunkt i venstre hjørne av trekanten. Ut frå nåverandre situasjon brukte me pedagogisk fantasi og ressursane om inquiry-basert undervisning til å sjå for oss ein ideell situasjon før me gjennom pedagogisk eksperimentering utforma, og lærarane gjennomførte, ein arrangert situasjon. I etterkant og i samband med refleksjonsmøtet før neste undervisningssekvens, reflekterte lærarane (og eg) kritisk over korleis forskjellar på den arrangerte situasjonen og den ideelle situasjonen og kva som kunne vera avgjerande for dette. Dette blei så utgangspunktet for ein ny trekant, og slik blei det altså ein kjede av i alt fem slike trekantar. Lengda på planleggingsmøta varierte frå tre kvarter til 90 minutt.



Figur 4.1: Modell for didaktisk utviklingsorientert forskning (Skovsmose & Borba, 2004).

Av desse fem kjenneteikna går det fram at prosjektutforminga òg har fellestrekk med «*lesson study*» (Robutti et al., 2016; White, Jaworski, Agudelo-Valderrama & Gooya, 2013), «*aksjonslæring*» (Goodchild, 2008; Postholm & Jacobsen, 2011; Kværnes, 2013) og «*design research*» (Maaß & Doorman, 2013), men både på grunn av avgrensa omfang og nyttevurderingar, blir ikkje dette utdjupa noko vidare.

4.2.3 Undervisinga i prosjektet

I løpet av prosjektperioden blei det altså gjennomført fem inquiry-basert undervisningsekvensar. Det var lærarane som hadde ansvaret for og gjennomførte undervisinga, med unntak av at eg nokon gonger hjalp nokon grupper i gang under gruppearbeida.

Sidan elevane den første økta etter prosjektperioden skulle ha «oppgåverekning» («prøve») i temaet, blei det lagt opp til at kvar undervisningsøkt skulle delast i to omtrent like store sekvensar, der den eine var inquiry-basert og den andre var i tråd med den eksisterande undervisinga. Kvar av dei inquiry-baserte undervisningssekvensane hadde ein tredelt struktur. Først gjekk lærarane gjennom ein projektorpresentasjon med mål for dagen, forventingar til dei nye rollene, dagens rike oppgåve og liknande, av og til i samtale med elevane. Deretter jobba elevane i grupper på to til fire med den rike oppgåva, før timen blei avslutta med ein oppsummerande heilclassesamtale. Det blei brukt mest og omtrent like mykje tid på dei to siste delane.

Av dette går det fram at undervisinga i svært stor grad blei basert på operasjonaliseringa av inquiry i del 3.2. Både strukturen og læraren sine oppgåver tok utgangspunkt i Stein et al. (2008) sin modell, medan oppgåvene blei utforma i samsvar med Hedrén et al. (2005) og Prestage og Perks (2001). I kommunikasjon med elevane var idealet at lærarane skulle bruka samtalegrepa

til Chapin et al. (2013) i tråd med figur 2.1. Dette var eit sentralt fokus gjennom heile prosjektet, noko som går tydeleg fram av utviklingsmåla i tillegg B.1.

4.2.4 Det matematiske temaet og dei rike oppgåvene

Sjølv om det blei gjennomført fem undervisningssekvensar, var det berre fire rike oppgåver (sjå underdel 3.2.2) sidan den tredje oppgåva blei fordelt over to av sekvensane. Desse blei utvikla i samarbeid mellom lærarane og meg med varierende tilnærmingar som følge av knapp tilgang på tid. For dei to første oppgåvene starta arbeidet med blanke ark på refleksjonsmøta, og basert på idear frå alle tre blei det utarbeida ei skisse som eg fylte med detaljar i etterkant. For dei to siste oppgåvene var prosessen motsett; her tok refleksjonsmøta utgangspunkt i skisser eg hadde laga på førehand som lærarane blei med på å ferdigstillast. Endringa følgde av eit ønske om å frigjera meir tid til refleksjon over den praktiske gjennomføringa.

Oppgåvene blei ofte utforma ved hjelp av strategiane til Prestage og Perks (2001) for å svara til kriteriene Hedrén et al. (2005) listar opp. Det matematiske temaet for perioden var trigonometri, og knytta til dette temaet skulle elevane ifølge læreplanen mellom anna utvikla kompetanse i å

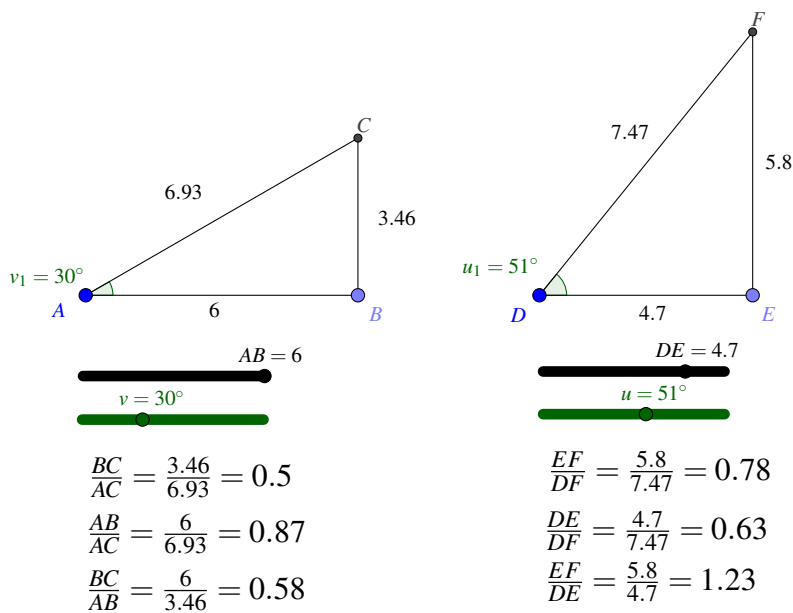
- (a) gjere greie for definisjonane av sinus, cosinus og tangens og bruke trigonometri til å berekne lengder, vinklar og areal i vilkårlege trekantar [og] (b) bruke geometri i planet til å analysere og løyse samansette teoretiske og praktiske problem med lengder, vinklar og areal (Kunnskapsdepartementet, 2013, s. 10).

Vidare blei desse kompetansemåla sett i lys av underdel 2.1.3 om matematikkompetanse generelt og trådmodellen i figur 2.2b meir konkret. Målet var altså å utforma oppgåver og undervisning som la til rette for at elevane skulle utvikla forståing, resonneringsferdigheiter, rekneferdigheiter, produktive haldningar og strategisk kompetanse.

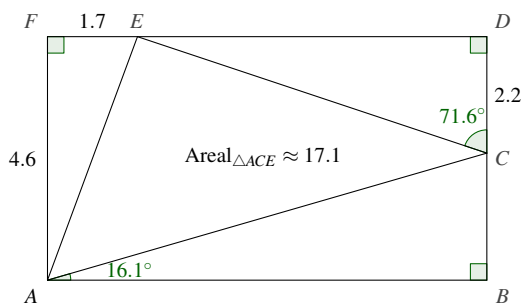
I samband med den følgjande analysen blir dei fire oppgåvene presentert kort i det følgjande med referanse til figurane 4.2a til 4.2e. Til kvar oppgåve blei det laga mellom anna læringsmål og tidskjema, noko som er tatt med i tillegg til dei fullstendige tekstane i tillegg C.

Føremålet med oppgåve 1 var at elevane skulle leita etter og finna samanhengane som ligg til grunn for definisjonane av dei trigonometriske funksjonane før dei blei presentert for dei. Difor fekk dei instruksjonen: «Gjett på sammenhenger i rettvinklede trekantar ved å utforske GeoGebra-filen [sjå utsnittet i figur 4.2a]. Undersøk om disse alltid vil holde. Hvordan vil dere forklare dette til de andre?» Ved å manipulera glidarane for lengda av grunnlinja og storleiken på vinklane (u og v), kunne dei oppdaga når dei oppgitte forholda endra seg eller ikkje. Elevar som eventuelt blei tidleg ferdige, kunne utfordrast på å leita etter samanhengar som at (a) det øvste forholdet dividert på det midterste gir det nedste ($\sin v / \cos v = \tan v$) og (b) at $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, at $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ og at $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$.

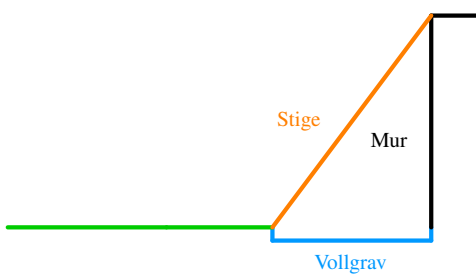
I samband med oppgåve 2 fekk elevane høyra ei kort fortelling om eit mislykka arabisk angrep på ei korsfararborg. Dei hadde brukt for lange stigar som hadde knokke, og alt som var igjen etter dei fire ansvarlege ingeniørane var ein rapport med ein del informasjon og fire ulike forslag til å finna kortare stigelengdar som kunne brukast, eitt for kvar ingeniør. Diagrammet i figur 4.2c viser situasjonen. Dei ulike elevpara fekk så utdelt kvar sin ingeniør (Cafiq, Ibrahim, Naïm og Youssef) med instruksjon om å følgja hans idé til løysing ved hjelp av notata hans, figuren han hadde teikna og rapporten som var felles for alle. Notata og diagramma til ingeniørane er lagt ved i tillegg C.2 og figur C.1a til C.1d. Ved å senda elevane ut i ulike retningar på denne måten, var målet både at elevane skulle få trening i å løysa samansette trigonometriske



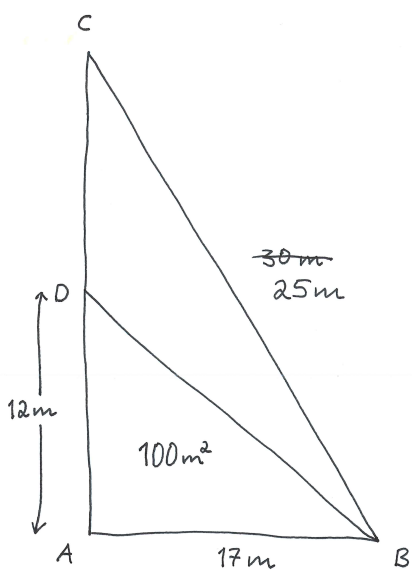
(a) Oppgåve 1: Utsnitt fr  GeoGebra



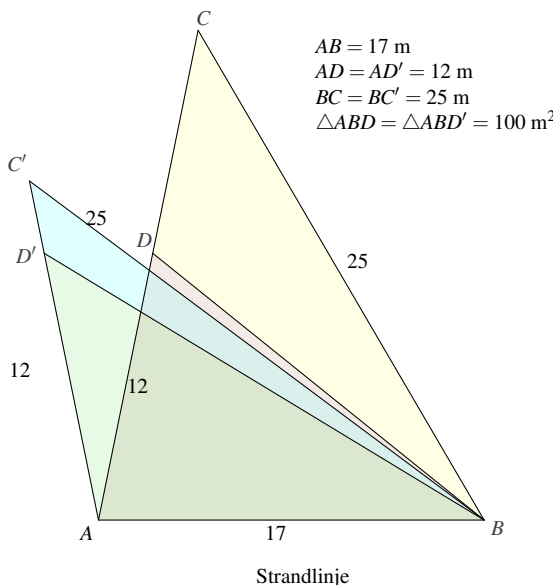
(b) Oppgåve 4: Diagram av flagget



(c) Oppgåve 2: Situasjonen i profil



(d) Oppg. 3: Tomtskisse m/utviding



(e) Oppgåve 3: Skisse av to moglege tomter

Figur 4.2: Skisser og diagram til dei fire oppgåvene

problem, men òg at det skulle bli eit godt utgangspunkt for å samtala om ulike måtar å løysa same problemet på.

I oppgåve 3 blei elevane presentert for eit arveoppgjer mellom dei to etterkommarane etter Peder Ås. Med utgangspunkt i eit testamentutdrag og skissa i figur 4.2d skulle dei ta stilling til om Ole Ås skulle arva heile ($\triangle ABC$) eller berre delar av ($\triangle ABD$) hyttetomta. I testamentet var det oppgitt at «[d]ersom den totale verdien på tomten forblir under 150 000 kroner, skal Ole i tillegg tildeles området [$\triangle BCD$]», og i tillegg fekk elevane oppgitt at den gjennomsnitlege kvadratmeterprisen i Lillevik hadde stige frå 789 kroner då testamentet blei skriva, til 1025 kroner. Sidan tomta ikkje var skildra eintydig, slik skissa viser, og situasjonen elles er noko uklar, er det mange matematiske og kontekstuelle argument for og mot. Sidan elevane i den tredje undervisningssekvensen trengte mykje tid på å rekna og diskutera dette i grupper, blei det lagt opp til å fortsetta arbeidet i den fjerde. Etter elevane sitt ønske blei det då òg oppnevnt ein ny advokat som hadde skaffa ei meir presis skisse (sjå figur 4.2e). Etter at elevane då hadde jobba ei stund i grupper, nå klassifisert som anten for, mot eller nøytral, gjekk mesteparten av tida med til heilklassesamtale. Føremålet med denne oppgåva var altså å vidareføra det matematiske innhaldet og delar av formatet i oppgåve 2, men i tillegg å leggja til arealsetninga og den utvida definisjonen av sinus. Det var naturlegvis òg eit mål å vidareføra arbeidet med å endra kommunikasjonsmønster og roller.

Føremålet med oppgåve 4 var å leggja til rette for ein samtale som kunne oppsummera heile temaet, alle definisjonane og alle setningane dei hadde lært i lys av dei fem trådane i trådmodellen. Resultatet blei oppgåva om å finna den beste framgangsmåten for å visa at arealet av den midtre trekanten i Norges trigonometriforbund sit flagg er tilnærma 17.1 gitt måla i figur 4.2b. I motsetning til oppgåve 2 og 3 var informasjonsmengda vesentleg redusert og konteksten tona ned.

Sjølv om dette blir utdjupa meir i resultatkapittelet, er det likevel naturleg å påpeika at presentasjonen så langt viser at dei fire oppgåvene varierer i korleis dei svarar til kriteriene til Hedrén et al. (2005) og profil i forhold til trådmodellen. For eksempel har både den første og den siste oppgåva klart enklast instruksjonar i forhold til dei andre, men likevel nokså ulik vektlegging av prosedyretråden.

4.3 Forskingsdesign og metodar for datainnsamling

Av dei fem typane forskingsdesign Bryman (2012) utpeikar, er det i hovudsak langsgåande studie, komparativ studie og casestudie som er relevante i lys av dette forskingsspørsmålet. Når det er sagt, blei prosjektet gjennomført over eit relativt kort tidsrom, iallfall i forhold til for eksempel TBM-LBM- og PRIMAS-prosjekta, og fokuset i studien er heller på utviklingsprosjektet som heilskap framfor samanlikninga av dei to lærarane som to individuelle tilfelle. Sjølv om det til tider likevel gir meining å samanlikna lærarane, er dette difor først og fremst ein *casestudie*.

Sidan profesjonell utvikling, slik det teoretiske rammeverket synleggjer, er ein kompleks prosess knytta til både kunnskap, praksis og haldningar, impliserer forskingsspørsmålet eit mangfald av datainnsamlingsmetodar. Fordi det er lærarane si utvikling som er i fokus, var det nødvendig å intervjuva kvar av dei både før og etter prosjektgjennomføring, men sidan denne i stor grad er avhengig av elevane sin respons, var det òg naturleg å henta inn data om elevane sine tankar og kunnskapar. Her gav ei avsluttande kvalitativ spørreundersøking breidde, medan djupn blei sikra gjennom ei avsluttande fokusgruppe. Den tredje typen datainnhenting skjedde ved videoobservasjon av undervisinga og refleksjonsmøta. I tillegg til å gi verdifull innsikt

i faktisk praksis, utfylte desse òg dei andre metodane gjennom synleggjering av kunnskap og haldningar.

I det følgjande blir dei tre metodane for datainnsamling utdjupa og forankra i litteratur om forskingsmetodikk.

4.3.1 Djupneintervju av lærarane og fokusgruppe med fire elevar

Ifølge Tjora (2010) og Bryman (2012) er *djupneintervjuet* ein fri samtale som kretsar rundt spesifikke tema og opne spørsmål fastsett av forskaren på førehand for å få informanten til å reflektera over eigne erfaringar og meiningar. Føremålet er i tråd med den fenomenologiske posisjonen om å få innsikt i informanten si livsverd, og difor ønskar ein rike, detaljerte svar. Tjora (2010) framhevar tre faser av intervjuet, oppvarming, refleksjon og avrunding, der den midterste gjennom tre til seks «grand tour spørsmål» utgjer hovuddelen. Både djupneintervju og fokusgrupper er ifølge Tjora (2010) og Bryman (2012) godt eigna til å studera eit fenomen ein veit lite om.

Dei to opningsintervjua og dei to avslutningsintervjua med lærarane blei gjennomført i samsvarende med dette, og slik det går fram av intervjuguidane i tillegg D.1 og D.2, fell dei innanfor den siste av dei to kategoriane Bryman (2012) presenterer: ustrukturert intervju og semistrukturert intervju. Meininga med oppstartsintervjua var å få innblikk i lærarane si forståing av og meiningar om inquiry-basert undervising i matematikk, undervising i matematikk generelt og forventingar til prosjektet i tillegg til å bli kjent med lærarane og deira forståing av elevane sine. Det avsluttande intervjuet vidareførte desse temaa, naturlegvis i retrospekt, men var òg meir konkret på utvikling, utfordringar og utslagsgivande faktorar knytta til dei. I tillegg såg dette òg meir framover i tid med tanke på korleis lærarane kunne tenka seg å vidareføra idear frå prosjektet og kva ein kunne gjort anleis viss ein gjennomførte prosjektet ein gong til.

For å få best mogleg innblikk i lærarane sine oppfatningar blei intervjua gjennomført i tråd med tilrådingar frå Tjora (2010) og Bryman (2012). Eg etterstreba å bruka opne spørsmål, innta ein naiv posisjon, venta tålmodig, venda tilbake til spørsmål og følgja opp dei lærarane sa. Intervju blei dessutan gjennomført på skulen til lærarane der dei sannsynlegvis kjende seg trygge og heime, på eit eige rom for å sikra gode forhold for lydopptaking. Alle intervju blei tatt opp og seinare transkribert.

Ut frå forskingsspørsmålet var det òg interessant å stilla lærarane nokon spørsmål ei tid etter prosjektgjennomføringa, og i slutten av april fekk dei difor tilsendt følgjande to spørsmål, som dei svarte kortfatta på per e-post:

1. Synest du at inquiry-basert undervising er relevant i vidaregåande matematikkopplæring? I så fall, på kva måte?
2. Har du vidareført nokon idear, element eller arbeidsmåtar sidan gjennomføringsperioden i januar-februar? I så fall, på kva måte?

Ei *fokusgruppe* er ei form for gruppeintervju der fleire informantar diskuterer eitt eller fleire tema eller fokus med føremål om å synleggjera meinignar i den interaksjonen som oppstår mellom dei (Tjora, 2010). Den avsluttande fokusgruppa blei gjennomført etter dei same prinsippa som for djupneintervjua, og ved å samla to elevar frå kvar klasse som i løpet av prosjektet hadde vist ulike meiningar om undervisinga, var håpet at dei gjennom samtale ville kasta lys over fleire sider ved temaet enn den individuelle spørreundersøkinga. Dette svarar til det Bryman (2012) kalla «*purposive sampling*». I praksis utvikla det seg ofte rask konsensus på dei ulike områda, og eg måtte moderera meir enn planlagt for å halda samtalen i gang. I så måte kan det argumenterast for at denne fokusgruppa låg tett opp mot eit vanleg gruppeintervju (Bryman, 2012). Slik

tillegg D.3 viser, hadde fokusgruppa ein tilnærma lik intervjuguide som avslutningsintervju, og i begge tilfella blei figurane 2.1, 2.2b, 4.2a og 4.2b brukt som stimulusmateriale (Tjora, 2010). I strid med både Tjora (2010) og Bryman (2012) si tilråding om grupper på seks til ti personar, blei det berre plukka ut fire elevar til fokusgruppa. Eg har tidlegare erfart at elevar vegrar seg for å bidra når det er for mange andre til stades, og på grunn av kombinasjonar av ulike fellesfagklassar, var det få i 1T-klassane som kjente kvarandre.

4.3.2 Videoobservasjon av undervisinga og refleksjonsmøtene

Fleire trekk ved denne studien samsvarer med Bryman (2012) sin definisjon av etnografi. For eksempel blei alle ledd av lærarane sin kvardag observert i kombinasjon med intervju og samtale med deltakarane. Mellom anna på grunn av (tids)omfanget og det at produktet ikkje skulle vera ein skriftleg etnografi, framstår omgrepet etnografi likevel for amibisiøst i denne samanhengen. *Observasjonen* gjennom videoopptak var berre éin av fleire likestiltemetodar, og difor er det naturleg å nøya seg med denne termen. Observasjon er særleg motivert av det symbolsk-interaksjonistiske synet på epistemologi og sosiokulturell læringsteori.

Føremålet med videoobservasjonen av undervisingssekvensane og refleksjonsmøta var å få innblikk i korleis praksis utvikla seg og korleis kunnskap og haldningar faktisk kom til uttrykk i det lærarane og elevane gjorde, noko som er svært relevant i lys av forskingsspørsmålet. I forhold til intervjumetoden byr dette òg på sjansar til å registrera uventa hendingar og karakteristikkk som er sjølvsegte for lærarane og som dei difor ikkje fortel om i intervju (Bryman, 2012). I tillegg erstatta videoobservasjonen av refleksjonsmøta alternative fortløpande djupneintervju i løpet av perioden ved at lærarane reflekterte over eksisterande praksis i møte med inquiry-basert praksis, utfordringar, utvikling og utslagsgivande faktorar. Sånn sett sparte ein tid overfor respondentane òg.

Grunnen til at observasjonen primært blei gjennomført indirekte gjennom videoopptak, var for å lagra rikare data enn magre feltnotat. Då unngjekk ein stort sett å gløyma hendingar og detaljar, og ut frå det abduktive perspektivet var det òg nødvendig å kunna veksla mellom teori og empiri med færrest mogleg ledd mellom. I etterkant la dette òg til rette for å kunna transkribere enkelte sekvensar til resultatdelen. I praksis blei dette gjennomført ved montering av eit kamera bak til venstre i klasserommet i kombinasjon med eit handhalde kamera for studenten og ein mobil lydopptakar for lærarane. Det varierte noko i kva grad dei blei brukt.

Både Tjora (2010) og Bryman (2012) skildrar ulike roller ein kan innta som observatør. I Bryman (2012) sin terminologi var eg ein «*partially participating observer*», som tilsvarar det Tjora (2010) kallar ein *deltakande observatør*, men at observasjon ikkje nødvendigvis er hovudkjelda til data. Som deltakande observatør er ein, naturleg nok, først og fremst observatør, men som til tider tar del i det som skjer (Tjora, 2010; Bryman, 2012). For å fanga opp variasjonen i kor deltakande ein observatør er, føreslår Tjora (2010) omgrepet *interaktiv observasjon*. I hovudsak er ein altså observatør, men for å unngå at andre til stades opplever noko som (veldig) unaturleg, kan ein samhandla med dei andre deltakarane, noko som stemmer over eins med rolla mi i stor grad. Under videoobservasjonen i refleksjonsmøta var studenten i hovudsak deltakar i utviklingsprosjektet som mentor eller rettleiar og dernest observatør, så her passar rolla *observerande deltakar* (Tjora, 2010) betre. I alle tilfelle var observasjonen open.

4.3.3 Spørreundersøking og fortløpande tilbakemeldingar frå elevane

Sidan spørreundersøkingar vanskeleg kan gå djupt inn i respondentane si livsverd, er dei sjeldan ein sentral del av kvalitative strategiar. Av same grunn er det dei to føregåande metodane

dei viktigaste i denne studien, men sjølv om dei følgande to metodane først og fremst er eit supplement, fyller dei likevel to relevante funksjonar.

Det har allereie blitt argumentert for at elevperspektivet er ein viktig del av lærarperspektivet, men å intervjuar alle elevane var sjølvstøtt ei uoverkommeleg oppgåve. Dessutan var det vanskeleg å få gode individuelle data om dei gjennom videoobservasjonen. I så måte kunne ei spørreundersøking med opne spørsmål delvis kompensera for dette. Alle elevane som var til stades i slutten av siste økt, svarte på følgande spørsmål. Fleirtalet av dei gjorde det digitalt gjennom nettportalen til SurveyXact (sjå <https://www.survey-xact.dk>), men dei som ikkje fekk det til, fekk utdelt undersøkingsa skriftleg. Undersøkingsa blei gjennomført anonymt over 10-15 minutt.

1. Hvilket forhold har du til matematikk? Hva liker du mest og minst ved faget?
2. Hvilken halvårskarakter fikk du forrige semester? [Avkrysningsboksar]
3. Hva oppfatter du som de viktigste kjennetegnene ved undervisningen i prosjektet (gjerne i forhold til undervisningen fra før)?
4. Hva synes du har vært positivt/fremskritt med prosjektet? Hvordan kunne læreren din, medelevene dine og du bidratt til mer av dette?
5. Hvilke utfordringer/negative sider støtte du, medelevene dine og læreren din på i prosjektet? Hva kunne dere gjort for å imøtekomme disse?
6. Fra første økt til nå, har du endret holdning til undervisningen i prosjektet? I så fall, hvordan?

I tillegg til dette var den profesjonelle utviklinga òg avhengig av fortløpande tilbakemeldingar frå elevane. For å sikra bidrag frå alle, blei elevane difor bedne om å skriva ned både noko dei syntest fungerte godt og eitt forslag til endring til neste gang. Desse lappane blei samla inn og brukt i planlegginga av neste sekvens.

4.4 Metodar for dataanalyse

Datainnsamlinga resulterte i store mengder data i form av lyd- og videoopptak frå fire djupneintervju med lærarane, ei fokusgruppe med fire elevar, fem refleksjonsmøte, ti undervisningssekvensar i prosjektperioden og to før prosjektoppstart. I tillegg kom elevane sine svar på den kvalitative spørreundersøkinga etter den siste sekvensen og papirlappvurderinga etter dei fire føregåande. Med så stor datamengde var det viktig å ha ein gjennomtenkt plan for analysen av desse, og i denne delen blir det gjort greie for denne i to delar: overordna analysestrategi og konkret analyse.

Den overordna analysestrategien i denne studien har fleire likskapstrekk med «*grounded theory*», det vil seia ei tilnærming til utvikling av teori «that was derived from data, systematically gathered and analyzed through the research process. In this method, data collection, analysis, and eventual theory stand in close relationship to one another» (Strauss & Corbin, 1998, i Bryman, 2012, s. 387). Data blei fortløpande handsama i løpet av prosjektperioden gjennom transkribering, «dataredusering» og overflatisk koding og kategorisering i vekselverknad med ny datainnsamling. Som namnet tilseier, er eit viktig kjenneteikn her at den induktive prosessen frå «rå» empirisk data til teori heile tida blir vurdert i lys av deduktive tilbakekoplingar. I begge tilfella er dette ei forlenging av den abduktive posisjonen. Når dette er sagt, er føremålet med grounded theory å generera ny teori, eller i det minste nye konsept eller omgrep, noko denne

studien ikkje har ambisjonar om. Målet er snarare å gjera greie for og drøfta ulike kategoriar eller tema som utvikling, utfordringar og utslagsgivande faktorar, og i så måte har tilnærminga mykje til felles med *tematisk analyse* (Bryman, 2012).

Denne overordna strategien blei operasjonalisert på to ulike måtar. Lydopptaka frå djupneintervjua og fokusgruppa blei transkribert etter transkripsjonsnøkkelen i tillegg ??, men med nokon pragmatiske tilpassingar, som å utelukka fyllodar eller fyllord der det ikkje endra innhaldet. Sidan både lærarane og elevane hadde austnorske dialektar, blei dei først transkribert til bokmål og seinare, i samband med skrivinga av denne oppgåva, omsett til nynorsk. Det finnest ifølge Kvale (1997) inga direkte oversetting frå munnleg til skriftleg kommunikasjon, men fokuset i forskingsspørsmålet er heller ikkje avhengig av slike detaljar. På same måte er heller ikkje tapet av gestikulering og mimikk eit stort problem. Både fordi videoopptaka var mykje rikare på informasjon og fordi det var mange fleire timar av dei, ville det vore ei for stor oppgåve å transkribera alle desse. I staden blei dei samanfatta i såkalla «datareduksjonar», som er samandrag over kva som skjedde og korleis vesentlege hendingar utarta seg. Her brukte eg strategiane Tjora (2010) listar opp som naiv skildring, generalisering, tolking, undering, forklaring, kvantifisering, dramatisering, eksperimentering, reaksjon/refleksjon og vurdering fordelt på ei observasjonskolonne og ei refleksjonskolonne. Seinare har enkelte utdrag frå desse blitt transkribert i samband med djupare analyse og skrivinga av denne oppgåva.

Sjølv om transkripsjonane og «datareduksjonane» i løpet av prosjektperioden blei fortløpande vurdert og analysert litt overflattisk, mellom anna gjennom refleksjonskolonna i alle dokumenta, blei dei først analysert systematisk etter at prosjektet var gjennomført. Då blei dei saman med svara på spørreundersøkinga og papirlappvurderinga importert og koda i det kvalitative dataanalyseprogrammet Nvivo. For å fanga mangfaldet i den store datamengda, blei det, etter tilråding frå Tjora (2010), brukt relativt mange kodar som ofte var delvis overlappande. Eksempel på dette er kodane «Inquiry-basert(e) kommunikasjon og roller», «Lærarane sine haldningar, meiningar og oppfatningar» og «Utfordringar ifølge lærarane». Som eksempla òg viser var kodane utforma både direkte av omgrepa i problemstillinga, men òg tematisk ut frå ulike sider ved inquiry-basert undervising og klasseromspraksis i tråd med det teoretiske rammeverket i tillegg til dei ulike deltakartypene. Koplinga til teorien synleggjer det abduktive perspektivet i prosjektet. I kvart dokument blei ulike delar av teksten markert og tildelt éin eller fleire kodar. Gjennom programmet kunne ein så visa alle utdrag knytta til éin eller fleire av desse anten som snitt eller union. I samband med både intervjutranskripsjon og videodataredusering står ein i fare for å mista synet av heilskapen i prosjektet (Bryman, 2012; Tjora, 2010). For å motverka dette la eg vekt på å sjå denne oppspaltinga i lys av det overordna biletet fortløpande.

Sidan situasjonen, i samsvar med mellom anna modellen til Clarke og Hollingsworth (2002), var så kompleks, var det utfordrande å kategorisera kodane. Først blei det gjort eit forsøk på å kategorisera direkte ut frå dei tre kategoriane i forskingsspørsmålet, men sidan fleire av kodane svarte til faktorar som fall innanfor fleire av desse, blei dette avslutta. I tråd med den abduktive tilnærminga blei difor heller dei tre aspekta av profesjonell utvikling brukt i tillegg til ein eigen kategori for erfaringar på prosjektnivå, ikkje klasseromsnivå som dei andre tre. Kvar av desse blei deretter delt opp i fleire underkategoriar slik at det for kvar av desse blei lagt til rette for å drøfta korvidt faktoren svarar til eit utviklingstrekk, ei utfordring, ein utslagsgivande faktor eller fleire av dei. Til saman utgjer dette strukturen i det følgande kapittelet som i tillegg til å presentera resultata, analyserer dei fortløpande i lys av det teoretiske rammeverket.

4.5 Etiske vurderingar

Motivert av Bryman (2012) og Tjora (2010) var det særleg tre etiske forhold som var viktige i utforminga, gjennomføringa og etterarbeidet med denne studien: informert samtykke, ivaretaking av deltakarane og anonymisering av data.

I samsvar med retningslinjer frå Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 1999, i Tjora, 2010) og meldeskjemaet til Norsk senter for forskingsdata (NSD), blei det som det går fram av informasjons- og samtykkeskriva i tillegg A.3, lagt stor vekt på at deltakarane skulle vita kva dei takka ja til. Difor blei det òg arrangert telefonsamtalar og møte med lærarane og elevane før prosjektet starta opp samtidig som at alle delane av prosjektet heile tida var opne. Målet var at alle skulle kjenna så godt som mogleg til føremålet med utviklingsprosjektet og studien.

Målet om å ivareta deltakarane handla både om å ikkje påverka det profesjonelle sjølvbiletet til lærarane i negativ retning eller å utsetta lærarane for press eller ubehagelege situasjonar. Profesjonell utvikling kan vera personelege, og det var difor viktig å ta omsyn til deltakarane. I samband med dette var det avgjerande å vedkjenna lærarane sin profesjonelle kompetanse og bruka han aktivt i utforminga av dei enkelte sekvensane. Dette gjalt òg elevane, nemleg at prosjektet ikkje skulle pressa dei til å gjera noko dei ikkje kjende seg komfortable med. I tillegg var det òg viktig å ikkje påføra lærarane og elevane mykje tidkrevande ekstraarbeid i ein elles hektisk kvardag. Det var òg eit faktum at elevane skulle ha både ein tradisjonell eksamen og ein tradisjonell «prøve» i slutten av perioden, og det var difor viktig å vinkla undervisinga i prosjektet slik at dei skulle vera i stand til å møte desse på ein god måte. Difor blei prosjektet organisert slik at tilnærma halvparten av tida skulle gå med til tilsvarande oppgåverekning og at òg inquiry-oppgåvene skulle sikra god prosedyretrening.

Endeleg var det viktig, men òg nødvendig for å kunna gjennomføra studien, å innhenta og handsama data i tråd med retningslinjene frå NSD og Personvernombodet. Dette blei gjort ved å teknisk sikra lyd- og videoopptak tilstrekkeleg og anonymisera alt skriftleg materiale. Sidan det ut frå forskningsspørsmålet ikkje var nødvendig å knytta informasjonen til dei fleste elevane personleg, fekk berre dei to lærarane og dei fire elevane i fokusgruppa pseudonym, og desse blei òg brukt i denne publikasjonen. Når masteroppgåva er levert og vurdert blir dessutan alle opptak sletta.

Kapittel 5

Resultat

Resultata av undersøkingane og metodane som blei skildra i førre kapittel, er i samsvar med det abduktive perspektivet, strukturert etter dei tre hovudkomponentane av profesjonell utvikling som det blei gjort greie for i underdel 2.2.1. Etter eit kort overblikk følger tre delar som tar for seg høvesvis oppfatningar, kunnskap og praksis om inquiry-basert matematikkundervising, og i samsvar med forskingsspørsmålet er det lagt størst vekt på den siste. Deretter blir kapittelet avrunda med ein del om resultat knytta til prosjektet i metaperspektiv og ein del om korleis status var for dei to lærarane omtrent to månadar etter gjennomføring.

Kvart poeng blir dokumentert med data frå éin, eller ofte fleire, av dei ulike innsamlingsmetodane, og sidan forskingsspørsmålet vektlegg lærarperspektivet, står dette i fokus her òg. Unntaket er der det er naturleg å prioritera elevutsagn. Desse blir dessutan ofte brukt for å utfylla eller kontrastera det biletet lærarane teiknar. Av dei fire elevane som deltok i fokusgruppa, omtalt som Anette, Saga, Mali og André er dei to første frå Grete sin klasse og dei to siste frå Magne sin. Med mindre anna går klart fram, er sitata deira henta frå fokusgruppa. I enkelte av utdraga frå klasserommet blir det dessutan brukt synonym for andre elevar òg for å letta lesinga noko, men når det gjeld elevane er det ikkje nødvendigvis samsvar med kjønna. Sidan alle data-innsamlingar blei gjennomført anonymt, er det ingen måte å spora kven av elevane som sa kva, heller ikkje mellom dei ulike målepunkta, men det har vore mogleg å unngå at same elev har to synonym. Sidan eg òg deltok i prosjektet, drar presentasjonen nokon få gonger òg eksplisitt nytte av mine erfaringar.

Sitata og utdraga som illustrerer resultata er i hovudsak eksemplariske, men der det går klart fram av teksten er somme inkludert for å synleggjera breidde framfor representativitet. For eksempel framstår elevane nokon gonger som éin aktør med éin oppfatning der inntrykket er at det er stor konsensus mellom dei, sjølv om det openbert er individuelle nyansar mellom dei òg. Eit overordna funn som pregar det meste av presentasjonen, er at lærarane og dei to klassane hadde omtrent dei same erfaringane i løpet av perioden. Der det var markante forskjellar mellom dei er dette poengtert eksplisitt, men som hovudregel blir det presentert data frå begge lærarane og elevar frå begge klassane. Sitat frå intervju eller respons på spørreundersøkinga eller papirlapptilbakemeldinga utgjer hovudkjeldene for alle delane med unntak av delen knytta til klasseromspraksis, der utdrag frå videoobservasjonane dominerer. Av naturlege årsakar blei sitat transkribert på bokmål og er difor òg gjengitt i den målforma. «(...)» indikerer at noko av innhaldet er utelate og tekst i klammer («[]») er lagt til i redigeringa for å tydeleggjera budskapen.

I kvar underdel blir det anten i innleiinga, undervegs eller i avslutninga drøfta korvidt det enkelte temaet utgjer ei utfordring, utvikling eller ein utslagsgivande faktor. Årsaka til dette er at det er overlappar mellom kategoriane og at temaa i ein del tilfelle på ulike måtar svarar til to

eller tre av desse.

I lys av endringsmiljøet til Clarke og Hollingsworth (2002) svarar delane om oppfatningar og kunnskap til det personlege domenet, delen om klasseromspraksis til praksisdomenet og delen om trekk ved utviklingsprosjektet til det eksterne domenet. Innanfor kvar av desse blir det drøfta ulike koplingar til konsekvensdomenet, men den grundige analysen blir først presentert i kapittel 6. Det er først der hovudfunna frå dette kapittelet blir oppsummert og samanlikna med forskning. I dette kapittelet blir dataa i hovudsak analysert ut frå det teoretiske rammeverket om inquiry-basert matematikkundervising, først og fremst kategoriane i figur 2.1 og trådmodellen. I tillegg blir operasjonaliseringane til Stein et al. (2008), Hedrén et al. (2005) og Chapin et al. (2013) frå del ?? brukt i relativt stor grad. Dette er som sagt, råd om korleis ein kan strukturera samtalebasert matematikkundervising, kriterier for rike oppgåver og samtalegrep for god kommunikasjon.

5.1 Overblikk over lærarane si utvikling

Sidan denne studien er relativt omfattande, iallfall til å vera ei masteroppgåve, og resultatane er tilsvarende omfangsrike, kan det vera nyttig å innleia resultatpresentasjonen med eit par overordna utsagn. Dette er berre for å gi eit overblikk; sjølve drøftinga og konklusjonen av resultatane kjem seinare. Dei følgjande eksempla illustrerer òg det overordna funnet at lærarane hadde stort sett dei same opplevingane av prosjektet.

I det avsluttande intervjuet fortalte Grete at ho hadde hatt utbytte av å gå utav korfortsona, særleg med tanke på å involvera elevane i ein heilclassesamtale:

Så det har vært veldig gøy å være med på et prosjekt hvor man på en måte må ut av sin egen boks. Og at det nå er ferdig det har jeg ikke tenkt så mye over. Så. Men det. Men jeg har egentlig ikke lyst å havne i den boksen jeg har vært. Skjønner? Men at jeg på en måte kan tenke litt mer i alle de tankene som vi har vært med på. Og det har jeg faktisk gjort litt, for jeg har jo undervist blant annet i kjemi, og der har jeg egentlig vært flink til å hele tiden få elevene til å komme med fakta [innspel], men kanskje nå i enda større grad: 'Ja, hvorfor er det sånn?', 'Hvofor mener du det?', 'Ja, hva tror du naboen mener?' Altså vært litt mer, enda mer der, da. Har rett og slett utfordra elevene. Og det føler jeg at jeg har lært av dette prosjektet. (...) Det har vært en prosess, men det har vært svært bra. (Sitat 1, Grete, I2¹).

I tillegg til å kommentera oppgåvene var Magne òg inne på det same, men her med vekt på *korleis* han vil leia matematikksamtalane:

Sånn konkret tipper jeg at jeg kommer til å trekke fram noen av disse oppgavene senere i tilsvarende fag senere år. Selve metoden kanskje i større og mindre grad, kanskje påvirke litt hvordan men vanligvis har gjort det, noe som likner. At en ikke nødvendigvis endrer alt, men at en endrer litt tanken rundt hvordan noe som allerede har vært til stede til en viss grad da, å synliggjøre litt hva som er viktig. Type det der når man gjør type mer sånn dialogtanke, hvordan kommer vi fram til ting, så passe på at man ikke nødvendigvis bare er på jakt etter hva har dere funnet ut som svar, men hvordan har dere funnet ut et svar. Og den vridningen der fra, er nok en sånn tanke som kan være nyttig å ha med seg, selv om man ikke gjør det så stort som vi har gjort, men at man bare har små 5-10 minutter samtale. Eller litt som

¹«I1» står for opningsintervjuet og «I2» for avslutningsintervjuet

en tanke generelt også. ‘Hva fikk dere på oppgave 4e?’ Bedre å spørre: ‘Hvordan løste dere oppgave 4?’ (Sitat 2, Magne, I2).

Her kan ein òg merka seg korleis Magne i samsvar med Wells (1999), ser ut til å vera i ferd med å utvikla eit perspektivsyn på inquiry framfor eit metodesyn.

5.2 Oppfatningar

Av underdel 2.2.2 gjekk det fram at deltakarane sine oppfatningar er avgjerande for utviklinga av inquiry-basert matematikkundervising (Engeln et al., 2013; Goldsmith et al., 2014). I denne studien var det fire oppfatningar hjå lærarane som utmerka seg; om matematikkompetanse, inquiry-basert undervising i matematikk, utvikling som matematikklærer og om seg sjølv og elevane. I tillegg kom elevane sine oppfatningar om det nye kompetansesynet og den nye undervisinga som indirekte påverka lærarane si utvikling. I løpet av dei følgjande seks underdelane blir det i lys av resultatane drøfta korvidt kvar av desse kategoriane svarar til ei utfordring, ein utslagsgivande faktor eller begge i tillegg til om faktoren var gjenstand for utvikling.

5.2.1 Lærarane sine oppfatningar om matematisk kompetanse

Av teorigapitlet (2) gjekk det fram at det er tette band mellom inquiry-basert matematikkundervising og heilskapelege tilnærmingar til matematisk kompetanse. I forlenging av dette, tyder resultatane her på at lærarane sine oppfatningar om matematisk kompetanse påverka progresjonen i prosjektet.

På den eine sida var begge lærarane positive til eller opne for alle trådane i rammeverket til Kilpatrick et al. (2001). I avslutningsintervjuet sa Magne for eksempel følgjande då me snakka om dette:

Og så burde man jo, og det er jo kanskje tanken med denne modellen, sånn jeg har skjønnt den ihvertfall, at man bør ha alt for å virkelig skjønne noe. (...) Det er vanskelig å resonnerer uten å ha noen metoder å resonnerer utifra. Det er vanskelig å ha en god strategikompetanse uten å ha noen forståelse for de begrepene som skal brukes i en strategi. (Sitat 3, I2).

I dette andre eksempelet, òg frå eit avslutningsintervju, er Grete inne på det same, men her med fokus på koplinga mellom prosedyrar, strategiar og forståing:

Jeg har nok også tenkt litt på, ja, jeg tror nok egentlig det, dette her med: ‘Hvor starter du på en oppgave?’ Men også dette her med forståelse: ‘Forstår du hva du gjør?’ ‘Forstår du disse?’ ‘Altså, hva er greia?’ ‘Hva er definisjonene på tangens?’ De har ikke. Det følte jeg jeg måtte repetere rimelig mange ganger før de skjønnte at det er jo et tall, det er et forhold mellom to sider. Og det har jo kanskje med forståelse av tema å gjøre. (Sitat 4, I2).

På den andre sida prioriterte begge lærarane prosedyrekompetanse og såg dei andre trådane i lys av dette, noko som samsvarar med eit tradisjonelt syn. Magne sa for eksempel at

det er jo ikke noen tvil om at mengdetrening også er den del av det å lære matematikk (...) Det er jo åpenbart at det er hvertfall veldig mange som får gode resultater av å trene på eksamenslignende oppgaver, og regne på den type ting, veldig rett fram, et helt år. (Sitat 5, I2)

Tilsvarande meinte Grete at «[m]atte er jo også mengdetrening» (Sitat 6, I2) og sa ein viktig del av førebuingane hennar i løpet av prosjektet var å rekna gjennom oppgåvene.

Seinare blir det presentert utdrag frå praksis (sjå del 5.4), og av desse òg går denne tradisjonelle vinklinga klart fram hjå begge lærarane. Dette heng truleg delvis saman med at prosjektet blei vinkla litt denne retninga, men likevel meinte Magne at

Det føles litt som det har gått, det er kanskje litt tanken også, litt fra en metode og produktive holdninger over på den andre siden hvor det er resonnering og strategisk tankegang og kanskje til en hvis grad forståelse. (Sitat 7, I2).

Ein rammefaktor som truleg òg spelte inn og som lærarane var opptatt av var sluttvurdering. Magne kommenterte det slik: «Det er nok andre ferdigheter som er viktigere for å gjøre det godt på eksamen. Og de trenes kanskje på bedre på andre måter» (Sitat 8, I2). Sjølv om Grete aldri sa seg ueinig i dette, såg ho fordelene i at «mange av eksamensoppgavene er jo litt mer sånne som dette her [rike oppgåver], at de må finne ut av det sjøl» (Sitat 9, I2).

For å oppsummera, ser det ut til at lærarane sine oppfatningar om kompetanse i matematikk delvis er ein utslagsgivande faktor ved at både Grete og Magne var opne for trådmodellen, men òg ei utfordring ved at dei vektla tradisjonelle komponentar over dei andre. Det var lite som tyda på ei nemneverdig utvikling her.

5.2.2 Lærarane sine oppfatningar om inquiry-basert undervising i matematikk

Tilsvarande førre del, tyder resultata på at lærarane sine oppfatningar om undervisinga i prosjektet påverka utviklinga deira av ny praksis. På den eine sida gav lærarane uttrykk for ei avgrensa forståing av inquiry-basert undervising i matematikk som ein nyttig tilleggsmetode til tradisjonell matematikkopplæring, noko som strid med Wells (1999). Det går fram av Grete sitt svar på korleis ho eventuelt ville vidareføra ideane frå prosjektet:

Det kan godt være det altså. Jeg kommer ikke til å gjøre det hver gang. (...) For det tror jeg hadde vært litt mye. Men det med å innimellom kunne tatt en halvtime eller ikke en halvtime er litt kort (...) kanskje ikke starten av kapitlet, men etter hvert når de har fått litt mer kjøtt på beinet, og tenkt at 'okey, nå kan de litt mer om tema', og så gitt de på en måte en oppgave hvor de måtte hatt tenkt litt mer og brukt alt de nå har lært. (Sitat 10, I2).

Den same forståinga kjem til syne i Magne sitt svar på eit spørsmål om inquiry-basert undervising eignar seg i vidaregåande matematikkopplæring:

Jeg tror jo egentlig det passer bra. Kanskje ikke som en gjennomgående metode i alle tema. Kanskje ikke så ofte som vi gjorde det nå i trigonometri, men at elevene har godt av å prate litt sammen, og at elevene har godt av å utforske, og at elevene har godt av å få problemstillinger som ikke er rett fram bare, tror jeg de har mye å lære av. (Sitat 11, I2).

I etterkant av det andre planleggingsmøtet utdjupa dei dette synet med å gi uttrykk for at dei oppfatta enkelte matematiske tema er betre eigna for inquiry enn andre.

På den andre sida var begge lærarane positive, nysgjerrige og lærevillige til inquiry gjennom heile prosjektet. I opningsintervjuet sa Magne for eksempel at han såg fram til å få prøva ut ideane han kjente frå før på ein skikkeleg måte, ei oppfatning hadde gjennom heile prosjektet.

Selve teorien rundt tror jeg på en måte jeg har en viss basis på fra før. (...) Så jeg har på en måte en viss tanke om hvordan det burde være, men det å på en måte bli påtvunget til å gjøre det litt mer bevisst, litt lengre tid, føle litt på hvordan det er et helt tema i stedet for bare en økt en gang i måneden, for eksempel, kan være, tror jeg kan være nyttig for å tenke om dette er noe man faktisk burde i stedet for å gjøre det fem ganger i løpet av år, gjør fem ganger i løpet av en måned. For å virkelig få det sånn skikkelig på et tema som en mer tankegang. Ja, få det litt mer gjennomført. (...) Jeg har forventninger om å få noen ideer som jeg på en måte aldri har tenkt på før. (Sitat 12, I1).

Det same gjaldt Grete som var spent på korleis prosjektet kom til å påverka elevane: «Det hadde jo vært gøy hvis noen sa: ‘Aha! Ja, sånn var det, ja!’ eller jeg også får det: ‘å ja, det var en ny sammenheng som ikke jeg hadde tenkt på!’» (Sitat 13, I1). Dette engasjementet hadde ho òg i avslutningsintervjuet då ho gav uttrykk for positive oppfatningar til matematikksamtar:

Altså å ha den kommunikasjonen med elevenene, tror jeg er veldig viktig. Og jeg tror det er mye læring i. Så jeg har alltid gjort, alltid gjort det, spurt litt «ja, hvorfor er det sånn?» og «ingen svar er dumme, kom med det», «diskuter med naboen». Men ikke sant, men jeg har jo gjort det, kanskje vært enda mer bevisst på det i større grad nå da. (...) selv om jeg syns oppgavene er jo geniale. De har virkelig fått utfordra seg, og fått prøvd seg på mye forskjellig, så oppgavene er bra. (Sitat 14, I2).

Engasjementet og handlingane deira både i klasserommet og på møterommet viste at lærarane stod inne for dette synet, og seinare blir det gitt eksempel på dette (sjå kapittel 5.4).

På same måte som i stad, kan ein her òg oppsummera med at oppfatningane til lærarane om undervisinga både var ei utfordring og ein utslagsgivande faktor. Det var ei ulempe for utviklinga deira at dei avgrensa inquiry til ein bestemt metode, men med tanke på oppslutninga deira var det ein fordel. Heller ikkje her var det vesentleg utvikling å spora.

5.2.3 Lærarane sine oppfatningar om utvikling som matematikklærer

Oppfatninga dei to lærarane hadde av undervisinga hang saman med synet dei hadde på utvikling generelt, og ein vesentleg utslagsgivande faktor i denne samanhengen var at begge to var svært opne for å utvikla seg. Følgande sitat frå opningsintervjuet til Grete illustrerer dette:

Jeg tror at det å jobbe som lærer, da kan man jo kanskje på en måte falle i den gruva, (...) at man gjør det samme år etter år. (...) Men det å prøve noe nytt; det er liksom noe med å utfordre seg sjøl òg. Og det er man kanskje ikke nødvendigvis så flinke til. For det er gjerne en hektisk hverdag. (Sitat 15, I1).

Sitat 1 viser korleis ho framleis i avslutningsintervjuet såg det som viktig å gå «ut av sin egen boks». Desse ideane om å fornya matematikkundervisinga var viktige for Magne òg som gav følgande svar då han blei spurt om korfor han valte å delta i prosjektet:

Delvis fordi jeg syns alltid det er morsomt. Mattefaget er ofte sånt fag som mange kjører sånn standard. Tavle, oppgaver, ferdig. Det er gøy å få litt sånn innspill på hvordan det kan gjøres annerledes. (...) Så det å få litt sånn fokus på hva, ja, egentlig mer verktøy, flere ting å gjøre. (Sitat 16, I1).

I tillegg hadde han eit «håp om å få litt konkret tilbakemelding på hva du tenker om hvordan dette skal gjøres og hvordan det da blir gjort» (Sitat 17, I1).

Når dette er sagt, var iallfall Magne, noko reservert i opningsintervjuet med tanke på kor mykje han trudde han kom til å utvikla seg då han sa:

For det er jo stor fare for at dette ikke revolusjonerer hverdagen til elevene på tre uker, og at det ikke revolusjonerer min undervisning på tre uker, selv om det på en måte er et drømmescenario. (Sitat 18, I1).

Det overordna inntrykket er likevel at lærarane sine oppfatningar om utvikling som matematikk-lærer var ein positiv utslagsgivande faktor for utviklinga gjennom prosjektet. Dette synet blir òg forsterka i resten av dette kapittelet der det mellom anna går fram korleis lærarane engasjerte seg i både klasserommet og prosjektet som heilskap.

5.2.4 Lærarane sine oppfatningar om seg sjølv og elevane

I tillegg til å ha eit positivt syn på utvikling, hadde både Grete og Magne positive oppfatningar av både seg sjølv og elevane sine, og dette framstod som ein moderat utslagsgivande faktor. Grete omtalte seg sjølv som god til både å leggja fram faget og til å skapa eit godt læringsmiljø mellom anna på grunn av at ho sjølv trivst godt i klasserommet:

Jeg trives veldig godt i klasserommet, og det tror jeg smitter over på elevene. Så sånn sett så tror jeg kanskje at jeg kan si, eller føler meg sjøl som en ganske god lærer, men det blir jo følelser og litt synsing dette her da, men jeg tror jeg klarer å formidle faget, eller fagene, på en grei måte og få elevene også til å trives i klasserommet, og at de tørr å spørre når de ikke får til ting eller viss det er noe de lurar på. Så å ha den gode kommunikasjonen med elevene tror jeg er veldig, veldig viktig. (Sitat 19, I1).

Dei same faktorane går igjen hjå Magne som i tillegg la til at han kjenner seg trygg i matematikkfaget:

Det er morsomt med fag, det er morsomt med elever, det morsomt å lære bort og det er morsomt å kunne ting og dermed kunne få lære andre ting. (...) Jeg ser nok på meg selv, kanskje – hva skal jeg si? – som en dyktig lærer. Jeg kan faget mitt, jeg synes det er gøy å lære bort og så føler jeg at jeg har relativt god egenskaper til å gjøre det. (Sitat 20, I1).

Lærarane hadde òg mykje til felles i korleis dei oppfatta elevane reint fagleg. Magne påpeika at «det er et veldig høyt nivå. Så det er jo ingen som sliter faglig» (Sitat 21, I2). Med tanke på motivasjon omtalte Grete dei slik: «Stort sett så har de lyst å lære. (...) Jeg vil jo påstå at hele klassen er interessert i matematikk og vil jobbe og er der for å lære» (Sitat 22, I1).

Då lærarane derimot i opningsintervjua blei spurt om korleis dei tolka klassemiljøet, sprika svara noko. Medan Grete sa mellom anna at «de sitter og jobber sammen to og to eller tre og tre, så jeg tror klassemiljøet er bra» (Sitat 23, I1), framheva Magne utfordringane med samansetninga av klassen:

Veldig tydelig at de kommer fra tre forskjellige klasser. Og veldig tydelig at de kommer fra litt forskjellige kulturer i forhold til hva som er normalt med hvordan man jobber, hva de synes er greit av ro, hvor mye de liker å jobbe med andre og litt også hvor mye de liker å jobbe i det hele tatt. Så veldig forskjell på dem. (Sitat 24, I1).

Sidan dei to følgande delane dreier seg om elevane sine oppfatningar, blir denne delen avslutta med å påpeika at både Grete og Magne viste interesse for elevane sine opplevingar gjennom heile prosjektet. Grete fortalte for eksempel at ho set pris på tilbakemeldingar frå elevane: «Hvis de er uenige om noe, så sier de fra i timene, og det syns jeg er bra, for det er liksom noe med den gode kommunikasjonen som er viktig for læringen» (Sitat 25, I1). Sjølv om ikkje Magne kommenterte dette eksplisitt i intervjuet, var han for eksempel i det andre planleggings- og evalueringsmøtet opptatt av elevane sine reaksjonar på det å diskutera matematikk i grupper.

5.2.5 Elevane sine oppfatningar om matematisk kompetanse

Sidan elevane på mange måtar var like delaktige i å iverksetta ideane frå planleggingsmøta som lærarane, fekk synet deira på matematikk og matematisk kompetanse mykje å seia for utfalla. Det er òg rimeleg å rekna med at oppfatningane til elevane både var eit uttrykk for kva lærarane vektla i timane sine og ein faktor som påverka lærarane sine oppfatningar.

Mykje tyda på at elevane hadde eit enda smalare syn på matematisk kompetanse enn lærarane, og lite tyda på at det endra seg gjennom prosjektet. Av svara deire på det første spørsmålet i undersøkinga gav halvparten direkte uttrykk for ei klar vekting av prosedyrekompetanse i Kilpatrick et al. (2001) sitt rammeverk med tydeleg fokus på metode, reglar og fasitsvar. Ein frå Magne sin klasse skreiv: «Det jeg liker best med matte er å lære nye regnemåter som gjør alt morsomere. Det jeg liker minst ved matte er at det er så inderlig mye man må huske» (Sitat 26). Ein annan, frå Grete sin klasse, medgav i tråd med dette at «jeg mestrer det meste, men er dessverre ganske flink til å gjøre slurvfeil» (Sitat 27). I fokusgruppa formulerte Anette seg som følger, med eksplisitt støtte frå Mali:

Det beste er sånn hvis du finner en eller noen få regler som du kan bruke på de fleste oppgavene og så vite at du kan de i stedet for å ha masse forskjellige som du egentlig ikke kommer til å få bruk for. (Sitat 28).

Eit eksempel frå praksis som illustrerer dette var då ein elev i samband med oppgåve 2 etterlyste fasiten og Magne svarte: «Hvor lang stigen er bestemmer vi etterpå (...) Jeg har ikke noen fasit.» Opprømt svarte eleven: «Du må ha fasit,» noko som fekk ein annan til å henvenda seg til meg. Då eg òg sa at me måtte komma fram til det saman, svarte han (med eit smil om munnen): «Det finnes alltid en fasit i matte. Hvis det ikke hadde vært fasit i matte, så hadde jeg hatet matte.»

Når dette er sagt, var det òg elevar som gav uttrykk for at dei verdsette omgreps-, strategi- og appliserings- og resonneringskompetanse. I fokusgruppa og i samband med oppgåve 3, fortalte André at han synest matematikk blir meir meningsfylt og lettare å forstå når konteksten i oppgåva spelar ei viktig rolle:

Det er litt bra å ha tekstoppgaver til tider. Fordi ellers så blir matte mer og mer sånn: det blir mindre forståelse og mer pugging av formler. (...) i både tiende og åttende og sånt så var det veldig mye forståelse og da likte jeg faget, fordi da forstod jeg det, men sånn er det [nå]: 'her er en formel' og sånn er det bare. Og det godtar du og så bare følger du den formelen liksom. (Sitat 29).

Anette la vekt på det same i tillegg til å framheva verdien av å resonnera og diskutera saman rundt oppgåve 2.

Jeg likte den oppgaven, eller det løsnet litt for meg når vi fikk den oppgaven med stigen hvor man skulle skulle bygge stigen sånt at den skulle brukes til å klatre

opp en mur og så fikk du forskjellig informasjon fordi da. Eller det var den første oppgaven på lenge ihvertfall siden åttende klasse hvor det ikke bare var ren matte som hadde noe å si. Sånn på slutten av den store klasseseksjonen så begynte vi å trekke inn logiske argumenter for hvorfor noe kunne fungere og noe ikke kunne fungere. (...) Matte ble plutselig litt logisk igjen, ikke bare nødvendigvis huske formler. (Sitat 30).

I underdel 5.4.4 om heilklassemøtene blir det presentert sitat (87 og 88) der dei to same elevane sette pris på å drøfta ulike strategiar i plenum.

Synet om at matematikk kan vera meir enn oppskrifter og reglar kom òg til uttrykk i samband med spørsmål 1 i undersøkinga, der ein elev frå Magne sin klasse skreiv: «Jeg føler at jeg har fått bedre forståelse for pensumet i kapitlet fordi jeg har blitt nødt til å tenke mye mer over hva jeg kan gjøre med oppgavene,» (Sitat 31). Frå Grete sin klasse var det ein annan som uttrykte det slik: «Jeg er veldig glad i den/de temaene i matte som jeg selv forstår. Når matematikk ikke gir mening, og det kun er pugging av formler blir det for kjedelig» (Sitat 32).

I likskap med lærarane sine oppfatningar om dette, framstod elevane si forståing av matematisk kompetanse både som ein fordel og som ei ulempe for framgangen i lærarane si utvikling av inquiry-basert matematikkundervisning. Sjølv om nokon av sitata over tyder på ei utvikling av meir inquiry-prega oppfatningar om matematikk, er dei likevel langt frå mange nok til å dokumentera ei stor utvikling. Eksempla frå praksis i del 5.4 styrker det siste synet.

5.2.6 Elevane sine oppfatningar om inquiry-basert undervisning i matematikk

Elevane sine oppfatningar av den inquiry-baserte undervisninga hadde òg mykje å seia både for drøftinga på planleggingsmøta og for gjennomføringa i praksis.

I starten av perioden var mange av elevane i begge klassane svært skeptiske eller kritiske til den nye undervisninga fordi ho ikkje samsvarte med oppfatninga deira av matematisk kompetanse og av eit godt læringsutbytte. Etter første økt skreiv for eksempel to elevar i Grete sin klasse: «Fikk ikke brukt det i oppgaver/skjønner ikke hvordan jeg skulle» (Sitat 33) og «Lite effektivt» (Sitat 34). I Magne sin klasse var det to som skreiv: «Liker allerede opplegget vi har, så det er kanskje litt dumt å bytte noe som fungerer» (Sitat 35) og «Fikk ikke noe utbytte» (Sitat 36). I samband med gjennomføringa av den tilsvarande oppgåva (oppgåve 1) kom dette til uttrykk i spørsmålet til André: «Jeg bare lurer, hva lærer vi av dette her?» til det som framstod som samtykkande latter frå resten av klassen.

For nokon elevar varte dette gjennom heile prosjektet. Til det sjette spørsmålet i undersøkinga var det sju stykk som gav eksplisitt uttrykk for meiningar som: «Var skeptisk og synes fortsatt opplegget med kikora var best» (Sitat 37) og «Nei, jeg synes ikke denne undervisningen fungerte for meg» (Sitat 38). I nokon av tilbakemeldingane etter den fjerde sekvensen gir elevane uttrykk for korfor: «Jeg foretrekker eget arbeid på Kikora fordi der kan jeg finne mitt eget nivå» (Sitat 39); «Passer veldig dårlig for noen med litt dårlig tålmodighet» (Sitat 40); «Vi gjorde den på 1.5 timer. Synes det er mer varierende å gjøre mange oppgaver, f.eks. Kikora» (Sitat 41). Her er dei to første frå Magne sine elevar, og i avslutningsintervjuet kom det fram at han hadde fått med seg desse oppfatningane: «Noen har nok beholdt veldig tanken om at det vi gjorde [før prosjektet] var best. Det har jeg fått høre etterpå» (Sitat 42).

Når det er sagt, var det likevel òg ein del som gav positive tilbakemeldingar etter første økt. To elevar hjå Grete syntest at: «Det var gøy å skjønne noe etter å ha blitt utfordret med et vanskelig spørsmål» (Sitat 43) og «Liker at man samarbeider seg fram til svaret» (Sitat 44).

«Fikk bedre forståelse» (Sitat 45) og «Morsomt opplegg med å finne ut ting selv» (Sitat 46) var to av tilbakemeldingane på sekvensen til Magne.

Delvis uavhengig av dei innleiande oppfatningane, utvikla dei fleste elevane positive haldningar til undervisinga i løpet av prosjektet. Mali oppsummerte dette i fokusgruppa slik:

Nei, jeg var veldig skeptisk på starten. Fordi det var læreren som stilte oss spørsmål. Og det var noe vi ikke hadde gått gjennom før, så jeg ble egentlig litt irritert, ass. Men etter hvert som vi lærte mer og vi jobbet i grupper og sånn, så syns jeg det ble, ja, litt bra (Sitat 47).

I samband med spørsmål 6 i spørreundersøkinga var det 36 stykk som i større eller mindre grad gav uttrykk for den same positive utviklinga. Ein elev frå Magne sin klasse skreiv: «Ja, jeg har blitt mer komfortabel med å prate uferdige tanker slik at jeg kan finne svar i samarbeide med læringspartner» (Sitat 48). Sitatet (heretter: Sitat 49) som opnar kapittel 1, er knytta til det same spørsmålet frå ein elev i Grete sin klasse, og her òg kjem positive haldningar til undervisinga til uttrykk. Desse utsagna samsvarar med André og Anette si tilslutning til heile trådmodellen i første del, og blir forsterka av dei praksiseksemla i del ??.

Dei to følgande sitata viser korleis Magne og Grete, respektivt, merka seg og var litt overraska over at elevane engasjerte seg ivrig i den nye matematikkundervisinga:

Og så på en måte, litt sånn positiv overraskelse, at dette, sånn som den ene gangen at vi brukte altfor mye tid, men det er ingen, eller veldig få, som sier noen på at vi bruker så mye tid, som må bety at dette er engasjerende greie både for meg og for dem, fordi vi mister tida. (...) Jeg tror mange syns det var morsommere etter hvert. (Sitat 50, Magne, I2).

Men det som jeg husker som jeg synes har vært veldig gøy også, det er jo det at elevene har vært så *på*. De har liksom tatt oppgaven og så er de bøynd over disse arkene og så har de gått inn for å virkelig jobbe. (Sitat 51, Grete, I2).

For å oppsummera, tyder resultatata over på at elevane sine oppfatningar av undervisinga var ei stor utfordring i starten, men at det trass enkelte unntak skjedde ei markant utvikling på dette feltet. Når det er sagt, gir resultatata ikkje grunnlag for å hevda at elevane ville byta ut eksisterande undervising med inquiry-basert undervising. Gitt den utbreidde tradisjonelle oppfatninga av matematisk kompetanse, er det stor sjanse for at dei fleste av elevane såg det som eit verdifult tillegg til den eksisterande undervisinga, slik som lærarane. Denne faktoren ser uansett ut til å ha påverka kunnskapstileigninga og klasseromspraksisen i positiv retning først for elevane og dermed indirekte for lærarane.

5.3 Kunnskap

Underdel 2.2.2 tilskreiv òg kunnskap som eit sentralt aspekt av profesjonell utvikling (Gueudet & Trouche, 2012; Goldsmith et al., 2014). På bakgrunn av dette blir det her kort gjort greie for lærarane og elevane si forståing av inquiry i to delar og korleis desse svarar til dei tre kategoriane i forskningsspørsmålet.

5.3.1 Lærarane sine kunnskapar om inquiry-basert undervising i matematikk

Sjølv om begge lærarane hadde fått og blitt presentert for ressursheftet, eksempeloppgåver og utviklingsmåla i tillegg B, hadde Magne ei klarare forståing av kva inquiry-basert matematikk-

undervisning er og korleis ideane kan operasjonaliserast. Dette kom mellom anna fram på det første planleggingsmøtet då han drøfta korleis ein i samsvar med tilrådingane i del 3.2 kunne utfordra ulike elevar og grupper på ulike måtar med utgangspunkt i dei rike matematikkoppgåvene. På det same møtet reiste Grete derimot fleire spørsmål knytta til operasjonalisering som allereie var omtalt i ressursheftet og som tidlegare var blitt drøfta. Det gjaldt for eksempel om gruppearbeida kanskje burde avsluttast med ei form for oppsummering som «sluttprodukt» og kva dei som lærarar skulle gjera medan elevane jobba i grupper, om ho skulle setta seg på ein krakk eller gå rundt og observera. Denne forskjellen kan skyldast, slik det går fram av Sitat 12, at Magne kjente til flere av ideane på førehand.

I løpet av prosjektet såg begge lærarane ut til å tileigna seg meir kunnskap om inquiry-basert matematikkundervisning. Den beste indikatoren på dette var klasseromspraksisen deira i neste del, men dei følgande to sitata gir òg eit bilete på situasjonen. I det første skildrar Grete korleis kriteria til Hedrén et al. (2005) for rike oppgåver (sjå underdel 3.2.2) endrar undervisninga i trigonometri og kva ho forstår som føremålet med å bruka samtalegrepa til Chapin et al. (2013) (sjå underdel 3.2.3):

Jeg tenker på dette her med at det er litt rike eller åpne oppgaver. At elevene må kanskje i større grad komme fram til konklusjonene sjøl, i stedet. Nå har vi jobbet med trigonometri, men i stedet for kanskje presentere arealsetningen og så skal de gjøre oppgaver med det, heller presentere en litt mer sånn, kanskje åpen oppgave, da, som de må diskutere mer eller dele tanker og finne utav det mer på egenhånd. Og det har jeg jo fått større forståelse av. (. . .). Ja, vi har jo på en måte snakka mer og mer om disse samtalene. (. . .) at de skal jobbe med prosessen, og at samtalen er vel så viktig og vel så mye læring i den som å faktisk komme fram til en fasit, da. Og det syns jeg har komnt mer og mer tydelig fram. (Sitat 52, I2).

Slik det gjekk fram i førre avsnitt, hadde Magne ei tilsvarende forståing av rike oppgåver frå før og i det neste sitatet trekk han fram det same føremålet med heilklassefasen i femstegsmodellen til Stein et al. (2008) (sjå underdel 3.2.1) som Grete. I løpet av prosjektet hadde han fått ei djupare forståing av at matematikken ligg vel så mykje i (samtale-) prosessen som i produktet.

Jeg metoden føler jeg kjennetegnes litt av at du skal tenke mer på hva man gjør enn hva du ender opp med, og at du skal tenke mer på at det fins mange veier å gå og at veiene er litt sånn målet enn den klassiske mattetanken med at målet er målet, så er du ferdig. Og at kanskje det er viktig å få diskutert både felles og med andre hvordan vei man velger. (Sitat 53, I2).

Resultata omtalt i denne underdelen viser at lærarane hadde eit ulikt kunnskapsmessig utgangspunkt, men at begge to likevel blei meir kunnskapsrike i løpet av prosjektet. Det påverka truleg den praksiske utviklinga deira i klasserommet som igjen supplerer dette poenget med fleire eksempel. I del 5.5 blir det drøfta nokon utfordringar lærarane støtte på i kunnskapsutviklinga si.

5.3.2 Elevane si forståing av kva dei skulle gjera

Det viktigaste aspektet av elevane sine kunnskarar om inquiry-basert matematikkundervisning var korvidt og korleis dei forstod innhaldet i den nye rolla deira slik ho mellom anna går fram av kategorien «elevane» i figur 2.1. I starten syntest mange at dette var utfordrande, noko Anette, med uttalt støtte frå Mali, oppsummerte slik:

Første gangen var det nesten litt sånn frustrerende, og ikke vite hva du skulle Du fikk bare en oppgave og så fikk du ikke noe som helst om fremgangsmåte eller hva du kunne gjøre, noe startpunkt. Det var litt vanskelig å vite hva man skulle gjøre. (Sitat 54).

Dette gjekk òg igjen i mange av tilbakemeldingane etter første sekvens. Ein elev frå Grete sin klasse syntest for eksempel at det «[v]ar litt vanskelig å forstå hva vi egentlig holdt på med» (Sitat 55), medan ein hjå Magne skreiv at «[d]et var vanskelig å vite hva man burde se etter (sammenhenger), får håpe at det går enklere neste gang» (Sitat 56).

Sjølv om det blei færre av slike tilbakemeldingar, var det likevel nokon som gav uttrykk for forvirring gjennom heile perioden fordi oppgåvene eller måla var uklare. Etter den tredje sekvensen var det for eksempel ein elev frå Grete sin klasse som skreiv: «Kan ha mer presise oppgaver. Hva dere er ute etter» (Sitat 57), og ein frå Magne sin som meldte: «Kunne kanskje forklart oppgaven litt bedre» (Sitat 58). Etter den nest siste sekvensen var det framleis ein hjå Grete som meinte at: «Kan bli mer presis på hva dere vil fram til på starten» (Sitat 59).

Ved at dette blei eit tema dei stadig snakka om, viste lærarane, og særleg Grete, at dei var medvitne dette. Då ho reflekterte over utfordringar, nemnte Grete dette i avslutningsintervjuet sitt: «Det er jo gjerne at kanskje elevene ikke helt har forstått hva de skulle gjøre. 'Hva var poenget med dette her?' eller 'Hva er det egentlig vi skal finne ut av?'" (Sitat 60, I2).

Likevel var trenden at det blei færre slike tilbakemeldingar, noko som tydar på at elevane fekk større forståing av den nye rolla deira. Allereie etter andre sekvens var det ein elev frå Grete sin klasse som skreiv: «Skjønte hvorfor vi gjorde oppgaven» (Sitat 61). Til spørsmål 5 i spørreundersøkinga var det to elevar frå Magne sin klasse som skreiv: «Noen ganger kunne det være vanskelig å finne ut hva oppgaven var ute etter, men etterhvert ble det mer og mer tydelig» (Sitat 62), og «Det viste seg å bli bedre etterhvert, og folk fikk bedre forståelse for temaet som gjorde samarbeidet enklere» (Sitat 63). Dette stadfester praksis òg ved at elevane etter kvart, og særleg i samband med oppgave 4, kom stadig raskare i gang i gruppearbeida. Fleire slike dømer følger i del 5.4.

Eit viktig poeng i denne samanhengen er, slik sitata over viser, at då elevane gav uttrykk for denne forvirringa, knytta dei dette opp mot oppgåvene i plassen for den nye rolla. Ser ein dette i lys av oppfatninga til mange av matematikk som eit «oppgåvefag», styrker dette ideen om at elevane sitt syn på matematikk var ei utfordring for utviklinga. Her kom det mellom anna til syne ved at dei ikkje oppfatta informasjonen om dei nye rollene, som blei gitt kvar sekvens, som essensiell. Det ser ut til at dette igjen hindra dei i å tileigna seg kunnskap om kva dei skulle gjera.

Resultata over tyder altså på at elevane sine manglande kunnskapar i utgangspunktet var ei utfordring, men at det skjedde ei utvikling på området som det er rimeleg å gå ut frå at prega praksisen deira, slik del 5.4 underbygger. Dette går òg fram av det følgande sitatet der André påpeikar verdien av å inkludera fleire sider av matematikken (trådmodellen) og av å læra av kvarandre sine tilnærmingar til rike problem:

Jeg tror at det som skiller denne undervisningsmåten fra den vi hadde før er at man får større, man får bredere innsikt. (...) Når da flere som gjør oppgaven, og læreren går rundt og ser på måten vi gjør oppgaven på, og så går vi gjennom de i plenum, så lærer man på en måte alle de forskjellige måtene å gjøre oppgaven på. (Sitat 64)

Anette òg hadde bite seg merke i at fokuset hadde skifta frå matematikk som produkt til matematikk som prosess i samsvar med filosofien i figur 2.1: «Nå var det ikke like stor fokus på hvilket svar man kom fram til. Og flere grupper hadde flere svar. At det var mer metodene, som

allerede ble sagt, at det var det det var fokus på» (Sitat 65). Sitata illustrerer dessutan at elevane òg oppfatta inquiry-basert undervising som ein bestemt måte å arbeida på, slik som lærarane.

5.4 Klasseromspraksis

Praksis er det siste av dei tre aspekta av profesjonell utvikling (Gueudet & Trouche, 2012; Goldsmith et al., 2014), og i lys av forskingsspørsmålet blir dette først og fremst knytta til gjennomføringa i klasserommet. I løpet av dei fem følgande underdelane blir det gjort greie for utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar knytta til dei rike oppgåvene, instruksjonar og oppsummering, gruppearbeida, heilklasesamtalane og tidsbruk.

5.4.1 Utforminga og følgene av dei rike oppgåvene

I prosessen med å laga dei fire oppgåvene oppstod det utfordringar, idear og utvikling som svaret på forskingsspørsmålet er vel tent med at blir framheva i denne underdelen. Sidan eg, slik det gjekk fram av kapittel 4 om metode, spelte ei vesentleg rolle her, legg denne delen større vekt på mine erfaringar enn elles.

Eit av resultatata i denne samanhengen er at det var krevande å utforma gode rike oppgåver. På den eine sida tilfredsstillir alle oppgåvene nesten alle kriteriene til Hedrén et al. (2005) i større eller mindre grad. Unntaket er at dei tre første oppgåvene ikkje var lette å forstå for elevane (kriterie b) fordi dei ikkje var vane med denne tilnærminga til og desse sidene av matematikken. Dette medførte naturleg nok, på den andre sida, at mykje av potensialet i dei forsvann. Grete kommenterte dette då ho sa det er viktig «at man gir de et oppdrag som egentlig bør være så konkret som mulig, samtidig som at de skal tenke tankene og finne ut av det» (Sitat 66, I2). Observasjonen av timane tyder på at oppgåve 1 var vanskeleg å forstå fordi ho hadde ein diametralt ulik karakter i forhold til dei tradisjonelle oppgåvene elevane var vane med ved å krevja utforskning og gjetting. Magne kommenterte dette slik:

Jeg skulle ønske vi hadde klart å komme med. Jeg følte vi hadde en veldig godt idé første gangen, som ikke traff i det hele tatt. Så jeg skulle ønske vi hadde kommet på en bedre idé, eller, jeg vet ikke, eller en idé som faktisk hadde funger, for da tror jeg det kunne hjulpet litt seinere. (Sitat 67, I2).

Dette såg òg ut til å vera delvis tilfelle for oppgåve 2 og 3 med tanke på dei rike, realistiske kontekstane, men her var det òg i forlenging av dette utfordrande for elevane å forholda seg til større mengder tekst og informasjon. Eit godt eksempel på dette var då elevane ble introdusert for oppgåve 3 og formuleringa «Dersom den totale verdien på tomten forblir under 150 000 kroner». Dette knytta dei til verdien av den litle trekanten på 100 kvadratmeter ($\triangle ABD$ i Figur ??) i plassen for heile tomta ($\triangle ABC$), noko som medførte at mange av poenga og nyansane med oppgåva forsvann. Sjølv om lærarane prøvde å oppklara det og dette blei presisert enda sterkare i neste time prega denne eine setninga arbeidet med oppgåva i svært stor grad gjennom begge sekvensane. Desse erfaringane blei tatt til etterretning slik at oppgåve 4 fekk ei vesentleg enklare utforming, noko som såg ut til å løysa problema.

I samband med kva grad oppgåvene dekkja dei fem trådane i kompetansemodellen til Kilpatrick et al. (2001) er det allereie påpeika at undervisinga generelt (og oppgåvene spesielt) la større vekt på prosedyre- og strategikomponentane i trigonometritemaet enn dei andre delkompetansane. Dessutan har det tidlegare gått fram at lærarane meinte at ikkje alle tema var like veileigna; Magne meinte for eksempel at «dette er så instrumentelt, mye av dette med sinus, cosinus og

tangens,» (Sitat 68, I2). Når det er sagt, har oppgåve 2 og 3 tydelege koplingar til applikasjonar, og sidan oppgåvene er knytta opp mot sentrale idear i grunnleggande trigonometri, legg dei alle godt til rette for heilklassemamtalar med vekt på resonnering og forståing. Likevel hadde det vore interessant å gjentatt oppgåve 1 mot slutten eller gjennomført ei liknande oppgåve, sidan denne oppgåvetypen, for nokon, har eit enda tydelegare inquiry-preg. Då fokusgruppa fekk vite føremålet med denne oppgåva og blei spurt om korleis dei trudde det ville gått viss dei hadde fått ho ein gong til, svarte dei at dei trudde det ville gått lettare. Iallfall ut frå det Anette seier, ser det ut til at det i utviklinga av inquiry-basert undervising i matematikk kan lønna seg å leggja dei mest utforskande oppgåvene til seinare i eit tema:

Jeg ble frustrert på våre veine nå. Når jeg så hva oppgaven faktisk gikk ut på. Jeg tror hvis vi hadde fått denne oppgaven på nytt nå, så tror jeg vi hadde hatt mye større forståelse for det. Jeg tror ihvertfall vi kunne begynt å lete etter de sammenhengene det var meningen vi skulle finne da. Men hvis vi hadde kommet til et nytt kapittel og fått det på samme måte med en annen oppgave til de kapittelet, så tror jeg ikke vi hadde forstått det noe bedre om vi ikke hadde hatt noe. Hvis det hadde vært en lignende oppgave, eller en oppgave knyttet til det vi nå har lært, så kunne vi forstått det, (Sitat 69).

Eit siste interessant resultat i samband med prosessen for oppgåveutforminga, var Grete sitt innspel om at ho trudde utviklinga ville gått raskare om ho og Magne hadde tatt større del i utforminga av dei siste oppgåvene.

En mulig forbedring hadde jo kanskje også vært hvis en hadde planlagt en oppg-, planlagt hele oppgaven sammen uka før, for eksempel? (...) Du har hvertfall hatt litt sånn konkrete eksempler at her kan det være noe elevene kommer til å spørre om. Men hvis jeg hadde utarbeidet det. Så kan det være at jeg også hadde vært, hatt mer fokus på de fallgruvene eller de spørsmåla at jeg kunne i større grad hatt et svar, eller en utfordring tilgjengelig. (Sitat 70, I2).

Dette svarer til det første steget i rammeverket til Stein et al. (2008) og samsvarar med forskinga om refleksjon (Zaslavsky et al., 2003). Sjølv om ikkje Magne motsa dette, såg han det likevel som ein fordel å prioritera tida slik det blei gjort:

Det er litt sånn hva man er på jakt etter. For hvis man er på jakt etter en diskusjon rundt det å lage et opplegg, så gjorde vi jo det første gang, mens egentlig ikke noe særlig de andre gangene. Da diskuterte vi mer hvordan videreutvikle en tanke, som var mer effektivt. (...) Og såpass dårlig tid hadde vi jo at jeg tror det var et lurt valg. (Sitat 71, I2).

Resultata over viser at det var utfordrande å utforma rike oppgåver innanfor rammene av prosjektet, men at det skjedde ei lita utvikling som kom til uttrykk i oppgåve 4. Sjølv om oppgåvene ser ut til å vektlegga dei ulike komponentane av trådmodellen litt ulikt, hadde dei likevel potensiale for å dekkja heile modellen, og slik det går fram seinare, var det difor lærarane sin kommunikasjon som blei avgjerande på dette området. Med tanke på det siste poenget, får Grete støtte av den eksisterande forskinga om refleksjon i at det var ei utfordring at det ikkje var tid til å involvera lærarane meir i utforminga av dei siste oppgåvene.

5.4.2 Instruksjonar, oppsummering og den inquiry-baserte matematikk-undervisinga

På same måte som at refleksjon over praksis i metaperspektiv er essensielt for lærarane si utvikling, er dette òg viktig for at elevane skal bli kjent med den nye rolla si (Kaendler et al., 2015). Magne sa dette slik:

De må trenes i å prate sammen, og de må trenes i å tenke på hva de tenker og være bevisst på hva de tenker. Og læreren må være bevisst på å/og trene på at elevenene skal trene på at de skal være bevisst på hva de tenker. Den biten er jo viktig. Og utfordrende. (Sitat 72, I2).

Sidan arbeidsformene i matematikk ofte er einsformige (Klette, 2013), er det difor viktig at instruksjonar og oppsummeringar blir prega av dei same kommunikative kvalitetane som matematikksamtar elles i utvikling av inquiry-basert undervising (sjå underdel 3.2.3 om kommunikasjon).

I det følgande blir det presentert fire typiske utdrag frå observasjonsnotata frå dei to siste sekvensane som viser at ingen av lærarane utnytter potensialet i instruksjonane til det fulle. Eksempla illustrerer òg det at Magne involverte elevane og brukte metakommunikasjon i større grad enn Grete.

Den første episoden (heretter kalla Utdrag 1) er henta frå den fjerde sekvensen til Grete der elevane skulle fortsetta arbeidet med oppgåve 3 frå førre gong. Etter at Grete hadde lese den oppdaterte skildringa av situasjonen, spurte ho om elevane hadde forstått oppgåva, og moglegvis fordi berre to elevar svarte, bad ho ein elev repetera det ho hadde sagt. Anten på grunn av all småsnakkinga eller på grunn av at ho ikkje syntest denne forklaringa var dekkande, gjentok ho det eleven hadde sagt og fylte ut litt til. Deretter spurte ho: «*hvorfor går det an å få to trekantar?*», og det same mønsteret gjentok seg ein gong til etter at ein elev hadde føreslått pris som årsak. Enda ein gong spurte ho: «*har dere forstått oppgaven?*», og enda ein gong endte ho opp med å gjenta forklaringa til ein elev, truleg på grunn av all småsnakkinga.

Eksempelet viser korleis Grete ofte prøvde å aktivera elevane gjennom spørsmålsbruk i samsvar med Chapin et al. (2013), men òg at ho ofte endte opp med å stå for mesteparten av forklaringa sjølv. Dette hendte òg hjå Magne, men som det følgande utdraget viser, gjekk han mykje lenger i å ansvarleggjera dei ved hjelp av samtalegrepa til Chapin et al. (2013).

Denne episoden òg (heretter kalla Utdrag 2) er henta frå fjerde sekvens og oppgåve 3. Etter å ha presentert den nye situasjonen, bad Magne ein elev repetera kva som var oppdraget, og deretter ein annan ein å dela nokon innleiande tankar fordi han ikkje følgde med. Dette klarer han naturleg nok berre delvis, og Magne bad difor ein annan om å fylla ut. Sidan denne eleven ikkje hadde klart å høyra kva dei andre hadde sagt bad Magne den første eleven om å fylla ut. Då Magne spurte om nokon hadde spørsmål, var det ingen som hadde det.

Sjølv om ingen av lærarane la stor vekt på tilbakemeldingar knytta til arbeidsmåten, er den følgande episoden (heretter kalla Utdrag 3) eitt av nokon få eksempel på at Magne gjorde det, slik Kaendler et al. (2015) tilrår. Situasjonen er frå den femte sekvensen i samband med oppgåve 4.

Etter at elevane hadde fått vita at dei skulle finna den beste måten å finna arealet av trekanten på, bad Magne elevane om å komma med stikkord på kva dei trudde «*Trigonometriforbundet*» kom til å vektlegga i vurderinga. Dette skulle dei komma tilbake til i slutten av sekvensen. Nokon av forslaga var «*begrunnelse*», «*relevans med oppgaven*», «*kort og konsis*» og «*fin føring*». Etter ei stund sa Magne at han var overraska over at det var éin ting dei ikkje hadde sagt. Då ein elev sa at framgangsmåten måtte kunne føra fram til arealet, sa Magne at han syntest det

var kult at dei hadde byrja «å tenke slik Håvard ønsker at dere skal tenke». Han utfylte: «det er det som skjer som er viktig, ikke nødvendigvis at man har riktig svar» med referanse til resonneringsprosessen.

Det som hendte i oppsummeringa (heretter kalla Utdrag 4) av denne sekvensen til Magne, gir eit inntrykk av at dette hadde effekt. Magne bytta side i projektorpresentasjonen og sa at spørsmålet nå var «hva har vi egentlig lært av dette?» Då svarte ein elev: «tenke for seg selv, tenke utenfor boksen». Ein annan trakk fram at ulike metodar kan føra til same, rette svar.

Når det er sagt, er det òg viktig å inkludera at lærarane ofte ikkje fekk eller prioriterte tid til å oppsummera timane, mellom anna i lys av læringsmåla, saman med elevane.

I forlenging av dette er det interessant å leggja til ein kommentar om projektorpresentasjonane som blei brukt for å assistera lærarane i å bruka samtale under instruksjonane (og resten av timenane). Utdrag 4 viser korleis Magne i tråd med dette stiller eit spørsmål med utgangspunktet i ein slik presentasjon. Det same mønsteret som over går igjen her. Potensialet var større for begge lærarane og størst for Grete som ofte berre leste spørsmåla høgt utan å opna for diskusjon rundt dei.

For å oppsummera, tyder resultatata over på at det var utfordrande for lærarane å inkludera elevane meir i samband med instruksjonar og oppsummeringar, men at hovudsakleg Magne demonstrerte ei nemneverdig form for utvikling her.

5.4.3 Gruppearbeida

I samband med gruppearbeida er det tre aspekt som utmerkar seg i lys av forskingsspørsmålet og slik inquiry-basert matematikkundervising blei operasjonalisert i denne studien (sjå kapittel 3.2): kommunikasjonen mellom elevane, rettleiinga frå lærarane og lærane sin observasjon av gruppearbeida.

Av underdel 5.3.2 gjekk det fram at elevane i starten syntest det var utfordrande å forstå kva dei skulle gjera mellom anna i gruppene. Etter kvart auka derimot både engasjementet og kvaliteten på interaksjonane då dei jobba i par eller treargrupper. Det følgande utdraget frå ei treargruppe i Grete sin fjerde sekvens viser korleis elevane praktiserer alle aktivitetane i kategorien «elevane» i figur 2.1. Etter å ha komme relativt langt med oppgåve 3 i førre sekvens, har dei nettopp fått utdelt figur 4.2e og diskuterer korleis dei skal komma fram til arealet av $\triangle ABC'$ medan alle tre lener seg inn over figuren og gestikulerer:

Halldis: (Mens hun skriver): « ABC' er lik. Okey. Vi har den vinkelen her [$\angle BAC'$], så har vi den der [AB], men vi har ikke den [$\angle C'$].»

Astrid Norunn: « BC er 25, så vi vet at den her [BC'] er 25.»

Halldis: «Okey.»

Astrid Norunn: «Og så vet vi at den her [AB] er 17 og»

Peder: «Og den her [AC'] er 12, så da kan vi bruke den nydelige greia som var til i dag»

Halldis: «Nei, den [AD'] er 12, men den går bare til dit [D'].»

Peder: «Da kan vi bruke den der cosinussetningen.»

Halldis: «Nei, den går bare til dit [D']. Den går bare til dit.»

Astrid Norunn: «Den går bare til hit [D'].»

Peder: «Å ja.»

Halldis: «Vi skal ha den til hit [C'].»

Peder: «Men hva gjorde vi sist? Hvordan? Hva hvar det smarte vi gjorde sist? Eller som du [Astrid Norunn] fant ut sist?»

- Halldis: «Men kan vi ikke bruke den? Er det ikke en annen en som? Hva med? Hva er tangens igjen? Det er for å finne vink.»
- Astrid Norunn: «Vi kan jo bruke sinussetningen. Kan vi ikke det?»
- Peder: «Hvor da?»
- Astrid Norunn: «Vi har to sider $[AB, BC']$.»
- Halldis: «Nei, glem det.»
- Astrid Norunn: «Vi har to sider og så har vi én vinkel $[\angle BAC']$ så det betyr at vi kan finne den vinkelen $[\angle C'BA]$.»
- Peder: «Ja, vi kan finne $\angle C'$. [Gjentar:] Men vi kan finne $\angle C'$ òg for vi har. Det her $[AB]$ blir jo det motsatte av $\angle C'$ og den $[BC']$ er 25 og den $[\angle BAC']$ har vi vinkelen til.»
- Astrid Norunn: «Da kan vi finne en vinkel til, og hvis vi har en vinkel til»
- Halldis: «Ja, for da er det den delt på den $[BC'/AB]$. Nei, den delt på den $[AB/BC']$.» (Utdrag 5, fjerde sekvens hjå Grete, oppgave 3).

Etter dette held gruppa fram med å diskutera korleis dei kan skriva verdiane inn i formelen for sinussetninga. Utdraget viser elevar som stiller kvarandre spørsmål («Kan vi ikke det?») og bed kvarande grunngi eller utdjupa forslag matematisk («Hvor da?»). Samarbeidet er effektivt ved at alle bidrar til framgang i utforskinga og i å følga opp ein strategi for å finna arealet ved hjelp av trigonometri. Peder, Halldis og Astrid Norunn evaluerer og bygger på kvarandre sine innspel og idear, men diskuterer òg der dei ikkje er einige, særleg med tanke på cosinussetninga. Denne gruppa lever i stor grad opp til elevrolla i figur 2.1, og det var fleire andre liknande eksempel i fleire av sekvensane i begge klassane.

Det neste utdraget viser ein annan type kommunikasjon som òg var typisk for mange grupper. Dette er henta frå den siste sekvensen til Magne og eit par gutar som hadde slite litt med motivasjonen i løpet av prosjektet. Gutane har jobba med oppgave 4 i omtrent fire minutt og nå prøver dei å finna $\angle AEC$. Her går det fram at Idar og Eirik òg samarbeider om utforskinga av problemet ved å bygga vidare på kvarandre sine tankar. Dei òg stiller kvarandre spørsmål («... er den det?»). Dette er likevel eit eksempel der progresjonen er langt mindre og elevane har mindre utbytte av kvarandre enn i det førre tilfellet. Dei kunne i langt større grad lagt fram og engasjert seg i kvarandre si matematiske tenking i tråd med Chapin et al. (2013) si tilråding og figur 2.1. Etter dette utdraget held dei fram på same måte ei stund til før dei mister motivasjonen og ikkje fullfører. I forhold til starten av prosjektet har dei likevel gjort framsteg.

- Idar: «For å finne $[\angle]ACE$, så må vi ta 180 minus 71.»
- Eirik (mens han noterer): $[\angle]ACE$ er lik 180 minus»
- Idar (har tatt fram kalkulatoren): «71.6.»
- Eirik: «71.6 minus 73.9?»
- Idar: «Ja. Og det er 34.5.»
- Eirik: «34.5»
- Idar (peker på tegningen): «Da har vi den der også.»
- Eirik: «Og da kan vi ta»
- Idar: «Da kan vi ta»
- (Det blir stille i noen sekunder.)
- Eirik: «Nå vet vi ihvertfall den vinkelen der $[\angle]ACE$. Nå kan vi jo finne»
- Idar: «Kan vi ikke finne den der [ukjent] nå? For er det ikke sånn at»
- Eirik: «Men den der $[\angle]AEC$ er ikke rettvinklet, er den det?»
- Idar: «Nei, det er den ikke.»
- Eirik: «Den kan være rettvinklet der $[\angle]AEC$.»

Idar: «Ja, den kan være det.»

Eirik: «Selv om jeg tviler.»

Idar: «Jeg tror ikke det jeg heller. Det ser ikke ut som den er det.»

(Utdrag 6, femte sekvens hjå Magne, Oppgave 4).

Begge utdraga viser elevar som har byrja å ta til seg den nye rolla, sjølv om det er i ulik grad, og dette samasvarar med det inntrykket Grete hadde i avslutningsintervjuet:

Jeg tror de har blitt flinkere til dele tanker. Fordi de har snakka mer sammen (...)

‘Du ville gjort det sånn?’ ‘Ja.’ ‘Hvorfor det? Jeg skjønner ikke?’ ‘Jo, jo.’, ‘Ja, ja.’

(...) Kulturen for å lære mer eller lære av hverandre har blitt bedre. (Sitat 73, I2).

Magne la derimot meir vekt på utviklingspotensialet som kom best fram i det siste utdraget:

De har kanskje ikke vært så gode på å stille hverandre spørsmål, og få den ‘ikke bare meg til dem’, men også debatt mellom hverandre. Det kan være litt min feil og det kan også være litt at man ikke helt vant med den type situasjon. Kanskje man burde gjort et eller annet grep hvordan de sitter, hvordan de får, altså, at de får i oppgave å stille hverandre spørsmål. På en måte tvinge det mer fram i starten. (Sitat 74, I2).

Kommunikasjonsmønstera i gruppene hang tett saman med korleis elevane samarbeida som igjen var påverka av korleis lærarane valte å setta saman gruppene. På den eine sida var det ein del elevar som syntest at det «Kunne være vanskelig å samarbeide» (Sitat 75, Magne sin klasse, spørsmål 5), men på den andre sida var det andre som syntest dei fekk mykje utav det. Etter den fjerde økta til Grete var det for eksempel ein elev som «Lærte mye av samarbeid, høre på andre gruppers innspill og å forklare til hverandre innad i gruppa» (Sitat 76). Med tanke på gruppeinndeling sette lærarane saman gruppene slik at elevane skulle fungera i lag, vera omtrent på same nivå og tenka litt ulikt. Medan somme elevar syntest det var vanskeleg å inkludera alle, syntest andre det var vanskeleg å bli inkludert. Medan somme opplevde at gruppesamtalen gjekk over hovudet deira, sat andre igjen med inntrykket av å vera hjelpelærer. Nokon føretrakk større grupper, medan andre likte par. Det var med andre ord eit stort mangfald i tilbakemeldingane på dette området.

Denne problemstillinga opptok lærarane òg, og i løpet av fleire av planleggingsmøta blei det diskutert korleis gruppene kunne settast saman og forbeholdt. Det følgande sitatet frå avslutningsintervjuet til Magne viser noko av kva han tenkte om dette:

Jeg syns det var en utfordring med å ha treergrupper. Fordi det ble veldig tydelig i en del av gruppene at det var to som jobba og en som så på. Så det var en utfordring det å gå rundt å få de til å faktisk bli med på gruppa og inkludere både at den ene personen skulle prøve å inkludere og de to andre skulle prøve å få den med. Den var litt vrien. Og der er det litt sånn hvordan man velger grupper. Hvor mye er de vandt med å arbeide i grupper. (Sitat 77, I2).

Sidan elevane ikkje hadde noko trening i inquiry-basert matematikkundervising frå før, hadde lærarane ei viktig oppgave i å rettleia dei under gruppearbeida (Kaendler et al., 2015). I samsvaret med kategorien «lærarane» i figur 2.1, var målet at lærarane ved å gi hint til kva elevane kunne diskutera eller retningar dei kunne forfølga, skulle bygga stillas slik at elevane kunne fortsetta arbeidet. Sjølv om det var utfordrande for lærarane i starten og delvis gjennom heile prosjektet å ikkje gi fullstendige forklaringar, viser følgande to typiske eksempel at begge to

etter kvart blei betre på aktiviten, sjølv om Magne i det store biletet var meir konsekvent enn Grete.

I det første tilfellet hjelper Grete ein elev å komma vidare gjennom spørsmål slik at eleven stort sett må komma fram til slutningane sjølv. Nokon av spørsmåla er leiande («Og hvilken vinkel har d da, hvis du tar 180 minus den?»), men på slik samtalen sluttar, ser det ut til at Karina Disha har fått nye idear til framhaldet med oppgåva (oppgåve 3). Sidan Grete overlet ein vesentleg del av jobben til Karina Disha, oppfyller ho til ei viss grad rolla i lærarkategorien i figur 2.1 ved å verdsetta, støtta og bygga stillas for eleven si tenking.

Grete: «Hvordan løser dere? Hva tenkte du på nå?»

Karina Disha: «Jeg bare lurte. Fordi. Eller vi tenkte å prøve arealsetningen. At man snur den og setter inn 100, som er arealet og så 17 og 12 som a og b . Så får vi på en måte med bare én kjent. Det eneste som blir problemet da er at begge disse, både den grønne og den rosa trekanten har 12 og 17, men de kan ikke ha samme vinkel.»

Grete: «Så hvordan var det med de supplementsvinklene, da?»

Karina Disha: «At det alltid er to løsninger?»

Grete: «Alltid er to løsninger.»

Karina Disha: «Så blir den andre løsningen da 180 minus den vinkelen?»

Grete: «Det gjør den. Og da har du ... Og hvilken vinkel har du da, hvis du tar 180 minus den?»

Karina Disha: «Det blir hele den.»

Grete: «Da har du hele den. Og hva kan man bruke det til, da?»

Karina Disha: «Da kan vi» (Grete gikk videre.)

(Utdrag 7, fjerde sekvens hjå Grete, Oppgåve 3).

Eksempelet er henta frå ei gruppe som ikkje fungerte så godt i lag ved at alle dei tre elevane arbeida mykje kvar for seg. Dette er nok òg årsaka til at Grete rettleier berre den eine eleven.

I det følgjande utdraget drøfter Magne oppgåve 3 med eit gutepar. Her ser ein korleis han leier elevane til å undersøka om vinkelen som dei har gått ut frå at er 90 grader, verkeleg er det og utfordrar dei på å sjå nærmare på om det er eit stort problem om han ikkje er det. Her ser ein at Magne i stor grad held seg til den nye lærarrolla i figur 2.1 ved å kasta ut nye idear som elevane kan arbeida vidare med («så dere stoler på tegningen?»). Han støtter dei ved å diskutera spørsmåla deira med dei («Vet vi noe mer?»). Likevel kunne han kanskje, i likskap med Grete i stad, i enda større grad brukt samtalegrepa til Chapin et al. (2013) for å leggja opp til matematisk resonnering av og mellom elevane. Han kunne for eksempel spurt: «Kva tenker du, Njål, om (matematikken i) det Odd Bjarne seier?»

Magne: «Ja, så dere stoler på tegningen?»

Guttene: «Ja.»

Magne: «Har dere noen måte å sjekke om dere kan stole på tegningen eller ikke stole på tegningen?»

Odd Bjarne: «Er det mulig å sette prøve på svaret? Det er kanskje ikke det. For her har vi kommet med koma og sånn og han har bare smelt opp uten noen ting.»

Magne: «Så det kan hende at det er litt unøyaktig uansett?»

Odd Bjarne: «Ja.»

Magne: «Hva om man prøver. Har vi noen andre måter å teste? Hva vet vi om en 90-graders trekant?»

(Njål snakker i bakgrunnen.)

Odd Bjarne: «I forhold til lengden?»

Magne: «I forhold til. Du har allerede brukt Pytagoras.»

Odd Bjarne: «Ja.»

Magne: «Vet vi noe mer?»

Odd Bjarne: «Egentlig ikke. Er det liksom en. Vent, da. Hvis vi later som vi har en til her.»

Magne: «Kanskje. For her ville jeg hatt noen argumenter. Siden dere er objektive [én av tre roller], må dere ha noen argumenter for at den er 90 grader mer enn at dere bare ser det.»

Odd Bjarne: «Må vi finne vinklene på den, da?»

Magne: «Kanskje det kan være en måte å argumentere.»

(...)

Magne: «Men hvis den er bare litt feil er det ikke sikkert at det er så farlig.»

(Utdrag 8, tredje sekvens hjå Magne, oppgave 3).

Elevane sine reaksjonar på denne nye forma for rettleiing var delt i to. På den eine sida syntest nokon at det var demotiverande eller irriterande. Ein elev frå Grete sin klasse syntest at han eller ho «fikk ikke den hjelpen jeg trengte. Da mistet man helt motet til å jobbe videre og det ble bare vanskeligere og vanskeligere» (Sitat 78, spørsmål 5). På den andre sida var det andre som såg det som ein fordel. For André var det viktig å få resonnera på eiga hand:

hvis de hadde sagt hva som var riktig og galt så hadde ikke matematikken i oss begynt å blomstre på en måte, vi hadde ikke klart å forstå og tenke selv fordi da hvis jeg tenker på en måte og så sier de at det er feil, da stopper hele den prosessen, (...), mens viss de ikke sier svaret og hva som er rett og galt, så er det på en måte du som må, du må på en måte gjøre det på egen hånd. Du må på en måte bevise hvorfor du har rett. (Sitat 79, André).

Den andre oppgåva til lærarane var i samsvar med rammeverket til Stein et al. (2008) å sikra seg observasjonar som dei kunne bygga matematikksamtalen på. Gode observasjonar var kva trigonometriske samanhengar elevane brukte i strategien sin og korleis dei argumenterte for å oppnå ei felles forståing av matematikken i gruppa. I artikkelen framstår dette som ei adekvat oppgåve, men i denne studien gav lærarane heile vegen uttrykk for at dei syntest det var utfordrande å få med seg kva elevane gjorde. Grete sa det slik i avslutningsintervjuet:

Det har vært vanskelig å på en måte oppfatte alt som har foregått. Man kan jo aldri oppfatte alt. Men å på en måte oppfatte nok. (...) Det med å rett og slett høre mer på gruppene og virkelig få tak i hva er det de egentlig de jobber med. (...) Men hvorfor har de tenkt akkurat sånn som de har gjort? Også at en rett og slett fått mer plenumssamtaler (...) men der har jeg ikke helt oversikt over. hva som skjedde i alle disse gruppene. (Sitat 80, I2).

Magne gav ei liknade forklaring der han utdjupa kor vanskeleg det var å finna ein måte for å notera ned observasjonane:

Det er jo sånn interessant greie det å gå rundt. Jeg vet ikke om jeg synes jeg fikk det [bedre] til i slutten enn i starten, med den der biten med å gå rundt å følge med på hva de sier. (...) Nei, så den tanken, og det er for såvidt en interessant tanke, det med å skrive ned og sånn, men jeg har nok større tro på at jeg skal klare å huske alt i hodet. (...) Og så følte jeg aldri at det jeg fikk med meg passa inn i et system. (...)

Det var der jeg skrev. Og det er jo litt sånn typisk at man må nesten være forberedt på at det du får høre ikke er det du forventer å høre, i tillegg til kanskje noe av det du forventer. Men det du forventer er de ofte ferdig med å prate om før du rekker å komme å høre det. (Sitat 81, I2).

Dette samsvarar med Grete sine erfaringar, og i det følgande skildrar ho ytterlegare korfor ho oppfatta dette som så krevande:

For når man går fra gruppe til gruppe så har man litt fokus der og så får man med seg akkurat det de snakka om da, men så har du ikke fått med verken det som skjer før og det som skjer etter, (...) Selv om du også laget et skjema hvor jeg skulle plote inn hva de forskjellige gruppe jobba med, så klarte jeg ikke helt, jeg klarte ikke å følge opp det, jeg klarte ikke å, jeg var på en måte kanskje for kort på hver gruppe eller. Det ble sånn bruddstykker, og dermed så ble min samtale med elevene litt sånn tilfeldig på en måte. (Sitat 82, I2).

Ho fortalte så om ein episode der ho hadde brukt observasjonen at ei gruppe hadde brukt co-sinussetninga i plenum, men der dei hadde gløymt det fordi det ikkje var ein sentral del av løysinga deira.

Det denne delen dokumenterer er at sjølv om elevane syntest det var utfordrande i starten å finna fram til dei nye rollene, viste mange ei større eller moderat utvikling i løpet av perioden. Ein liknande tendens gjaldt òg lærarane sine tilbakemeldingar, men å observera gruppearbeida blei verande ei utfordring frå start til slutt. Det er naturleg å gå ut frå at desse utviklingstrekkka var ein utslagsgivande faktor ved at framsteg i ein undervisningssekvens la til rette for vidare utvikling i ein seinare sekvens.

5.4.4 Heilklasesamtalen

Gruppearbeida blei konsekvent etterfølgd av heilklasesamtalar moderert av lærarane i tråd med modellen til Stein et al. (2008), og det sentrale spørsmålet her er kva utfordringar og utvikling lærarane og elevane eventuelt erfarte i samband med denne samtalefasen.

I slutten av perioden gav begge lærarane uttrykk for at dei syntest det hadde vore utfordrande å leia matematikksamtalane i tråd med det nye kommunikasjonsidealet. I dei følgande sitata knytter både Magne og Grete dette indirekte til oppgåvene og samtalegrepa til Chapin et al. (2013) så vel som dei to lærar- og elevrolla i figur 2.1:

Kanskje litt sånn viktigheten av å tenke over hva jeg sier. Spesielt i den der felles-samtalen som på en måte er vanskelig. Passe på at man ikke, ikke på en måte, sier at noe er rett eller galt, og ikke på en måte, ja heller på en måte trekker fram det som er spennende med tanker, enn det som er spennende med svar. Det er en vanskelig ting, for elevene også. (Sitat 83, Magne, I2).

Det med rett å slett å få elevene til å dele hva de har gjort og prøve å få de til å lære av hverandre, prøve å få de til å lytte til hva de andre har gjort. Og det har jeg jo, og akkurat det har jeg jo syntes har vært vanske-, kanskje vanskeligst sjøl, da, med å få til i en klasse [-samtale] fordi at jeg har ikke helt. Det har vært vanskelig å på en måte oppfatte alt som har foregått. (Sitat 84, Grete, I2).

Sjølv om dette var særleg sant og heldt fram med å vera dekkande skildringar for resten av prosjektet, blir det under lagt fram eksempel som viser at lærarane blei betre moderatorar, mellom anna gjennom auka bruk av samtalegrep. Dette skildra Grete slik:

Jeg syns jo selv det ble lettere å prøve å føre den dialogen. At jeg ble mer bevisst på hva jeg skulle spørre om, for eksempel, eller sånne ting. Vi snakka jo litt om dette her med hvilke spørsmål. (...) For å utfordre de til å tenke sjøl. (Sitat 85, I2).

Øg hjå elevane endra situasjonen seg, men i lys av dei fire måla Chapin et al. (2013) legg fram (sjå underdel 3.2.3), avgrensa denne utviklinga seg hovudsakleg til at elevane oftare uttrykte og delte tankane sine. Sjølv om det overordna inntrykket er at det her var eit svært stort utviklingspotensial, var det òg døme på dei tre andre måla, nemleg at elevane tok stilling til og utdjupa si eiga og andre si matematiske tenking. Ein elev i Grete sin klasse uttrykte dette potensialet slik etter den fjerde sekvensen: «Få alle til å være med» (Sitat 86).

Ein episode (heretter referert til som Utdrag 9) i Magne sin klasse som viser korleis han etter kvart brukte samtalegrepa til Chapin et al. (2013) skjedde i den fjerde undervisningssekvensen. Etter at dei hadde komme fram til at dei ikkje kunne bruka pytagoras eller tangens for å finna $\angle C$ i oppgåve 3 fordi han ikkje er rettvinkla, føreslo ein elev å heller bruka sinussetninga som han sa gav 41.8 grader. Medan eleven forklarte korleis han tenkte, teikna Mange på figuren og skreiv opp formelen på tavla. Då ein annan elev spurte Magne om han kunne forklara, etterlyste Magne ein annan elev som kunne gjera det. Etter ei lita stund peika Magne ut Anette som sa: «jeg ville begynt med inverssinus utenfor parantes» før Magne avbraut ho og bad henne begynne med «linja før». Medan ho forklarte skreiv Magne følgande på tavla:

$$\frac{\sin 78.6^\circ}{25} = \frac{\sin C}{17}$$

$$C = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 78.6^\circ}{25} \cdot 17 \right)$$

Mange elevar syntest det var vanskeleg å forstå denne framgangsmåten, og Magne bad difor elevane tenka ut andre måtar å gjera det på. Ein ny elev forklarte så korleis ein kan gå vidare frå den første linja på ein meir stegvis måte. På førespurnad frå Magne, forklarte enda ein ny elev forskjellen mellom desse to ved at forslaget til Anette gav eit meir nøyaktig svar sidan ein då ikkje rundar av undervegs.

Her gjekk det fram korleis Magne brukte samtalegrep for å legga til rette for den nye elevrolla i figur 2.1. Samanlikna med samarbeidet mellom Peder, Halldis og Astrid Norunn i Utdrag 5, er ikkje måloppnåinga i forhold til idealet like høgt, noko som truleg heng saman med mellom anna at det kan opplevast som høgare terskel for å delta i plenum enn i grupper. Sjølv om det var eit vesentleg forbetningspotensial, la Magne til rette for at elevane engasjerte seg i og bygde vidare på den matematiske tenkinga til kvarandre, som må oppfattast som eit markant framsteg (Chapin et al., 2013). Dessuten visar det at han bad ein elev samanlikna dei to tilnærmingane at han hadde byrja å bruka det siste steget i modellen til Stein et al. (2008).

Den neste episoden (heretter kalla Utdrag 10) er henta frå oppstarten av heilklassesamtalen i samband med andre del av oppgåve 3. Eksempelet er typisk ved at det synleggjer at Grete jobba hardt for å få elevane til delta med sine tankar og løysingar i samtalen, men òg ved at spørsmåla ho brukte fører til korte svar utan vesentleg matematisk resonnering, noko som delvis òg gjaldt i Magne sitt tilfelle. Sjølv om ho på denne måten hadde eit markant utviklingspotensial i lys av idealet til Chapin et al. (2013) og i figur 2.1, lukkast ho likevel i å få elevane til å dela tankane sine rundt opnare problem i samsvar med figur 2.1. Her ser ein òg eksempel på at ho brukte observasjonsnotat som utgangspunkt for samtale, i tråd med Stein et al. (2008), sjølv om ho sa ho syntest det var vanskeleg.

Basert på notata sine bad Grete gruppa til Peder, Halldis og Astrid Norunn forklare «hva dere gjorde, hva dere tenkte først». Halldis forklarte at strategien deira gjekk ut på å finna arealet av

$\triangle ABC'$ og Peder sa at dei då først fann $\angle BAC'$ ved hjelp av arealsetninga og følgande uttrykk:

$$100 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 17 \cdot \sin A$$

Halldis sa at svaret blei 78.6 grader. Truleg fordi gruppa hadde rekna ut $\angle BAC$, og ikkje $\angle BAC'$, som dei hadde tenkt, spurte Grete resten av klassen: «hvilken vinkel er det som er 78.6 grader?» Mali som er på ei anna gruppa, svarte «A, men vi fikk 78.8 grader» som medførte at fleire elevar ropte ut svar med ulike tal på tidelsplassen. Grete repeterte så spørsmålet, og ein ny elev sa at det er $\angle BAC$. Dette fekk Grete til å be elevane forklara kva supplementsvinklar er og kva det har med denne situasjonen å gjera. Mali fekk på nytt ordet og forklarte korleis ein kan rekna ut ein supplementsvinkel. Grete oppsummerte med at dette er eit av dei sentrale poenga her før ho gav ordet til ei ny gruppe som ho hadde notert seg at bruke arealsetningen, for å komma vidare.

I denne samanhengen er det òg interessant å trekka inn aspekt ved dei avsluttande stega i modellen til Stein et al. (2008). Tidlegare har dei to første stega blitt kommentert, og dei tre gjenstående er utvelging, sekvensiering og kopling av elevane sine bidrag eller strategiar ut frå dei to føregåande. Med nokon få svake unntak viser observasjonane at lærarane ikkje brukte tid på å velga ut og strukturera dei få observasjonane dei hadde før heilklassemøtane. Når det derimot gjeld den siste aktiviteten om å knytta saman, er det vel verdt å sjå kva både elevane og lærarane tenkte om dette. I samband med det er det viktig å presisera at for å sikra deltaking frå fleire elevar blei lærarane og eg samde om at dei skulle be elevane berre presentera eitt steg i løysinga si om gangen, for eksempel korleis dei starta. Tanken var at sjølv om presentasjonane blei meir fragmentariske, så ville fleire elevar sleppa til og ein kunne fokusera meir på diskusjon, resonnering og forståing. Elevane i fokusgruppa var tydelege på at dei såg fordelar og ulemper ved dette. André sa for eksempel:

Tanken bak det var veldig bra syns jeg; det at vi lærer forskjellige måter å gjøre oppgaver på. Men jeg synes ikke. Jeg synes vi gjorde det litt på feil måte fordi. Når for eksempel Mali kom med sin. Jeg synes ikke det var så klart. Hadde hun på en måte sagt: 'sånn her gjorde Mali det'. (...) Og så tatt min måte å gjøre det på og lært hun min måte å gjøre det på. (Sitat 87).

Anette la til at «Når det er mange sånne metoder som blir tatt opp også, så husker du ikke mer enn to uansett» (Sitat 88), medan ein elev frå Grete sin klasse gav følgande respons på det femte spørsmålet i spørreundersøkinga: «Kunne være vanskelig å henge med, fordi om du ikke forstod hva en elev forklarte gikk læreren fort videre» (Sitat 89).

Dette la lærarane merke til, og Magne oppsummerte det slik i avslutningsintervjuet:

Så det har nok vært litt sånn skylapptendenser på elevene og at nå snakker de, så da må jeg bare tenke hva skal jeg si når jeg blir spurt etterpå. I stedet for å tenke: nå snakker de. Hva sier de som jeg kan lære av? (Sitat 90, I2).

Resultata knytta til heilklassemøtane viser at det var utfordrande for lærarane både det å leia heilklassemøtane i samsvar med dei fire oppgåvene og dei tilsvarandre samtalegrepa til Chapin et al. (2013) og å følga dei avsluttande stega i modellen til Stein et al. (2008). Det var òg utfordrande for elevane å fylla sine nye roller. Når det er sagt, var det òg ei moderat utvikling i løpet av prosjektet i form av ein mindre auke i bruk av desse «verktøya».

5.4.5 Tidsbruk i klasserommet

å halda seg til tidsplanen i løpet av undervisinga viste seg å bli ei vesentleg utfordring for begge lærarane. Inquiry-basert matematikundervising er (på kort sikt) meir tidkrevande enn tradisjonell undervising, slik ein elev skreiv i samband med det fjerde spørsmålet i undersøkinga: «Jeg

likte de kreative tekstoppgavene, og selve undervisningsmetoden syntes jeg var bra. (...) Når man lærer flere måter og regne på er man i stand til å løse fler oppgaver. Dette krever selvsagt mer tid» (Sitat 91). I avslutningsintervjuet knytta Magne denne problematikken til kor mykje elevane ønska å delta og at dette er vanskeleg å forutsjå:

Det var åpenbart også en sånn ting som ikke helt fungerte som det skulle, altså det falt litt ut sånn tidsmessig. De er gira på å prate og det veldig mye man kan få hørt, hvis man har ubegrensa tid, men det har man jo aldri. (...) Og det å planlegge hvor mye tid de burde få, er jo også en sånn vanskelig ting, som forsåvidt du har tatt de mest av, som er sånn, ja, sikkert litt sånn øvelse å kjenne si gruppa si og kjenne oppleggene og kjenne hva er det man føler man vil ha utav det. Det er jo veldig varierende hvor pratesalige folk er. (Sitat 92, I2).

Utfordringar som desse, blei jamnleg diskutert i planleggingsmøta, og begge lærarane engasjerte seg i diskusjonen om korleis ein best kunne komma ho i møte. På dei første møta var fokuset retta mot korleis dei skulle klara å halda tida, og det var då lærarane blei samde om å prøva stoppeklokke. Etter litt slavisk bruk i første sekvens, blei dette litt vatna ut. I dei siste møta hadde fokuset skifta til korleis lengda på gruppearbeida kunne vera nok til å observera kva dei ulike gruppene jobba med.

Eit eksempel på at det var vanskeleg å halda tida finn ein i den fjerde undervisningssekvensen. Sidan elevane allereie hadde jobba med oppgåve 3 i grupper førre sekvens, var planen å avgrensa gruppearbeidet til ti minutt denne gongen. Likevel endte Grete og Magne opp med å bruka høvesvis 38 og 25 minutt. Lærarane forklarte at det var ein kombinasjon av at elevane trong tid på å forstå oppgåva og at det var spennande å gi dei litt ekstra tid når dei var så godt i gang. Dette blei likevel ikkje noko problem i den siste sekvensen fordi den inquiry-baserte delen då var lagt til siste halvdel av økta.

I tillegg til det innleiande sitatet, gir mange av tilbakemeldingane på undervisinga frå elevane eit bilete på situasjonen. I samsvar med korleis oppfatningane deira utvikla seg, syntest dei fleste at det i starten gjekk med for mykje tid til prosjektundervisinga i forhold til den eksisterande, men etter kvart endra dette seg drastisk for mange. Ein elev hjå Grete syntest allereie etter andre sekvens at det var positivt at «Vi hadde mer tid på oppgaven» (Sitat 93), og i etter fjerde sekvens hjå Magne var det ein annan som skreiv: «I wish: Må ha mer tid til diskusjon» (Sitat 94).

Resultata her viser at å disponere tida openbert var ei utfordring for lærarane. Ser ein det i samanheng med elevane sine tilbakemeldingar om at dei syntest «metoden» var for tidkrevande i underdel 5.2.6, ser det ut til at denne utfordringa har bidratt til utvikling av negative oppfatningar. På den andre sida var det òg elevar som ønska å bruka meir tid til inquiry. Dette temaet heng saman med tidsbruk i prosjektet meir overordna, som blir tatt opp i neste del.

5.5 Trekk ved utviklingsprosjektet

Denne nestsiste delen av dette kapittelet er hovudsakleg motivert av dei fem kjenneteikna på prosjektet (sjå underdel 4.2.2) og liknande forskingsprosjekt (sjå del 3.1). I tre delar blir det basert på resultata drøfta korvidt eigenskapar ved utviklingsprosjektet forsterka eller hindra utviklinga av inquiry-basert matematikkundervising i dette caset.

5.5.1 Kjenneteikn 1: Det korte tidsrommet

Det at prosjektet blei gjennomført over eit svært kort tidsrom såg ut til å medføra to utfordringar. For det første meinte både lærarane og elevane frå fokusgruppa at fire veker er kort tid å utvikla ny praksis på. I det avsluttande intervjuet la Grete stor vekt på at elevane treng tid på å modnast inn i dei nye rollene:

Og nå har jo vi holdt på egentlig fem ganger, og det er klart at hadde man gjort det to ganger i måneden eller gjennom et helt skoleår. For jeg ser jo på elevene at det er jo en prosess for de å tenke, å begynne å tenke annerledes. (...) Vi har liksom sagt at nå er det et prosjekt. Det er en begrenset periode. Det er jo kanskje greit nok. Men det er jo litt sånn modning også, det å finne utav det sammen. Og det er klart at hadde man hatt lengre tid eller ikke gjort det hver gang så hadde du kanskje endt opp litt andre steder, da, selv om jeg syns at elevene, de har jo vært mer og mer med, også fordi de har blitt trygge i istuasjonen. (Sitat 95, I2).

Magne trekk fram det same, men legg i tillegg vekt på at læraren òg treng tid på å komma inn i tankegangen både i planlegginga og gjennomføringa:

Utfordringen er selvfølgelig at det tar tid, både det å utvikle og få det til, for læreren sin del før og etter, og det i timen at man må bruke en del tid for å føle at både lærer og elev er komfortabel med tankegangen. At det ikke er noen sånn magisk greie man kan trekke fram og så blir alle mye smartere. (Sitat 96, I2).

Dette heng saman med Sitat 72 der han skildrar korleis metakommunikasjon er nødvendig.

Utan noko form for innspel frå meg, framheva Saga i fokusgruppa òg at tidsrommet var for kort: «Jeg føler også at det fungerte bra, men at det kunne liksom fungert bedre hvis vi holdt på med det i lengre tid» (Sitat 97) til uttalt støtte frå Mali og Anette, der sistnemnte la til at dei då «[h]adde blitt vant til det» (Sitat 98).

For det andre var det lite tid til å planlegga og evaluera undervisinga, noko Magne uttrykker i det følgande:

Det hendte jo jeg skulle jo ønske jeg kunne vært litt bedre forberedt av og til, for det hender jo at man ikke helt får tid til det. Og sånn blir det jo når man driver å lager opplegg dagen før og så blir de ikke helt ferdig og så rekker man ikke helt å få sett gjennom alt. Så kanskje det. Men jeg tror ikke det var noe veldig påvirkende. Jeg håper ikke det. (...) Jeg syns generelt det virka som vi gjorde et godt stykke arbeid som jeg ikke helt ser for meg hvordan vi skulle gjort det annerledes. (Sitat 99, I2).

Sjølv om han ikkje trur at dette påverka gjennomføringa noko særleg, tyder Sitat 70 av Grete på at det kunne vore ein stor fordel om me hadde hatt meir tid på å planlegga oppgåvene og undervisinga generelt i større grad saman. Dette er mitt inntrykk òg.

Ut frå desse resultatata ser det ut til at det korte tidsrommet var ei utfordring. Når det er sagt, tyder dei mange andre teikna på utvikling i dette resultatkapitlet på at situasjonen krever grundigare drøfting før ein kan konkludera med ein slik påstand. Difor kjem drøftinga tilbake til dette.

5.5.2 Kjenneteikn 2 og 3: Ressursar og rettleiing basert på forskning

I praksis hang ressursane og rettleiinga mi så tett saman at det er naturleg å samla dei tilhøyrande resultatata i same del og langt på veg ta dei til inntekt for kvarandre. På den eine sida hadde

lærarane store forventningar til rettleiinga i starten av perioden. Grete knytta dette hovudsakleg til å utforma matematikkoppgåver i samsvar med kriteriene til Hedrén et al. (2005):

Jeg håper du kan hjelpe til med å lage disse oppgavene. Og ha oppgaver. For du har jo satt deg mye mer inn i selve temaet og hvilken type oppgaver som kan være lurt å gi gitt at de skal, i gåseøyne, lære det og det. (...) Det tror jeg kan bli utfordrende for meg. (Sitat 100, I1).

Magne var inne på det same, men la, i samsvar med tilrådinga frå Nam et al. (2013) i underdel 3.1.1, større vekt på verdien av å få tilbakemeldingar frå ein mentor:

Jeg har forventninger om å få noen ideer som jeg på en måte aldri har tenkt på før. Det er på en måte sånn som jeg gleder meg til. Én til som på en måte har noen gode ideer, forhåpentligvis, (...) Og så har jeg håp om å få litt konkret tilbakemelding på hva du tenker om hvordan dette skal gjøres og hvordan det da blir gjort, for jeg kommer sannsynligvis relativt fort hvis jeg føler det ikke fungerer, så kommer jeg til å gjøre det sånn som jeg ville gjort det uansett. (...) Så jeg håper jo på en måte på å få kritikk. Fordi det er morsommere å få kritikk, enn å bare få. (Sitat 101, I1).

Desse tankane utfyller dei positive oppfatningane lærarane hadde om utvikling som matematikklærer i underdel 5.2.3.

På den andre sida medførte desse kjenneteikna òg utfordringar. For det første, gav Grete uttrykk for at det var vanskeleg å ta inn og omsetta kunnskapen i ressursheftet til praksis:

For det ressursheftet har også vært bra, men det har jo også vært mye informasjon i det som jeg ikke på en måte har hatt tid til å sette meg inn i absolutt alt, (...) For det har egentlig vært ganske mye å tenke på (...) Dette er du flink på, og det er helt nytt for meg. (Sitat 102, I2).

Dette knytta ho til rettleiinga, og i det neste sitatet ser det ut til at ho meiner denne vog opp for utfordringane med ressursheftet:

Og du har formidla: 'Nå skal vi fokusere på samtalen. Pass på at den blir så god som mulig.' Og så har jeg: 'Hvordan skal jeg gjøre det?' Nei, så det har vært spennende, altså. (Sitat 103, I2).

Magne kommenterte ikkje dette eksplisitt, men gjennom prosjektet såg det ut til at han støtte på fleire av dei same utfordringane som Grete med å følga opp alle dei forskingsbaserte tilrådingane i praksis, slik det gjekk fram av del 5.4 for eksempel samtalegrepa til Chapin et al. (2013).

Sjølv om korkje Grete eller Magne nokon gong kommenterte det, var det òg, for det andre, ei utfordring at min kompetanse i inquiry-basert undervising, trass enkelte praksiserfaringar, hovudsakleg var sett saman av kunnskapane presentert i dei innleiande kapitla her. Det er rimelig å gå ut frå at dette svekka den positive effekten Nam et al. (2013) fann i sin studie om mentoring. Som følge av dette lærte eg òg mykje av dette prosjektet og i del 7.1 skildrar eg fleire ting eg ville gjort anleis.

Ut frå lærarane sitt perspektiv tyder resultatata i denne delen altså på at det har vore utfordringar knytta til det andre og tredje kjenneteiknet ved prosjektet. Når det er sagt, tyder mellom anna utviklinga som kom til syne i klasserommet (sjå del 5.4) på at situasjonen er meir kompleks og at desse to kjenneteikna har vore utslagsgivande faktorar for vesentlege sider av utviklinga. Eksempel på dette er den gradvise auken i bruk av samtalegrepa til Chapin et al. (2013) som såg ut til å føra til at fleire elevar deltok i heilclassesamtalane. På grunn av dette drøfter kapittel 6 dette nærmare.

5.5.3 Kjenneteikn 4 og 5: Praksisnær refleksjon i samarbeid

Det fjerde og det femte kjenneteiknet heng òg tett saman, og dei blir difor handsama tilsvarende som dei to føregåande. Allereie frå starten av signaliserte lærarane positive forventingar til å reflektera saman over tidlegare og kommande undervising. Grete sa dette tydelegast:

Og det er klart at det å ha en diskusjon på det: ‘Hva skal vi gjøre?’, ‘Hvorfor skal vi gjøre det sånn?’ Det tror jeg blir bra. (...) Én pluss én er tre. Er det ikke det man sier i matematikk? Hvis man deler tanker, så finner man gjerne på nye ting, da. Eller finner. At ikke det jeg tror eller det jeg mener er det som er riktig. Men det å dele erfaringer, dele ideer, dele kompetanse, så får man jo utvikla seg da. Så derfor har jeg veldig sans for samarbeid. (Sitat 104, I1).

Magne på si side fokuserte mest på samarbeid: «Jeg er veldig glad i å samarbeide, men jeg er mest glad i å samarbeida med andre som er gode til å samarbeide» (Sitat 105, I1), noko han utdjupa med å leggja mest vekt på arbeidsinnsats.

I avslutninga av prosjektet kom det fram at desse forventingane hadde blitt meir enn innfridd. Begge lærarane såg den praksisnære refleksjonen i fellesskap som ein av dei viktigaste utslagsgivande faktorane for utviklinga deira då dei blei spurt om å trekka fram slike. Dette samsvarer med nøkkelrolla Zaslavsky et al. (2003) tilskriv refleksjon i profesjonelle utviklingsprogram og Nam et al. (2013) si skildring av refleksjonsprosessen som ein måte lærarar utviklar nye oppfatningar, ny kunnskap og eit nytt repertoar av undervisningsverktøy:

Jeg tror det viktigste som jeg. Det er de samtalen vi har hatt. Egentlig at vi har sett på oppgaven vi skulle lage eller hvordan gikk egentlig denne undervisningen, ikke sant, og så dele de erfaringene der, tror jeg kanskje jeg har lært mest av. (Sitat 106, Grete, I2).

Kanskje egentlig en litt sånn, kombinasjon selvfølgelig av å gjøre dette i klasserommet, men vel så viktig det å diskutere hva har skjedd, hva du sett, hva har Grete gjort, hva har jeg gjort, hva er liket, og hva er forskjell. Altså det å diskutere hva vi faktisk har gjort og hva som man skal gjøre neste gang, er veldig spennende. (Sitat 107, Magne, I2).

Her knytter Grete det tydelegast til matematikkfaget ved å fokusera på utforminga av dei rike oppgåvene med heilt andre kvalitetar enn vanlege lærebokoppgåver. Magne utdjupa ytterlegare korfor han meinte dette og gav i tillegg uttrykk for at det kanskje kunne vore ein fordel med enda fleire deltakarar:

For det viser seg at når vi sitter tre sammen, så kommer det noen ideer, og så kommer det flere, og så kommer det, også kaster man ut en ide og så blir det omgjort og så kommer det noe annet. Kanskje man kunne vært en eller to til, så hadde man fått enda flere ideer. (Sitat 108, I2).

Sidan planleggingsmøta var produktive frå start til slutt, var utviklinga i denne faktoren moderat. Likevel blei det brukt gradvis meir tid på desse møta til at lærarane kunne dela erfaringar frå praksis og diskusjon av desse i plassen for å prioritera diskusjon rundt tilrådingane i ressurshftet. Eitt eksempel på dette som òg viser korleis dette kunne påverka neste time, var då Magne føreslo at elevane i samband med oppgåve 4 kunne få som ekstraoppgåve å vurdere kor mange steg dei kunne klart seg utan. Fordi han hadde eit forhold til ideen, gjennomførte han det i praksis. Eit anna eksempel er då lærarane sine refleksjonar over den første delen av oppgåve 3

om arveoppgjeret, gjorde at dei føreslo å gi meir informasjon om caset og oppdraget i den neste sekvensen mellom anna ved å innhenta ein ny advokat med ei ny skisse.

Kort oppsummert tyda svært mykje på at refleksjonsmøta i samsvar med eksisterande forskning var ein klar og tiltakande utslagsgivande faktor for utviklinga i prosjektet ved å leggja til rette for fortløpande praksisnært arbeid med undervisinga. Den største utfordringa i denne samanhengen var det avgrensa tidsrommet som har blitt omtalt tidlegare.

5.6 Status to månader seinare

For å kunna gi eit betre svar på forskingsspørsmålet, blei lærarane bedne om å svara skriftleg på to spørsmål i overkant av to månader etter at prosjektet blei gjennomført. Sidan dette var heilt i slutfasen av skrivinga av denne oppgåva, blir resultatata av dette lagt til som ein eigen del av dette kapittelet.

I svaret på det første spørsmålet heldt begge lærarane fast på oppfatninga av inquiry-basert undervising som relevant i norsk vidaregåande matematikkopplæring. Grete skreiv mellom anna følgande:

Inquiry-basert undervising er relevant i vidaregåande matematikkopplæring. Elevene får utfordret seg selv på en annen måte enn å bare 'høre på' en forelesning fra lærer og deretter gjøre oppgaver. Med inquiry-basert undervising er oppgavene mer åpne slik jeg ser det, og veien er viktigere enn målet. Elevene må argumentere for hvordan de vil løse oppgaven og må høre på medelevers strategier og tenkemåter. (...) Dette tror jeg er nyttig for læring. (Sitat 109).

Her går det fram at ho har langt meir kunnskap om inquiry-basert matematikkundervising enn ho hadde i starten, i lys av figur 2.1 og operasjonaliseringa i del 3.2, men det er uklart om ho ser inquiry som eit alternativ eller tillegg til vanleg undervising. Ut frå samtalanene under gjennomføringsperioden, er det rimeleg å gå ut frå det siste. Dette var Magne i det følgande meir tydeleg på i tillegg til at han òg demonstrerer god kjennskap til eigenskapar ved inquiry:

Om det passer seg i matematikkundervisningen er det nok heller ikke tvil om. Det er en fin måte å ta faget litt utover i bredden. Elevene kan møte mer åpne problemstillinger, de kan få mulighetene til å fokusere mer på hva de tenker og det kan virke motiverende som en variasjon. (Sitat 110).

Når det gjeld det andre spørsmålet, om korleis dei eventuelt hadde vidareført nokon av ideane i prosjektet, var det paradoksalt nok inquiry som perspektiv (jf. Wells, 1999) noko av det dei hadde tatt med seg vidare. Dette stadfester indikasjonane i sitata i del 5.1 om overblikk. Grete legg i det følgande stor vekt på samarbeid og samtale som tilnærming til matematikk:

Jeg har forsøkt å være mer bevisst i å gi elevene mer åpne oppgaver, eller sagt at spesifikke oppgaver egner seg godt til å diskutere fremgangsmåter med 'naboen'. Da vi også driver med omvendt undervising er det ikke mye tavlebruk fra min side, men vi har gjerne diskutert i plenum, og jeg har forsøkt i større grad å få flere elever til å komme med innspill og å høre på hverandre. Jeg har alltid likt samarbeid og tror elevene lærer mye av det, det har jeg fortsatt oppfordret dem til å gjøre. (Sitat 111).

Magne òg trur inquiry har prega kommunikasjonen hans, med implisitt referanse til samtalegrepa til Chapin et al. (2013). Han legg i tillegg vekt på å vidareføra måten inquiry blei organisert

rundt dei rike oppgåvene og den tredelte strukturen (Hedrés et al., 2005; Stein et al., 2008, jf.) i prosjektet:

Har helt sikkert videreformidlet noe av det vi arbeidet med rundt plenumssamtalen. Dette er nok mest ubevisst. Gjort noen litt tilsvarende smågreier, men ikke like stort. Veldig lyst til å trekke dette frem igjen neste skoleår og muligens teste det i flere tema. (Sitat 112).

Kapittel 6

Drøfting

Føremålet med dette kapittelet er, slik tittelen viser, å drøfta resultatata frå førre kapittelet nær-
mare for å gi eit djupare og meir nyansert grunnlag å konkludera på. Dette blir gjort i fire delar
som tilnærmar seg forskingsspørsmålet frå ulike utgangspunkt. Den første delen ser matema-
tikkundervisinga som utvikla seg gjennom prosjektet, i heilskap og i forhold til inquiry-basert
matematikkundervising slik denne tidlegare har blitt definert, skildra og operasjonalisert (sjå
kapittel 2 og ??). Den neste delen fokuserer på utviklinga av denne undervisinga gjennom pro-
sjektet i lys av Gueudet og Trouche (2012) sitt dokument somgrep og vurderer korleis lærarane
etter kvart utvikla nyttegjeringsskjema for ressursar på ulike nivå. Etter dette blir søkelyset ut-
vida til å omfatta alle dei tre kategoriane i forskingsspørsmålet, nemleg utviklingstrekk, utford-
ringar og utslagsgivande faktorar. Her blir dei viktigaste resultatata frå førre kapittel oppsummert
og samanlikna med forskinga som blei presentert i del 3.1, særleg TBM-LBM- og PRIMAS-
prosjekta som har mykje til felles med denne studien. Den siste delen drøftar så samanhengar
mellom dei ulike sidene av den profesjonelle utviklinga til lærarane i lys av endringsmiljømo-
dellen til Clarke og Hollingsworth (2002). Av plassomsyn er referansane til resultatkapittelet
korfatta og eksemplariske.

6.1 Matematikkundervisinga i heilskap i forhold til idealet

Ei heilskapeleg vurdering av den utvikla matematikkundervisinga i forhold til inquiry-basert
matematikkundervising som ideal, er eit viktig utgangspunkt for svaret på forskingsspørsmålet.
Drøftinga tar først utgangspunkt i korleis dei to definisjonane frå TBM-LBM-prosjektet og
PRIMAS-prosjektet kom til uttrykk gjennom prosjektet. Deretter skiftar fokuset til kjenneteikna
på inquiry-basert matematikkundervising, slik dei mellom anna kjem til uttrykk i figur 2.1, og
korleis Grete og Magne si undervising samsvarer med denne.

6.1.1 Lærarane si tolking av inquiry-basert undervising i matematikk

Dei to ulike tilnærmingane det er snakk om her er Wells (1999) si forståing av inquiry som eit
perspektiv og den meir praksisnære definisjonen til Maaß og Doorman (2013). For drøftinga sin
del er skilnadene mellom desse aksentuert, så for ordens skuld er det viktig å påpeika at dei òg
har store fellestrekk, for eksempel ved at sistnemnte òg inkluderer kulturaspektet.

På den eine sida viser Sitat 10 og 11 at begge lærane tolka inquiry-basert matematikkunder-
vising i retning av ein arbeidsmåte og ikkje eit perspektiv, ei enda snevrara tilnærming enn den i
PRIMAS-prosjektet (Maaß & Doorman, 2013). Denne oppfatninga påverka i sin tur kva kunn-
skap dei tileigna seg. I Sitat 52 og særleg 53 skildrar lærarane punktvis kva som kjenneteiknar

arbeidsmåten. I praksis kom dette for eksempel til uttrykk ved at begge lærarane, med unntak av Magne mot slutten, skilte mellom instruksjonane og heilklasesamtalane i bruken sin av mellom anna samtalegrep. Sjølv om perspektivet med fordel kunne prega begge, blei samtalegrepa brukt klart oftast i heilklasesamtalane. Dette må sjåast i samheng med at inquiry-basert matematikkundervising blei operasjonalisert på ein relativt konkret måte i prosjektet, men òg at Wells (1999) si forståing blei tatt opp på fleire av planleggingsmøta.

På den andre sida er det òg resultat som samsvarar med synet til Wells (1999). Dette kom både til syne i overblikket i del 5.1 og statusoppdateringa i del 5.6. Det at lærarane var relativt gjennomførte i kommunikasjonen sin under både gruppearbeida og heilklasesamtalane, kan tyda på det same, men ut frå slik lærarane omtaler inquiry-basert matematikkundervising, ser tolkinga som arbeidsmåte ut til å vera sterkast.

6.1.2 Undervisinga i forhold til kjenneteikna på inquiry

Sidan figur 2.1 meir eller mindre oppsummerer dei mest sentrale kjenneteikna på og operasjonaliseringa av inquiry-basert matematikkundervising i denne studien, blir denne brukt som analyseverktøy for korleis undervisinga som heilskap utvikla seg. Der det er naturleg blir andre delar av det teoretiske rammeverket trekt inn.

Verdsette utfall («valued outcomes») dreier seg om kva form for matematikkkompetanse ein ønskjer at elevane skal utvikla. Spørsmålet her er difor om det blei viktig for lærarane at elevane skulle utvikla «inquiring minds: critical & creative» i samsvar med trådmodellen og slik matematikarar vanlegvis arbeider. Underdel 5.2.1 legg fram fleire resultat som tyder på at svaret heller mot «nei», for eksempel Sitat 5 og 8 der Magne gir uttrykk for at utfalla frå inquiry-basert matematikkundervising i liten grad blir verdsett til eksamen. Når det er sagt, såg begge lærarane verdien av at elevane skulle utvikla komplementerende kompetansar dei ikkje fekk gjennom den ordinære undervisinga, slik Sitat 3 og 4 er uttrykk for. Dette forsterkar både Grete og Magne i svara på det første spørsmålet dei fekk omtrent to månader etter gjennomføring (sjå underdel 5.6).

I samband med læringsmiljø («learning environment») er oppgåveutforminga allereie drøfta nokså grundig i underdel 5.4.1. Der gjekk det fram at sjølv om oppgåvene tilfredsstilte dei fleste kriteria for rike oppgåver i større eller mindre grad, blei dette overskugga av at dei tre første var vanskelege å forstå. Dette svekka òg lærarane sine sjansar til å bruka problema som utgangspunkt for matematikkamtale, men sidan oppgåvene framleis var utforma for å kunna resonnera rundt trigonometriske omgrep så vel som strategiar og applikasjonar, forklarar ikkje dette alt. Både oppfatningane og kunnskapane til lærarane påverka truleg korleis samtalane utarta seg.

Når det gjeld lærarane («teachers») si nye rolle, tyder fleire resultat på at Grete og Magne var i ferd med å tileigna seg denne. I samsvar med den positive innstillinga deira til å eksperimentera med ny undervisningspraksis (sjå underdel 5.2.2 og 5.2.3), viser dei to utdraga frå heilklasesamtalane (9 og 10) at dei fleire gonger brukte samtalegrep for å støtta elevane i dei fire aktivitetane til Chapin et al. (2013). Utdraga viser òg at Magne gjorde dette i større grad enn Grete og fekk meir igjen for det. Etter kvart overførte særleg Magne dette til instruksjonane. Tilsvarande er Utdrag 7 (med Karina Disha) og 8 (med Njål og Odd Bjarne) eksempel på at høvesvis både Grete og Magne stadig oftare bygde stillas framfor å forklara beint fram under rettleiinga. På den andre sida viser desse resultatata òg at lærarane kunne brukt samtalegrepa oftare og i enda større grad spelt ballen vidare til andre elevar på gruppene i plassen for å rettleia sjølv.

Òg hjå elevane («students») var utviklingspotensialet framleis stort. Slik dei Utdrag 9 og 10

viser, kunne elevane i begge klassane stilt fleire spørsmål og brukt «dei fem e-ane» («engage, explore, explain, extend and evaluate») i figur 2.1 meir utbreidd i løpet av heilklassesamtalane. For mange av dei gjaldt dette òg gruppearbeida, slik dialogen mellom Idar og Eirik (Utdrag 6) er eit eksempel på. Når det er sagt, er det ei vesentleg utvikling mellom heilklassesamtalane i dei første sekvensane og for eksempel Utdrag 9 i fjerde sekvens. Dette gjaldt særleg den første e-en, men sporadisk og delvis òg dei andre. Likevel var det største funn om utvikling utan tvil det at enkelte grupper blei svært gode på å praktisera dei fem e-ane, samarbeid og stilla kvarandre spørsmål. Utdrag 5 frå gruppearbeidet til Halldis, Astrid Norunn og Peder er eit godt eksempel på dette.

Med tanke på den siste kategorien, nemleg klasseromskulturen («classroom culture»), var utviklinga mindre. På same måte som at elevane langt frå brukte e-ane på ein effektiv måte, viser resultatane over at elevane heller ikkje hadde etablert ein «shared sense of ownership and purpose». Tilsvarende er det i beste fall grunnlag for å hevda at feil var i ferd med å byrja å bli verdsett. Likevel viser for eksempel Utdrag 10 og særleg 9 at det hadde skjedd ei utvikling frå den eksisterande, relativt individualistiske kulturen til ein kultur prega av meir kommunikasjon mellom elevane, direkte i grupper og indirekte gjennom læraren i plenum.

I lys av det læringsteoretiske grunnlaget tyder det føregåande avsnittet på at det sosialkonstruktivistiske grunnlaget for inquiry-basert matematikkundervising i lita grad er utnytta, for eksempel ved at klassane sjeldan såg på konsensus som eit tilferdsstillande alternativ til fasit. Sidan elevane, særleg under gruppearbeida, ofte brukte kvarandre som kapable partnarar og lærarane etter kvart bygde fleire stillas i rettleiinga si, kom derimot dei sosiokulturelle sidene av undervisinga godt til syne. Gjennom dei rike, kontekstuelle oppgåvene brukte elevane stadig meir dei fem e-ane og andre kjenneteikn på inquiry i pragmatismen si ande, sjølv om det her òg var eit tydeleg utviklingspotensiale for mange, spesielt i plenum.

Drøftinga over viser at det var eit vesentleg utviklingspotensial innanfor samtlege av dei fem kategoriane, og det er difor ikkje grunnlag for å skildra funna som «banebrytande» eller liknande. Når det er sagt, viser drøftinga over òg at lærarane og elevane gjorde vesentlege framskritt innanfor fleire av dei, særleg med tanke på det korte tidsrommet, og funna er difor likevel interessante. I lys av Hufferd-Ackles et al. (2004, s. 89) sine ord ligg situasjonen ein plass midt mellom dei to midterste nivåa 1 og 2 (0 er det første nivået) som blir skildra slik:

Level 1: Teacher beginning to pursue student mathematical thinking. Teacher plays central role in the math-talk community. (...) Level 2: Teacher modeling and helping students build new roles. Some co-teaching and co-learning begins as student-to-student talk increases.

6.2 Lærarane si utvikling som dokumentasjonell danning

Fokuset er framleis på utviklingsaspektet av forskingsspørsmålet, men nå med større vekt på forholdet mellom lærarane og utviklingsprosjektet. Gjennom Gueudet og Trouche (2012) sitt rammeverk for dokumentasjonell danning (sjå underdel 2.2.4), blir det i det følgjande drøfta korleis lærarane si utvikling hang saman med tre typar ressursar: ressursane i prosjektet, prosjektet som ressurs og inquiry-basert matematikkundervising som ressurs. Den følgjande drøftinga viser korleis lærarane utvikla nyttegjeringsskjema («scheme of utilisation») og danna dokument med varierende styrke for dei ulike typane ressursar.

6.2.1 Ressursar i prosjektet

Sidan ressursheftet i *kombinasjon med rettleiinga* blei brukt meir aktivt enn utviklingsmåla, eksempeloppgåvene og videoeksempelet, blir heftet og rettleiinga vektlagt i den følgande drøftinga. Når det er sagt, er dei fleire sider av same sak, og til ei viss grad kan funna truleg overført til summen av dei.

Den eine av dei to delprosessane av den dokumentasjonelle danninga er instrumentasjon frå ressursane til lærarane, og i samband med denne seier Grete at ho ikkje oppfatta dette som ein effektiv prosess (Sitat 102). I motsetning til Grete, hadde Magne større forkunnskapar, men slik Sitat 12 viser kommenterer han òg denne utfordringa, berre indirekte. Slik det går fram av underdel 5.5.2, prega dette vekslinga mellom planleggings- og evalueringsmøta og klasseromsgjennomføringa. På den andre sida, var desse forskingsbaserte ressursane både utgangspunktet for prosjektet som heilskap og startpunktet for mange refleksjonsprosessar både over og i praksis, og på den måten var instrumentasjonen indirekte sterkare. Sitat 83 og 84, der lærarane gir uttrykk for utfordringar ved den nye kommunikasjonsrolla deira, illustrerer dette frå lærarperspektivet, og underdel 6.1 viser det meir objektivt.

Den motsette prosessen, instrumentalisasjon, blei naturlegvis prega av dei same forholda som instrumentasjonen. Då desse blei tydelege tidleg i prosjektet, blei både ressursheftet og rettleiinga fokusert rundt eit mindre utval forskingsbaserte råd, det vil seia dei som blei presentert i underdel ???. Dessutan forenkla lærarane ressursane sjølv, som då Magne samla dei fire aktivitetane til Chapin et al. (2013) til eitt eller to overordna prinsipp, eller då lærarane utvikla sin eigen måte å innleia rettleiinga på ved å stilla direkte spørsmål: «Hvordan løser dere? Hva tenkte du på nå?» (Grete, Utdrag 7). Parallelt prega rammefaktorane og lærarane sine oppfatningar korleis dette utvalet blei tolka og omsett til praksis, for eksempel ved at det blei lagt større vekt på ulike strategiar for å løysa trigonometriske problem enn forståing av sinusomgrepet. For Magne sin del medførte dette òg eit fokus på realistiske kontekstar.

For å oppsummera, er det tydeleg at det har skjedd ei dokumentasjonell danning mellom lærarane og desse ressursane, men sidan ein vesentleg del av denne prosessen skjedde indirekte, er det rimeleg å rekna med at nyttegjeringsskjemaet og forholdet til ressursene er relativt svakt. Prosessen har medført store framsteg med tanke på innholdet i ressursene i forhold til rammene, men lite tyder på at lærarane kjem til å bruka sjølve ressursheftet eller dei andre ressursane direkte framover. Det er eit interessant funn at ressursane om struktur, oppgåveutforming og samtalegrep i del 3.2 var krevande å bruka, sjølv om dei framstod handfaste og praksisnære.

6.2.2 Prosjektet som ressurs

Med prosjektet som ressurs er det først og fremst vekslinga mellom gjennomføring og refleksjon i samarbeid det er snakk om, og spørsmålet er om Grete og Magne utvikla eit dokument for dette òg.

Av undedel 5.5.3 gjekk det klart fram at begge lærarane synest dei hadde stort utbytte av desse kjenneteikna ved prosjektet. Tilsvarande går det fram av Sitat 52 og 85, der høvesvis Grete skildrar si forståing av kommunikasjon i inquiry-basert undervising, korleis dei felles refleksjonane påverka henne. Saman med drøftinga i del 6.1 underbygger alle desse eksempla tolkinga av instrumentasjonen som sterk.

Tilsvarande har instrumentlisasjonen frå lærarane til ressursen òg vore effektiv. Ved at lærarane hadde og brukte sjansen til å påverka kva me diskuterte i planleggingsmøta påverka dei òg ressursen. Eksempel på dette er då Magne før siste sekvens sette i gong ein samtale om elevane skulle levera inn skriftlege produkt i samband med oppgåve 4, eller då Grete i planlegging av del to av oppgåve 3 reiste spørsmålet om motivasjon av elevar som syntest dei var «ferdige med

6.3. DEI VIKTIGASTE UTVIKLINGSTREKKA, UTFORDRINGANDE OG UTSLAGSGIVANDE FAKTORAR

oppgåva». Når det er sagt blei denne prosessen noko avgrensa av det korte tidsrommet og det at rettleiing blei prioritert noko meir enn elles. Tida blei dessutan etter kvart vigd hovudsakleg til heilklassemøtene og ikkje oppgåveutforming i samråd med lærarane fordi det framstod mest gagnleg.

Drøftinga over gir god grunn for å oppsummera med at lærarane hadde utvikla nyttegjeringsskjema for den praksisnære refleksjonen i fellesskap og dermed etablert eit sterkare dokument enn i stad. Sjølv om det framleis var rom for større deltaking og meir effektiv bruk, mykje på grunn av rammefaktorane, tyder dette på at lærarane framover òg kan dra veksjar på dette arbeidet.

6.2.3 Inquiry-basert undervising som ressurs i matematikk

Som sagt, kan inquiry-basert matematikkundervising, både som perspektiv, klasseromskultur og arbeidsmåte, òg tolkast som ein ressurs for lærarar, og i lys av dette blir spørsmålet om lærarane utvikla eit tilsvarende dokument.

I del 6.1 er det allereie gjort greie for korleis lærarane utvikla seg som følge av deltakinga i prosjektet, og dette viser at det har skjedd ein vesentleg instrumentasjon. På same måten som at Grete og Magne påverka ressursheftet gjennom si tolking av det, påverka dei òg undervisinga generelt slik ho var for dei, noko eksempla i underdel 6.2.1 underbygger. Dette svarar til instrumentalisasjon, og dette ser ein òg av Sitat 13, der det går fram at Grete var særleg på jakt etter aha!-opplevingar og prioriterte fleire gonger tid til at elevane skulle få jobba meir i grupper i strid med planen om å vektlegga heilklassemøtene. Tilsvarende er lærarane si tolking av inquiry-basert matematikkundervising som hovudsakleg ein arbeidsmåte og delvis eit perspektiv enda eit eksempel på dette.

Resultata viser at lærarane etter berre fire veker utvikla nyttegjeringsskjema for inquiry-basert matematikkundervising og skal ein tru for eksempel Sitat 1 og 2, der lærarane oppsummerer og ser framover, vil vesentlege delar av dette skjemaet, mellom anna tolking av inquiry, følga dei framover. Statusoppdateringa i del 5.6 stadfester at eit skjema har etablert seg for både Grete og Magne som begge ønsker å vidareføra inquiry både som perspektiv og arbeidsmåte. Når det er sagt, viser resultata òg at potensialet for utvikling framleis var stort då prosjektperioden var over, og ein del av dette gjekk på at nyttegjeringsskjemaet kunne blitt betre.

6.3 Dei viktigaste utviklingstrekk, utfordringar og utslags-givande faktorane i forhold til eksisterande forskning

Frå og med denne delen blir den heilskapelege utviklinga til lærarane som det er gjort greie for så langt, sett i samanheng med dei to andre faktorane i forskingsspørsmålet, det vil seia utfordringar og utslags-givande faktorar. Sidan det alt går klart fram av resultatkapittelet korleis desse kategoriane overlappar kvarandre, blir hovudfunna i denne delen samanlikna med den eksisterande forskinga i del 3.1 kvar for seg.

Kort oppsummert ser ein at dei fleste av funna knytta til utvikling, utfordringar og utslags-givande faktorar samsvarar med den eksisterande forskinga, men at det på nokon område er forskjellar. Eit eksempel på likskap er rolla refleksjon hadde for utviklinga, medan den viktigaste skilnaden er at det i denne studien skjedde vesentleg utvikling på fleire område sjølv over

eit kort tidsrom og trass andre utfordringar.

6.3.1 Dei viktigaste utviklingstrekk

Slik resultata meir generelt og underdel 6.1.2 meir spesielt viser, var det tre teikn på utvikling som skilte seg ut. For det første, endra fleirtalet av elevane oppfatningane sine frå nokså kritiske til nokså positive overfor inquiry-basert matematikkundervising i løpet av dei fem undervisningssekvensane. Til ei viss grad prega dette indirekte oppfatningane deira om matematikk og matematisk kompetanse. For det andre, blei gruppearbeidet i mange av gruppene etter kvart prega av kjenneteikna på effektiv inquiry i lys av figur 2.1, noko som det òg var mindre glimt av i heilklassemøtene. Sidan elevane har ei sentral rolle i inquiry-basert matematikkundervising, seier nettopp desse to punkta mykje om lærarane si utvikling. For det tredje, var det likevel òg moderat utvikling å spora direkte hjå lærarane i rettleiinga under gruppearbeida, modereringa deira av heilklassemøtene og delvis i instruksjonane.

På den eine sida samsvarar desse utviklingstrekk med funna i TBM-LBM-prosjektet, PRIMAS-prosjektet og dei andre studiane skildra i del 6.1. Som hjå både Engeln et al. (2013) og Goldsmith et al. (2014) blei deltakarane sine oppfatningar påverka av utviklingsprosjektet, og i likskap med begge storskalaprosjeta, TBM-LBM og PRIMAS, var det ei tydeleg generell utvikling (Carlsen & Fuglestad, 2010; Goodchild et al., 2013; Engeln, 2013; Maaß, 2013). På den andre sida framstår utviklinga i TBM-LBM-prosjektet og PRIMAS-prosjektet som djupare, breiare og meir vedvarande, sjølv om dette naturlegvis er vanskeleg å slå fast sidan studiane ikkje var designa med tanke på samanlikning. For eksempel går rapportane i samband med PRIMAS-prosjektet ikkje inn på elevane si utvikling i detalj slik denne studien gjer (Engeln, 2013; Maaß, 2013; Engeln et al., 2013).

6.3.2 Dei viktigaste utfordringar

Det var fem utfordringar som utmerka seg i løpet av perioden. I kombinasjon med rammene for undervisinga og vurderinga i 1T (teoretisk matematikk) på Ølensvåg vgs., var oppfatningane til lærarane om matematisk kompetanse og tolkinga deira av inquiry hovudsakleg som ein arbeidsmåte, hemmande for utviklinga deira. På same måte var det ei utfordring at elevane sine tankar om matematikkundervising og -kompetanse ikkje samsvarer med den nye undervisinga. For begge desse tilfella var dette kopla til den innleiande kunnskapen deira om dei nye rolla deira. I forlenging av dette var det ei vesentleg utfordring for begge lærarane å gjera nytte av tilrådingane i ressursheftet, for eksempel dei fem aktivitetane til Stein et al. (2008) og samtalegrepa til Chapin et al. (2013). Tilsvarande var det utfordrande å laga gode rike oppgåver i samsvar med kriteriene til Hedrén et al. (2005) og trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001). Ei femte vesentleg utfordring var tidsbruken. I klasserommet var det vanskeleg for lærarane å disponera tida, og i planlegginga og evalueringa hadde det vore ein stor fordel å ha hatt betre tid. Både Grete og Magne trudde dessutan det ville vore ein fordel å spreidd dei fem sekvensane i prosjektet over eit større tidsrom.

Fleire av desse temaa går òg igjen i eksisterande forskning. Både i TBM-LBM-prosjektet (Goodchild et al., 2013) og i studien utført av Inoue og Buczynski (2011) var tida ei mangelvare for lærarane, medan mangelen på gode oppgåver blei omtalt som ressursutfordringar i PRIMAS-prosjektet (Engeln et al., 2013). I begge storskalaprojekta og tilrådingane frå Smith går det fram at eksisterande praksis og rammefaktorar, eller det Engeln et al. kallar systemfaktorar, kan vera avgjerande for utfallet (Carlsen & Fuglestad, 2010; Engeln et al., 2013; Smith, 2001). På den eine sida, meiner Carlsen og Fuglestad (2010) at samsvaret mellom norske styringsdokument og inquiry var ein nøkkelfaktor for utviklinga dei observerte. På den andre sida

såg Engeln et al. (2013) slike dokument som noko som ofte motverka utvikling av inquiry-basert matematikkundervising, slik det var tilfelle i denne studien sjølv om han er norsk. Både Carlsen og Fuglestad (2010) og Engeln (2013) observerte tydelege endringar i lærarane sine oppfatningar til inquiry-basert matematikkundervising, kanskje på grunn av for eksempel det medvitne arbeidet med oppfatningar i TBM-LBM-prosjektet. I denne studien var erfaringa heller at nokon av oppfatningane til lærarane hemma utviklinga, medan andre bidrog til ho, høvesvis oppfatningar av matematikk og inquiry og oppfatningar av profesjonell utvikling. Når det til slutt gjeld utfordringane Grete og Magne hadde med å utnytta dei forskingsbaserte ressursene og rettleiinga, samsvarar dette med utfordringane Inoue og Buczynski (2011) fann i sin studie om nyutdanna lærarar. Dette kan svara til det Carlsen og Fuglestad (2010) oppfatta som spenningar i lærarane sin praksis og mellom lærarane og forskarane sin praksis. Dette liknar det Engeln et al. (2013) omtaler som klasseromsutfordringar, nemleg utfordringar lærarane kan ha med iverksettinga i klasserommet. Når det er sagt, framhever Smith (2001) det som ein fordel for utvikling at lærarane blir vippa ut av likevekt. Det er òg naturleg å tilskriva noko av desse utfordringane til dei oppstartsutfordringane Chapin et al. (2013) skildrar, for eksempel at elevane ikkje er vane til å delta i samtalar rundt resonnering ut frå matematiske argument.

6.3.3 Dei viktigaste utslagsgivande faktorane

Resultata indikerer fire faktorar som såg ut til å ha avgjerande effekt på utviklinga i prosjektet. For det første var lærarane svært positive til utvikling av matematikkundervisinga generelt og til å prøva ut inquiry-basert matematikkundervising spesielt, medan elevane var pliktoppfyllande. I kombinasjon med at både dei sjølve og elevane var stabile, trygge og dyktige i matematikk, gjorde dette at prosjektet kunne gjennomførast intensivt og samanhengande, som var éin av dei andre utslagsgivande faktorane. Sjølv om fleire av deltakarane talte for å anten spreia dei fem sekvensane over eit større tidsrom eller berre utvida prosjektet, tyder utviklinga i løpet av perioden på at det òg hadde fordelar at prosjektet var så kompakt. For det tredje, tyder resultata på at dette ikkje hadde vore mogleg utan ressursene og rettleiinga basert på forskning som grunnlag og stimuli, sjølv om desse i hovudsak hadde ein indirekte effekt, slik det går fram av underdel 6.2.1. Dette var i sin tur avhengig av den fjerde utslagsgivande faktoren, nemleg vekslinga mellom gjennomføring og praksisnær refleksjon i fellsskap, som på mange måtar batt prosjektet saman og blei høgt verdsett av begge lærarane.

På dette området òg oppstår det interessante poeng i samanlikning med eksisterande forskning. Med tanke på tilslutninga hjå lærarane, oppfatar både Carlsen og Fuglestad (2010) og Maaß (2013) òg dette som ein av dei avgjerande faktorane for å overkomma utfordringar og skapa utvikling. Likevel la begge desse storskalaprojekta moglegvis betre til rette for utvikling og nytting av oppfatningar ved å la prosjekta gå over to til tre år. På den eine sida tyder utviklinga i desse prosjekta og den eksisterande forskinga generelt på at dette var eit klokt val, men samtidig hevdar Smith (2001) at det òg er viktig at prosjektet er samanhengande og vedvarande i løpet av den perioden det blir gjennomført. På den eine sida tyder altså mykje på at det ville vore fruktbart å spreia prosjektet over for eksempel heile haustsemesteret, men sidan ein då ikkje kunne gjennomført inquiry-baserte undervisingsopplegg samla, kunne ein på den andre sida risikert at utviklinga blei hemma av mangel på samheng og konsistens. Når det gjeld ressursane og rettleiinga sprikar TBM-LBM-prosjektet og PRIMAS-prosjektet. I TBM-LBM-prosjektet blei det lagt stor vekt på at alle lærarane og forskarane skulle vera likestilte og at inquiry skulle prega alle tre nivåa av prosjektet medan PRIMAS-prosjektet brukte tilrådingar frå eksisterande forskning. Studien til Nam et al. (2013) går enda lenger enn sistnemnte og dokumenterer at mentoring (i kombinasjon med refleksjon) bidrar til auka utvikling av inquiry-basert

matematikkundervising. Det at så ulike tilnærmingar kan gi tilnærma like gode resultat, tydar på at dette kjenneteiknet kan vera eit hjelpemiddel, men at andre faktorar, som for eksempel refleksjon over praksis i fellesskap, kan kompensera for det. Sjølv om lærarane i denne studien syntest det var utfordrande å utnytta desse ressursane til det fulle, er det vanskeleg å sjå for seg ei tilsvarende utvikling over eit så kort tidsrom utan dei, slik den neste delen går nærmare innpå. Når det gjeld den praksisnære refleksjonen i fellesskap, framhever Carlsen og Fuglestad (2010) at òg i TBM-LBM-prosjektet var denne avgjerande for suksessen dei observerte. Dei påpeikar i tillegg korleis lærarane og forskarane utfylte kvarandre slik lærarane og eg gjorde i dette prosjektet. I samsvar med Smith (2001) og Nam et al. (2013) blei det lagt vekt på lærarane sin eksisterande kompetanse og samarbeid mellom deltakarane i denne studien. Verdien av refleksjonen her har gjenklang i det moderne paradigmet til profesjonell utvikling (Zaslavsky et al., 2003; Kaendler et al., 2015), som utpeikar dette som ein av dei viktigaste suksessfaktorane for profesjonell utvikling.

6.4 Samspelet mellom ulike aspekt av lærarane si utvikling

I dei tre føregåande kapitla og tidlegare i dette kapitlet har resultat og skildringar for dei fire domena i rammeverket til Clarke og Hollingsworth (2002) (sjå underdel 2.2.3) blitt presentert implisitt, og i forlenging av dette er fokuset her å reflektera over ulike samanhengar mellom dei. Ifølge Clarke og Hollingsworth skjer endringar først internt i kvart domene og deretter mellom domena som følge av dei to prosessane refleksjon og iverksetting, slik det går fram av figur 2.3. Spørsmålet i lys av forskingsspørsmålet er altså korleis utvikling, utfordringar og utslagsgivande faktorar frå dei ulike sidene av prosjektet heng saman. Svaret er fordelt over dei tre følgande underdelane om høvesvis dei fire domena, dei to prosessane og stabile mønster i denne studien i lys av rammeverket. I samsvar med forskingsspørsmålet og Clarke og Hollingsworth sitt fokus legg denne delen vekt på lærarane, og ikkje elevane, si profesjonelle utvikling.

6.4.1 Dei fire domena i denne studien

Dei fire domena Clarke og Hollingsworth (2002) brukar i rammeverket sitt kan viser til fire sider, eller aspekt, av situasjonen og prosessen lærarane er i. Det eksterne domenet omfattar kjelder til stimuli og informasjon utanfrå læraren si livsverd, og i denne samanhengen gjeld dette utviklingsprosjektet som heilskap og særleg ressursane og rettleiinga basert på eksisterande forskning. Resultata i samband med dette blei presentert i del 5.5, medan kunnskap og oppfatningar, som det personlege domenet omfattar, blei skildra i del 5.3 og 5.2. Den profesjonelle eksperimenteringa i praksisdomenet svarar tilsvarende til resultata knytta til klasseromspraksisen i del 5.4. Når det derimot gjeld konsekvensdomenet og dei framtreddande utfalla slik lærarane ser dei er desse presentert indirekte gjennom heile resultatkapitlet.

Ut frå denne skildringa ser rammeverket ut til å passa godt til å analysere situasjonen i denne studien, men når det er sagt, er det likevel eit par veikskapar som skil seg ut. For det første blir oppfatningar og kunnskap samla i eitt domene slik at påverkinga mellom desse to sentrale aspekta av profesjonell utvikling ikkje kjem like klart fram som koplingane *mellom* domena. For det andre blir dei framtreddande utfalla avgrensa til slik lærarane ser dei. Dermed overser ein dei endringane Grete og Magne ikkje oppdaga eller vektla, men som likevel prega elevane, dei sjølve og utviklinga som heilskap. Desse to momenta er likevel ikkje meint som generell kritikk, men snarare to innvendingar i dette spesielle tilfellet. Clarke og Hollingsworth (2002) bygger trass alt på meir omfattande data, og det kan argumenterast for at læraren si profesjonelle utvikling er det i hovudsak læraren sitt perspektiv som er interessant.

6.4.2 Endringssekvensar mellom *to* domene

Ifølge Clarke og Hollingsworth (2002) er ein endringssekvens («change sequence») ei kopling av to eller fleire domene gjennom refleksjon og iverksetting i eit kort tidsrom, medan vekstnettverk («growth network») er slike som er stabile over ein lengre periode. For presentasjonen sin del fokuserer denne delen på påverkinga (pilene) mellom *to* domene her, medan lengre sekvensar eller nettverk blir tatt opp i neste underdel.

Koplingane mellom det eksterne domenet og det personlege domenet svarar i stor grad til drøftinga i del 6.2 om korleis kunnskapane og oppfatningane til lærarane både blei påverka av og påverka dei eksterne stimuliane. Eksempla der viser at kunnskapane og oppfatningane til Grete og Magne blei påverka gjennom refleksjon og at lærarane gjennom iverksettinga si påverka korleis dei eksterne faktorane blei brukt framover. Eksempla tyder vidare på at dette utvikla seg til å bli ei sterk kopling som blei ein utslagsgivande faktor for utvikling i andre domene.

Dei delane av undervisinga og sidene av operasjonaliseringa av den inquiry-baserte matematikkundervisinga som lærarane iverksette direkte, utan å ha endra oppfatningar eller kunnskap, er knytta til påverkinga frå det eksterne domenet til praksisdomenet. Eit eksempel på dette er då lærarane i dei første sekvensane skulle prøva å bruka samtalegrepa til Chapin et al. (2013) utan å heilt ha forstått kva det innebar eller å ha eit avklart syn på dei. Det same gjaldt observasjonsskjemaet Stein et al. (2008) tilrådde. Generelt tyder resultatata på at denne iverksettinga som regel førte til utfordringar framfor utvikling og svara difor til ei relativt svak kopling.

Det er mange resultat som illustrerer koplinga mellom det personlege domenet og praksisdomenet. I Sitat 52 og 53 gir Grete og Magne for eksempel uttrykk for ei kunnskapsmessig utvikling som dei i tiltakande grad iverksette i klasserommet. På same måte er det tydeleg frå Utdrag 2 at Magne sin praksis følger av auka forståing for samtalegrepa si rolle i matematikkundervising. Med tanke på den motsette prosessen, nemleg refleksjonen, gav lærarane uttrykk for at dei såg stor verdi i å evaluera undervisinga saman, sjå for eksempel det Magne sa i Sitat 107, og det var tydeleg at utviklinga deira i kunnskapar blei prega av dette. Det praktiske preget då lærarane skildra inquiry (Sitat 52 og 53) og Grete si formulering «Og det syns jeg har komt mer og mer tydelig fram» underbygger òg dette. Alt i alt framstår denne koplinga som sterk ved at ho òg var ein utslagsgivande faktor for utviklinga på andre område. På den andre sida medførte refleksjonane små endringar i oppfatningane til lærarane, slik det går fram av del 5.2 truleg på grunn av utfordrande rammevilkår for andre faktorar.

Koplinga mellom det personlege domenet og konsekvensdomenet hadde mykje til felles med den føregåande koplinga. Lærarane sin refleksjon over korleis elevane reagerte på handlingane deira påverka i hovudsak kunnskapane deira om inquiry-basert matematikkundervising, medan oppfatningane deira forblei uendra. I Sitat 67 gjer Magne greie for at han ikkje syntest at oppgåve 1 fungerte tilstrekkeleg for elevane, noko som er eit uttrykk for korleis han tolka inquiry som éin av fleire arbeidsmåtar spesielt eigna for trening i strategisk tenking og applisering i realistiske kontekstar. I motsett retning påverka lærarane si utvikling av kunnskapar om undervisinga korleis dei såg dei framtrekande utfalla. Dette går nok ein gong igjen i Sitat 52 og 53 med tanke på kunnskapar, og sidan oppfatningane først og fremst var negative i den forstand at dei oppfatta inquiry som ei variasjon til eksisterande undervising, var desse oppfatningane heller ikkje noko problem her. Dette viser korleis det både var utvikling, utfordringar og utslagsgivande faktorar på dette området. Koplinga var sterk, særleg frå konsekvensdomenet til det personlege domenet, men sidan meir tid og fokus gjekk med til refleksjonen frå det eksterne domenet til det personlege domenet, blei denne prosessen ikkje like sterk.

Den siste koplinga er mellom praksisdomenet og konsekvensdomenet ut frå lærarane sitt perspektiv, og spørsmåla er altså korleis refleksjon over eksperimenteringa påverka korleis læ-

rarane såg endringane og korleis lærarane si iverksetting blei påverka av kva framtrekande utfall dei såg. Utdrag 2, der Magne legg vekt på at elevane skal delta i instruksjonane av den andre delen av oppgåve 3, er eit eksempel på det siste. Han har erfart at utan denne aktiviteten, er det vanskelg for elevane til å forstå kva dei skal gjera i den nye tilnærminga til matematikk. Eit anna eksempel er Utdrag 7 der Grete opnar med å stilla direkte spørsmål om kva elevane jobber med og tenker på for å få fram den matematiske tenkinga til elevane, sidan ho tidlegare har erfart at utan slike spørsmål får ho svak respons. Den første samanhangen er svært intuitiv og var naturlegvis gjennomgåande i prosjektet. Lærarane gav fleire gonger uttrykk for at dei sette pris på å reflektera over praksis. Det var ikkje så ofte det blei snakk om læringsutbytte – prosjektet var ikkje designa for det føremålet – men når det blei diskutert, var det med stor iver frå særleg Grete. Det var utvikling i denne tovegskoplinga i form av at lærarane sine refleksjonar auka og eksperimenteringa blei påverka av dette. Det var òg utfordrande fordi det ikkje var nok tid og fordi eksperimenteringa blei avgrensa av oppgåvene. I seg sjølv var dette ein utslagsgivande faktor.

Til slutt kan det vera greit å påpeika at sjølv om resultata jamnt over viser at oppfatningar og kunnskap hjå lærarane ofte utvikla seg parallelt i same retning, viser andre resultat at oppfatningane påverka kunnskapane. Eksempel på dette er korleis Magne ut frå eit positivt syn på realistiske oppgåver utvikla kunnskap om inquiry prega av dette, eller meir overodna korleis Grete sitt sterke ønske om å oppdaga nye måtar å vera lærar på, gjorde at ho tolka inquiry som ein sjanse for elevane til å gjera tilsvarande aha!-opplevingar.

6.4.3 Vekstnettverk og overordna refleksjonar

Clarke og Hollingsworth (2002) brukar omgrepet endringssekvens om relativt kortsiktige koplingar med eitt eller fleire ledd og reserverer vekstnettverk for «more lasting change» (s. 958). Dette kan bli forstått på to ulike måtar, nemleg som stabile nettverk gjennom prosjektet eller stabile nettverk over semesteret eller karrierane til lærarane. Dei to følgande avsnitta tar for seg kvart av desse tilfella. Før dét, er det igjen nødvendig å påpeika at på grunn av omfanget og sidan studien ikkje var designa ut frå dette rammeverket, er det ikkje tilstrekkelege data til å fastslå kausale koplingar eller detaljerte mønster. Dette er òg hovudårsaka til at det ikkje er via plass til fleirledda endringssekvensar. Når det er sagt, er det heller ikkje nødvendig ut frå forskingsspørsmålet som legg meir vekt på dei overordna linjene, og difor legg den følgande drøftinga vekt på det.

Når det gjeld vekstnettverk som etablerte seg i løpet av prosjektperioden, er det særleg to «innleiande nettverk» som utmerka seg. I prosjektet starta utviklinga i hovudsak frå det eksterne domenet, men medan noko av utviklinga gjekk frå dette gjennom det personlege domenet til praksisdomenet og vidare, gjekk andre delar direkte til praksisdomenet. Eit interessant funn her er at det siste alternativet blei så prega av utfordringane i underdel 6.3.2 at mykje av utviklinga blei blokkert, medan netteverket som gjekk gjennom det personlege domenet langt i frå hadde dei same utfordringane. Dette samsvarar godt med forskinga presentert i underdel 3.1.1.

På same måte var refleksjon ein utslagsgivande faktor, i tråd med rammeverket til Clarke og Hollingsworth (2002), og etter kvart som lærarane engasjerte seg meir i denne, blei større delar av endringsmiljøet aktivert. Det er difor vanskeleg å skilla på fortsettinga etter dei innleiande nettverka. Den auka refleksjonen førte både til at konsekvensdomenet blei kopla inn og reaktivering at tilbakekoplinga frå praksisdomenet til det personlege domenet. Eit interessant spørsmål i forlenging av dette er kva lærarane reflekterte mest over sidan det ut frå førre underdel ser ut til at der refleksjonen er størst, er vekstnettverka sterkast. Som det òg går fram der, blei størsteparten av tida brukt til å reflektera i overgangane mellom det eksterne domenet og

det personelege domenet og mellom praksisdomenet og det personlege domenet. Samtidig var det heile tida eit fokus på konsekvensane for korleis elevane tilnærma seg matematikken, det vil seia dei trigonometriske samanhengane.

Når det er sagt, viser òg det at stimulusen kjem frå det eksterne domenet at rettleiinga og ressursane basert på forskning var nødvendige for utviklinga. Spørsmålet som denne modellen tydeleggjer er korleis desse bør brukast for å få mest mogleg utav dei. Det mest fruktbare ser ut frå denne studien til å vera at ressursane og rettleiinga blir brukt som utgangspunkt for refleksjon, noko som svarar til koplinga mellom det eksterne domenet og det personlege domenet. Unntaksvis kan det òg fungera med direkte iverksetting frå det eksterne domenet til praksisdomenet.

Med tanke på vedvarandre nettverk etter prosjektgjennomføringa er det vanskeleg å drøfta dette grundig sidan dei to spørsmåla som blei sendt ut og svara på per e-post er den einaste forma for oppfølging (sjå del 5.6). Dette var ein naturleg konsekvens av det avgrensa omfanget på ei masteroppgåve. Når det er sagt, gir svara til Grete og Magne på desse to spørsmåla likevel eit inntrykk av at iverksettingsprosessen og refleksjonsprosessen har og vil fortsetta å halda fram, sjølv om dei ikkje er tydelege på dette. I Sitat 111 skildrar Grete korleis ho har halde fram med å leggja til rette for samtalar, og i Sitat 112 fortel Magne at han gjerne vil bruka liknande undervisingsopplegg framover i andre matematiske tema òg. Dette tyder på at koplinga mellom praksisdomenet og det personlege domenet framleis er aktiv hjå begge. Sannsynlegvis inkluderer dette òg konsekvensdomenet og moglegvis det eksterne domenet som ei forlenging av prosjektet *som* ressurs og ressursane *i* prosjektet. Sidan det som sagt ikkje er grunnlag for å slå fast mykje sikkert her, blir dette punktet avgrensa til denne korte refleksjonen.

Eit avsluttande poeng i samband med denne modellen, er korleis han er relevant for situasjonen og korleis han synleggjer kompleksiteten i situasjonen. Trass saknet av eit par faktorar, illustrerer rammeverket korleis svært mange faktorar i lærarar si utvikling av inquiry-basert matematikkundervisning heng saman gjennom fleire dialektiske forhold. Gjennom refleksjon og iverksetting blir infløkte kjedereaksjonar aktivert og halde ved like. Eksempel på dette er det at det personlege domenet til Grete og Magne prega alle dei andre domena. Når det gjeld dei endringane som lærarane anten ikkje la merke til eller vektla, viser resultata at desse òg var relevante. For eksempel hemma dei lite effektive instruksjonane utviklinga ved at elevane ikkje forstod kva dei skulle gjera generelt eller knytta til enkeltoppgåver. Dette påverka den profesjonelle utviklinga i stor grad sjølv om ikkje lærarane var særleg opptatt av det før spesielt Magne mot slutten byrja å gjera noko med det.

Kapittel 7

Avslutning

Dette kapittelet rundar av denne masteroppgåva i fire delar. I konklusjonen blir resultata og drøftinga oppsummert i eit svar på forskingsspørsmålet. Deretter blir det drøfta moglege implikasjonar av dette før eg i den tredje delen reflekterer over kva erfaringar eg har gjort meg i løpet av arbeidet med denne teksten. For å tydeleggjera kva grunnlag desse tre delane står på, opnar kapittelet med ei drøfting av kvaliteten på studien.

7.1 Ei drøfting av kvaliteten på studien

Ved å drøfta eksplisitt styrkar og veikskapar ved studien i lys av eit sett av kvalitetskriterium, blir det tydelegare kva grunnlag konklusjonane bygger på og lettare å avgjera styrken av konklusjonane og implikasjonane. Med andre ord blir det Tjora (2010) kallar *refleksiviteten* til studien styrka. Det har vore ein del debatt om dei klassiske kriteria reliabilitet, validitet og generalisering er relevante for kvalitativ forskning samt rundt ulike måtar å bruka dei på (Bryman, 2012). Ved å meir eller mindre direkte tilpassa desse i samsvar med Tjora (2010) og LeCompte og Goetz (1982)¹, viser den følgjande drøftinga at dei tre indikatorane og likevel kan vera eit verdifullt analyseverktøy for studiar av denne typen. Først blir desse drøfta kvar for seg og til slutt blir det trekt fram meir generelle refleksjonar for val det ville vore gunstig å gjort anleis ein annan gong. LeCompte og Goetz (1982) meiner at sjølv om det er umogleg å oppnå absolutt validitet og reliabilitet, kan gjennomgåande arbeid med kriteria og avsluttande refleksjonar, som desse, styrka desse og andre kriterium. Analysen viser i tråd med dette at sjølv om noko med fordel kunne vore gjort annleis og kvalitetsindikatorane nokon gonger kunne vore imøtekomme i enda større grad, så er det overordna biletet at svaret på forskingsspørsmålet står på eit solid grunnlag.

7.1.1 Reliabilitet

Reliabilitet handlar om i kva grad studiar kan gjentakast slik at dei same metodane gir dei same resultata og blir ofte knytta til forhold ved og mellom forskaren, informantane og konteksten (LeCompte & Goetz, 1982). På den eine sida bidrar strukturen på prosjektet, for eksempel ved bruk av utviklingsmål, ressursheftet og intervjuguidar, til at det er lettare å gjenta både utviklingsprosjektet og studien av det. Det at dei to klassane utvikla seg nokså likt underbygger dette til ei viss grad. På den andre sida er kvalitative studiar av natur vanskelege å gjenta nettopp på grunn av at nyansar ved aktørane har stor innflyting på resultata (LeCompte & Goetz, 1982;

¹LeCompte og Goetz (1982) skil òg mellom intern og ekstern reliabilitet og validitet, men sidan denne underdelinga ikkje styrka drøftinga her, blir ikkje desse distinksjonane vidareført.

Tjora, 2010). Ein liknande studie med andre forskarar eller lærarar med andre oppfatningar og kunnskapar ville truleg medført ei anna utvikling, og sjølv om ein klarte å gjenskapa dette i grove trekk, kunne små nyansar ført til større forskjellar. Sidan norsk vidaregåande opplæring er relativt standardisert, iallfall med tanke på rammer, er det truleg enklare å gjenskapa denne. Når dette er sagt, er forskingsspørsmålet utforma slik at mindre forskjellar i gjennomføringa av to tilsvarende studiar ikkje treng å vera problematisk, noko som styrker reliabiliteten vesentleg.

Øg forhold *mellom* aktørane kan ha svekka reliabiliteten i form av tilfeldige målefeil. Sjølv om både lærarane og elevane framstod sannferdige i intervju, kan det likevel fleire gonger ha vore tilfelle at dei tilpassa svara sine etter kva dei trudde eg ønska. Grete sa for eksempel at ho håpa eg fann det eg var på jakt etter. På same måten kan det at eg kjente Magne frå før òg ha påverka informasjonsutvekslinga mellom oss. Eit tredje mogleg problem er at eg har høyrte det eg har ønska å høyra og lagt større vekt på delar av utsagna enn det det er dekning for. For å bøta på utfordringar som dette, legg resultatkapittelet, slik Tjora (2010) tilrår, vekt på å skilja mellom data og tolking, på å skildra korleis sitata og informantane er valt ut og på å gjera greie for eigenskapar ved konteksten. Sjølv om det framleis er ei vesentleg grad av forskarsubjektivitet til stades, gjer dette at lesaren i større grad enn elles kan vurdere om tolkingane er rimelege. Likevel hadde det vore ein styrke om det var fleire «forskarar» som drøfta korvidt analysen var gyldig. Det at rettleiarer min har gått gjennom teksten styrker reliabiliteten noko, men dette er likevel ikkje meint som ei erstatting av fagfelle-vurdering. Ein annan faktor som styrker reliabiliteten, er korleis dataa blei handsama og samsvart mellom data frå ulike innsamlingsmetodar. Alle intervju og skriftlege tilbakemeldingar er gjengitt ordrett, med unntak av fjerning av fyllord, og i gjennomgangen av videoopptaka blei handlingsforløpet og utsagn notert ned relativt detaljert og med vekt på å skilja mellom observasjonar og refleksjonar. Slik det går fram av resultatkapittelet var det jamnt over svært stort samsvar mellom det lærarane og elevane sa og det dei gjorde i klasserommet. Ein tredje faktor som bygger opp under reliabiliteten, er nok ein gong mesoperspektivet i forskingsspørsmålet. Sidan det er utvikling, utfordringar og utslagsgivande faktorar som er i fokus, har enkelte nyansar mindre å seia for konklusjonen.

7.1.2 Validitet

Korleis funna eller målingane samsvarar med den empiriske realiteten som denne studien tok utgangspunkt i, er knytta til validitet (Tjora, 2010), og ifølgje LeCompte og Goetz (1982) er dette eit kriterium der kvalitative metoder har høg måloppnåing. Viss det har vore ei form for systematikk i utfordringane knytta til reliabilitet – for eksempel viss sitata metodisk har blitt overtolka – svekkar dette validiteten. Dei same argumenta som blei lagt fram i førre underdel, tyder her òg på at studien og oppgåva er utforma slik at dei er eigna til å svara på forskingsspørsmålet, mellom anna ved å bruka mange samsvarande tilnærmingar, perspektiv og aktørar i innsamlinga og analysen av dataa. Som i stad, hevdar Tjora (2010) at ein kan heva validiteten ved å vera open om korleis ein praktiserer forskning, ved å gjera greie for dei vala ein tar og ved å vera sensitiv for vesentlege faktorar innanfor tematikken. Dette er direkte relatert til eit anna kriterium han kallar *transparens* (å vera gjennomsiiktig), og i tråd med dette har eit sentralt mål for masteroppgåva vore å vera open om val, grunngevingar og trekk ved situasjonen, slik at lesaren i størst mogleg grad kan vurdere validiteten fortløpande. For eksempel skildrar metodekapittelet (4) mange aspekt ved situasjonen på Ølensvåg vgs. i detalj før og under gjennomføringa av prosjektet.

Kvale (1997) føreslår to former for validitet som utfyller denne drøftinga. *Pragmatisk validitet* er særleg relevant for aksjonsforskning eller anna endringsarbeid, slik denne studien er eit eksempel på, og reiser spørsmålet om forskinga fører til betring. Skal ein tru den innleiande

forskninga i det første kapittelet, er dei utviklingstrekk som dei seinare kapitla dokumenterer, klare teikn på framsteg og noko som styrker validiteten. *Kommunikativ validitet* kjem til uttrykk i dialog med forskarsamfunnet, og korleis denne masteroppgåva står seg på dette punktet kjem hovudsakleg til syne gjennom sensuren, men har òg blitt delvis tatt omsyn til i samtalar med rettleiar og lærarane. Ei anna side av denne typen validitet er forholdet til eksisterande forskning og teori, og sidan masteroppgåva gjennomgåande har presentert forskning og teori frå ulike perspektiv og kontekstar, framstår dette aspektet av validiteten som høgt. På same måte er det ein styrke at det abduktive perspektivet har prega både analysen og drøftinga av resultata. Når det er sagt, har det ikkje blitt via særleg pass til for eksempel kritiske røyster av inquiry-basert matematikkundervising, hovudsakleg fordi dette i beste fall er perifert i lys av forskings spørsmålet.

7.1.3 Generalisering

Eit sentralt spørsmål ved all forskning, implisitt eller eksplisitt, er korvidt og korleis funna og konklusjonane kan generaliserast til andre situasjonar (Tjora, 2010). Dette svarar til det LeCompte og Goetz (1982) kallar *ekstern validitet* og er ifølge dei og mange andre eit problem for kvalitativ forskingsmetode (Bryman, 2012). Tjora (2010) møter denne kritikken med å argumentera for at ein innanfor kvalitativ forskning må tenka generalisering på ein annan måte enn kvantitativ forskning og føreslår i samband med dette tre typar generalisering. For det første kan ein presentera studien og resultata så detaljert at lesaren sjølv kan vurdere om funna er gyldige for sin kontekst, kalla *naturalistisk generalisering*. *Moderat generalisering* har meir til felles med generalisering i kvantitativ forstand ved at forskaren sjølv skildrar kva andre plassar, tider og samanhengar resultata vil kunna gjelda, medan *konseptuell generalisering* er knytta til korvidt og korleis det går fram at omgrep, typologiar eller teoriar passar i andre tilfelle.

Samtlege tre kategoriar er relevante for denne studien, men i ulik grad. Metodisk sett er den naturalistiske generaliseringa sterkast sidan problemet med mogleg overgeneralisering frå mi side er vesentleg redusert. Den omfattande presentasjonen av sitata i kapittel 5 lar lesarar gjera slike vurderingar sjølv. Når det er sagt, er dette likevel ei tungvindt form for generalisering sidan det stiller høgare krav til lesaren som må setta seg grundigare inn i teksten. Særleg på grunn av mesoperspektivet i forskings spørsmålet, kan ein argumentera for at situasjonen som Grete og Magne var i, har så mykje til felles med andre lærarar sin situasjon at resultata òg er relevante andre plassar. To avgjerande faktorar i denne studien var dei innleiande oppfatningane og kunnskapane til elevane som truleg vil vera tilnærma like på andre norske vidaregåande skular, for å nemna noko. Sjølv om ikkje andre lærarar utformar sine utviklingsprosjekt på akkurat same måte som dette prosjektet, kan ein likevel rekna med at dei vil oppleve nokon av dei same utfordringane og utviklingstrekk. For eksempel kan det òg i andre situasjonar bli krevande å omsetta forskingsbaserte råd til praksis, men over tid kan ein likevel sjå for seg ei viss ending hjå elevane ved vedvarande prøving og feiling. Når det er sagt, er det òg utfordringar og utviklingstrekk som er tett knytta saman med dei utslagsgivande faktorane ved prosjektet, og i situasjonar der desse ikkje er til stades, kan ein ikkje rekna med at situasjonen vil utarta seg likt. Korleis ein gir elevane instruksjonar ser mellom anna ut til å ha mykje å seia for korleis dei kjem i gang med oppgåvene, på både positiv og negativ måte. I forlenging av denne moderate generaliseringa er det lagt til ein del om implikasjonar av studien for ulike aktørar i kapittel 7.3. Med tanke på konseptuell generalisering, kan bruken av kategoriane utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar òg medføra ei form for indirekte generalisering av desse omgrepa, men sidan dei er såpass generelle, blir det ikkje lagt noko vekt på dette her.

7.1.4 Tilbakeblikk og endringsforslag

Dei tre overordna kriteria tar ikkje opp alle relevante faktorar i samband med ei kvalitetsanalyse, så for å utfylla biletet noko meir, blir meir praktiske, eventuelle veikskapar tatt opp her. Dette kan òg oppfattast som endringsforslag til seinare forskning.

Når det gjeld dei metodiske sidene av studien, hadde det vore ein fordel å kunna følga elevane si utvikling meir individuelt gjennom prosjektet; Sidan all datainnsamling med unntak av fokusgruppa blei gjennomført utan namn, var dette ikkje mogleg. På den andre sida viser analysen at sjølv om dette truleg kunne gitt nokon interessante nyansar til funna, var det ikkje avgjerande for å svara fyldig på forskingsspørsmålet. Delvis i samanheng med dette, hadde det òg vore gunstig om eg hadde filma enkeltgrupper sitt arbeid over lengre tid gjennom alle gruppearbeida, slik eg gjorde i dei to siste sekvensane (jf. Utdrag 7 og 8). Bruk av faste grupper og faste plasser hadde bidratt til det same, men som for det første punktet, har det ikkje store uheldige konsekvensar for konklusjonane.

Når det gjeld dei avsluttande intervjua og fokusgruppa, var det òg noko som med fordel kunne vore gjort anleis. For det første viste nokon av spørsmåla seg å vera meir tidkrevande enn nyttige, for eksempel spørsmåla til lærarane om korleis dei trudde elevane hadde oppfatta oppgåvene. Sjølv om dette sa noko om korleis lærarane oppfatta situasjonen, ville det vore betre å heller fått meir utfyllande svar på spørsmål om deira oppfatningar og heller bruka elevane sine svar på dei spørsmåla. For det andre hadde ei grundigare analyse av dataa undervegs i prosjektet lagt til rette for å stilla meir målretta og produktive spørsmål under intervju. Til ei viss grad blei dette gjort sidan alle data blei transkribert eller skrive samandrag av fortløpande, men på grunn av svært knapp tid var det vanskelg å få til grundigare analysar. For det tredje kjem naturlegvis spørsmålet om dataa er uttømte, og sidan det ofte var nødvendig å stilla nye spørsmål framfor å dvela meir ved dei som allereie var spurt, tyder dette på at alle deltakarane kunne bidratt med meir informasjon. Tilsvarende ville det vore ein styrke om det hadde vore meir tid til at deltakarane i fokusgruppa kunne diskutert seg i mellom, og gjerne gjennomført fleire fokusgrupper, sidan det alltid er ein fare for gruppetenking i slike situasjonar. Når det er sagt, er dette ei masteroppgåve med avgrensa omfang, og sjølv om svaret på forskingsspørsmålet ville blitt rikare med fleire nyansar, gjer så omfattande datainnsamling som denne, som vektla observasjon i tillegg til intervju, at det er rimeleg å gå ut frå at dei viktigaste funna i stor grad er avdekka.

I samband med spørreundersøkinga, ville kontrollspørsmål med motsett vinkling auka truverdet til svara, og viss det ikkje hadde vore to spørsmål i eitt, slik det var for nokon spørsmål, ville truleg elevane gitt meir utfyllande svar. Når det er sagt, var denne datainnsamlingsmetoden meint som eit tillegg til intervju og observasjonane, så slike endringar ville sannsynlegvis ikkje påverka dei overordna funna i vesentleg grad.

I samband med det parallelle utviklingsprosjektet blei det òg etter kvart klart at det var fleire ting som kunne vore løyst på betre måtar. Dette kom sjølv sagt av at eg som student hadde mindre praktisk erfaring med både rettleiing og inquiry-basert matematikkundervising. For eksempel skulle fleire av oppgåvene gjerne vore utforma slik at dei var lettare å forstå, og oppgåve 1 burde kanskje komme seinare i prosjektet. Ressursheftet kunne vore meir fokusert frå starten, og det hadde vore interessant å brukt eitt ekstra møte i forkant av gjennomføringsperioden i klasserommet på å drøfta heftet i lys av fleire case. Det at det blei tatt omsyn til fleire av desse utfordringane fortløpane var sjølv sagt ein styrke. For eksempel blei nokon sider av ressursheftet vektlagt, og oppgåve 4 utforma med svært låg inngangsterskel. Sidan det ikkje var tid til å gjennomføra oppgåve 1 eller ei liknande oppgåve ein gong til, blei det eit tema på fokusgruppa. Dessutan blei faktorar som at lærarane i starten ikkje prioriterte dialogisk instruksjonar og oppsummering tilnærma ved at dette blei lagt inn som eksplisitte stikkord i projektorpresenta-

sjonane. Den overordna erfaringen er at prosjektet jamnt over kunne vore utforma litt enklare ved å ha litt færre fokusområde overfor lærarane, elevane og i oppgåvene. Sjølv om dette ser ut til å vera ein av dei faktorane som har hindra utvikling, viser studien likevel at framgang trass dette var mogleg. I så måte har dette berre i mindre grad svekka svaret av forskings spørsmålet. Spørsmålet dette reiser, er korleis utviklinga ville utarta seg om desse utfordringane hadde vore korrigert for i eit anna prosjekt.

7.2 Konklusjon

Omsider er tida kommen for å gi eit oppsummerande og konkluderande svar på forskings spørsmålet: Kva utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar pregar lærarar si utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk, og korleis heng desse saman? Målet er difor å gi ei heilskapeleg oversikt over dei tre kategoriane i forskings spørsmålet ved å trekka fram dei mest sentrale funna og samanhengar mellom desse. Detaljar og nyansar er i hovudsak overlatt til dei to føregåande kapitla om resultat og drøfting. Eit sekundært og underordna mål er å oppsummera masteroppgåva generelt, og difor held denne delen fram med å først oppsummera bakgrunnen, konteksten og metoden for studien.

Motivasjonen for denne studien var delvis forskingsbasert og delvis personleg. Inspirert av egne erfaringar og faglitteratur ville eg studera inquiry-basert matematikkundervising nærmarer, og sidan masteroppgåva er del av ei profesjonsutdanning, var det naturleg å fokusera på utviklingsaspektet av dette. Med dette som utgangspunkt blei samarbeidet med Grete og Magne innleia i ein kontekst der undervisinga av matematikk frå før var relativt tradisjonell, men med eit moderne eller digitalt tilsnitt. Lærarane var prega av dette, men var likvel opne for og interesserte i å eksperimentera med inquiry-basert matematikkundervising for å utvikla seg. På same måte som at lærarane var trygge i si rolle, var elevane plikt oppfyllynde og høgtpresterande. For å sikra kvalitet blei prosjektet utforma på grunnlag av eit etablert teoretisk rammeverk og eksisterande forskning (sjå kapittel 2 og 3). I underdel 4.2.2 blei dette oppsummert i fem kjenneteikn, nemleg (a) gjennomføring over eit kort tidsrom ved hjelp av (b) forskingsbasert rettleiing og (c) forskingsbasert ressursmateriale (d) tett knytta til praksis og (e) refleksjon i fellesskap. Det første, men òg delvis det andre og tredje, kjenneteiknet gjer at denne studien skil seg ut i forhold til andre sentrale prosjekt som TBM-LBM og PRIMAS. Den kvalitative casestudien blei gjennomført parallelt med utviklingsprosjektet gjennom intervju, fokusgrupper, videoobservasjon, éi spørreundersøking og fortløpande skriftlege tilbakemeldingar. Delvis i samsvar med grounded theory og tematisk analyse blei dataa transkriberte eller «reduerte», koda og kategorisert. Dette blei presentert og drøfta i kapittel 4 om metode. Dei følgjande overordna funna bygger på dette og er eit overordna utval av alle resultatata i kapittel 5. I kapittel 6 blei dei drøfta grundigare i lys av det teoretiske rammeverket og den eksisterande forskinga.

Det var ein krevande prosess for lærarane (og elevane) å endra praksis i samsvar med inquiry-basert matematikkundervising, og det var særleg nokon utfordringar som utmerka seg. I samsvar med dei relativt tradisjonelle rammene for undervising og vurdering i matematikk ved Ølensvåg vgs., hadde Grete og Magne nokså avgrensa oppfatningar av matematisk kompetanse og den nye undervisinga. Det at dei i hovudsak såg på inquiry-basert matematikkundervising som ein arbeidsmåte dei kunne utfylla ordinær undervising gjennom, hemma utviklinga deira av inquiry som ei tilnærming til matematikkundervising generelt. På same måte var elevane sitt enda snevrare syn på matematisk kompetanse og undervising ein bremsekloss for prosjektet, særleg i starten. For begge typane aktørar prega dette kunnskapstileiingane, som dermed òg blei ei utfordring. Medan skepsisen til elevane førte til at dei ikkje tileigna seg tilstrekkeleg kunnskap for å fylla den nye rolla deira, utvikla lærarane litt einsidig kunnskap om inquiry i samsvar

med oppfatningane deira. Ein annan utfordrande faktor som påverka dette var utforminga av dei rike oppgåvene som i stor grad var unødvendig vanskelege for elevane å forstå. På prosjektnivå syntest lærarane det var vanskeleg å omsetta dei forskingsbaserte ressursmateriala og rettleiinga frå meg til praksis, for eksempel i samband med rammeverket til Stein et al. (2008). Dei trudde òg at utviklinga ville vore større om dei fem sekvensane hadde vore fordelt over eit større tidsrom, noko elevane støtta eit stykke på veg. Tidsbruk var òg ei utfordring i undervisinga og planlegginga.

Sjølv om utfordringane var omfattande, var det særleg tre endringar som tyder på at det òg skjedde ei vesentleg utvikling i lys av det teoretiske rammeverket og den forskingsbaserte operasjonaliseringa. Dette kom fram i samanlikning med mellom anna kjenneteikna på inquiry-basert matematikkundervising i figur 2.1. I løpet av dei fem undervisningssekvensane blei ei stor overvekt av elevane markant meir positive til den nye tilnærminga til matematikk, og det oppstod etter kvart fleire eksempel på gruppearbeid der dei i stor grad jobba inquiry-basert, noko ein mot slutten òg såg spor av under heilclassesamtalane. Dette seier indirekte mykje om lærarane si utvikling samtidig som at resultatata viser ei moderat, men langt frå uvesentleg, utvikling hjå dei òg i korleis dei modererte heilclassesamtalane, kommuniserte med gruppene under gruppearbeidet og introduserte oppgåvene. Her er det viktig å understreka, som det går fram av del 6.1 om utviklinga i heilskap, at det framleis var eit stort utviklingspotensialet både for både lærarane og elevane, og at ein vesentleg del av årsaka til at utviklingstrekkka i denne studien er avgjerande, er at dei skjedde over så kort tid. Sjølv om ein difor ikkje kan omtala funna som revolusjonerande, tyder drøftinga likevel på at resultatata er interessante.

Dei viktigaste årsakene for utviklingstrekkka kan oppsummerast i fire utslagsgivande faktorar. Lærarane var svært positive til utvikling generelt og var difor opne og engasjerte for å eksperimentera med inquiry-basert matematikkundervising. I samsband med dette gav dei uttrykk for at dei syntest dei hadde stort utbytte av i fellesskap å reflektera over utprøvinga av dei nye ideane om matematikkundervising, noko både observasjonen og eksisterande forskning underbygger. Sjølv om dei på den andre sida ikkje syntest dei hadde så stort utbytte av rettleiinga og ressursmateriala, tyder analysen ut frå rammeverka til Gueudet og Trouche (2012) og Clarke og Hollingsworth (2002) på at desse likevel hadde ein større indirekte, positiv effekt (sjå del 6.2 og 6.4). Tilsvarende la det korte tidsrommet for gjennomføringa til rette for to av Smith (2001) sine kriterier for eit effektivt utviklingsprogram, nemleg at arbeidet bør vera samanhengande og vedvarande.

Desse overordna funna viser at lærarar som vil utvikla inquiry-basert undervisningspraksis i matematikk, står overfor ein svært samansett prosess. For det første, er det eit intrikat forhold mellom utviklingstrekkka, utfordringane og dei utslagsgivande faktorarane med tanke på kategorisering. Slik det mange gonger blei poengtert fortløpande i resultatkapittelet og som det òg går fram av dei føregåande avsnitta, var fleire av faktorane både utfordringar og utslagsgivande faktorar, samtidig som at faktoren sjølv var gjenstand for utvikling. Enkelte av kjenneteikna ved utviklingsprosjektet, som dei forskingsbaserte ressursane, så vel som oppfatningane til deltakarane er eksempel på dette. I analyseprosessen kom dette til uttrykk ved at det var vanskeleg å kategorisera kodane. For det andre, viser analysen ved hjelp av endringsmiljømodellen til Clarke og Hollingsworth (2002) at òg dei ulike sidene av situasjonen til lærarane, såkalla domener, påverker og blir påverka av kvarandre på ein kompleks måte (sjå del 6.4). Det personlege domenet til Grete og Magne, for eksempel, som omfattar kunnskap og oppfatningar, stod i eit dialektisk forhold til dei andre tre domena knytta til eksterne stimuli, eksperimentering i praksis og framtrekande utfall. Meir konkret blei for eksempel kunnskapane til Grete og Magne påverka av både dei forskingsbaserte ressursane, klasseromspraksisen deira og dei endringane dei observerte hjå elevane av denne eksperimenteringa. Motsett blei kunnskapsutviklinga deira,

i større eller mindre grad, òg påverka av alle desse domena, mellom anna ved at elevane sine responsar påverka korleis dei operasjonaliserte dei eksterne ressursane. Denne modellen viser òg korleis refleksjon og iverksetting er avgjerande medierande prosessar som knytter domena saman, noko som mellom anna kom til uttrykk ved at stadig større delar av modellen blei aktivert etter kvart som det blei meir og betre reflektering på møta. Kvar av desse prosessane blei i sin tur og på ulike måtar prega av utfordringar og utvikling og kunne utgjera utslagsgivande faktorar for andre delar av modellen, slik som den tiltakande refleksjonen var eit eksempel på. Eit anna eksempel er oppfatningane til lærarane.

Basert på dette resonnementet kan ein konkludera med at innanfor rammene av dette utviklingsprosjektet blei lærarane si utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk prega av ei komplisert samansetting av fleire delvis ulike og delvis overlappende utviklingstrekk, utfordringar og utslagsgivande faktorar. Det mest interessante funnet er korleis to lærarar og elevane deira, i norsk vidaregåande matematikkopplæring, gjorde markante framsteg i løpet av berre fem undervisningssekvensar, og at dette skjedd trass fleire omfattande utfordringar i rammefaktorane, den eksisterande situasjonen og prosjektgjennomføringa. Studien stadfester at inquiry-basert matematikkundervising stiller store krav til lærarar og elevar både ved å introdusera nye krevande aktivitetar og roller, men òg ved å stilla høge krav til sider ved «vanleg» undervising som instruksjonar, tidsbruk og tilbakemeldingar. Sjølv om resultatane frå denne studien i stor grad samsvarer med eksisterande forskning (sjå del 6.2.3), særleg med tanke på kva utfordringar lærarar ofte støter på i innføringa av inquiry, utmerkar det overordna funnet om utvikling og utslagsgivande faktorar seg. Lærarar og klassar *kan* oppleve vesentleg utvikling over eit kort tidsrom i eit miljø kjenneteikna av rettleiing basert på forskingsbaserte ressursar og refleksjon over praksis.

7.3 Implikasjonar

I oppfølginga av konklusjonen tar denne delen utgangspunkt i spørsmålet «kva verdi har denne studien?» og tar dermed opp tråden frå del 7.1 og kvalitetsevalueringa der. Eit sentralt mål i arbeidet med masteroppgåva var at produktet skulle kunna gjera ein forskjell for både andre matematikklærarar, politikktutformarar, forskarar så vel som meg sjølv, og her følger ei kort drøfting om korleis oppgåva svarar til dette.

For matematikklærarar er dette ei relativt omfattande og praksisnær samanfating av teori, forskning og ressursar om inquiry-basert undervising og profesjonell utvikling i kombinasjon med eit konkret case, eller eksempel, på korleis ein kan nyttegjera seg av desse i matematikk. Oppgåva er difor eit godt utgangspunkt for dei som ønsker å utvikla ny praksis i samband med dette, uavhengig av om dei vektlegg inquiry som perspektiv eller som arbeidsmåte. Her spelar ikkje minst resultatane knytta til utfordringar, utviklingstrekk og utslagsgivande faktorarar ei vesentleg rolle. Det er viktig å understreka ordet «utgangspunkt» fordi prosessen, slik det går fram av oppgåva, krev meir enn å lesa denne teksten. Når dette er sagt, er det nødvendig å minna om poenget som blei tatt opp i drøftinga av generalisering (sjå underdel 7.1.3). Både utviklinga og utfordringane i denne studien er tett knytta til eigenskapane ved situasjonen, og sjølv om fleire av desse er aktuelle i andre situasjonar, må den enkelte rimelegvis vurdere korleis trekk ved ein annan situasjon kan påverka utfallet.

I utforminga av utdanningspolitikken framover kan denne studien vera eit bidrag ved å auka merksemda for og å kasta ytterlegare lys over eit tema i vekst. Den vesentlege utviklinga trass fleire avgjerande utfordringar, tyder på at inquiry-basert matematikkundervising både er mogleg og relevant i den vidaregåande opplæringa. Samtidig viser resultatane òg at ei slik implementering er krevande. Viss ein ønsker at lærarar i stor utstrekning skal ta i bruk inquiry-perspektivet

og samtalebaserede undervisningsaktiviteter i matematikk, viser denne studien at ein i tillegg må leggja til rette for omfattande utviklingsprogram og revurdera dei eksisterande rammene for undervisning, særleg vurdering. På den andre sida, seier studien mindre om lærarar som tar initiativ til og jobbar med si eiga utvikling utan oppfølging, og effektane av slike uformelle «program».

For forskingsfeltet er det hovudsakleg den alternative utforminga av utviklingsprosjektet, i forhold til TBM-LBM-prosjektet og PRIMAS-prosjektet, og resultatane som følger av dette, som er interessant. Til ei viss grad er det naturlegvis nyttig å observera at etablerte kvalitetar, som refleksjon og utvikling som ein kompleks prosess, òg spelar ei vesentleg rolle her, men desto meir interessant er det at det var mogleg å oppnå relativt stor endring i klasserommet over berre fem undervisningssekvensar. Mykje tyder på at dette mellom anna heng saman med bruken av forskingsbasert ressursmateriale og rettleiing, og interessante funn i denne samanhengen er utfordringane knytta til å bruka desse. Eksempel på dette er dei fem aktivitetane til Stein et al. (2008), Hedrén et al. (2005) sine kriterier for rike oppgåver og samtalegrepa til Chapin et al. (2013). Tilsvarande er skildringa av det komplekse forholdet mellom utfordringar, utviklings- trekk og utslagsgivande faktorarar nytt i forhold til litteraturen som ligg til grunn for denne studien. Sidan dette er ei masteroppgåve, er det likevel viktig å sjå funna i eit kritisk lys og i samanheng med eksisterande forskning.

Dei forskingsmessige implikasjonane inspirerer til ytterlegare studiar av liknande utviklingsprogram, særleg med tanke på det korte tidsrommet. Då kunne ein korrigert for utfordringane og tatt omsyn til erfaringane frå denne gjennomføringa, for eksempel ved å utforma oppgåvene slik at dei alle var enklare å forstå. Det er rimeleg å gå ut frå at slike endringar ville gitt vesentlege positive utslag i resultatane. Ein kunne undersøkt korleis eit lengre tidsrom ville påverka funna, både med og utan fleire undervisningssekvensar, og korleis ein kunne ha fått meir ut av dei forskingsbaserte ressursane og rettleiinga. Kva hadde for eksempel skjedd viss ein hadde utelukkande fokusert på rammeverka til Stein et al. (2008), Hedrén et al. (2005) og Chapin et al. (2013) frå starten av? Korleis hadde auka bruk av videoeksempel eller ei anna form for modellering påverka lærarane og, ikkje minst, elevane? Viss ein i eit større prosjekt hadde utforma nye former for vurdering som samsvarar meir med inquiry-basert matematikkundervisning, for eksempel ved bruk av rike oppgåver, kva oppfatningar ville lærarane og elevane utvikla om undervisninga då? Dette er berre nokon av dei spørsmåla denne studien inspirerer til og som det ville vore spennande å undersøkt nærmare.

For min eigen del, har eg i likskap med lærarane utvikla meg. Sidan eg i utgangspunkt hadde positive oppfatningar til inquiry og hadde kunnskap om både inquiry-basert matematikkundervisning og profesjonell utvikling, var det i hovudsak innanfor den praktiske komponenten eg gjorde verdifulle erfaringar. Sjølv om eg berre indirekte deltok i undervisninga gjennom planlegging og evaluering, har eg nå ei mykje djupare og praktisk forståing av inquiry-basert matematikkundervisning og utvikling av denne. I den følgjande delen gjer eg greie for andre måtar denne studien har påverka meg.

7.4 Avsluttande refleksjonar om arbeidet og produktet

Før eg verkeleg tok fatt på denne masteroppgåva, reflekterte eg ein del over kva ønske eg hadde for dette arbeidet og produktet som skulle runda av utdanninga mi (i allfall i første omgang). I løpet av denne tida delvis oppdaga og delvis utforma eg nokon mål som eg har sikta på heilt frå då eg skulle velga tema og metodar for datainnsamling til kvar gong eg har utmeisla eit nytt kapittel. Sidan eg visste eg kom til å leggja ned svært mykje tid og arbeid, var det viktig for meg at resultatet ville bidra sterkt til den profesjonelle utviklinga mi som lærar, og då var ville eg heller prioritera ei sentral side av lærarlivet enn å fokusera på ei nisje. Det var viktig for meg å

gjera eit omfattande og grundig arbeid, og då ville eg òg at eg skulle sitta igjen med noko nytt, framoverretta og spennande. Når siste punktum blei sett, skulle produktet dessutan vera mitt og reflektera kven eg er.

Når eg nå ser tilbake på ei snart ferdig masteroppgåve, synest eg at eg har lukkast i nå desse måla. Valet av inquiry-basert matematikkundervising som tema vil prega resten av karrieren min og (forhåpentlegvis) framtidig matematikkundervising i Norge i mykje større grad enn nå. Sjølv om eg kjente til fleire sider av og rammeverk for dette undervisningsperspektivet frå før, har eg i dag ei mykje djupare og praksisnær forståing av korleis dette kan gjennomførast i praksis. Samtidig har arbeidet med masteroppgåva styrka kunnskapen og intuisjonen min i møte med matematikdidaktisk teori, forskning og metode og gitt meg heilt ny innsikt i mi eiga tenking.

Slik eg trur dei fleste erfarer, er det ikkje berre berre å skriva ei masteroppgåve. Sjølv om eg aldri blei ståande heilt fast, har eg for så godt som kvart einaste kapittel prøvd ut både to og tre ulike måtar å strukturera tankane og poenga mine på. Lenge var det òg vanskeleg å sjå korleis studien skulle munna ut i resultat, drøfting og konklusjon, og med eit vedvarande tidspress, har eg fleire gonger måtta ta meg sjølv i nakken for å komma vidare. På grunn av dette var det langt frå så stort rom som eg skulle ønska, for å gjera noko på nytt om det så gjaldt utforminga av eit kapittel, gjennomføringa av eit planleggingsmøte. Det var òg eit steg utav komfortsona då eg skulle skaffa respondentar og trø inn i deira skuleverd.

Når alt dette er sagt, ligg det både verdifulle erfaringar og gode meistringskjensler i å ha lagt desse utfordringane bak seg. Sjølv om eg heile tida har både sett og flytta meg framover, er det likevel både godt og fascinerande å sjå tilbake på ein veg som har blitt til etter kvart. «Det ordnar seg alltid,» seier Mormor, og det gjorde det denne gongen òg. Dette er eit av dei mest omfattande prosjekta eg nokon gong har gitt meg i kast med, men det har òg vore ei av dei mest givande oppgåvene gjennom utdanningsløpet mitt. Eg er stolt av masteroppgåva eg har skrivne og gleder meg til å ta fatt på dei nye utfordringane som ligg framfor meg.

Referansar

- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004). Dialogic learning in collaborative investigation. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 9(2), 39-62.
- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 797-810. doi: 10.1007/s11858-013-0506-6.
- Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554.
- Barron, B. & Darling-Hammond, L. (2008). *Teaching for meaningful learning: A review of research on inquiry-based and cooperative learning*. Hentet fra <https://pdfs.semanticscholar.org/05bb/40f4937dbdb7be66b9abeb47dace529e241a.pdf>
- Bergem, O.K., Goodchild, S., Henriksen, E.K., Kolstø, S.D., Nordtvedt, G.A. & Reikerås, E.K.L. (2015). *Realfag: relevante, engasjerende, attraktive, lærerike. Rapport fra ekspertgruppa for realfagene*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/vedlegg/rapporter/rapport_fra_ekspertgruppa_for_realfagene.pdf
- Bergem, O.K. & Klette, K. (2008). Conversations as learning tools in mathematics: What do pupils actually learn? I K. Klette, O.K. Bergem & A. Roe (red.), *Teaching and learning in lower secondary schools in the era of PISA and TIMSS* (s. 129-145). doi: 10.1007/978-3-319-17302-3.
- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nordisk matematikdidaktikk*, 1(1), 8-17.
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41-62. doi: 10.2307/749717.
- Botten, G., Daland, E. & Dalvang, T. (2008). Tilpasset matematikkopplæring i en inkluderende skole. *Tangenten*, 19(2), 23-27.
- Brand, B.R. & Moore, S.J. (2011). Enhancing teachers' application of inquiry-based strategies using a constructivist sociocultural professional development model. *International Journal of Science Education*, 33(7), 889-913. doi: 10.1080/09500691003739374.
- Bråten, I. & Turmann-Moe, A.C. (1996). Den nærmeste utviklingssonen som utgangspunkt for pedagogisk praksis. I I. Bråten (red.), *Vygotsky i pedagogikken* (s. 123-143). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.
- Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Nasjonalt læremiddelsenter.
- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. doi: 10.1007/978-0-387-09742-8.
- Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidens on the benefits of IBL. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 811-822. doi: 10.1007/s11858-013-0542-2.
- Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4. utg.). Oxford: Oxford University Press.

- Capps, D.K., Crawford, B.A. & Conzas, M.A. (2012). A review of empirical literature on inquiry professional development: Alignment with best practices and a critique of the findings. *Journal of Science Teacher Education*, 23(3), 291-318. doi: 10.1007/s10972-012-9275-2.
- Carlsen, M. & Fuglestad, A.B. (2010). Læringsfellesskap og inquiry for matematikkundervisning. *Tidsskriftet FoU i praksis*, 4(3), 39-60.
- Chapin, S.H., O'Connor, C. & Anderson, N.C. (2013). *Classroom discussions in math: A teacher's guide for using talk moves to support the common core and more* (3. utg.). Sausalito, California: Math Solutions.
- Clarke, D. & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18, 947-967. doi: 10.1016/S0742-051X(02)00053-7.
- Dorier, J.-L. & García, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 837-849. doi: 10.1007/s11858-013-0512-8.
- Drageset, O.G. (2014). Korleis leie ein matematisk samtale? *Tangenten*, 25(1), 12-16.
- Drageset, O.G. (2016). Korleis lærarar leier ein matematisk samtale. I R. Herheim & M. Johnsen-Høines (red.), *Matematikksamtaler: Undervisning og læring – analytiske perspektiv* (s. 168-179). Bergen: Caspar Forlag.
- Engeln, K. (2013). *The PRIMAS project: IBL implemenation survey report*. Hentet fra <http://www.primas-project.eu/artikkel/en/1247/Reports+and+deliverables/view.do?lang=en>
- Engeln, K., Euler, M. & Maaß, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: A comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 823-836. doi: 10.1007/s11858-013-0507-5.
- Fradd, S.H., Lee, O., Sutman, F.X. & Saxton, M.K. (2001). Promoting science literacy with English language learners through instructional materials development: A case study. *Bilingual Research Journal*, 25(4), 479-501. doi: 10.1080/15235882.2001.11074464.
- Fuglestad, A.B. (2009). Utforskende matematikkundervisning: En lærers planlegging og refleksjoner. I B. Groven, T.M. Fuldal, O.F. Lillemyr, N. Naastad & F. Rønning (red.), *FoU i praksis 2008: Rapport fra konferanse om praksisrettet FoU i lærerutdanning*. (s. 69-80). Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.
- Fuglestad, A.B. (2010a). Bedre matematikkundervisning. *Tangenten*, 21(4), 9-14 og 25.
- Fuglestad, A.B. (2010b). Læringsfellesskap og inquiry. *Tangenten*, 21(4), 2 og 6.
- Gilderdale, C. & Kiddle, A. (2014). *Tilted squares: Teaching using rich tasks*. [Videoklipp]. Hentet fra <http://nrich.maths.org/11248>
- Gilderdale, C. & Kiddle, A. (2014, september). *What are rich tasks?* Hentet fra <http://nrich.maths.org/11249>
- Goldsmith, L.T., Doerr, H.M. & Lewis, C.C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(1), 5-36. doi: 10.1007/s10857-013-9245-4.
- Goodchild, S. (2008). A quest for 'good' research: The mathematics teacher educator as practitioner researcher in a community of inquiry. I B. Jaworski & T. Wood (red.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (s. 201-220). Rotterdam: Sense Publishers.
- Goodchild, S., Fuglestad, A.B. & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 393-412. doi: 10.1007/s10649-013-9489-z.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for*

- Research in Mathematics Education*, 35(4), 258-291. doi: 10.2307/30034810.
- Grønmo, L.S., Onstad, T. & Pedersen, I.F. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub.
- Gueudet, G., Buteau, C., Mesa, V. & Misfeldt, M. (2014). Instrumental and documentary approaches: From technology use to documentation systems in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 139-155. doi: 10.1080/14794802.2014.918349.
- Gueudet, G. & Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: Documentational geneses and professional geneses. I G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (red.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (s. 23-41). doi: 10.1007/978-94-007-1966-8_2.
- Hedrén, R., Taflin, E. & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till? *Nämnnaren*, 32(1), 36-41.
- Hmelo-Silver, C.E., Duncan, R.G. & Chinn, C.A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, 42(2), 99-107. doi: 10.1080/00461520701263368.
- Holmboeprisen. (2016). *Ingunn Valbekmo, Holmboeprisvinner 2016*. Henta 9. mai 2017 frå http://holmboeprisen.no/arkiv/2016_holmboeprisen.html
- Hufferd-Ackles, K., Fuson, K.C. & Sherin, M.G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(2), 81-116. doi: 10.2307/30034933.
- Inoue, N. & Buczynski, S. (2011). You asked open-ended questions, now what? Understanding the nature of stumbling blocks in teaching inquiry lessons. *The Mathematics Educator*, 20(2), 10-23.
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 187-211. doi: 10.1007/s10857-005-1223-z.
- Johnsen-Høines, M. & Alrø, H. (red.). (2012). *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis: Bok 1*. Bergen: Caspar forlag.
- Johnsen-Høines, M. & Alrø, H. (red.). (2013). *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis: Bok 2*. Bergen: Caspar forlag.
- Kaendler, C., Wiedmann, M., Rummel, N. & Spada, H. (2015). Teacher competencies for the implementation of collaborative learning in the classroom: A framework and research review. *Educational Psychologist Review*, 27(3), 505-536. doi: 10.1007/s10648-014-9288-9.
- Kazak, S., Wegerif, R. & Fujita, T. (2015). The importance of dialogic processes to conceptual development in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 105-120. doi: 10.1007/s10649-015-9618-y.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academies Press.
- Kirschner, P.A., Sweller, J. & Clark, R.E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational psychologist*, 41(2), 75-86. doi: 10.1207/s15326985ep4102_1.
- Klette, K. (2013). Hva vet vi om god undervisning? Rapport fra klasseromsforskningen. I R. Krumsvik R. J. og Säljö (red.), *Praktisk pedagogisk utdanning: En antologi* (s. 173-201). Bergen: Fagbokforlaget.
- Kristensen, T.E. (2008). Tilpasset opplæring innenfor fellesskapet. *Tangenten*, 19(2), 9-14.

- Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplanen i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Hentet fra <http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf>
- Kunnskapsdepartementet. (2015). *Tett på realfag: Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnsopplæringen (2015-2019)*. Hentet fra <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/tett-pa-realfag/id2435042/>
- Kværnes, L. (2013). Utvikling av læreres undervisningspraksis i matematikk som en utforskende og reflekterende virksomhet: En teoretisk og empirisk grunnet drøfting. *Acta Didactica Norge*, 7(1), 1-19. Hentet fra <https://www.journals.uio.no/index.php/adno/article/view/1114>
- Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Ad notam Gyldendal.
- Kvale, S. (2001). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.
- Larsen, T., Skagestad, L. & Torkildsen, G. (2010). Kommunikasjon og inquiry. *Tangenten*, 21(4), 3-6.
- LeCompte, M.D. & Goetz, J.P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research*, 52(1), 31-60.
- Maaß, K. (2013). *PRIMAS report on the results of the internal evaluation*. Hentet fra <http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=0&supportId=1247>
- Maaß, K. & Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 887-899. doi: 10.1007/s11858-013-0505-7.
- Maaß, K. & Reitz-Koncebovski (red.). (2013). *Inquiry-based learning in maths and science classes*. Hentet fra <http://www.primas-project.eu/en/index.do>
- Matematikksenteret. (2015). *Visjon og strategi 2015-2020: Meningsfull matematikk for alle – et samspill mellom praksis, utvikling og forskning*. Hentet fra <http://www.matematikksenteret.no/content/5849/Visjon-og-strategi>
- Matematikksenteret. (2017). *Hefter med undervisningsaktiviteter*. Hentet fra <http://www.matematikksenteret.no/content/169/Hefter%20og%20publikasjoner>
- Moreno, R. (2004). Decreasing cognitive load in novice students: Effects of explanatory versus corrective feedback in discovery-based multimedia. *Instructional Science*, 32(1), 99-113. doi: 10.1023/B:TRUC.0000021811.66966.1d.
- Nam, J., Seung, E. & Go, M. (2013). The effect of a collaborative mentoring program on beginning science teachers' inquiry-based teaching practice. *International Journal of Science Education*, 35(5), 815-836. doi: 10.1080/09500693.2011.584329.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. & Jensen, T.H. (red.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i danmark*. Hentet fra pub.uvm.dk/2002/kom/
- Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. Hentet fra <http://www.matematikksenteret.no/content/4879/Sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-%5C%20i-matematikk>.
- NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser*. Hentet fra <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/>
- Olafsen, A.R. & Maugesten, M. (2015). *Matematikdidaktikk i klasserommet (2. utg.)*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Philipp, R.A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. I F.K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 257-315). Charlotte: Information Age Publishing.
- Piburn, M.D. & Sawada, D. (2000). *Reformed teaching observation protocol (rtop) referen-*

- ce manual*. (Teknisk rapport nr. IN00-1). Tempe, Az: Arizona State University, Arizona Collaborative for Excellence in the Preparation of Teachers.
- Postholm, M.B. & Jacobsen, D.I. (2011). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.
- Pozuelos, F., González, G.T. & de León, P.C. (2010). Inquiry-based teaching: teachers' conceptions implelements and support. *Teaching Education*, 21(2), 131-142. doi: 10.1080/10476210903494507.
- Prestage, S. & Perks, P. (2001). *Adapting and extending secondary mathematics activities: New tasks for old*. London: David Fulton Publishing.
- PRIMAS. (2011). *Guide for professional development providers*. Hentet fra <http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=2&supportId=1300>
- Rangnes, T.E. (2012). Hva regnes som matematisk aktivitet? Koordinering av sosiomatematiske normer. I M. Johnsen-Høines & H. Alrø (red.), *Læringsamtalen i matematikkfagets praksis: Bok 1* (s. 51-64). Bergen: Caspar Forlag.
- Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., . . . Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 651-690. doi: 10.1007/s11858-016-0797-5.
- Rowland, T. & Turner, F. (2007). Developing and using the 'knowledge quartet': A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*, 10(1), 107-123.
- Säljö, R. (2013). Støtte til læring – tradisjoner og perspektiver. I R. Säljö & R.J. Krumsvik (red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning: En antologi* (s. 53-79). Bergen: Fagbokforlaget.
- Schoenfeld, A.H. & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 901-909. doi: 10.1007/s11858-013-0531-5.
- Skovsmose, O. & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. I P. Valero & R. Zevenbergen (red.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (s. 207-226). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Skovsmose, O. & Säljö, R. (2007). *Report on the KUL-projects: Learning communities in mathematics and ICT in mathematics learning*. Hentet fra http://prosjekt.uia.no/lcm/papers/Report-KULfinal_OSK_RS_okt07.pdf
- Skovsmose, O. & Säljö, R. (2008). Learning mathematics through inquiry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13(3), 31-52.
- Smith, M.S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S. & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning*, 10(4), 313-340. doi: 10.1080/10986060802229675.
- St.meld. nr. 11 (2008-2009). (2009). *Læreren, rollen og utdanningen*. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/nb/dep/Kunnkapsdepartementet/dok/regpubl/stmeld/2008-2009/stmeld-nr-11-2008-2009-.html>
- Streitlien, A. (2004). Samtaleformer i matematikkundervisningen. *Tangenten*, 15(3), 18-25 og 37.
- Tafuya, E., Sunal, D. & Knecht, P. (1980). Assessing inquiry potential: A tool for curriculum decision makers. *School science and mathematics*, 80(1), 43-48. doi: 10.1111/j.1949-8594.1980.tb09559.x.
- Tirosh, D. & Graeber, A.O. (2003). Challenging and changing mathematics teaching class-

- room practices. I A. Bishop, M. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick & F.-S. Leung (red.), *Second international handbook of mathematics education* (s. 643-687). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tjora, A. (2010). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (1. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.
- Valenta, A. (2016). *Kognitive krav i matematikkoppgaver*. Hentet fra <http://www.matematikkenteret.no/multimedia/4045/Valenta-Kognitive-krav-i-matematikkoppgaver-24.sept1>
- Valenta, A. & Wæge, K. (2017). *Rehearsals in work with in-service mathematics teachers*. Paper presentert på CERME 10, Dublin. Hentet fra https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0205.pdf
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Wæge, K. (2015). Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten*, 26(2), 22-26.
- Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: Cambridge University Press.
- White, A.L., Jaworski, B., Agudelo-Valderrama, C. & Gooya, Z. (2013). Teachers learning from teachers. I M.A.K. Clements, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (red.), *Third international handbook of mathematics education* (s. 393-430). doi: 10.1007/978-1-4614-4684-2_13.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. doi: 10.2307/749877.
- Zaslavsky, O., Chapman, O. & Leikin, R. (2003). Professional development of mathematics educators: Trends and tasks. I A. Bishop, M. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick & F.-S. Leung (red.), *Second international handbook of mathematics education* (s. 877-917). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tillegg A

Forarbeid

Dette tilleggskapittelet inneheld dei to informasjonsskriva med samtykkebrev til lærarane og elevane i tillegg til godkjenningsbrevet frå Norsk senter for dataforskning. Her er det verdt å merka seg at brevet til lærarane er relativt omfattande i forhold til tilsvarende dokument fordi eg såg det som viktig at dei i denne samanhengen var godt informert om kva dei takka ja til å vera med på.

A.1 Informasjonsskriv med samtykkebrev til lærarane

Du har fått dette skrivet fordi du har uttrykt interesse for å delta i dei empiriske undersøkingane i samband med masteroppgåva mi. Her skal du finna alt du treng å vita før du tar det endelege valet, men saknar du noko, gir du meg berre ein lyd.

Teksten er delt inn i seks, der den første kort og godt tar for seg inquiry-omgrepet, den neste utdjuvar tittelen for dokumentet ytterlegare ved å presentera temaet for masteren, den tredje skildrar den konkrete gjennomføringa av prosjektet med vekt på undervising og datainnsamling og den fjerde spør kva du og elevane dine får ved å delta. Til slutt følger ei oppsummering av dei viktigaste elementa og ein svarslipp.

Sidan prosjektet framleis er i ei tidleg fase, er dette å rekna som eit slags førsteutkast som kjem til å bli betre presisert og moglegvis endra noko i løpet av hausten og fram til gjennomføringa av prosjektet i dialog med dei deltakande lærarane. Det meste, om ikkje alt, skjer nok innanfor rammene av denne skildringa. Eg refererer fortløpande til noko forskning, men av plassomsyn har eg ikkje inkludert ei litteraturliste. Ønsker du å sjå nærmare på noko, kan du då òg berre seia ifrå.

– Håvard Andreassen

Inquiry based teaching

I seinare tid har forskning på undervising og læring i matematikk via stadig større merksemd til undervising gjennom inquiry og læringsfellesskap (Sfard, i Streitlien, 2004; Artigue & Blomhøj, 2013). Fuglestad (2009, s. 71) definerer inquiry slik:

Inquiry kan bety å stille spørsmål, undre seg, undersøke, utforske eller eksperimentere for å finne ut av en sammenheng og forsøke å forstå og kunne utvikle en problemstilling videre. (...) Inquiry innebærer aktiv tilnærming til faget og problemstillingene som det arbeides med slik at elever og lærere ikke bare godtar svar, men forsøker å gå dypere for å bygge forståelse for begreper og sammenhenger.

Dette er altså meir eit overordna perspektiv enn ein operasjonalisert undervisningsmetode.

Når det er sagt, vil ein lærar som i hovudsak underviser gjennom først å presentera fagstoffet på tavla for så å la elevane arbeida individuelt med oppgåver frå læreverket, ønska å endra undervisinga si vesentleg viss han eller henne tar dette perspektivet. Ein vil truleg leggja til rette for meir elevaktivitet gjennom opnare, rike oppgåver og diskusjon i grupper og plenum og sjølv spela rolla som moderator framfor ekspert eller fasit (Alrø & Skovsmose, 2002; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Av dette går det også fram at «læringsfelleskap» viser til det å læra saman og av kvarandre (Fuglestad, 2008). Dette går eg meir konkret innpå seinare.

Det er dokumentert mange positive konsekvensar av å implementera inquiry i undervisinga si. I den omfattande, men konsise, rapporten «Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk» frå Matematikksenteret til Ludvigsenutvalet meiner Nosrati & Wæge (2015) at inquiry based teaching fører til betre (relasjonell) forståing, auka metakognisjon, auka (indre) motivasjon og læringsorientering samt tilpassa opplæring i fellesskapet gjennom «berikelse». Med tanke på skildringa av matematisk kompetanse i lærplanen, kan ein også godt argumentera for at inquiry, i større grad enn tradisjonell undervisning, dekker alle aspekta.

Ifølge (Blomhøj, 2013) er «inquiry based education in mathematics» relatert til andre matematikdidaktiske omgrep og teoretiske tradisjonar, du kanskje kjenner til, som problemløysing (sjå til dømes Schoenfeld og Polya), realistisk matematikkundervisning (sjå til dømes Freudenthal og Gravemeijer), modellering, teori om didaktiske situasjonar (sjå til dømes Brousseau) og dialogiske og kritiske tilnærmingar (sjå til dømes Alrø og Skovsmose).

Tema for masteroppgåva

Då eg sjølv for vel eitt år sidan først blei introdusert for introdusert for inquiry based teaching og så leste meir om det på eigahand, blei eg inspirert til å la dette prega undervisinga mi i matematikk i praksisperioden min på ein vidaregåande skule. Både gjennom mi eiga undervisning og samtalar med andre på praksisstaden erfarte eg at sjølve overgangen frå ei «tradisjonell» form for undervisning til inquiry based teaching, er ei av dei mest interessante sidene av dette teoretiske perspektivet.

Basert på dette er temaet for masteroppgåva korleis lærarar og/eller elevar opplever eller erfarer overgangen frå det ein kan kalla tradisjonell undervisning til inquiry based teaching. Dette kan komma til å dreia seg om positiv utvikling, så vel som utfordringar og korleis ein handterer dei. Dette er sjølvsagt ei generell formulering som kjem til å bli spissa etter kvart.

Gjennomføring og metode

Når det gjeld datainnsamling er ideen å samarbeida med ein eller fleire lærarar (etter alt å døma kvar for seg) på ungdomsskule- eller vidaregåandenivå der lærarane i ein periode på tre, kanskje fire, veker i overgangen mellom januar og februar underviser ut frå eit inquiry perspektiv. Masteroppgåva blir altså anten ein casestudie eller ein komparativ studie. Slik temaet er formulert er det naturleg å bruka ein kvalitativ, eksploderande strategi, med metodar som observasjon, kvalitativ spørreundersøking, intervju og fokusgruppe. Dette blir ytterlegare skildra i dei følgjande to avsnitta:

Undervisinga Det er meininga at undervisinga både skal vera i tråd med læreplanen for faget og inquiry-perspektivet. Slik sett og med det korte tidsperspektivet i minne, er det naturleg at undervisningsopplegga blir utvikla i samarbeid mellom lærarane og meg. Her reknar eg med me finn ein god balanse, men på førehand framstår det fornuftig at både eg og lærarane bidrar

med idear til oppgåver og gjennomføring, medan lærarane meistar ut detaljane. Det er mange inquiry-prega undervisningsopplegg tilgjengeleg på nett, ein kan la seg inspirera av, men det er, igjen, viktig at undervisinga er sentral i forhold til læreplanen for faget.

Som sagt, er inquiry meir eit overordna perspektiv en ein operasjonalisert måte å undervisa på, men det kan vera naturleg å leggja opp til undervising som liknar denne følgande skissa slik Nosrati og Wæge (2015) formulerer det:

En undersøkende matematikktime skiller seg i betydelig grad fra tradisjonell undervising, og den følger ofte en tredelt struktur (Goos, 2004; Sherin, 2002). I begynnelsen av timen presenterer læreren en ny og kognitivt krevende oppgave eller aktivitet for elevene. Deretter får elevene god tid til å jobbe med denne aktiviteten. Læreren observerer arbeidet deres og kan oppmuntre dem til å finne nye løsninger eller til å beskrive hvordan de tenker. Timen avsluttes med at hele klassen diskuterer aktiviteten og de forskjellige løsningsmetodene som har blitt gjort. Læreren leder diskusjonen på en måte som gjør at elevene blir oppmerksomme på hvordan de ulike løsnignene henger sammen og hvordan løsnignene deres er relatert til læringsmålene for timen (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008; Wæge, 2007; Smith & Stein, 2011). Elevene må både utvikle en forståelse for prosedyrene og de må kunne bruke prosedyrene effektivt, nøyaktig og fleksibelt.

Her er nokre moglege delar av timen utelatt, til dømes oppstart, repetisjon og liknande. I tillegg er det naturleg å tilpassa tidsbruken til oppgåver og tema, og det same gjeld fordelinga mellom dei tre fasene i sitatet. Det er altså berre ein idé til ein mal som ein kan tilpassa og «manipulera» for kvart opplegg. Til dømes treng elevane ikkje jobba i grupper.

Som kjent, har fagstoff ulik karakter, og det er ikkje naturleg å forventa at elevane skal oppdaga absolutt alt på eiga han. Til dømes notasjon og omgrep kan det vera fint å introdusera gjennom meir tradisjonelle former, som førelesing. Det er heller ikkje i strid med perspektivet at elevane arbeider individuelt, til dømes med lekser både heime og i timane.

Eit par løysingar Når lærarar har meldt si interesse for prosjektet, avtaler me i meir detalj, kor stor del av undervisinga som skal vera inquiry-basert. Det er viktig at dette utgjør ein hovudkomponent, men me finn saman ei god løysing.

Når det gjeld tidsbruk i planlegginga av timane, avtaler me dette òg på førehand ut frå kor mykje tid læraren har til rådighet. Slik sett er det inga fare for at dette blir eit tidssluk for lærarane.

Datainnsamling Datainnsamlinga vil skje i tråd med forskingsetiske prinsipp (som anonymitet og informert samtykke), etter godkjenning frå Norsk senter for forskningsdata (NSD) og samtykke frå lærarane og elevane¹. På dette tidspunktet i prosessen ser eg for meg å gjera videoobservasjonar av enkelte timar og gjennomføra ei eller to kvalitative spørreundersøkingar (pre- og posttest) og basert på desse gjennomføra intervju eller fokusgrupper med lydopptak med nokre av elevane. I tillegg er det naturleg å intervjuja lærarane to eller tre gonger.

Her kan ein støta på nokre utfordringar som ein må ta hensyn til. For det første ønskjer kanskje ikkje alle elevane å bli filma eller gjort lydopptak av, sjølv om ingen andre enn dei involverte i prosjektet kjem til å sjå eller høyra opptaka. Dette er vanleg å løysa ved å organisera klasserommet slik desse eventuelle elevane ikkje blir fanga opp av utstyret. Ei anna utfordring er tidsbruken. Tid er ein verdifull ressurs både på ungdomsskule og vidaregåande skule, og sjølv

¹Viss elevane er yngre enn 15 år, må ein ha godkjenning frå foreldra

om (video-) observasjonen ikkje får nokre konsekvensar her, vil eg leggja vekt på å utforma spørreundersøkingar, intervju og fokusgrupper som er tidseffektive. Dette må avtalast i meir detalj seinare.

Kva får du og elevane dine ved å delta?

Dette er ein unik sjanse for deg som lærar til å utforska nye måtar å undervisa på, til å læra meir om deg sjølv som lærar og til å utvikla undervisinga di. I tillegg er det svært spennande berre det å vera med på masterprosjekt og arbeida vitskapler. For elevane dine inneber dette ein sjanse til å sjå matematikken med nye auge og til å læra mykje mange av dei (eller alle) aldri har fått sjansen til før. Dette kan auka motivasjonen og gi rom for å bruka fleire sider av seg sjølv. I tillegg får dei erfara heilt konkret korleis teori om læring og undervising i matematikk blir testa og utvikla, for ikkje å gløyma korleis dei kan få det som masterstudentar.

Elles tilrår eg rapporten til Nosrati og Wæge (2015) som du lett finn ved eit Google-søk.

Oppsummering

Deltaking i studien betyr for din del som lærar at du inkluderer inquiry-basert undervising som eit hovudelement i matematikkundervisinga di i ein eller fleire klassar i ein periode på omtrent 3 veker i januar og/eller februar. I tillegg vil du svara på spørreundersøkingar, delta i intervju og godta videoobservasjon i eit utval av timane du held i denne perioden. Me avtalar omfang på førehand. Elevane dine deltar etter eige ønske i spørreundersøkinga, intervju og videoobservasjon.

Alle personopplysingane om deg kjem til å bli handsama konfidensielt i heile prosessen, og du vil ikkje kunna gjenkjenneast i masteroppgåva når ho blir publisert. Det er berre masterstudent Håvard som gjennomfører prosjektet, og rettleiaren hans ved Universitetet i Agder som har tilgang på informasjonen i spørreundersøkingane, observasjonane og intervjua. Når masteroppgåva er fullført og sensurert, blir all denne informasjonen sletta.

Det er frivillig å delta.

Kontaktinformasjon

Spørsmål kan rettast til meg, Håvard, (tlf. 41260441) eller rettleiaren min, Anne Berit Fuglestad (tlf. 99233377).

Svarslipp

Eg _____ har mottatt informasjon om studien og er villig til å delta.

(Namn, dato)

A.2 Informasjonsskriv med samtykkebrev til elevane

Bakgrunn og formål

Prosjektet er knyttet til en masteroppgave ved Universitetet i Agder som har til hensikt å studere hvordan lærere og elever opplever og erfarer overgangen fra tradisjonell til såkalt Inquiry-basert («utforskende») matematikkundervisning. Mens tradisjonell undervisning ofte kjennetegnes av at læreren presenterer stoffet før elevene jobber med oppgaver individuelt, preges inquiry-basert undervisning av at elevene er aktive i å utforske, eksperimentere og diskutere situasjoner eller problemer enkeltvis, i grupper eller i helklasse. Prosjektet kommer til å vare i omtrent tre sammenhengende uker i januar og/eller februar i 2017.

Siden klassen din i samarbeid med læreren din og ledelsen ved skolen din er valg ut til å delta i prosjektet, blir også du spurt om å delta.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Prosjektet vil bli gjennomført ved at læreren din kommer til å endre undervisningen sin (eller deler av den) til å bli inquiry-basert i prosjektperioden. I løpet av denne tiden vil det bli gjennomført spørreundersøkelser, observasjon (med og uten video- og lydopptak) og intervjuer (enkeltvis og i grupper, med lydopptak) for å innhente informasjon om hvordan læreren din, medelevene dine og (eventuelt) du opplever og erfarer denne overgangen. Det kan for eksempel dreie seg om fordeler og ulemper.

Som det går frem av svarslippen, er det opp til deg hvilke former for datainnsamling du vil være med på. Det kan være alle, eller for eksempel bare gruppeintervju.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger om deg vil bli behandlet konfidensielt i hele prosessen, og du vil *ikke* kunne gjenkjennes i masteroppgaven når den blir publisert. Det er bare masterstudent Håvard, som gjennomfører prosjektet, og veilederen hans ved Universitetet ved Agder som har tilgang på spørreskjemaene, observasjonsnotater og lyd- og videoopptak. I løpet av gjennomføringsperioden kan læreren din bli presentert for bruddstykker eller oppsummeringer fra disse, men da vil bidrag fra både spørreskjema og gruppeintervju bli *anonymisert*. Når masteroppgaven er fullført og sensurert, blir alle disse slettet.

Frivillig deltakelse og kontaktinformasjon

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke samtykket ditt uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Du kan stille spørsmål til læreren din eller ta direkte kontakt med meg, Håvard, (tlf. 412 60 441) eller veilederen min, professor Anne Berit Fuglestad (tlf. 992 33 377)

Studien er meldt inn til og godkjent av Personvernombudet for forskning, Norsk senter for forskningsdata AS (NSD).

Svarslipp: Samtykke til deltakelse i studien

Jeg _____ (fyll inn navn) har mottatt informasjon om studien og er villig til å delta i prosjektet gjennom (kryss av)

- spørreskjema
- gruppeintervju med omtrent 2-5 medelever med lydopptak (inkludert gratis lunsj)
- videoobservasjon med lydopptak (dvs. sitte slik i klasserommet at jeg kommer med på opptakene av de timene som det gjøres videoopptak av)
- å tillate at det kan innhentes informasjon om mitt faglige nivå (f.eks. halvtårskaracter etter første semester).

(Navn, dato)

A.3 Godkjenningbrev frå Norsk senter for forskingsdata

Tilbakemeldinga frå Norsk senter for forskingsdata følger på dei to neste sidene.

Anne Berit Fuglestad
Institutt for matematiske fag Universitetet i Agder
Serviceboks 422
4604 KRISTIANSAND S

Vår dato: 05.12.2016

Vår ref: 50935 / 3 / MHM

Deres dato:

Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 03.11.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

<i>50935</i>	<i>Overgangen til inquiry-basert matematikkundervisning</i>
<i>Behandlingsansvarlig</i>	<i>Universitetet i Agder, ved institusjonens øverste leder</i>
<i>Daglig ansvarlig</i>	<i>Anne Berit Fuglestad</i>
<i>Student</i>	<i>Håvard Andreassen</i>

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, <http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html>. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, <http://pvo.nsd.no/prosjekt>.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 01.06.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Marianne Høgetveit Myhren

Kontaktperson: Marianne Høgetveit Myhren tlf: 55 58 25 29

Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Personvernombudet for forskning



Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 50935

INFORMASJON OG SAMTYKKE

Utvalget består av elever og lærere. Utvalget får skriftlig og muntlig informasjon om prosjektet og samtykker til deltakelse. Foresatte vil samtykke for barn under 15 år. Vi har mottatt informasjonsskriv tilpasset lærere og elever. Informasjonsskrivene er godt utformet.

BRUK AV ELEKTRONISK SPØRREUNDERSØKELSE

Det fremgår av meldeskjema at dere skal samle inn data ved hjelp av en elektronisk spørreundersøkelse, men det er ikke oppgitt hvilken leverandør som vil benyttes. Vi gjøre oppmerksom på at UiA må inngå en databehandleravtale med leverandøren, dersom denne er ekstern. Les mer om dette her:

<http://www.nsd.uib.no/personvern/forskningstemaer/sporreundersokelser.html>

INFORMASJONSSIKKERHET

Personvernombudet legger til grunn at dere etterfølger Universitetet i Agder sine interne rutiner for datasikkerhet. Dersom personopplysninger skal lagres på privat pc /mobile enheter, bør opplysningene krypteres tilstrekkelig.

PROSJEKTSLUTT

Forventet prosjektslutt er 01.06.2018. Ifølge meldeskjema skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:

- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)
- slette digitale lyd-/bilde- og videoopptak

Tillegg B

Materiale i utviklingsprosjektet

I dette tilleggskapittelet blir dei skriftlege ressursane som blei brukt i utviklingsprosjektet, presentert: utviklingsmåla, ressursheftet og eksempla på rike oppgåver. Slik det går fram av kapittel 4 om metode blei utviklingsmåla og eksempeloppgåvene brukt i vesentleg mindre grad, men dei er likevel tatt med for ordens skuld. Her følger nokon korte kommentarar til kvar av dei følgande delane.

Tanken bak utviklingsmåla var å oppsummera og operasjonalisera essensen i inquiry-basert matematikkundervising for min eigen og lærarane sin del. Sidan planen i forkant av prosjektet var å bruka Yackel og Cobb (1996) sitt omgrep sosiomatematiske normer meir aktivt, har dette ein sentral plass i utviklingsmåla, men dette blei ikkje i særleg grad vidareført eksplisitt i prosjektet.

Målet med ressursheftet var å gi ei kortfatta oversikt over konkrete tilrådingar frå eksisterande forskning; dette òg for både lærarane og min eigen del. Slik det blir drøfta i sjølve oppgåva, var utvalet for omfattande, og i prosjektet blei det difor raskt fokusert på dei rammeverka som er presentert i kapittel 2 og 3 om teoretisk rammeverk og eksisterande forskning. For interesserte lesarar blir heftet presentert i meir eller mindre heilskap her, men med omsyn til sideomfanget er det referert tilbake til kapittel 2 og 3 så ofte som råd. Det er òg verdt å merka seg at definisjonen til Fuglestad (2009) svarar til Wells (1999) si tilnærming og at den tilhøyrande figuren fyller rolla til definisjonen til Maaß og Doorman (2013). Vidare er det ofte inkludert to rammeverk for same tema fordi dei har ulike styrker.

Eksempeloppgåvene blei laga for å ha eit handfast utgangspunkt for dei innleiande samtala- ne og lesinga av dei to andre skriftlege ressursane. Den første oppgåva, «Mønstre i rettvinklede trekantar», har mykje til felles med oppgåve 1 i prosjektet, men dei to andre oppgåvene blei ikkje brukt vidare.

B.1 Utviklingsmåla

Målet med prosjektet er å utvikla

1. kunnskap om kva *inquiry-basert matematikkundervising* er og korleis slik undervising kan operasjonaliserast i klasserommet.
2. kompetanse i å utforma nye *sosiomatematiske normer* av følgande type, og etablera, støtta og stadig reforhandla desse i klasserommet.
 - (a) Elevutforskning med utgangspunkt i spørsmål som «korfor?» og «korleis?» er gull- standarden.

- (b) Alle kan læra mykje av og saman med kvarandre.
 - (c) Fleire, alternative løysingsstrategiar, idear og representasjonar i utforskinga og problemløysinga er alltid å føretrekke.
 - (d) Den enkelte sine idear, gjetningar, forslag og spørsmål og korleis han/henne grunn- gir dei, er berebjelkar i undervisinga uavhengig av kor «korrekte» dei er.
 - (e) Det er bra å bygga vidare på kvarandre sine innspel anten det er vidareføring, spørsmål eller alternativ.
 - (f) Alle lytter til, inkluderer og respekterer kvarandre. Det er bra å visa interesse, støtta kvarandre og gi konstruktive tilbakemeldingar.
 - (g) Læraren er (tålmodig) moderator, ressurs og choach, ikkje førelesar eller fasit.
 - (h) Matematikkompetanse er mangfaldig.
 - (i) Det er bra når elevar tar ansvar for eiga læring.
 - (j) Å streva, stå fast og ta feil er viktig for å læra.
 - (k) Matematisk tenking er viktigare enn svar.
3. kunnskap om ulike tilnærmingar til eit heilskapeleg syn på *kompetanse i matematikk* og korleis dette samsvarer med Læreplan for matematikk fellesfag.
 4. kompetanse i å utforma *rike oppgåver* (gjerne realistiske, innanfor temaet trigonometri) med utgangspunkt i eit heilskapeleg syn på kompetanse i matematikk, forutsjå ulike strategiar, løysingar, idear og representasjonar elevar kan komma til å bruka i samband med desse og på førehand planlegga treffande tilbakemeldingar ein kan gi ut frå kva elevar og grupper jobbar med.
 5. kompetanse i å planlegga og gjennomføra inquiry-basert undervising med *gruppearbeid* og *heilklassemamtalar* med utgangspunkt i eit heilskapeleg syn på kompetanse og kompetanssmål frå læreplanen, rike oppgåver og passande sosiomatematiske normer.
 6. kompetanse i å bestemma passande *rammefaktorar* for slik undervising, som tidsbruk, gruppesamansetting, instruksjonar og korleis ein kan få tilbakemeldingar frå elevar
 7. kompetanse i å *observera* og *gi utviklande tilbakemelding* på positiv utvikling og utfordringar elevar opplever i gruppearbeid med vekt på inquiry-aktivitet, samarbeid, deira eiga læring og matematiske innhald.
 8. kompetanse i å *moderera konsoliderande heilklassemamtalar* som bygger på gruppearbeid slik at dei synleggjer, ordnar, samanliknar og koplur ulike løysingsstrategiar, representasjonar og idear med utgangspunkt i undervisningsplanen og faktiske observasjonar.
 9. kompetanse i å *reflektera over og evaluera* undervising i lys av desse utviklingsmåla med vekt på eigen praksis, korleis elevane responderte på undervisningsforma og læringsutbyttet deira, samt bruka erfaringar frå dette arbeid i planlegging av neste økt for vidareføra positiv utvikling og imøtekomma utfordringar.

B.2 Ressurshftet

Innleiing

Dette dokumentet gir ei svært kortfatta innføring i eit utval ressursar som kan vera til hjelp ved planlegging og gjennomføring av inquiry-basert matematikkundervising. Av innhaldslista går det fram korleis desse er strukturert, men det kan vera greit å påpeika at der nokre av ressursane utfyller kvarandre, blir råda berre presentert i samband med éi av dei.

Det er også viktig å understreka ein ting til: din kompetanse i matematikkundervising og klasseromsleiing er uunnverleg for dette prosjektet, sjølv om noko av det som står i desse ressursane kan framstå som nybyrjarstoff for deg.

Inquiry – «The name of the game»

Inquiry-basert undervising kan naturlegvis definerast og tilnærmast på mange, ikkje alltid like samsvarande måtar, men for dette prosjektet, held det truleg å konsentrera seg om dei to følgande referansane (i tillegg vidareføringa i dei resterande avsnitta av teksten).

Fuglestad (2009, s. 71) definerer inquiry slik:

Inquiry kan bety å stille spørsmål, undre seg, undersøke, utforske eller eksperimentere for å finne ut av en sammenheng og forsøke å forstå og kunne utvikle en problemstilling videre. (...) Inquiry innebærer aktiv tilnærming til faget og problemstillingene som det arbeides med slik at elever og lærere ikke bare godtar svar, men forsøker å gå dypere for å bygge forståelse for begreper og sammenhenger.

Inquiry kan altså tolkast som eit underliggende perspektiv for undervising som fargar haldningar og praksis, og ikkje éin bestemt framgangsmåte. Når det er sagt, er elevaktivitet i grupper og plenum rundt opne, rike oppgåver, ein vanleg konsekvens.

[Her blei det kort referert til Artigue og Blomhøj (2013) sin versjon av figur 2.1 utan at innhaldet blei kommentert. Utover at Artigue og Blomhøj si utgåve mangla punkta «From telling to supporting and scaffolding» og «From problems to explanations (not from examples to practicing)» i kategoriane «lærarane» og «læringsmiljøet» er han heilt identisk til den som er brukt i oppgåva.]

Matematisk kompetanse som mål – ulike tilnærmingar

Ved planlegging av gjennomføring av inquiry-basert undervising, har ein gjerne eit meir heilskapeleg syn på kva det inneber å ha matematisk kompetanse, enn såkalla «tradisjonell» undervising. Den første følgande underdelen viser at dette er i samsvar med læreplanen, og deretter utdjuper to samsvarande tilnærmingar, ei amerikansk og ei norsk, kva som kan ligga i dette.

Læreplanen i matematikk fellesfag (MAT1-04) Læreplanen (sjå Kunnskapsdepartementet, 2013) har status som forskrift og er difor naturlegvis den viktigaste tilnærminga til kva matematisk kompetanse er. Når det er sagt, kan ein argumentera for at mange lærarar vektlegg *kompetansemåla* einsidig utan å sjå dei i lys av *føremålet* og *dei grunnleggande ferdigheitene* og at mange elevar dermed ikkje utviklar vesentlege aspekt av sin matematiske kompetanse.

«**Mathematical proficiency**» Ei heilskapeleg tilnærming til matematisk kompetanse er den såkalla «trådmodellen» (Kilpatrick et al., 2001).

[Her blei det kort referert til figur 2.2b og det tilhøyrande sitatet frå Kilpatrick et al. (2001, s. 116) i underdel 2.1.3 om matematisk kompetanse. Dette blei ikkje utdjupa vidare.]

Ei norsk tilnærming Ei siste, mindre detaljert tilnærming er utvikla av Brekke (2002). I denne modellen har matematisk kompetanse fem komponentar:

- faktakunnskap (definisjonar, konvensjonar og notasjon),
- ferdigheiter (prosedyrar),
- omgrepsstrukturar (relasjonar),
- generelle strategiar, og
 - representera, abstrahera og generalisera,
 - testa hypoteser og bevisa,
 - kontrollera,
 - stilla spørsmål,
 - bruka matematisk språk (formelt og uformelt) som er passande for å løysa eit problem, og
 - tolka matematiske resultat i den konteksten der problemet har sitt utspring.
- haldningar (kva er matematikk, korleis skal ein undervisa i matematikk, «beliefs and attitudes»).

Praktiske, stegvise modellar for innføring i klasserommet

Å byrja å planlegga og gjennomføra undervising ut frå eit inquiry-perspektiv krev innsats, og det har difor komme mange bidrag til korleis ein kan gjennomføra ei slik endring både vellukka og effektivt.

«Five practices for facilitating mathematical discussion

around cognitively demanding tasks» Stein et al. (2008) har utvikla ein modell av fem konkrete steg for å gjera det oppnåeleg for noviser å gjennomføra diskusjonsbasert undervising i matematikk, samt effektivisera slike aktivitetar i seg sjølv. Dei fem aktivitetane er illustrert i figur 3.1 slik at det kjem fram at kvar aktivitet bygger på dei aktivitetane som ligg innanfor. Meir utfyllande skriv dei at [sjå sitatet av Stein et al. (2008, s. 321) i underdel 3.2.1].

Dei presiserer òg at kvart av stega er allereie er drøfta av mange andre forfattarar og at deira bidrag er å sameina dei i ein integrert modell.

Figur 3.1 blir vidare akkompagnert av tabell B.1 der dei ulike kolonnene er mynta på ulike steg i modellen.

Tabell B.1: «Gjennomføringstabell»

<i>Strategies Students Might Use</i>	<i>Student/Representation</i>	<i>Connections Between Representations</i>
--------------------------------------	-------------------------------	--

«**The implementing collaborative learning in the classroom (ICLC) framework**» Med eit utdanningspsykologisk utgangspunkt presenterer Kaendler et al. (2015) eit generelt rammeverk for implementering av samarbeidslæring som er sett saman av fem lærarkompetansar fordelt på dei tre fasene før, under og etter gjennomføring: (a) planleggings-, (b) observasjons-, (c) støtte-, (d) konsoliderings- og (e)refleksjonskompetanse. Sidan hovudtrekka i modellen samsvarar med Stein et al. (2008) si tilnærming, blir denne presentasjonen avgrensa til dei utfyllande diagramma i figurane B.1, B.2 og B.3 på side 106. Den første går meir i detalj på kva det kan lønna seg å planlegga på førehand i tillegg til kva strategiar/løysingar elevane kan komma til å bruka. Den andre supplerer med fleire faktorar det kan lønna seg å observera, enn kva strategiar/løysingar elevane faktisk bruker. Og den tredje legg til at refleksjon over (a) sine egne handlingar og (b) i kva grad implementeringa fungerte hjå elevane, etter timen òg ville vore eit fornuftig sjette steg i modellen til Stein et al..

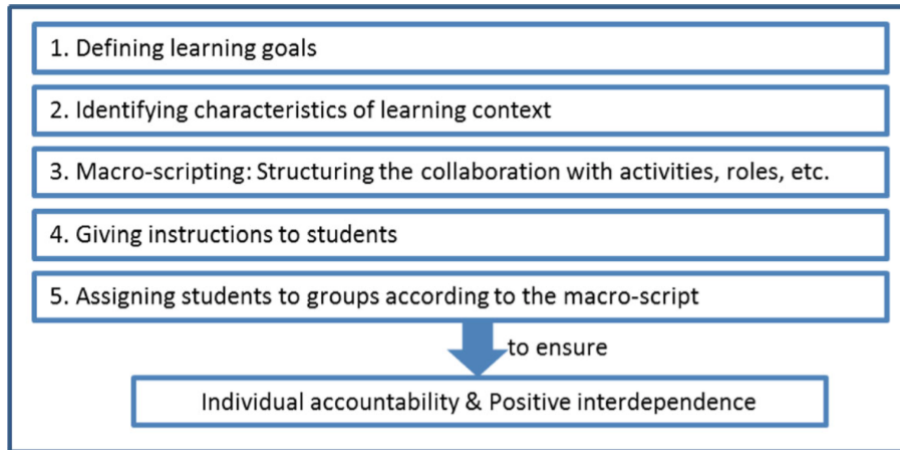
Å laga nye oppgåver

Inquiry-basert undervising tar ofte utgangspunkt i andre oppgåver enn såkalla «tradisjonell undervising». Her presenterest først ein operasjonalisert definisjon av *rike oppgåver* og deretter fleire teknikkar for å laga slike.

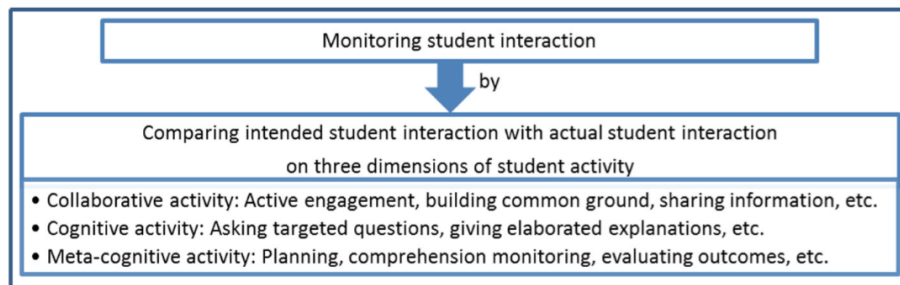
«**Rika problem**» – **Kjenneteikn på produktive, opne oppgåver** I samband med RIMA-prosjektet («Rika problem i matematikkundervisningen») definerer Hedrén et al. (2005, s. 36) *rike problem* som problem som skal [liste over dei kriteria for rike oppgåver gjengitt i underdel 3.2.2].

«**New tasks for old**» – **Teknikkar for å opna lukka oppgåver** I boka *Adapting and Extending Secondary Mathematics Activities* gjer Prestage og Perks (2001) greie for korleis ein kan konstruera rike oppgåver med utgangspunkt i lærebokoppgåver, men metodane kan òg brukast om ein startar frå grunnen av.

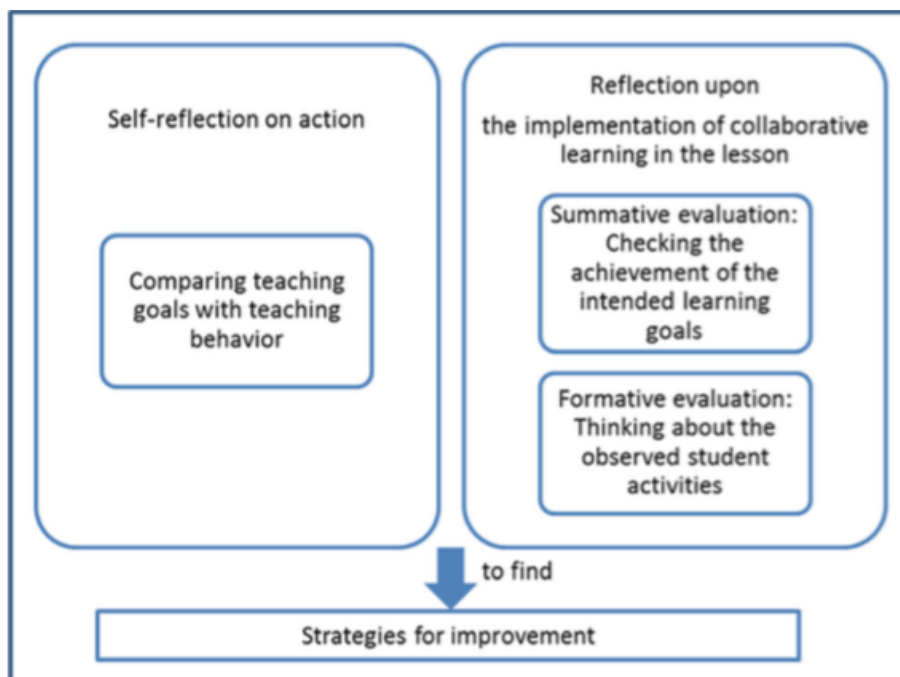
- *Tankekart*: Lag eit tankekart for temaet ein skal undervisa i eller laga oppgåver til der ein tar med relaterte tema, evner, prosedyrar, resurser, arbeidsmåtar, kunnskap, omgrep, læringsmål, osv. Ein kan òg gjera tilsvarende for å planlegga ein time ved å fokusera på ulike typar aktivitetar. Eit døme er gitt i figur B.4.
- *Kva viss ikkje ... ?* (1) List opp alle eigenskapane ved problemet; (2) Ta ein av desse eigenskapane og spør: «Kva viss ikkje ... [eigenskapen], men ... [noko anna]?» Døme: sjå figur B.5.
- *Fjern, legg til eller endra avgrensingar*: Eit døme er å leggja til informasjon slik at «Plott punkta (2,2), (6,2) og (4,9) og knytt dei saman til ein likesida trekant.» blir til «Plott punkta (2,2), (6,2), (8,9), (6,4), (10,2) og (4,9) og knytt så mange av dei som mogleg til likesida trekantar.»



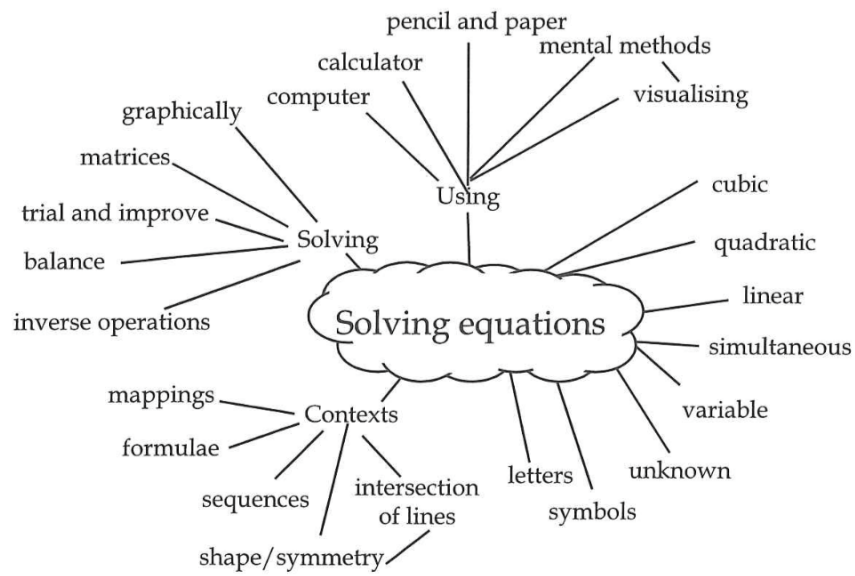
Figur B.1: Strategiar for planlegging (Kaendler et al., 2014).



Figur B.2: Strategiar for «monitoring» (Kaendler et al., 2014).



Figur B.3: Strategiar for refleksjon (Kaendler et al., 2014).



Figur B.4: Eit tankekart (Prestage og Perks, 2001).

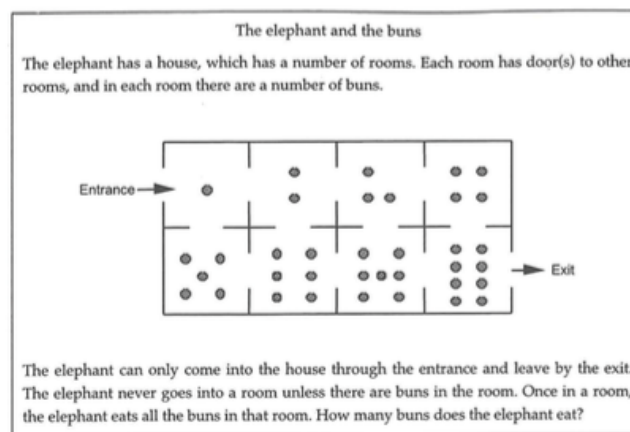


Figure 2.1 The elephant and the buns

Table 2.1 Attributes of the elephant and buns problem

Attribute	What-if-not!
There are eight rooms	What if there are not eight rooms but ten, twelve, six, nine ...?
The rooms are square	What if the rooms are not square but triangular?
The doors are all open	What if the doors are not all open, but some of them are shut?
The number of buns goes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	What if the number of buns goes 4, 5, 6, 7, ..., 11 or 3, 6, 9, 12, ..., or 101, 102, 103, ...?

Figur B.5: Eit døme på teknikken «Kva viss ikkje ...?» (Prestage og Perks, s. 8, 2001).

- *Gi svaret i plassen for spørsmålet:* Eit døme er «Kva rettvinkla trekant kan du finna medhypotenus på 17 cm^2 ?».
- *Bytt ut ressursar:* Konstruksjonsverktøy, data, penn og papir, kalkulator, tabellar, fakta osv.
- *Bytt format:* Tekst, figur, formelle symbol, uformelle symbol, gjenstandar osv.

Å arbeida med klasseromskulturen – Sosiomatematiske normer

Omgrepet *sosiomatematiske normer* utvikla av Yackel og Cobb (1996) har etter kvart blitt brukt av mange i tilnærminga av klasseromskulturen, både til å skildra eit gitt miljø eller til å operasjonalisera korleis eit slik miljø blir forma eller utvikla. Sosiomatematiske normer er klasseromsnormer for matematikk, og her følger nokre døme som er aktuelle for dette prosjektet. Desse er baser på «Reformed Teaching Observation Protocol» (RTOP) (Piburn & Sawada, 2000) og Nam et al. (2013) sin bruk av denne, og bør drøftast nærmare av lærarane og studenten.

- Elevutforskning er gullstandarden. «Korfor?» og «korleis?» er konge og dronning.
- Fleire, alternative innfallsvinklar og representasjonar i utforskinga og problemløysinga er alltid bedre enn éin.
- Dine idear, gjetningar og forslag, og korleis du grunngir dei, er viktige.
- Det er bra å bygga vidare på kvarandre sine innspel og å komma med alternativ.
- Me lytter til, inkluderer og respekterer kvarandre. Me viser interesse og stiller spørsmål. Me støtter kvarandre og gir kvarandre konstruktiv feedback.
- Læraren er moderator, ressurs og choach, ikkje førelesar eller fasit.
- Matematikkompetanse er mangfaldig. Me skal utvikla «conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning and productive disposition».

Sosiomatematiske normer handlar altså om utviklinga av spesifikke haldningar og verdiar både til matematikken og til matematikkundervisinga, og i denne utviklingsprosessen meiner Yackel og Cobb (1996) dessutan at samhandlinga mellom elevane og læraren er det vesentlegaste. Gjennom stadig forhandling og reforhandling, implisitt og eksplisitt, utviklar dei ei felles forståing.

Klasseromskommunikasjon

Det er klart at kommunikasjon er ein sentral del av inquiry-basert undervising, og i samband med dette, kan det lønna seg å sjå nærmare på dei følgjande to omtalane av dette.

«**Actions and talk moves**» – **Konkrete grep i samhandlinga med elevane** Chapin et al. (2013) har skriva ei svært omfattande og konkret bok *Classroom discussions – A Teacher's Guide for using talk moves to support the Common Core and more* om korleis ein kan mest mogleg effektivt innføra samtalebaseret undervising i klasserommet sitt. Her gir dei svært detaljerte forslag til kva ein kan seia og gjera for å aktivisera elevane i ulike prosessar (her gjengitt i notatform):

[Her blei dei fire aktivitetane og samtalegrepa til Chapin et al. (2013) på same måte som i underdel 3.2.3. Innhaldet var det same, men i ressursheftet var det skriva på engelsk (parafraisert frå originalen).]

Dei argumenterer òg for å planlegga kva spørsmål ein vil stilla på førehand (ikkje berre kva løysingar elevane kan komma til å bruka, slik Stein et al. (2008) gjer).

«The inquiry co-operation model» – Kjenneteikn på produktive samtalar I sin omtale av inquiry-basert undervising, fokuserer Alrø og Skovsmose (2004) på *dialog*, som dei definerer som noko anna enn det ein tenker på i kvardagen: «a form of communication requiring specific conditions: it is associated with a process of inquiry, includes risk-taking, and maintains equality [mellom elevar og mellom elevar og lærar]» (s. 40). Dei argumenterer for at kommunikasjon generelt og dialog spesielt påverkar kvaliteten på læringa og viser til åtte såkalla *dialoghandlingar* som kjenneteiknar produktive dialogar mellom deltakarane (elevane og læraren) – nokre kjenner ein igjen frå tidlegare:

- *Getting in contact*: tuning in, taking care, being present, supporting, confirming, using humour, posing inquiring questions and tag-questions;
- *Locating*: asking inquiring questions, wondering, widening, testing questions and check-questions, as well as exploring and trying out strategies or ideas;
- *Identifying*: posing why-questions, explaining and crystallising mathematical ideas;
- *Advocating*: examining proposals, ideas and subjects by suspending fixed ideas and perspectives through collective reflection;
- *Thinking aloud*: can be expressed in terms of hypothetical questions, verbalising and making public;
- *Reformulating*: repeating, paraphrasing, completing each others utterances and staying in contact;
- *Challenging*: expects hypothetical questions to be posed, alternatives to be considered and turning points in an investigation to be introduced; and
- *Evaluating*: in the expression of critique, constructive feedback, confirmation, praise and unconditional support.

Utfordringar og snublesteinar

I overgangen til inquiry-basert undervising er det ikkje uvanleg å støyta på utfordringar så vel som fallgruver. Her presenterest først ei «trouble shooting» med forslag til løysingar og deretter ei liste over vanlege snublesteinar.

«Trouble shooting» – Kva gjer eg når ...? I tillegg til dei konkrete handlingsgrepa som blei presentert tidlegare, drøftar Chapin et al. (2013) ei lang liste vanleg utfordringar (her gjengitt i notatform):

[Her følger ei lang liste av slike utfordringar, men av plassomsyn er det berre tatt med eitt eksempel her.]

My Students Won't Talk! The first thing to do is to ask yourself a few questions:

- Are the students silent because they have not understood a particular question? (use *Re-voicing*)
- Do the students understand why you are asking them to repeat what others have said, or to explain their reasoning?
- Are the students experiencing an attack of either mass shyness or mass confusion? (Use *Turn and talk*)
- Is there a pattern of discourteous or disrespectful comments or noises?
- Are students' social or cultural backgrounds in conflict with the expectations to talk? (Use time and patience)

«**Stumbling blocks**» I sin studie av «pre-service»-lærere oppdager Inoue og Buczynski (2011) at mange ofte går i føyende feller fordelt på tre aspekter av undervisninga:

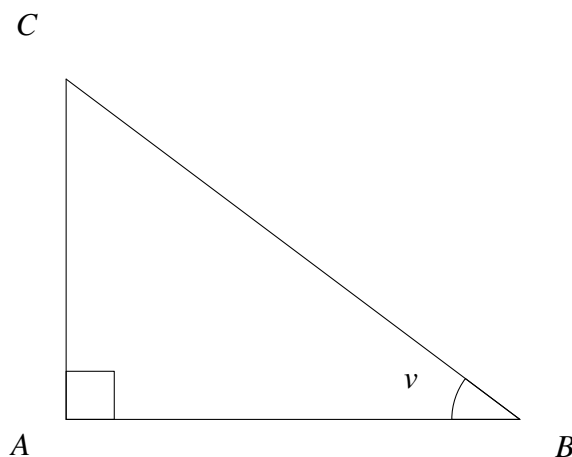
- Planning the Inquiry Lesson
 - Problematic problem design [ueigna oppgave];
 - Insufficient time allocation [under gjennomføring];
- Teacher Response to Student input
 - Unanticipated student response [blir vippa av pinnen];
 - No student response;
 - Disconnection from prior knowledge [knyttar ikkje til forkunnskapar];
 - Lack of attention to student input;
 - Devaluing of student input;
 - Mishandling of diverse responses;
- Teacher Delivery of Inquiry Lesson
 - Leading questions;
 - Premature introduction of material [introduserer fagstoff for tidleg];
 - Failure to build bridges [vha. spørsmål];
 - Use of teacher authority [inntar rolla som fasit];
 - Pre-empting of student discovery [konkluderer sjølv].

B.3 Eksempel på rike oppgaver

Her følger tre eksempler på rike oppgaver som i stor grad samsvarer med ideene i dokumentet «Nokre ressursar til planlegging og gjennomføring» [ressursheftet]. Tanken er at elevene skal jobbe med oppgavene i grupper før en plenumssamtale, men man kan også tenke seg andre organiseringsformer. Til hver oppgave følger det et sett med kommentarer til hvilke utfordringer elevene kan støte på og hvilke strategier de kan komme til å bruke, hvilke spørsmål det er hensiktsmessig å stille og hvilke utfordringer man kan gi ulike grupper.

«Mønstre i rettvinklede trekanter» – Motivasjon for tangensfunksjonen

Oppgaven Lag *rettvinklede* trekanter etter modell av figur B.6 for ulike verdier av vinkel v , og let etter mønstre med tanke på forholdet mellom AC og AB (dvs. AC/AB). La det være minst to trekanter for hvert valg av v slik at AB har ulik lengde.



Figur B.6: En rettvinklet trekant

Kommentarer

- Dette er en halvåpen oppgave som trolig best arbeides med i par.
- Par som blir raskt finner en sammenheng, kan utfordres på å (a) finne en forklaring på hvorfor sammenhengen holder og (b) på å undersøke tilsvarende sammenhenger for sinus og cosinus, dvs. forholdene mellom henholdsvis AC og BC , og AB og BC .
- Ulike par vil trolig legge vekt på figurer, beregninger og andre innfallsvinkler i ulik grad.

«Anvendelse av trigonometriske funksjoner»

Oppgaven De trigonometriske funksjonene er i lys av figur B.6 definert slik:

$$\sin v = \frac{\text{mot}}{\text{hyp}} = \frac{AC}{BC}, \quad \cos v = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} = \frac{AB}{BC}, \quad \tan v = \frac{\text{mot}}{\text{hos}} = \frac{AC}{AB}.$$

Tenk ut praktiske situasjoner hvor det kan være nyttig å finne to opplysninger (AB , BC , AC eller v) ved måling for deretter å beregne én eller to av de andre ved hjelp av en av de trigonometriske funksjonene.

Anta deretter rimelige mål for de to størrelsene man kan finne ved måling, og løs problemet.

Kommentarer

- I forhold til målgruppen er dette en svært åpen oppgave som passer for grupper på tre til fire elever.

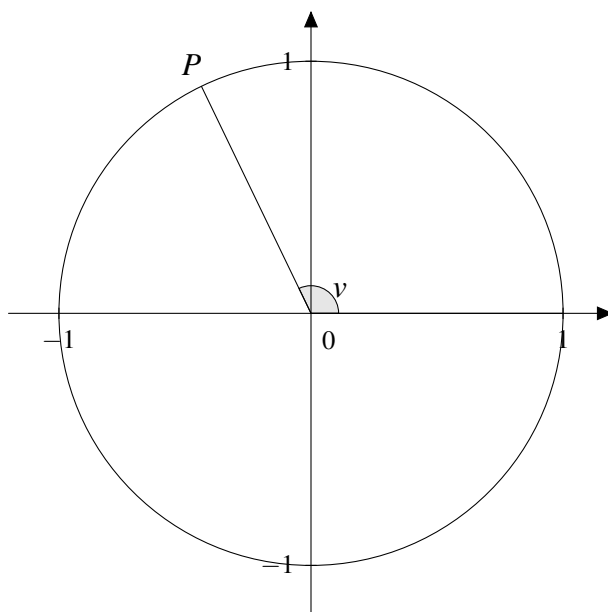
- Her er det flere uvandte elementer for mange som kan medføre en del forvirring i starten: (a) det finnes mange tilnærminger og svar, (b) elevene må selv velge kontekst og gjøre antakelser og (c) oppgaven har en tydelig praktisk orientering. Det kan derfor være lurt å først la elevene lese og tolke oppgaven i overkant av ett minutt, før man gjennomfører en helsklassesamtale på hvordan oppgaven kan løses.
- Grupper som tidlig har et forslag til løsning, kan utfordres på å lage en mer komplisert situasjon hvor man for eksempel (a) først må bruke cosinus og deretter sinus eller (b) på å kombinere en av de trigonometriske funksjonene med areal, og dermed få en forsmak på arealsetningen, omkrets eller andre mer krevende geometriske begreper enn avstander. Det oppstår sannsynligvis også muligheter for å utfordre dem på å finne mer realistiske eksempler og mål, og gruppene tjener på å bli utfordret på å utfordres på å bruke andre representasjoner og innfallsvinkler enn de har brukt.
- Basert på notater man gjør under observasjonene av elevene, organiserer man elevbidragene etter en fornuftig rekkefølge. Kompleksitet og kontinuitet er naturlige kriterier. Underveis og etter at et representativt utvalg av løsninger er presentert, kan man stille spørsmål som: (a) Hvilke bidrag har mest til felles, og hvorfor?, (b) Hvilken situasjon fremstod mest realistisk, og hvorfor?, (c) Hvilke styrker og svakheter har de ulike arbeidsmåtene (representasjonene)?, og (d) Hvilke programvarer og yrker tror dere bruker trigonometri mest?

«Mønstre i trigonometriske verdier» og introduksjon til enhetssirkelen

Oppgaven Beregn $\sin v$ og $\cos v$ for

$$v \in \{30^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 160^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 315^\circ, 330^\circ\},$$

og tegn vinklene inn i en enhetssirkel etter modell av figur B.7. Let så etter mønstre, og prøv å finne forklaringer på hvorfor disse eventuelt holder.



Figur B.7: Enhetssirkelen

Kommentarer

- Siden oppgaven medfører en del regning og trolig resonnering, er muligens to til tre elever per gruppe passende.
- Denne oppgaven legger grunnlag for tre mønstre eller sammenhenger: (a) at $\sin v = \sin(180^\circ - v)$, (b) at $\cos v = -\cos(180^\circ - v)$ og (c) at $(x, y) = (\cos v, \sin v)$.
- Den siste trenger de fleste elevene trolig mer informasjon for å oppdage, og det kan derfor være et passende hint til effektive grupper eller til alle halvveis ut i aktiviteten. For elever i 1t, kan det være krevende å presisere matematiske sammenhenger, så en annen utfordring kan være å be elevene å presisere en eller flere sammenhenger både vha. tekst og deretter algebraisk notasjon. En ytterligere utfordring for de som har funnet alle mønstrene er å diskutere forskjellen på definisjoner og sammenhenger (setninger) i lys av disse. Alternativt kan man utfordre dem på å bruke Pytagoras' setning på en av trekantene som fremkommer i enhetssirkelen for å komme frem til sammenhengen $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$.
- I plenum kan det være naturlig å først konsentrere seg om de to første mønstrene og be grupper som har brukt ulike resonnementer eller fremgangsmåter å presentere hvordan de jobbet før de oppdaget et av mønstrene. Dette er også en fin mulighet til å inkludere innspill om hvilke vansker man støtte på. Etter hvert er det naturlig å stille spørsmål som: (a) hvordan vet vi at dette ikke bare gjelder de verdiene vi har regnet ut?, (b) kan vi illustrere dette på andre måter enn ved enhetssirkelen?, og (c) hvorfor kalles enhetssirkelen for nettopp dette? Hvis det ikke allerede har oppstått naturlige situasjonen for å se på det siste mønsteret, kan man gjøre det nå, og muligens forfølge noen eller alle av utfordringene man har gitt.

Tillegg C

Oppgåvene

I kapittel 4 blei det presentert ei oversikt over dei fire oppgåvene. Her blir denne oversikta supplert med dei fullstendige tekstane og ekstra figurar elevane fekk opplest og utdelt. I tillegg kjem òg ekstra ressursar for lærarane med tanke på kva funn, strategiar, løysingar, argument og utfordringar elevane kunne komma til å bruka, så vel som mål og plan for aktiviteten. Til dei to siste oppgåvene er det dessutan lagt ved dei dei observasjonsskjema som blei laga og som lærarane syntest var vanskelege å bruka. Desse fekk elevane ikkje direkte tilgang på.

C.1 Oppgåve 1: «Utforskning i GeoGebra»

Mål for sekvensen

1. Legge grunnlag for introduksjonen av de trigonometriske funksjonene slik at elevene forstår de matematiske sammenhengene definisjonene bygger på.
2. Introdusere elevene for og gi dem trening i å arbeide med rike oppgaver med gruppearbeid og helklassesamtale.
3. Etablere nye roller og sosiomatematiske normer i klassefelleskapet.

Organisering

1 min: Presentasjon av oppgaven

1 min: Løsning individuelt

10 min: Samtale og undersøkning i par

18 min: Helklassesamtale (prioriter mest relevante bidrag)

Oppgaven

«Gjett på sammenhenger i rettvinklede trekanter ved å utforske GeoGebra-filen [figur 4.2a side 30]. Undersøk om disse alltid vil holde. Hvordan vil dere forklare dette til de andre?»

Mulige funn, strategier og utfordringer

1. Forholdene mellom sidene endrer seg *ikke* når grunnlinjen (AB eller DE) endres.
2. Når vinkel v økes, endres forholdene mellom sidene. To øker ($\sin v$ og $\tan v$) og ett minker ($\cos v$).
3. Det er bare tre av seks forhold som er lagt inn.
4. Det øverste forholdet dividert på det midterste gir det nederste ($\frac{\sin v}{\cos v} = \tan v$).
5. At $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, at $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ og at $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$.
6. Det øverste forholdet kvadrert pluss det midterste forholdet kvadrert er lik 1 ($\sin^2 v + \cos^2 v = 1$).

C.2 Oppgave 2: «Angrepsstigen»

Mål for sekvensen

Elevene skal

1. få trening i å løse sammensatte trigonometriske problemer.
2. forstå hvorfor strategiene fungerer og forstå de underliggende sammenhengene.
3. få svar på spørsmål de har til trigonometri.

Lærer skal fortsette med å

4. etablere nye roller og sosiomatematiske normer i klassefelleskapet.
5. bruke plan, observasjoner og «talk moves» til å få mer utav elevbidragene.

Organisering

5 min: Organisering av klasserom

5 min: Ny presentasjon av prosjektet vha. PowerPoint-presentasjon.

30 min: Oppgaven «Angrepsstigen».

≈ **5 min:** Presenter oppgaven, del ut tekster og sørg for at elevene forstår hva de skal gjøre.

≈ **7 min:** Gruppearbeid med observasjon og hinting.

≈ **18 min:** Presentasjon av funn og samtale.

Resten: Post-It-vurdering og oppgaveløsning med veiledning.

Beskrivelse av opplegget

Elevene presenteres for oppgaven, og hver gruppe får utdelt (a) rapportutdraget og (b) *ett* av de fire ingeniørnotatene. Elevene skal så først sørge for at de forstår oppgaven og tekstene de har fått individuelt, før de løser oppgaven i grupper. Hvis de blir ferdige med sin løsningsutkastet, skal de ut fra opplysningene i rapporten prøve å finne alternative løsningsstrategier og skrive spørsmål til trigonometri.

Oppgaven

«Vi befinner oss i 'Det hellige land' under korstogene på 1100-tallet. Dere er arabiske ingeniører og del av en hærstyrke som har beleiret en borg i europeisk besittelse. Et angrep på borgen er nært forestående, men hærføreren har oppdaget et alvorlig problem. Borgen er omringet av en dyp, vannfylt vollgrav (se figur 4.2c), og ingeniørene som skulle beregne lengden på stigene som skulle vippe opp fra vollgravskanten til toppen av muren, forsvant etter et første forsøk med for lange stiger mislyktest. Alt de har etterlatt seg, er en rapport om det mislykkede forsøket og fire ufullstendige utregninger av lengden på kortere stiger som muligens kan fungere.

Som følge av dette, blir dere av hærføreren delt inn i grupper som kan forfølge hvert sitt utkast og slik beregne hvor lange stigene må være. Tiden er ikke på deres side, men dere har heldigvis grunnleggende opplæring i trigonometri.»

Utkastene

De fire ingeniørene har etterlatt seg fem dokumenter. Det første er en rapport fra et tidligere, mislykket angrepsforsøk der det ble brukt altfor lange stiger. Der fremgår det en del informasjon om situasjonen. De øvrige fire tekstene omfatter hver ingeniør sitt forsøk på å beregne stigelengden.

Elevene klarer seg i utgangspunktet med notatene til én av ingeniørene, men ved at alle får tilgang på rapporten har alle elevene de samme opplysningene slik at de kan lete etter flere løsningsstrategier hvis de raskt kommer frem til den i tråd med ingeniøren sin. Dessuten har da også elevene på sett og vis også fått samme oppgave.

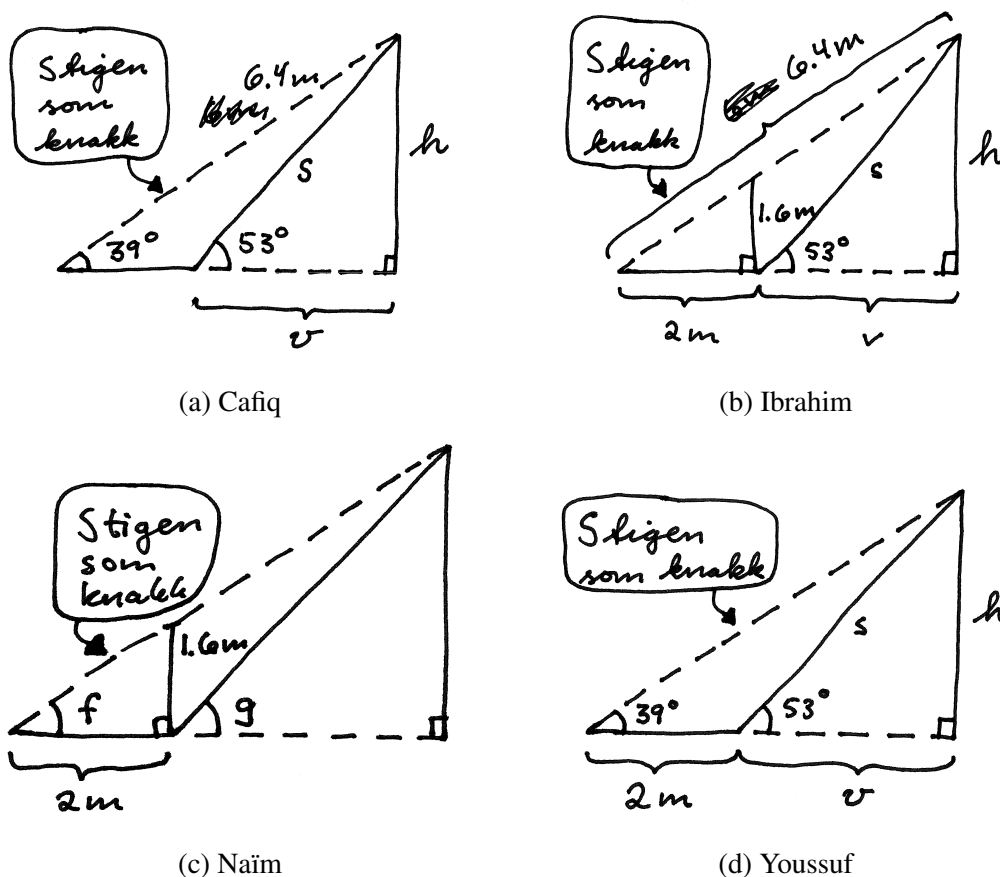
Utdrag fra Rapport etter mislykket angrep «... Vi må derfor konkludere med at angrepet mislyktest fordi stigen knakk. Stigen ble festet i bakken 2 meter fra vollgravkanten, men som følge av enten lengden (6.4 meter) eller vinkelen den dannet med bakken (39°), knakk den i to. Dette til tross for at vi monterte en 1.6 meter høy støtte ved vollgravkanten. Før vi måtte trekke oss tilbake, pga. fiendtlig skyts, rakk vi å måle vinkelen siktelinjen fra vollgravkanten til toppen av tårnet dannet med et water til 53° . Sammen med de øvrige opplysningene kan dette muligens brukes til å regne ut en kortere stige til et senere angrepsforsøk. Vi skal vurdere opplysningene hver for oss i håp om å finne en bedre løsning.»

Cafiqs notater (lav vanskegrad) «Ut fra rapporten mener jeg det er én strategi som peker seg ut. De ukjente opplysningene, optimal stigelengde, vollgravbredde og murhøyde, har jeg valgt å kalle henholdsvis s , v og h , slik figuren viser (se figur C.1a). Der har jeg også lagt inn de nødvendige opplysningene fra rapporten, og vha. trigonometri er løsningen åpenbar.»

Ibrahims notater (mellomhøy vanskegrad) «Jeg tror den beste løsningen er å utnytte de opplysningene jeg har tegnet inn i skissen min (se figur C.1b). Bokstavene s , h og v står henholdsvis for den nye stigelenden, høyden på muren og bredden på vollgraven. Formlikhet gir meg h , men da må jeg først finne den manglende siden i den minste trekanten. Så gjenstår det bare å bruke trigonometri for å finne s .»

Naïms notater (bruk av sinus invers) «Siden de andre ingeniørene sannsynligvis kommer til å finne den ideelle stigelengden likevel og det stor fare for at vinkelmålene fra rapporten er feil, undersøker jeg heller om disse stemmer ut fra de andre målene. På tegningen (se figur C.1c) har jeg lagt inn de relevante opplysningene som gjør at jeg kan undersøke om vinkel f virkelig er 39° , slik rapporten sier. Vinkel g har jeg ikke klart å finne en måte å kontrollere om virkelig er 53° .»

Youssefs notater (høyest vanskegrad) «Etter en del prøving og feiling, mener jeg å ha funnet en smidig måte å beregne stigelengden på. Som det går frem av diagrammet (se figur C.1d), kaller jeg den ideelle stigelengden for s , høyden på muren for h og bredden på vollgraven for v . Det at jeg har to trekanter med to vinkler, gjør at jeg vha. trigonometri kansette opp to likninger med v og h som ukjente. Da er den ene kateten $(2m + v)$, og den andre sier seg selv. Deretter kan jeg finne s ved å bruke v eller h .»



Figur C.1: De tilhørende diagrammene.

C.3 Oppgave 3: «Arveoppgjøret» – Del 1

Mål for sekvensen

Elevene skal

1. få trening i å løse sammensatte problemer vha. trigonometriske funksjoner, inverse trigonometriske funksjoner, arealsetningen, supplementvinkler og sinussetningen.
2. forstå hvorfor strategiene fungerer og forstå de underliggende sammenhengene.
3. få svar på spørsmål de har til trigonometri.

Lærer skal fortsette med å

4. sette i gang og holde i gang en samtale om stoffet.

Organisering

≈ **3 min:** Organisering av klasserom

≈ **3 min:** Ny presentasjon av prosjektet vha. PowerPoint-presentation.

≈ **35 min:** Oppgaven: «Arveoppgjøret».

≈ **5 min:** Presenter oppgaven, del ut tekster og sørg for at elevene forstår hva de skal gjøre.

≈ **10 min:** Gruppearbeid med observasjon og hinting.

≈ **15 min:** Presentasjon av funn og diskusjon.

≈ **5 min:** Oppsummering.

≈ **2 min:** Post It-vurdering.

Beskrivelse av opplegget

Elevene presenteres først den innledende fortellingen – sørg for at de har fått med seg det vesentligste) – og får deretter utdelt utdraget fra testamentet. Oppgaven deres består så i å argumentere for om Ole Ås skal arve tomten med eller uten utvidelsen.

Innledende fortelling

«Familien Ås' er samlet i hjembygden Lillevik (på Sørlandet) etter at familieoverhode og eier av Ås-gården, Peder Ås, nylig falt bort. Han etterlot seg et testament som skulle fordele eiendommen mellom datteren Marte, som var eldst, og sønnen Ole. Siden Marte er eldst og dessuten fortsatt bidrar til driften av gården, er det forventet at hun kommer til å arve så godt som hele bruket. Peder hadde likevel lovet at en hyttetomt skulle skilles ut til Ole og familien hans, selv om Ole sjelden kom hjem for å besøke faren sin på hans gamle dager.

Etter en uheldig hendelse flere år tilbake, mistet søskenene kontakten og har siden ikke vært på talefot. Begge søskenene har derfor på forhånd sagt at de vil kjeme med nebb og klør for å sikre seg mest mulig av arven, slik at den andre får minst mulig.

Klokken to ankommer advokat Holm med testamentet. Det så langt nokså ampre rommet faller til ro idet han begynner å lese. Ettar at Holm har lest ferdig, opplyser han om at den gjennomsnittsprisen per kvadratmeter i Lillevik har steget fra 789 kroner da testamentet ble skrevet til 1025 kroner i dag.»

Utdrag fra testamentet

«... og jeg finner det derfor rimelig å tilfalle min datter Marte Kirkerud (født Ås) Ås-gården (gårdsnummer 200, bruksnummer 2430) i sin helhet. Det skal likevel gjøres ett unntak og utskilles en hyttetomt til min sønn Ole Ås i det sørøstlige hjørnet av eiendommen ved Lilleviksvannet. Tomten skal avgrensas av en 17 meters strandlinje, en 12 meter lang linje og en tredje linje som forbinder disse slik at arealet blir 100 kvadratmeter. Dersom den totale verdien på tomten forblir under 150 000 kroner, skal Ole i tillegg tildeles området mellom forlengelsen av den 12 meter lange linjen og en 25 meter lang linje til den andre siden av strandlinjen. Jeg har overlevert en skisse [figur ?? på side ??] i advokat Holms besittelse som illustrerer dette.»

Saksspesifikke argumenter og dilemmaer

- Det er to ulike tomter som passer beskrivelsen i testamentet. Etter dagens priser, er det bare den som er slik at $\angle A = 101.5^\circ$, som gir Ole Ås tomt med utvidelse.
- Hvis man bruker den gjennomsnittlige kvadratmeterprisen da testamentet ble skrevet (789 kr/m²), skal Ole Ås arbe hele området uansett hvilket av de to alternativene som gjelder.
- Marte bør tilgodeses siden hun har tatt seg av gården og familien.
- Marte arver hele resten av gården. Derfor bør Ole få så stor tomt som mulig.
- Ole har ikke tatt seg av faren og bør derfor få minst mulig tomt.
- Hvis det blir slik at Ole arver tomt med utvidelse, hvordan hvet man da hvilket område han skal tildeles, både form og totalt areal er forskjellig.
- Har avrundingsfeil en betydning her?

Ulike fremgangsmåter som kan være verdt å få frem

- Måle av på figuren i kombinasjon med beregninger.
- Konstruksjon i kombinasjon med beregninger.
- Beregninger ut fra at $\angle A = 101.5^\circ$, at $\angle A = 78.5^\circ$ eller *begge*.

C.4 Oppgave 3: «Arveoppgjøret» – Del 2

Mål for sekvensen

Elevene skal

1. få trening i å løse sammensatte problemer vha. trigonometriske funksjoner, inverse trigonometriske funksjoner, arealsetningen supplementvinkler og sinussetningen.

2. forstå hvorfor strategiene fungerer og forstå de underliggende sammenhengene.
3. få svar på spørsmål de har til trigonometri.

Lærer skal fortsette med å

4. sette og holde i gang en konsoliderende helklassesamtale om stoffet der
 - (a) både lærer og elever stiller spørsmål.
 - (b) elevene forklarer og artikulerer sine matematiske ideer.
 - (c) elevene bygger videre på egne og andres ideer.
 - (d) overbevisning erstatter fasit.

Organisering

≈ 3 min: Organisering av klasserom

≈ 3 min: Ny presentasjon av prosjektet vha. PowerPoint-presentation.

≈ 35 min: Oppgaven: «Arveoppgjøret» med oppdateringen.

≈ 5 min: Presenter oppgaven, del ut tekster og sørg for at elevene forstår hva de skal gjøre.

≈ 10 min: Gruppearbeid med observasjon (og hinting).

≈ 14 min: Matematisk: Presentasjon av funn og helklassesamtale.

≈ 5 min: Juridisk: Presentasjon av funn og helklassesamtale.

≈ 5 min: Oppsummering av oppgaven i lys av målene for sekvensen.

≈ 2 min: Post It-vurdering.

Oppgaven: Ny advokat og oppdatert situasjon

Oppgaven er fremdeles å finne arealet av den utvidede tomten slik at man kan finne hvilken verdi den har. Dette skal som før brukes til å avgjøre om Ole Ås skal arve den lille eller den store tomten. Det forventes at de ulike sidene (rollene) legger vekt på ulike argument.

Fortsettende fortelling

«På grunn av uklarhetene i advokat Holms presentasjon, har familien anskaffet en ny advokat, nemlig advokat Hans Tastad. Han medgir at på grunn av beskrivelsen i testamentet, er det ikke mulig å oppklare alle tvetydighetene, men han kommer med to presiseringer:

- Kriteriet knyttet til de 150 000 kronene, gjelder *den store* tomten. Det er altså hvis arealet av *både* den lille tomten på 100 kvadratmeter *og* den eventuelle utvidelsen er mindre enn 150 000 kroner, at Ole Ås skal arve hele den store tomten.
- Dessuten har han kontakten en matematikker som har reprodusert en ny mer presis skisse basert på testamentet og den forrige mer unøyaktige skissen. Av den fremgår det at det er *to ulike tomter* ($\triangle ABC$ og $\triangle AB'C'$) som passer samme beskrivelse, og det medfører at det selvfølgelig er *to ulike situasjoner* som må analyseres. Skissen er lagt ved (se figur 4.2e).

Advokat Tastad gir hver av fraksjonene kort betenkningstid til å forberede seg på en oppsummerende og konkluderende samtale. Første del av samtalen vil konsentrere seg om de faktiske opplysningene, det vil si tallfakta *med begrunnelse* for disse. Den andre delen vil basere seg på disse funnene, men også ta hensyn til omstendighetene i familien der matematikken ikke strekker til.»

Observasjonsskjema

Observasjonsskjemaet er lagt ved på dei to neste side.

Sekvens 4 -- Observasjonsskjema

- Hvilken konklusjon medfører hver fremgangsmåte ut fra hver av de to prisene?

Strategi	Grupper og deres individuelle variasjoner	Sammenhenger og oppfølging
<i>Trekant 1 ($\angle A = 78.5^\circ$)</i>		
Leser av figuren. Estimat.		
Grafisk løsning -- konstruksjon for hånd.		
Grafisk løsning -- GeoGebra.		
Beregning med $\angle A = 90^\circ$.		
Beregning med $\angle A \neq 90^\circ$.		
Beregner hvor stort areal 150 000 kr svarer til uavhengig av målene i testamentet.		
Sammenlikning av metoder for <i>Trekant 1</i>		Hvilken metode er best? Er mindre nøyaktige metoder tilstrekkelige? Fordeler og ulemper? Likheter og forskjeller?
<i>Trekant 2 ($\angle A = 101.5^\circ$)</i>		
Grafisk løsning		
Beregning		
Sammenlikning av metoder for <i>Trekant 2</i>		Som over. Hvilke metoder var i stand til å oppdage den andre trekanten?
<i>Andre fremgangsmåter og trekanter?</i>		

Klassekart med gruppenummer

Tavle

Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3
Gruppe 4	Gruppe 5	Gruppe 6
Gruppe 7	Gruppe 8	Gruppe 9
Gruppe 10	Gruppe 11	Gruppe 12

Spørsmål

Planlegg hvordan du kan ta opp disse spørsmålene (vha. elevene) i løpet av den matematiske helklassesamtalen.

#	Spørsmål	Grupper	Oppfølging
A	Hvorfor og i hvilke tilfeller kan man få to trekkanter?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
B	Hva er forskjellen på sinussetningen og arealsetningen?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
C	Hva er <i>egentlig</i> sinus?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
D	Når må vinkelen være 90° ?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
E	Hvorfor har to vinkler samme sinusverdi?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
F			
	<i>Kan muligens svare:</i>		

Juridisk diskusjon og konklusjon

- Hvilken pris skal gjelde?
- Hvilken tomt skal gjelde?
- Bør det at Marte arver *hele* resten av gården påvirke vurderingen? Hvordan?
- Bør det at Ole har flyttet bort og så å si brutt kontakten med familien ha noe å si?
- Bør det at Marte har blitt værende på gården og hjulpet til med driften av den ha noe å si?
Hva hvis hun innrømmer å ha gjort det for å sikre seg arven av hele gården?

C.5 Oppgave 4: «Norges trigonometriforbunds flagg»

Mål for sekvensen

Elevene skal

1. få oversikt over temaet trigonometri; dvs. styrker og svakheter ved de forskjellige definisjonene og setningene og hvordan står i forhold til hverandre.
2. utvikle sin forståelse for begrepsstrukturer, sine prosedyreferdigheter, sin strategiske kompetanse, sine resonneringsferdigheter og produktive holdninger til matematikk.
3. få svar på spørsmål de har til trigonometri.

Lærer skal fortsette med å

4. sette og holde i gang en konsoliderende helklassesamtale om stoffet der
 - (a) både lærer og elever stiller spørsmål.
 - (b) elevene forklarer og artikulerer sine matematiske ideer.
 - (c) elevene bygger videre på egne og andres ideer.
 - (d) overbevisning av hverandre erstatter lærer som fasit.

Organisering

≈ 3 min: Organisering av klasserom

≈ 3 min: Ny presentasjon av prosjektet vha. PowerPoint-presentation.

≈ 35 min: Oppgaven

≈ 5 min: Presentasjon og diskusjon av oppgaven.

≈ 14 min: Gruppearbeid med observasjon (og hinting).

≈ 12 min: Presentasjon av funn og helklassesamtale.

≈ 13 min: Hvilken løsning er best?

≈ 3 min: Oppsummering av oppgaven i lys av målene.

≈ 14 min: Spørreundersøking

Oppgaven

Norges trigonometriforbund skal i løpet av de neste månedene lansere sitt nye flagg (se figur C.2). I forbindelse med dette har de utlyst en konkurranse om å finne *den beste fremgangsmåten* for å vise at arealet av den grønne trekanten er tilnærmet 17.1, gitt målene som er presisert i figur 4.2b.

Oppgaven deres er å delta i konkurransen.

Observasjonsskjema

Observasjonsskjemaet er lagt ved på dei to neste side.

Sekvens 5 -- Observasjonsskjema

Strategi (utfordringer; på tavle)	Grupper og deres individuelle variasjoner	Sammenhenger og oppfølging
Grafisk løsn. for hånd. Måler, konstruerer og estimerer.		
Grafisk løsn. i GeoGebra; konstruksjon og avlesning		
Areal _{rektangel} - Areal _{trekanter} ; bruker bare definisjonene		
Finner areal ved arealsetn.		
Bruker vinkelsum for å finne vinkler.		
Bruker arealsetningen for å finne vinkler.		
Bruker cosinussetningen for å finne vinkler.		
Bruker sinussetningen for å finne vinkler.		
Løser algebraisk/generelt; setter så inn tall.		
Sammenlikning av metoder		Likheter og forskjeller? Fordeler og ulemper? Nøyaktighet? Tilstrekkelig? Mye regning/arbeid? Bruk av mest mulig (avansert) trigonometri (cos.setn., osv.)? Hvilken metode er best?

Klassekart med gruppenummer

Tavle

Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3
Gruppe 4	Gruppe 5	Gruppe 6
Gruppe 7	Gruppe 8	Gruppe 9
Gruppe 10	Gruppe 11	Gruppe 12

Spørsmål

Planlegg hvordan du kan ta opp disse spørsmålene (vha. elevene) i løpet av den matematiske helklassesamtalen.

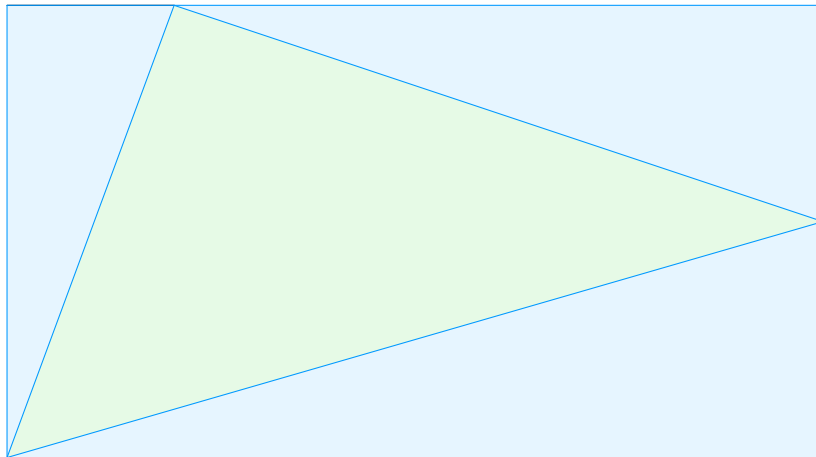
#	Spørsmål	Grupper	Oppfølging (spørsmål)
A	Hva er forskjellen på sinussetningen, arealsetningen og cosinussetningen?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
B	Hva er <i>egentlig</i> sinus?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
C	Når må vinkelen være 90° ?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
D	Hvordan vet vi at setningene alltid holder?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
E	Hva er og gjør sinus invers?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		
F	Hvor mange (og hvilke) opplysninger kan man klare seg uten?		
	<i>Kan muligens svare:</i>		

"Talk moves"

- Vent tålmodig. Be elevene drøfte i par.
- "Hva har dere gjort sålangt?", "Kan du utdype det?", "Kan du gjenfortelle med dine egne ord?"
- "Hvordan begrunner du det?", "Er du enig eller uenig? Hvorfor?", "Hvem kan legge til noe/bygge videre?"

Oppsummering

- Be elevene oppsummere dagens viktigste lærdommer.
- Knytt dem til læringsmålene.
- Be elevene oppsummere noen ting som fungerte bra ved opplegget og noe som kunne blitt bedre til neste gang.



Figur C.2: Flagget

Tillegg D

Datainnsamling

I det følgande blir dei tre intervjuguidane presentert: opningsintervjuet med lærarane, avslutningsintervjuet med lærarane og fokusgruppa med dei fire elevane frå dei to klassane. Her går det fram at samtlege av dei inneheld mange spørsmål, noko som kan gi inntrykk av å vera i strid med ideen for eit djupneintervju. Difor er det viktig å presisera at tanken bak dette valet var at eg skulle førebu meg godt og ha ein «ressursbank» å ta frå. I praksis blei mange av desse spørsmåla ikkje brukt. Det bør òg påpeikast at sidan guiden for avslutningsintervjuet er basert på guiden for fokusgruppa, inneheld han fleire fleirtalspronomen framfor eintalspronomen (for eksempel «de» i plassen for «du») på grunn av usystematisk omskriving.

D.1 Intervjuguide for det innleiande djupneintervjuet med lærarane

Denne intervjuguiden er ei revidert utgåve av versjonen som blei sendt inn til NSD. Alle endringane var innanfor rammene av den innsendte guiden.

Ved oppstart, blir læraren gjort merksam på at intervjuet blir tatt opp og at all informasjon blir handsama konfidensielt. Han eller ho blir òg oppfordra til å svara ope og ærleg og gjerne reflektera rundt spørsmåla, og gjerne venda tilbake til tidlegare spørsmål, sidan det er hans eller hennar oppfatning som er det interessante og struktur ikkje er veldig viktig.

Råd for gjennomføringa: (a) still opne spørsmål, (b) bruk stilla, (c) vend tilbake til spørsmål, (d) våg å vera kritisk, og (e) tolk og følg opp.

1. Oppvarming – bakgrunn

- (a) Kor lenge har du jobba som lærar?
- (b) Korleis ser du på deg sjølv som lærar?
- (c) Korfor blei du lærar?

2. Rammefaktorar

- (a) Kva kjenneteiknar undervisinga di nå før prosjektstart? Har du brukt element av inquiry allereie?
- (b) Korleis vil du skildra elevane dine og klassen din?
 - i. Motivasjon, interesse og engasjement
 - ii. Munnleg aktivitet, miljø og samhandling

- iii. Fagleg styrke, refleksjon og metakognisjon
 - (c) Korfor vil du vera med på dette prosjektet?
3. Forståing av inquiry-basert undervising
- (a) Kva legg du i omgrepet inquiry-basert undervising i matematikk?
 - (b) Kva oppfattar du som dei viktigaste skilnadene på tradisjonell undervising, omvendt undervising og inquiry-basert undervising?
 - (c) Kan du reflektera litt rundt din kunnskap, dine haldningar og din praksis i samband med inquiry-basert undervising i matematikk?
 - (d) Kor stor plass synest du dette perspektivet skal ha i matematikkundervising?
 - (e) Kva styrker og veikskapar har inquiry-basert undervising i matematikk mtp. elevane sitt læringsutbytte?
 - (f) I kva grad synest du at inquiry-basert undervising passar på vidaregåande (læreplan, eksamen, slik skulen er strukturert, kultur)? Korfor?
4. Forventingar ved oppstart av prosjektet
- (a) Kva positiv utvikling/meistring og utfordringar ser du for deg at kan oppstå (hos deg sjølv, elevane, osv.)?
 - (b) Kva trur du er dei viktigaste handlingane du kan gjera for at overgangen skal bli så vellukka som mogleg? Kva med elevane?
 - (c) Kva trur du at du kjem til å lika best/minst?
 - (d) Kva fordelar og ulemper har nettopp [læraren sitt namn] i denne overgangen (kunnskap, haldningar og praksis)?
 - (e) Kva forventingar har du til dei andre involverte i prosjektet (Håvard og dei forskingsbaserte ressursane, kollegaen din, samarbeidet mellom oss (planlegging og evaluering), elevane, osv.)?
 - (f) Kva skal til for at prosjektet blir vellukka for deg?
5. Avsluttande spørsmål
- (a) Har du andre relevante tankar som ikkje har komme fram så langt i intervjuet?
 - (b) Har du spørsmål til meg?

D.2 Intervjuguide for det avsluttande djupneintervjuet med lærarane

Planen er ikkje å bruka alle spørsmåla, men å ha noko å «ta frå» viss det blir naudsynt.

Ved oppstart, blir elevane gjort merksame på at intervjuet blir tatt opp og at all informasjon blir handsama konfidensielt.

1. Oppvarming

- (a) Kva likar du best og minst ved matematikk?

- (b) Kva synest du om at prosjektet nå er over?
2. Oppfatning av inquiry-basert undervising (kunnskap) [Her er «oppfatningar» brukt om kunnskap i motsetning til «beliefs» slik ein gjer i resten av oppgåva.]
- (a) Kva legg du i inquiry-basert undervising nå?
- (b) Kva oppfattar de [du] som dei viktigaste kjenneteikna ved inquiry-basert undervising?
- (c) Har du endra forståing i løpet av prosjektet? Korleis? Korfor?
- (d) Kva rolle har ressursheftet (tidlegare forskning), utviklingsmåla, Håvard, kollegaen din, videoen, din egen praktiske erfaringar fra før og ila. prosjektet og haldingar [oppfatningar] spelt?
- (e) Sjå figur 2.1 [utskrift]. Kva for nokre element her meiner de [du] har komme mest fram? Kva skuldast det at dei andre ikkje har komme fram?
- (f) Sjå figur 2.2b [utskrift]. Har de [du] endra syn på kva de [du] legg i det å ha høg matematisk kompetanse?
3. Positiv utvikling (praksis)
- (a) Kva former for positiv utvikling har du erfart? (Ulike faser: oppgåveutforming, instruksjonar, praktisk organisering, gruppearbeid, heilklassemøte, refleksjon.)
- (b) Kva kunne du og elevane dine gjort for at desse skulle blitt forsterka og for at det skulle blitt fleire av desse?
- (c) Kva synest du at du har meistra så langt? Kva vil du gjera anleis for at undervisinga skal bli betre?
- (d) Var det nokre situasjonar som utmerkte seg på ein positiv måte? Kva kjenneteikna dei?
- (e) Kva økt synest du gjekk best? Kva kjenneteikna denne?
- (f) Kva samsvarte ikkje med dei forventingane du hadde på førehand? Har du blitt overraska på ein positiv/negativ måte? Korleis?
4. Utfordringar (praksis)
- (a) Kva former for utfordringar har du og elevane dine støtt på i løpet av prosjektet? (Ulike faser: oppgåveutforming, instruksjonar, praktisk organisering, roller og normer, gruppearbeid, heilklassemøte, refleksjon.)
- (b) Kva kunne du og elevane dine gjort for å løysa desse?
- (c) Var det nokre situasjonar som utmerkte seg på ein negativ måte? Kva kjenneteikna dei?
- (d) Kva økt synest du gjekk verst? Kva var særmerkt ved denne?
5. Haldningar og meininger [Her viser «haldningar» til «beliefs» eller oppfatningar, som det blir brukt i resten av studien.]
- (a) Kva meiner du om å bruka undersøkjende undervising på vidaregåande (læreplan, eksamen, slik skulen er strukturert, kultur)?

- (b) Kor stor del av undervisinga synest de [du] at skal vera prega av slik undervising?
- (c) Kva likte du best og minst ved å undervisa på denne måten?
- (d) Kva styrker og veikskapar har inquiry-basert undervising?
- (e) Er det forskjell på kva ein kan læra gjennom inquiry-basert undervising og anna undervising? (Venn-diagram)
- (f) Har de [du] endra oppfatningar i løpet av prosjektet? Korfor?

6. Endringar (praksis)

- (a) Har de [du] lagt merke til positive/negative endringar hjå deg sjølv og elevane dine? (Aktuelle variablar: motivasjon, konsentrasjon, interesse og engasjement, kultur, samhandling, refleksjon, metakognisjon, dialog, arbeidsmåte.)

7. Prosjektet i fugleperspektiv

- (a) Kva rolle har ressursheftet (tidlegare forskning), utviklingsmåla, Håvard, kollegaen din, videoen, din egen praktiske erfaringar fra før og ila. prosjektet og haldingar spelt?
- (b) Kva synest de [du] om tidsomfanget på prosjektet? Er tre veker nok til å prøva ut inquiry-basert undervising på vidaregåande? Kva andre erfaringar trur de [du] at de og læraren dykkar [du] hadde gjort dykk [deg] viss prosjektet hadde vart eit halvt eller eit heilt år?
- (c) I kva grad kjem de at læraren dykkar kjem til å bruka inquiry i undervisinga si nå etter at prosjektet er gjennomført? Korfor? [Korreksjon: I kva grad kjem du til å bruka inquiry i undervisinga di nå etter at prosjektet er gjennomført? Korfor?]

8. Avsluttande spørsmål

- (a) Har de [du] andre relevante tankar som ikkje har komme fram så langt i intervjuet?
- (b) Har de [du] spørsmål til meg?

D.3 Intervjuguide for den avsluttande fokusgruppa med elevane

Planen er ikkje å bruka alle spørsmåla, men å ha noko å «ta frå» viss det blir naudsynt.

Ved oppstart, blir elevane gjort merksame på at intervjuet blir tatt opp og at all informasjon blir handsama konfidensielt.

1. Oppvarming

- (a) Kan eg henta ut svara dykkar på spørreundersøkinga?
- (b) Kva likar de best og minst ved matematikk?
- (c) Korfor valte de å vera med på dette gruppeintervjuet?

2. Oppfatning av undervisinga i prosjektet (kunnskap) [Oppfatningar viser her til forståing eller kunnskap og ikkje «beliefs» som i resten av studien.]

- (a) Kva oppfattar de som dei viktigaste kjenneteikna ved undervisinga i prosjektet (gjerne ift. undervisinga før)?
- (b) Sjå figur 2.1 [utskrift]. Kva for nokre element her meiner de har komme mest fram? Kva skuldast det at dei andre ikkje har komme fram?
- (c) Sjå figur 2.2b [utskrift]. Har de endra syn på kva de legg i det å ha høg matematisk kompetanse?

3. Endringar (praksis)

- (a) Har de lagt merke til endringar hjå læraren dykkar, medelevane dykkar og dykk sjølve? (Aktuelle variablar er motivasjon, konsentrasjon, interesse og engasjement, kultur, samhandling, refleksjon, metakognisjon, dialog, arbeidsmåte.)
- (b) Er nokre av desse positive, nøytrale eller negative?
- (c) Kva er dei tre beste/verste situasjonane de hugsar frå prosjektet? Kva kjenneteiknar dei?
- (d) Har de blitt overraska av noko i løpet av prosjektet?
- (e) Korleis kunne læraren din, medelevane dine og du bidratt til å styrka dei positive endringane og til at det hadde blitt fleire av dei?
- (f) Kva økt synest de gjekk best? Kva kjenneteikna denne? Kva økt synest de gjekk verst? Kva var særmerkt ved denne?

4. Utfordingar (praksis)

- (a) Kva former for utfordingar har læraren din, medelevane dine og du støtt på i løpet av prosjektet?
- (b) Kva kunne læraren din, medelevane dine og du gjort for å løysa desse?

5. Haldningar og meiningar [Her viser «haldningar» til «beliefs» eller oppfatningar som i resten av studien.]

- (a) Kva meiner de om å bruka undersøkende undervising på vidaregåande (læreplan, eksamen, slik skulen er strukturert, kultur)?
- (b) Kor stor del av undervisinga synest de at skal vera prega av slik undervising?
- (c) Har de endra oppfatningar i løpet av prosjektet? Korfor?
- (d) Er det forskjell på kva ein kan læra gjennom inquiry-basert undervising og anna undervising?

6. Prosjektet i fugleperspektiv

- (a) Kva synest de om tidsomfanget på prosjektet? Er tre veker nok til å prøva ut inquiry-basert undervising på vidaregåande? Kva andre erfaringar trur de at de og læraren dykkar hadde gjort dykk viss prosjektet hadde vart eit halvt eller eit heilt år?
- (b) I kva grad kjem de at læraren dykkar kjem til å bruka inquiry i undervisinga si nå etter at prosjektet er gjennomført? Korfor?

7. Avsluttande spørsmål

- (a) Har de andre relevante tankar som ikkje har komme fram så langt i intervjuet?
- (b) Har de spørsmål til meg?

