Matematisk ekvivalens i en femteklasse
- en kasusstudie

KRISTIAN ABRAHAMSEN

VEILEDER
Ingvald Erfjord

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2017
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min tid som lærerstudent, og en verdig avslutning på en utfordrende og spennende periode. Utdanningsløpet mitt begynte langt opp i nord hvor jeg ble en del av det første kullet i den nye GLU-ordningen. Jeg fikk tittelen adjunkt, men følte meg ikke ferdigutdannet som lærer. Reisen gikk til motsatt ende av landet og til den vakre byen Kristiansand. Etter et fantastisk år på Idrett årsstudium var valget enkelt, jeg ville ta en masterutdanning og jeg følte UiA var den perfekte plassen til å gjøre det på.

Å produsere en masteroppgave er selvfølgelig en lang prosess, men motivasjonen har alltid vært på topp. Kanskje ligger hovedgrunnen for motivasjonen i at prosessen alltid har vært lærerik og at jeg forsker på noe som jeg føler kan videreutvikles videre når jeg inntar lærerrollen.

Jeg vil først rette en stor takk til læreren som frivillig stilte opp og tillot meg å bruke hennes elever i denne studien. Fra første stund har de møtt meg med positivitet og hjelpsomhet som har vært svært viktig. Og en spesiell takk til de elevene som velvillig ble med som intervjuobjekter.

Videre er jeg nødt å takke mine foreldre som gjennom hele utdanningen min har vært enormt støttende. Jeg vil også takke mine romkamerater Ola og Pål for deres sosiale bidrag utenom skolen. Og ikke minst kjæresten min Emily som alltid er positiv og som uten unntak oppmuntrer meg på slutten av en lang skrivedag.

Helt til slutt vil jeg takke min veileder Ingvald som har stilt opp når jeg har trengt gode råd underveis. Dine tilbakemeldinger har vært solide gjennom hele prosjektet.

Kristian Abrahamsen

Kristiansand, mai 2017

Sammendrag

Denne masteroppgaven er en studie av en femteklasse sin forståelse av matematisk ekvivalens og om deres forståelse av konseptet påvirker hvordan de løser algebraiske tekstoppgaver. Innenfor elevenes forståelse for matematisk ekvivalens har likhetstegnet en sentral rolle. Denne studien tar utgangspunkt i tidligere forskning om emnet (Chesney & McNeil. 2014; Kieran. 1981; Knuth m.fl. 2006) som påviser at et stort omfang med elever på barneskolen besitter en operasjonell forståelse for likhetstegnet. Mange elever tolker altså ikke likhetstegnet som et relasjonstegn, men gir tegnet en *å gjøre noe* betydning (Knuth m.fl. 2006). En slik tolkning kan være med å svekke elevenes utvikling angående deres konseptuelle forståelse for matematisk ekvivalens og vil derfor påvirke elevenes prestasjoner i algebra.

Forskningsspørsmålene for denne studien er som følger:
1. Hvilken forståelse av matematisk ekvivalens viser elever i en femteklasse?
2. Hvordan løser elever, med ulik forståelse for matematisk ekvivalens, algebraiske tekstoppgaver?

I denne studien anvender jeg et kvalitativ forskningsdesign der metoden jeg bruker innenfor den kvalitative forskningen er kasusstudie og multiple-kasusstudie. For å besvare mitt første forskningsspørsmål har elevene gjennomført matematikkoppgaver som er designet for å avdekke deres forståelse for matematisk ekvivalens. Jeg har i tillegg sett på resultatet i lys av deres generelle matematiske ferdigheter for å øke studiets validitet. Elevene ble vurdert på deres tolkning av likhetstegnets funksjon og hvordan de presterer i arbeid med ekvivalensoppgaver. For å besvare mitt andre forskningsspørsmål gjennomførte jeg to oppgavebaserte-intervjuer med elevgrupper som jeg tidligere hadde kategorisert med ulik forståelse for matematisk ekvivalens. Elevene fikk tildelt fem algebraiske tekstoppgaver og elevene ble vurdert i deres oppgaveresonnering og strategivalg.

Resultatet av analysen viste at rundt 45 % av elevene i denne femteklassen viste en operasjonell forståelse for likhetstegnet, mens rundt 48 % ble kategorisert med god forståelse for matematisk ekvivalens. Resultatet er samstemt med hva jeg forventet å finne ut i fra forskningen nevnt tidligere. Det viste seg også at enkelte ekvivalensoppgaver hadde høyere feilprosent enn andre og var derfor mer utfordrende. Analysen viste at formatet på oppgaven hadde en direkte påvirkning i elevenes prestasjoner. I tillegg fant jeg en sterk forbindelse mellom elever som viste forståelse for ekvivalens og en relasjonell tolkning av likhetstegnets funksjon.

Når det gjelder hvordan elever løser algebraiske tekstoppgaver, viste resultatet av analysen at elever med ulike forståelse for matematisk ekvivalens har ulike løsningsprosesser. Elevene som ble kategorisert med operasjonell forståelse valgte nesten utelukkende strategier som er knyttet opp elementære tekstoppgaver som viser ingen tegn på den funksjonelle relasjonen mellom mengdene i tekstens situasjon. Derimot brukte elevene som ble kategorisert med ekvivalensforståelse flere strategier som viste balanse mellom det som ville vært to sider av en ligning og elevene hadde derfor en løsningsprosess med preg av algebraisk innhold.

Abstract

This master thesis is a study of a fifth-grade class and their understanding of mathematical equivalence and if their understanding affects how they solve algebraic word problems. Within their understanding of mathematical equivalence the equal sign plays an important part. This study is based on former research about the main topic (Chesney & McNeil. 2014; Kieran. 1981; Knuth et al. 2006) that detected many pupils in elementary school with an operational understanding of the equal sign. Therefor the pupils have misconceptions about the meaning of the equal sign not being a relational mathematical symbol, but they view the sign as a "do something signal" (Knuth et al. 2006). This interpretation could take part in weakening the development of the pupils conceptual understanding of mathematical equivalence and will therefore influence the pupil's algebraic results.

My two research questions are as follow:

1. What kind of understanding does a fifth-grade class show about mathematical equivalence?
2. How do pupils, with different understanding about mathematical equivalence, solve algebraic word problems?

In this study, I use a qualitative research design and within the design I take use of case study and multiple case study as methods. To answer my first research question the students completed mathematical tasks constructed to reveal their understand of mathematical equivalence. To increase the validity of this study I analysed the result and compared it to their general mathematical abilities. To evaluate the pupils understanding I included their interpretation of the equal sign and its role in mathematics, and I looked at the students' performance in solving equivalence problems.

To answer my second research question, I completed to task-based interviews with pupils that previously had been categorized with different understanding of mathematical equivalence. The pupils had to solve five algebraic word problems and I analysed their performance based on their task reasoning and strategic choices.

The result of the analysis revealed that about 45 % of the pupils in this fifth-grade class showed signs of operational understand, and about 48 % was categorized with a good understanding of mathematical equivalence. The result is coherent with the previous research mentioned before. One of my findings was that some of the equivalence tasks had higher failure rate and was therefore more challenging than others. My analysis showed that the format of the tasks had a direct link with the result and the pupil's achievements. I also found a strong connection between the students that showed good understanding of equivalence and a relational interpretation of the equal sign.

When it comes to the pupils solving of algebraic word problems, the result from the analysis showed that students with different understanding of mathematical equivalence had different solving processes. Pupils that was categorized with operational understanding used almost exclusively strategies that is related to elementary word problems that shows no signs of understanding the functional relationship between the values. On the other hand, the students that was categorized with good understanding of equivalence used multiple strategies that showed understanding of the notion of balancing two sides of an equation. And therefore, the pupils had a solving process with algebraic content.

Innhold

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Inspirasjonen for denne oppgaven er norske elevers svake prestasjoner i algebra. I følge den internasjonale skoleundersøkelsen TIMSS fra 2015 er norske femteklassinger i europa-toppen når det gjelder matematikk, men på ungdomsskolen er resultatene til norske skoleelever middels. Det er spesielt svake resultater i emneområdet algebra som trekker gjennomsnittskåren ned (Utdanningsdirektoratet). Denne studien vil derfor handle om hvordan matematikken på barneskolen kan hjelpe elever til å skaffe et godt grunnlag for å utvikle bedre forståelse når de møter formell algebra på ungdomsskolen.

Hovedtema for denne oppgaven er *matematisk ekvivalens* som i følge McNeil, Fyfe, Petersen, Dunwiddie & Brletic-Shipley (2011) betyr at relasjonen mellom to mengder er lik og utskiftbar. Jeg ønsker derfor å avdekke elevenes forståelse for begrepet ved å belyse deres tolkning av likhetstegnet rolle i matematikkoppgaver og hvordan de løser matematikkoppgaver som ikke er på et standard aritmetisk format. Et kompetansemål etter 4. årssteget er at eleven skal kunne bruke matematiske symbol og uttrykksmåter for å uttrykke matematiske sammenhenger i oppgaveløsning (Utdanningsdirektoratet). Innenfor matematisk ekvivalens har likhetstegnet en viktig rolle for å uttrykke sammenhengen mellom to sider av symbolet, nemlig at mengdene på hver side er lik. Tidligere forskning har derimot vist at mange elever tolker likhetstegnet som et handlingssymbol i den forstand at oppgaven er på venstre siden av likhetstegnet og svaret skal være på høyre siden (Falkner m.fl., 1999; Kieran, 1981; Knuth m.fl., 2006; McNeil & Alibali, 2005). Jeg vil derfor studere hvilken forståelse elevene i en femteklasse viser av matematisk ekvivalens. Valg av tema kan i tillegg knyttes direkte til meg når jeg går inn i lærerrollen og forhåpentligvis forbedre mine undervisningstimer.

I tillegg vil jeg studere om elevenes forståelse for matematisk ekvivalens preger deres løsningsprosess og strategivalg i arbeid med algebraiske tekstoppgaver. Studien min er sterkt inspirert av forskningen til Knuth, Stephens, McNeil & Alibali (2006) som oppdaget en sterk relasjon mellom elevenes tolkning av likhetstegnet og hvordan de presterte i arbeid med algebraiske ligninger. For å gjøre denne studien mer relevant for min egen del, som lærer på barneskolen, har jeg istedenfor algebraiske ligninger valgt å bruke algebraiske tekstoppgaver.

Området jeg vil forske på innenfor matematikkfaget var relativt ukjent for meg før jeg begynte på masteroppgaven. Utgangspunktet mitt før prosjektstart var at jeg ville forske rundt elevers forståelse av likhetstegnet og jeg ville undersøke hva jeg som barneskolelærer kan gjøre for å styrke elevenes overgang fra tidlig algebra på barneskolen til algebraen de møter senere i deres skolegang. Gjennom min egen skolegang har jeg aldri hatt noen vanskeligheter med algebra og løsning av ligninger var noe jeg likte veldig godt i matematikkundervisningen på ungdomsskolen. Jeg var god å pugge algoritmer og jeg dro veldig nytte av mine aritmetiske ferdigheter. Men etter ungdomsskolen så har min noe instrumentelle forståelse preget entusiasmen for matematikkfaget. Og det var ikke før noen år inn i lærerstudiet at jeg begynte å opparbeide meg en forståelse for teoriene bak operasjonene i matematikken. En annen inspirasjonskilde til denne studien kommer fra en episode på ungdomsskolen som har brent seg fast i minnet. I en matematikkundervisning om ligninger lærte vi at verdier som flyttes over likhetstegnet bytter fortegn. Isolert sett en god huskeregel, men det ga meg en smal forståelse for de underliggende operasjonene i arbeid med algebraiske ligninger. Inspirasjon til bruk av tekstoppgaver kommer fra det første år på masterstudiet (4.året i lærerutdanningen). Her hadde vi et prosjekt som ble kalt MERG (Mathematical Education Research Group). Prosjektet var miniutgave av en masteroppgave og min oppgave handlet om hvordan elever arbeidet med tekstoppgaver. Oppgaven var knyttet til en artikkelpresentasjon jeg hadde gjort tidligere av Wyndhamn & Säljö (1997) hvor de studerte elevers realistiske vurderinger i arbeid med tekstoppgaver. MERG-oppgaven gjorde meg bevisst på hvordan tekstoppgaver kan brukes til å skape en direkte relasjon mellom skolematematikken og elevenes virkelighet. I følge Margrethe Naalsund er det mange elever som ser på algebra som meningsløs manipulasjon av symboler. I tillegg er det mange som ikke har forståelse for "reglene" i arbeid med algebra (Naalsund i Jakobsen, 2012). Og ved en senere anledning har jeg blitt bevisst på mulighetene ved å bruke algebraiske tekstoppgaver til å konstruere en kontekst til algebraens abstrakte natur. Og det er noe av grunnen til at jeg har valgt å involvere algebraiske tekstoppgaver i denne studien.

Målet med denne oppgaven er derfor å lage et rammeverk for hvordan matematikklærere på barneskolen kan tilrettelegge for tidlig algebra før elevene begynner med formell algebra på ungdomsskolen. Rammeverket er spesielt knyttet til at elevene skal måtte unngå å hoppe over kognitive hinder i møte med matematikk som krever god forståelse for ekvivalens.

1.2 Forskningsspørsmål

Fokuset for denne oppgaven er, som nevnt i innledning, elevenes forståelse av matematisk ekvivalens og om elevenes forståelse av matematisk ekvivalens preger deres gjennomførelse av algebraiske tekstoppgaver. Med dette fokuset som utgangspunkt vil forskningsspørsmålene for oppgaven være følgende:

1. *Hvilken forståelse av matematisk ekvivalens viser elever i en femteklasse?*

2. *Hvordan løser elever, med ulik forståelse av matematisk ekvivalens, algebraiske tekstoppgaver?*

Det første forskningsspørsmålet baserer seg på hvordan elever forstår matematisk ekvivalens. Knuth m.fl. (2006) knyttet elevenes forståelse av likhetstegnet opp i mot deres prestasjoner i arbeid med ligninger, men vil jeg fokusere på oppgaver som er tilpasset en femteklasse. Som nevnt i forrige delkapittel, vil jeg derfor måle elevenes forståelse ut i fra både deres tolkning av likhetstegnet og hvordan de utfører ekvivalensoppgaver. Elevene på femte trinn er mest vant med å finne likhetstegnet i en aritmetisk kontekst og er derfor det området som er mest relevant å forske på i denne oppgaven (McNeil & Alibali, 2005). Denne påstanden og en ytterlig beskrivelse av begrepet *matematisk ekvivalens* vil jeg komme nærmere innpå senere i kapittel 2. Aritmetikk regnes som grunnleggende tallregning, og inneholder alle fire regneartene, potensering, rot utdragning og logaritmeregning (Store norske leksikon). Siden jeg forsker på en femteklasse og med tanke på deres læringsmål, så vil jeg kun inkludere de fire regneartene i min forskning.

Det andre forskningsspørsmålet handler om hvordan elevene arbeider med algebraiske tekstoppgaver. Jeg ser på en tekstoppgave som en måte å representere et regnestykke. Slik at en algebraisk tekstoppgave kan være en representasjon for en ligning eller funksjon og kan tilby eleven en kontekst til verdiene fra virkeligheten i motsetning til en ren algebraisk ligning. Et eksempel kan være:

> *Ida, Omer og John har til sammen 879 kroner. Ida har 375 kroner. Omer har 80 kroner mindre enn Ida. Hvor mange kroner har John?*
>
> (Radius 5a – grunnbok. Dahl m.fl., 2014)

Denne oppgaven kan jeg oversette til en algebraisk representasjon:

$$375 + 2x + 80 = 879$$

Både tekstoppgaven og den algebraiske representasjonen inneholder det samme matematiske innholdet. Adu-Gyamfi, Stiff & Bossé (2012) beskriver denne prosessen som å gå fra en kilderepresentasjon (tekstoppgaven) til målrepresentasjon (ligningen) eller motsatt. Når elevene i denne studien skal løse de algebraiske tekstoppgavene, må de sørge for at deres representasjon inneholder det samme matematiske innholdet som tekstoppgaven, altså de samme verdiene og informasjonen tilgjengelig i teksten. Denne prosessen kaller Adu-Gyamfi m.fl. (2012) for ekvivalensbekreftelsen. I denne studien vil elevene stå fritt til å velge den representasjonsformen de selv ønsker, men å representere oppgaveteksten med en ligning vil ikke være forventet ut i fra deres matematiske ståsted. Fokuset mitt vil derfor være på deres strategivalg gjennom løsningsprosessen.

1.3 Oppgavens oppbygging

Oppgaven er delt inn i 6 hovedkapitler. Første kapittel er denne innledningen hvor jeg først belyste bakgrunnen for oppgaven og deretter presenterte mine to forskningsspørsmål. I kapittel 2 vil jeg ta for meg teori som er relevant for besvarelsen av forskningsspørsmålene. Deretter vil jeg i kapittel 3 begrunne metodiske valg jeg tatt i forhold til oppgavenes innhold. Studiets analyse presenteres i kapittel 4, hvor jeg analyserer elevenes besvarelser opp mot analysemetodene presentert i kapittel 3. Jeg vil først analysere elevenes besvarelser knyttet opp mot mitt første forskningsspørsmål før jeg retter fokuset mot hvordan elevene arbeider med algebraiske tekstoppgaver. Kapittel 5 er den delen i oppgaven hvor jeg vil diskutere funnene i analysen opp i mot forskningsspørsmålene. Før jeg i kapittel 6 kommer med noen avsluttende refleksjoner og til slutt en konklusjon. Oppgaven avsluttes med litteraturlisten og vedleggsdelen. Vedleggene består av transkripsjonsnøkkel for intervjuene, intervjuguide, mal for samtykkeskjema for lærere og elever involvert i studiet og transkripsjoner fra intervjuene.

2 Teoretisk bakgrunn

Jeg vil i dette kapittelet redegjøre for de teorier som utgjør oppgavenes faglige plattform og presentere tidligere forskning som jeg finner mest relevant for oppgavenes hovedtema. Selv om jeg vil svare på to ulike forskningsspørsmål så vil kapittelet omhandle begge, men der siste delkapittel har mest fokus på mitt andre forskningsspørsmål om algebraiske tekstoppgaver.

2.1 Likhetstegnet semiotiske funksjon

Forståelsen av matematiske tegn eller symboler er noe førsteklassinger umiddelbart blir utfordret på. Viktigheten av tegn er udiskuterbart og i følge Steinbring (2006) ville ikke mennesket være i stand til å tenke eller generalisere uten tegn. Han beskriver matematiske tegn som instrumenter for å formidle matematisk kunnskap med hverandre og er samtidig viktig for utviklingen av matematisk kunnskap. Tegn blir av Steinbring karakterisert med to funksjoner: en epistemologisk og en semiotisk funksjon. Det er sistnevnte er funksjonen mest relevant for denne oppgaven. Definisjonen på tegnets semiotiske funksjon er at du ser på et tegn som "noe som står for noe annet" (Steinbring, 2006, s. 134). Figur 1.0 illustrerer forholdet mellom tegnet/symbolet og referansekontekst.

Figur 1.0. Hentet fra Steinbring (2006. s. 134).

Slik jeg forstår definisjonen til Steinbring vil ikke tegnet i seg selv ha noen mening. Dette gjelder alle tegn utenom matematikken også. Referansekonteksten til tegnet, slik jeg tolker det, er betydningen og sammenhengen du gir til tegnet. Et tegn må derfor tolkes med utgangspunkt i dine erfaringer og tilegnede kunnskaper som samlet blir din forutsetning for forståelse av tegnet. Generelt sett vil et tegn også ha flere betydninger, avhengig av hvordan tegnet blir representert. I matematikkens verden vil en skråstrek (/) representere en brøkstrek eller divisjonstegn (2/4, 10/5), men vi bruker også symbolet i typografi som et skilletegn og når man angir flere alternativer. Et tegn sin semiotiske funksjon er lett tilgjengelig for barn og de tidlig blir vant med å skape forbindelse mellom tegnet og referansekontekst (Steinbring, 2006). I barnas første matematikktimer på barneskolen blir mange nye tegn introdusert og de første tegnene som elevene møter på i skolen omhandler tall eller mengder. Barn har ofte et forhold til antallsbegrepet da de engasjerer seg i aktiviteter som baserer seg på faste objekter som biler, dokker, baller og hvor mange de har av hver. Barn vil ofte sammenligne deres ting med andre barn og kan derfor tilegne seg en forbindelse til mengde og verdien på tall. I tillegg til mengde vil barn også skape korrespondanse mellom symboler som representerer handling, som pluss og minus, og dagligdagse aktiviteter. Disse aktivitetene skaper gode forutsetninger for å skape en referansekontekst til de matematiske tegnene de møter i skolen (Hiebert, 1988).

Men hvordan kan elever konstruere en referansekontekst til likhetstegnet? I dette avsnittet har jeg nevnt mengdesymboler (tall) og handlingssymboler (+, -). Likhetstegnet går derimot under kategorien relasjonelle symboler. Denne kategorien deler de med bl.a. <, > og ≠ som sammen med likhetstegnet beskriver relasjonen mellom to mengder. Begrepene *større enn* og *mindre enn* mener jeg barn ofte skaper referansekontekst til i deres hverdag. F.eks. kan barn konstruere en god forståelse for antallsbegrepet gjennom sammenligning av deres egen alder og andre barns alder og sammenligning av antall leker. Slik vil barn skape en god bakgrunn for å forstå tegnene for "større enn, mindre enn" (< , >) når de blir introdusert i skolen.

Når det gjelder likhetstegnet er det et tegn som, i likhet med alle andre tegn, i seg selv ikke gir mening. Elevenes referansekontekst til likhetstegnet vil ofte konstrueres gjennom direkte instruksjoner fra læreren på skolen, ofte i form av standard aritemtiske regnestykker på formen a + b = c. Elevenes referansekontekst til likhetstegnet som et matematisk symbol vil derfor være tegnet som knytter en matematisk operasjon til svaret (Cobb, 1987), som defineres som en operasjonell forståelse av likhetstegnet.

Tidligere undersøkelser har avdekt at et flertall av elever på barneskolen har en operasjonell forståelse for likhetstegnet (Cobb, 1987; Hattikundur & Alibali, 2010; Knuth m.fl., 2006). For å forbedre elevenes forståelse må likhetstegnet semiotiske funksjon, altså hva tegnet står for, styrkes. En rikere referansekontekst må konstrueres. I studien til McNeil & Alibali (2005) viste de at konteksten spiller en sentral rolle i forståelsen av likhetstegnet. Ved å presentere likhetstegnet i tre ulike kontekster viste de at måten likhetstegnet blir presentert på preger måten elevene tolker symbolet. De tre kontekstene var alenekontekst (kun " = "), addisjonskontekst (4 + 8 + 5 + 4 = __) og ekvivalenskontekst (4 + 8 + 5 = 4 + __). Studiet ble utført på barneskoleelever og helt opp til fysikkstudenter på universitetsnivå. For å gi et eksempel fra studiet vil jeg se på hvordan konteksten preget elevene på 7.trinn. Når elevene fikk presentert likhetstegnet i en addisjonskontekst ga rundt 65 % av elevene likhetstegnet en operasjonell betydning. Som jeg har tidligere har forklart betyr at elevene tenker likhetstegnet skiller mellom oppgaven på venstre siden og svaret på høyre siden. Derimot når elevene fikk presentert likhetstegnet i en ekvivalenskontekst ga rundt 90 % av elevene på 7.trinn likhetstegnet en definisjon som viste forståelse for matematisk ekvivalens, altså de forstår at relasjonen mellom mengdene likhetstegnet knytter sammen har samme verdi eller like store (McNeil & Alibali. 2005).

I en studie av Hattikudur & Alibali (2010) studerte de virkningen av å ikke presentere likhetstegnet som et selvstendig symbol, men som en del av konseptet relasjonelle symboler. Likhetstegnet ble introdusert sammen med relasjonssymbolene <, >, og ≠, hvor elevene fikk sammenligne symbolenes ulike funksjoner. Resultatet viste at elevene fra gruppen som fikk likhetstegnet introdusert sammen med de andre relasjonssymbolene tilegner seg en bedre forståelse enn hvis elevene bare fokuserer på likhetstegnet og dens funksjon. Slik jeg tolker resultatet av det nevnte studiet, har den gruppen med relasjonssymbolene fått en referansekontekst som har skapt rike assosiasjoner for elevene. Det mener Hiebert (1988) er en essensiell egenskap for hensiktsmessig referanse til matematiske symboler. Dette kan sammenlignes med hvordan en lærer introduserer operasjonstegn (+, - , / , *) med å knytte de opp mot hverandre. Eks: multiplikasjon som gjentatt addisjon, subtraksjon som en motsetning til addisjon og divisjon som en motsetning til multiplikasjon.

2.2 Matematisk ekvivalens

I dette delkapittelet vil jeg kommer nærmere innpå begrepet matematisk ekvivalens og hvilken rolle forståelsen av ekvivalens og likhetstegnet har i skolematematikken. Jeg vil i tillegg utrede om konsekvensen av en svak forståelse for ekvivalens og hva det har å si for elevenes prestasjoner i arbeid med ekvivalensoppgaver og algebraiske ligninger. I min forskning vil jeg forvente, ut i fra tidligere litteratur (Knuth m.fl., 2006; McNeil, 2008; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali., 2011), å identifisere to ulike forståelser av likhetstegnet, følgelig operasjonell forståelse og forståelse for matematisk ekvivalens. Det er viktig for oppgaven å gi en klar definisjon på de ulike begrepene, da begge forskningsspørsmålene innebærer å kategorisere elevene ut i fra disse definisjonene.

2.2.1 Operasjonell - og ekvivalensforståelse

Operasjonell forståelse for likhetstegnet innebærer å tolke en matematisk setning slik at oppgaven er på venstre siden og svaret er på høyre siden av likhetstegnet. En elev med et operasjonelt syn på likhetstegnet vil ofte utføre kalkuleringer på de tilgjengelige tallene i matematikkoppgaven og skrive totalen i den blanke område (Chesney & McNeil, 2014; Jones, Gilmore & Evans, 2013; McNeil, 2008). En lik beskrivelse av operasjonell forståelse av likhetstegnet finner man i Cobb (1987) som mener elever ofte gir symbolet en *gjøre noe* betydning. Elever med en slik forståelse vil ofte feilkalkulere matematiske setninger som ikke har et standard aritmetisk format (a + b = c). I tillegg kan elever avvise slike oppgaver på bakgrunn av det ukjente formatet. I denne studien kan *avvise* sammenlignes med å *ikke akseptere* oppgaven fordi formatet er "feil". I studiet til Cobb (1987) ble ulike matematikkoppgaver presentert for elevene, noen oppgaver på standard aritmetisk format, mens noen hadde et ekvivalensformat. Elevene i studiet skulle undersøke hvilke som riktig og rette oppgavene som var feil. Studien viste at elever ofte vil avvise ekvivalensformat og følgende gi alternative oppgaver på et standard format. For eksempel ble oppgaven 6 + 4 = 4 + 6 avvist og 6 + 4 = 10 ble gitt som et alternativ.

Innenfor operasjonell forståelse har McNeil m.fl. (2011) identifisert tre ulike mønster som barn lærer i deres arbeid med aritmetikk i skolen, som alle inngår i et operasjonelt tankesett. Det første mønstre er nevnt tidligere, hvor eleven tenker en matematikkoppgave skal være på formatet *operasjon = svaret*. Likhetstegnet blir i et slikt tankesett tolket som et handlingssymbol. Det andre mønstre er en strategi der eleven *gjennomfører de gitte operasjonene på alle tilgjengelig tall*. Her vil bl.a. elever med en slik strategi ignorere relasjonen mellom mengdene som likhetstegnet representerer og kalkulere uavhengig av hvor tallene er plassert i matematikkoppgaven. I følge McNeil m.fl. (2011) vil elever som blir oppfordret til å gjenskape matematikkoppgaven 7 + 4 + 5 = 7 + __, etter å ha sett kjapt oppgaven, ofte skrive 7 + 4 + 5 + 7 = __. Og når de blir spurt om å løse oppgaven 7 + 4 + 5 = 7 + ___, så vil de svare 23 (istedenfor 9). Det siste mønstre, som McNeil m.fl. identifiserer som operasjonelt handler om å tolke likhetstegnet som å *kalkulere totalen*. Disse mønstrene kan fungere på standard aritmetiske oppgaver med oppsett som a + b = c, men vil ikke være gyldig i ekvivalensoppgaver hvor kalkuleringen skjer på høyre siden av likhetstegnet, a = b + c, eller en oppgave som inneholder et sett med mengder på hver side av likhetstegnet, a + b = c + d (McNeil m.fl. 2011).

I denne studien kan elever med operasjonell forståelse vise tegn på kunnskapen *prosedyreferdighet* (oversatt fra procedural skill) knyttet til Rittle-Johnson m.fl. (2001). Begrepet blir definert som "evnen til å utføre handlingssekvenser for å løse problemer og er knyttet til spesifikke problemer og er derfor ikke generaliserende" (Rittle-Johnson m.fl., 2001. s. 346). Selv om operasjonell forståelse for likhetstegnet ikke impliserer noen definerte ferdigheter så har den noen trekk som kjennetegner en person som har utviklet prosedyreferdighet. Som nevnt i forrige avsnitt så vil operasjonell forståelse være gyldig på oppgaver med formatet a + b = c, hvor da elevene ofte bruker tidligere tilegnede strategier som de tidligere har erfart funker bra på dette formatet. I likhet med prosedyreferdigheter så er disse strategiene knyttet til spesifikke oppgaver ofte på et standard format og er derfor ikke generaliserbart overfor ekvivalensoppgaver eller når elevene blir introdusert for ligninger i algebraen. Et eksempel kan være oppgaver på formatet 12 + 3 = __ - 2. Elever med operasjonell forståelse og som bruker tidligere kunnskap om aritmetiske oppgaver for å løse oppgaven, vil ofte skrive at tallet som mangler er 15.

Når det gjelder matematisk ekvivalens gir McNeil (2008) gir en god definisjon:

> "Matematisk ekvivalens kan uttrykkes i form av en matematisk setning (f.eks. 3 + 4 = 7) eller en ligning (f.eks. x + 1 = 5) som inneholder to matematiske uttrykk skilt av likhetstegnet. Den symbolske formen impliserer at uttrykket på venstre side av likhetstegnet kan bli erstattet av uttrykket på høyre side og motsatt" (McNeil. 2008. s. 1524).

En rik forståelse av likhetstegnet innebærer altså ikke bare å forstå likhetstegnet som *det samme som*, men også å oversette tegnet til *kan bli erstattet av*. Ordlyden til regnestykke 7 = 3 + 4 blir da "sju kan bli erstattet av tre pluss fire".

Matematisk ekvivalens er et fundamentalt konsept i algebra og en rik forståelse for konseptet bør først og fremst utvikle seg gjennom barneskolen (Rittle-Johnson m.fl., 2011). En god forståelse av likhetstegnet er derfor viktig og spiller en viktig rolle i utviklingen av elevenes algebraiske tenkning (Knuth m.fl. 2006). Likhetstegnet har også en viktig rolle innenfor aritmetisk kompetanse, som krever at du har en forståelse for de operasjonelle lovene og den relasjonelle betydningen av et regnestykke (Fuchs, Cirino, Schumacher, Marrin, Hamlett, Changas, 2014). Aritmetisk kompetanse beskriver Fuchs m.fl. som grunnlaget for tidlig algebraisk utvikling.

Der operasjonell forståelse kan knyttes til prosedyreferdighet, så kan forståelse for matematisk ekvivalens innebære at elevene har utviklet en form for *konseptuell kunnskap*. Rittle-Johnson m.fl. definerer begrepet som "implisitt eller eksplisitt kunnskap overfor prinsippene som styrer et domene" (Rittle-Johnson m.fl., 2001, s.346) og at "kunnskapen er fleksibel og ikke bundet til spesifikke typer problemer og er derfor generaliserbart" (Rittle-Johnson m.fl., 2001., s. 347). Begrunnelsen for denne sammenligningen er at forståelse for matematisk ekvivalens innebærer at du forstår relasjonen/likeverdigheten mellom mengdene som likhetstegnet knytter sammen og at mengdene er utskiftbare med hverandre. Det betyr at mengden på venstre siden kan bli byttet ut med mengden på høyre siden av likhetstegnet (McNeil m.fl., 2011). Denne forståelsen kan generaliseres utover alle matematiske konsepter hvor relasjonen mellom to mengder er relevant og bruk av likhetstegnet og er derfor spesielt aktuell innenfor algebra. En elev med slik forståelse for begrepet ekvivalens mener jeg derfor viser tegn på konseptuell kunnskap. Tidligere forskning om relasjon mellom prosedyreferdighet og konseptuell kunnskap har fokusert på hva som tilegnes først. Rittle-Johnson m.fl. (2001) mener derimot at de influerer hverandre hvor en økning av konseptuell kunnskap samtidig gir en økning av prosedyreferdigheter og motsatt. Han påpeker også at det er meningsløst å si at en elev har en type kunnskap og ikke en annen type kunnskap. Men på en bestemt læringsfase vil det være riktig å si at en type kunnskap har utviklet seg mer enn den andre.

Når det gjelder forståelsen av likhetstegnet innenfor matematisk ekvivalens betyr det f.eks. å tolke likhetstegnet som *det samme som* eller *like mye på hver side av tegnet*. Begrepet *relasjonell forståelse for likhetstegnet* er knyttet til McNeil og Alibali (2005) og kan bli brukt som en indikator for at en elev har god forståelse for matematisk ekvivalens (Rittle-Johnson m.fl., 2011). For at elevene skal bli kategorisert med god forståelse for matematisk ekvivalens bør elevene derfor kunne gi en relasjonell definisjon på likhetstegnet og i tillegg kunne vise at forståelsen for ekvivalens i arbeid med ekvivalensoppgaver. Det er viktig å poengtere at elevene jeg skal forske på er i en tidlig læringsfase og det vil ikke være riktig å påstå at de har full forståelse for matematisk ekvivalens uansett hvordan de presterer i denne studien. Rittle-Johnson m.fl. beskriver min siste påstand godt: "tidlig kunnskap er begrenset, så selv om faktumet er at elevene vet noe om X betyr ikke det nødvendigvis at de fullt ut forstår X" (Rittle-Johnson m.fl., 2011, s. 347).

I studiet til Knuth m.fl. (2006) presenterte de en statistikk på elevers beste definisjonen av likhetstegnet. Forskningsobjektene var elever på 6., 7. og 8. trinn. Denne statistikken baserer seg kun på hvordan elevene definerer likhetstegnet.

Beste definisjon	**6. trinn**	**7. trinn**	**8. trinn**
Operasjonell	53	36	52
Relasjonell	32	43	31
Andre	15	20	17
Ingen respons/vet ikke	0	1	0

Tabell 1. Statistikk hentet fra Knuth m.fl., s. 303. 2006. Tallene er i %.

Som tabell 1 viser så finner man et overtall av elever i 6. klasse og 8. klasse som gir likhetstegnet en operasjonell definisjon, mens et overtall av elever på 6. trinn gir en relasjonell definisjon. I samme studie fant de en sterk forbindelse mellom elevenes forståelse av likhetstegnet og hvordan de presterte i arbeid algebraiske ligninger. De fant altså ut at elevene som viser en god forståelse av likhetstegnet presterer bedre på ekvivalente ligninger. Noe bemerkelsesverdig var også deres funn om at selv elever med ingen erfaring med formell algebra, i denne studien gjaldt det spesielt elevene på 6.- og 7.trinn, har en bedre forståelse for hvordan kan skal løse en ligning når de har forståelse for matematisk ekvivalens (Knuth m.fl., 2006). Når det gjelder elevenes progresjon så finner ikke Knuth m.fl. en gradvis stigning av utvikling med tanke på forståelse av likhetstegnets rolle. McNeil & Alibali (2005) sin studie viste derimot en positiv utvikling av relasjonell forståelse blant elever opp mot 7. trinn.

Det er likevel viktig å klargjøre at en operasjonell forståelse for likhetstegnet er gyldig i visse sammenhenger. Jeg har tidligere nevnt at en tolkning av likhetstegnet som *å gjøre noe* er gyldig på matematikkoppgaver med formatet a + b = c. Et annet eksempel kan være bruk av kalkulator, hvor tegnet tydelig blir brukt som et handlingssymbol og ikke som et relasjonssymbol. Generelt i digitale verktøy har likhetstegnet en operasjonell funksjon. Derfor har likhetstegnets relasjonelle funksjon, som i programmeringsspråket C++, fått tildelt symbolet = = (Borenson, 2013).

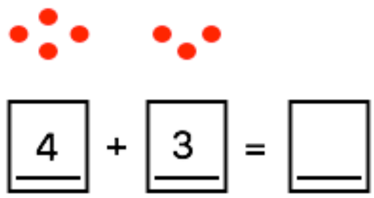
2.2.2 Påvirker ekvivalens elevenes prestasjoner?

"Forståelsen av matematisk ekvivalens har en helt sentral rolle i å utvikle unge barns algebraiske tenkning" (McNeil, m.fl., 2011, s. 1620). Så hva har en operasjonell forståelse for likhetstegnet å si i forhold til prestasjoner i matematikkfaget? På grunn av norske elevers historie med dårlig resultater i algebra (TIMSS), vil det være relevant å se nærme på tidligere forskning om sammenhengen mellom hva elevene presterer i algebra og forståelsen for matematisk ekvivalens. Til å svare på spørsmålet som ble stilt i begynnelsen av dette avsnittet vil jeg ta utgangspunkt i artikkelen til Knuth m.fl. (2006) om forståelsen av likhetstegnet har en betydning i forhold til å løse algebraiske ligninger. Denne studien fokuserer altså på en direkte sammenheng mellom elevenes ekvivalensforståelse og deres prestasjoner.

Ved standard aritmetiske matematikkoppgaver, på formen a+b=__, er det ikke like problematisk å ha et syn på likhetstegnet som *å gjøre noe* (ibid.). Et slikt standard format på matematikkoppgavene gjør at elevene ikke trenger å tenke på likhetstegnet som noe annet en indikasjon på at svaret skrives på høyre siden i det blanke feltet. Men et slikt syn vil ikke være fordelaktig ved senere tidspunkt i møte med ekvivalensoppgaver som f.eks. a = b + c. Som vist tidligere i dette kapittelet blir det i Knuth m.fl. (2006) påvist et stort overtall av elever med en operasjonell forståelse i 6. og 8. trinn, og en sterk forbindelse mellom forståelsen av likhetstegnet og prestasjonen ved løsning av ligninger. Elever med en relasjonell forståelse av likhetstegnet, selv om de ikke har erfaring med formell algebra, presterte bedre enn de uten en slik forståelse. En kan opplagt tenke seg at funnene gjort i Knuth m.fl. (2006) har forbindelse med elevenes generelle matematiske ferdigheter, og at deres forståelse av likhetstegnet spilte en mindre rolle. Men også med elevenes generelle matematikk resultater som en faktor var det en tydelig forbindelse mellom resultatet på ligningsoppgavene og forståelsen av likhetstegnet.

Jeg har til nå presentert hvilke konflikter en operasjonell forståelse kan skape for elever når de begynner å lære formell algebra. I følge resultatet fra TIMSS (2015) er algebra også et problem blant elever på videregående som tar matematikk på høyeste nivå. Ut i fra forskningen til Chesney & McNeil (2014) kan en operasjonell forståelse tilegnet på barneskolen ha en negativ effekt på læring til og med blant utdannede voksne med en klar forståelse for matematisk ekvivalens og likhetstegnets relasjonelle natur. På tross av at elever på senere tidspunkt har klart å skaffe seg en god forståelse for matematisk ekvivalens, så vil det for noen være vanskelig å avlære det operasjonelle tankesettet. Chesney & McNeil mener den operasjonelle og relasjonelle forståelsen lever i tandem med hverandre og at den operasjonelle forståelsen kan bli aktivert med triggere som f.eks. standard aritmetiske oppgaver (Chesney & McNeil, 2014).

En operasjonell forståelse har opplagt påvirkning for mange elevers prestasjoner i matematikken gjennom deres skolegang. Men hvordan har de skaffet denne operasjonelle forståelsen for likhetstegnet og ikke skaffet nok erfaringer med matematisk ekvivalens. I følge McNeil (2008) så er bakgrunnen for elevenes mangelfulle erfaring standard aritmetiske oppgaver. Hun viser til en studie utført på kinesiske barneskoleelever hvor 90 % løste det hun kaller matematiske ekvivalensoppgaver korrekt. Denne studien viser at elevenes forståelse ikke blir hindret av deres konseptuelle begrensninger i forhold til deres lave alder. I studien til McNeil (2008) blir det forsket i USA hvor det i de første skoleårene fokuseres veldig mye på standard aritmetiske oppgaver hvor operasjonen er til venstre og svaret til høyre for likhetstegnet. Dette formatet mener McNeil viser lite tegn til likhetstegnets relasjonelle natur og skaper en smal forståelse som ikke kan generaliseres forbi slike oppgaver (ibid.). Selv om det nevnte studiet tok plass i USA så mener jeg det er overførbart til norsk skole. Denne studien er ikke en lærebokanalyse, men etter å ha studerte norske matematikk lærebøker som blir brukt på 1. og 2. trinn, så er det klart overvekt av standard aritmetiske oppgaver på formatet a + b = c. Jeg studerte lærebøkene Multi 1b - grunnbok (Alseth, 2010), Abakus 2a – grunnbok (Johansson m.fl., 2005) og Radius 2a – grunnbok (Dahl m.fl., 2014). Både Mutli og Abakus inneholdt nesten bare slike oppgaver. Multi 1b - grunnbok inneholder f.eks. oppgaver hvor eleven skal skape en referansekontekst til tallenes størrelse hvor det er brukt et standard aritmetisk format (se figur 2.0). Mens det i Abakus 2a - grunnbok blir presentert matematikkoppgaver på samme format og med bruk av kroner som konkretiseringsmateriell (se figur 2.1).



Figur 2.0. Oppgave knyttet til Multi 1b – grunnbok.

5 kr + 3 kr = ____ kr

10 kr - 2 kr = ____ kr

10 kr - 0 kr = ____ kr

Figur 2.1. Oppgaver knyttet til Abakus 2a – grunnbok.

Derimot hadde Radius 2a - grunnbok mange oppgaver med ekvivalensformat. F.eks. oppgaver med flere likhetstegn (8 + 6 = 10 + __ = ___) og oppgaver hvor tallet som manglet for å gjøre den matematiske setningen riktig var plassert på venstre siden av likhetstegnet (10 + __ = 14). Men når elevene blir presentert med standard aritmetiske oppgaver, som i Multi og Abakus, i deres første år på skolen og deretter tilegner seg en operasjonell forståelse, så kan aktivering av denne forståelsen ved et senere tidspunkt svekke elevenes læring av matematisk ekvivalens. Studiet til McNeil (2008) viser at med å fokusere på oppgaver med ekvivalensformat på et tidligst mulig læringsstadium så vil elevene på lang sikt tjene på det. En kjent læringsmetode er å bygge ny informasjon på tidligere tilegnet kunnskap kalt assimilasjon. Argumentet mot McNeil er at ny informasjon kan også bygges med grunnlag i elevenes feilkunnskap. Læring skjer da gjennom aktivering av veletablerte feilkunnskaper når elevene jobber med nye konsepter og vil da skape en mulighet for kognitiv konflikt blant elevene. Eleven skaper læring gjennom akkomodasjon som oppstår når eleven opplever noe som ikke stemmer overens med det eleven vet fra før av (Säljö, 2013). Men i dette tilfelle argumenter McNeil (2008) for at det ikke vil være tjenlig men en slik læringsmetode. Hennes forskning viser at aktivering av barns kunnskap om typiske aritmetiske oppgaver svekker elevenes læring av matematisk ekvivalens. Det er viktig å påpeke at aritmetikk er sentralt for elevenes matematiske kunnskap og bør tilegnes et stort fokus på barneskolen, men bør allerede fra første klasse kombineres med en mer algebraisk tilnærming (McNeil, 2008).

2.3 Tekstoppgaver

Jeg vil i resten av dette kapittelet forklare generelt om tekstoppgaver, deres egenskaper og posisjon i skolesystemet, før jeg deretter fokuserer på algebraiske tekstoppgaver som er sentralt for mitt andre forskningsspørsmål.

I følge Verschaffel m.fl. (2000) blir tekstoppgaver definert som en "verbal beskrivelse av en situasjon der en eller flere spørsmål blir stilt, og svaret kan nås gjennom matematiske operasjoner på den numeriske dataen tilgjengelig i problemet" (Verschaffel m.fl., 2000, s.ix).

Det er viktig å skille tekstoppgaver fra andre representasjonsformer som numeriske representasjoner ($2 + 2 = 4$, $4x + 2 = 10$) og muntlig form eller ordlagt ligning (Jeg starter med et nummer, multipliserer med 6, legger til 66 og får 81,9. Hvilket tall startet jeg med?) (Koedinger & Nathan, 2004). Konteksten i problemet skal altså være meningsfull og bør være noe eleven kan forestille seg, som da vil gå under kategorien realistiske tekstoppgaver. En tekstoppgave er heller ikke eksklusivt skriftlig, og kan ha forskjellige former som tabeller, bilder, tegning eller video (Verschaffel m.fl., 2000; Wyndhamn & Säljö, 1997).

Tekstoppgaver har i lang tid vært en del av skolematematikken og har spilt en viktig rolle pga. de pedagogiske verdiene. Først og fremst er tekstoppgaver en sentral faktor i å knytte den virkelige verden sammen med matematikk. Elevene lærer å anvende hva de har lært av f.eks. aritmetikk, geometri og algebra, til å løse hverdagslige problemer. Verschaffel m.fl. (2000) beskriver matematiske ferdigheter som verktøy, og som med alle verktøy, må man lære hvordan og hvor de kan brukes. Her kan tekstoppgaver spille en sentral rolle. I tillegg kan tekstoppgaver være motiverende som følge av at elevene lærer seg ferdigheter som ikke bare har sin nytte i skolesammenheng, men også i deres egen hverdag. Og de kan tilpasses den enkelte elevs interesser. Tekstoppgaver kan også være med å styrke elevenes kreativitet og matematiske ferdigheter (Verschaffel m.fl., 2000).

Prosessen for å løse tekstoppgaver kan bli beskrevet som et komplekst flerfasesystem. Første fase handler om å skaffe seg en forståelse for problemet og reflektere over situasjonen problemet er situert i (Verschaffel m.fl. 2014) Neste fase er oversettelsen eller modelleringen av de matematiske elementene fra den virkelige verden til en matematisk modell. I denne fasen er det viktig å finne den riktig informasjon fra teksten som er essensiell for løsningen. Det kreves at elevene bruker deres språklige ferdigheter til å oversette teksten til deres egne termer. De neste fasene er å bruke den matematiske modellen du har skapt til å finne en løsning, deretter tolke svaret du har fått opp mot problemet, evaluere om svaret er riktig og fornuftig og tilslutt kommunisere det oppnådde resultat (Sebrechts, Enright, Bennet & Martin, 1996; Verschaffel m.fl., 2014). En evaluering om svaret er fornuftig er spesielt egnet for tekstoppgaver da elev kan vurdere svaret opp i mot tekstens situasjon. En studie av Verschaffel m.fl. (1994) viste derimot et alarmerende resultat i forhold til realistisk vurdering i arbeid med tekstoppgaver, noe jeg har brukt i min vurdering ved konstruksjon av tekstoppgavene for denne studien. Jeg vil komme nærmere innpå det i neste delkapittel.

2.3.1 Algebraiske tekstoppgaver

I denne studien vil det være relevant å vurdere hvilken rolle tekstoppgaver og spesielt algebraiske tekstoppgaver kan spille som et verktøy i elevenes tidlig-algebra fase. Tidligere forskning antyder at tekstoppgaver eller kontekstualiserte problemer er essensiell for overgangen mellom aritmetikk og algebra (Walkington, Sherman & Petrosino, 2012). I denne sammenstillingen av aritmetikk og algebra kan algebraiske tekstoppgaver være et verktøy på to forskjellige måter. Første metoden kalles *symbolsk presedens*. Denne metoden bygger på at algebraiske symboler bør komme i førsterekke, altså før algebraiske tekstoppgaver blir brukt som verktøy i læringsprosessen. Argumentet for denne metoden er at oppgaver basert på symboler er lettere å løse fordi løsningen ikke krever at eleven innledningsvis må oversette ord til symboler (ibid.) Et eksempel er "$y = 2x$, hva er y hvis $x = 3$?". Den andre metoden kalles *verbal presedens* og står i en tydelig kontrast til *symbolsk presedens.* Utgangspunktet for denne metoden er perspektivet om at verbale ferdigheter utvikler seg før ferdigheten med manipulering av symboler, som er nøkkelen for å løse algebraiske ligninger. Følgelig bør algebraiske tekstoppgaver bli presentert før elevene blir introdusert for oppgaver basert på abstrakte symboler. Elevene vil med denne metoden bruke uformelle strategier som ikke krever abstrakt tenkning og "konteksten kan bli brukt som et stillas for eleven med at konkrete og kjente situasjoner vil konstruere en bro mellom hva eleven kan og den abstrakte matematikken de prøver å lære" (Walkington m.fl., 2012, s. 175). Metoden som er mest relevant å ta utgangspunkt i når jeg skal analysere elevenes utførelse av algebraiske tekstoppgaver er sistnevnte, *verbal presedens.* Elevene i denne studien går i 5. klasse og har derfor ikke begynt sin offisielle overgang fra aritmetikk til algebra og vil ikke benytte seg at variabler eller symboler i en algebraisk forstand i løsningsprosessen. Resultatet fra Walkington m.fl. (2012) viste bl.a. at elevene presterte bedre og hadde større variasjon av strategibruk på ligninger som inneholdt en historie eller kontekst i motsetning til abstrakte problem. Grunnen til at jeg skriver *offisielle overgang fra aritmetikk til algebra*, er at elevene alltid er i en overgangsfase i forhold til at aritmetiske ferdigheter er en viktig del algebraen. Jeg mener derimot at den offisielle overgangen begynner når elevene lærer seg abstrakte symboler som representerer variabler i en algebraisk ligning. Og denne fasen er ikke elevene i femteklasse som nevnt begynt på.

På barneskolen vil elevenes første møte med tekstoppgaver være av den aritmetiske typen og spiller ofte en viktig rolle når elevene skal lære de fire regneartene. I Abakus 2a – grunnbok skal f.eks. elevene lage regnefortellinger med utgangspunkt i en matematikkoppgave. Etterhvert som elevene kommer seg gjennom klassetrinnene og til mellomtrinnet (hhv. 5-7 .trinn) vil de møte på algebraiske tekstoppgaver, som er den typen jeg vil fokusere på i denne studien. Derimot er ikke aritmetiske tekstoppgaver nødvendigvis veldig forskjellige fra algebraiske. Reed (1999) skriver at han aldri har vært sikker på hva som skiller de ulike kategoriene for tekstoppgaver. Han argumenterer videre med at det er metoden for å løse problemet som virkelig skiller oppgavene fra hverandre. En typisk aritmetisk tekstoppgave kan være: "Pete vinner 3 klinkekuler i et spill og nå har han 8 klinkekuler. Hvor mange hadde han før spillet?" (Verschaffel m.fl., 2000, s. ix). Svaret finner man med å subtrahere 3 fra 8. Men tekstoppgaven kan også bli sett på som algebraisk, og blir besvart med ligningen $x+3=8$.

Overgangen fra aritmetiske tekstoppgaver til algebraiske tekstoppgaver krever i følge Reed (1999) nytenkning innen matematiske operasjoner og forståelse av symbolers semantiske funksjon, spesielt likhetstegnet. For å lykkes i utførelsen av algebraiske tekstoppgaver er eleven avhengig av å forstå likhetstegnet som et uttrykk av symmetrisk relasjon av likhet. Å forstå likhetstegnets funksjon er viktig for å løse ligninger og manipulering av ukjente variabler, men i dette tilfelle vil ikke elevene kunne ta i bruk algebraiske løsningsmetoder. Elevene har f.eks. ikke lært seg å bruke bokstaver som variabler og vil derfor ikke bruke en ligning til å representere tekstoppgaven. Hvis elevene bruker aritmetiske metoder for å løse oppgaven vil i følge Reed (1999) tekstoppgavene ikke lenger være algebraisk. Jeg vil derimot argumentere for at det finnes et tydelig skille mellom det Reed kaller elementære tekstoppgaver og algebraiske tekstoppgaver, uansett metode du vil benytte for å løse oppgaven. Elementære tekstoppgaver i barneskolen kan ofte representeres enklest på formen $a (+ -) b = x$, der a og b er tilgjengelige verdier mens x er den ukjente. For å finne x handler det om å forstå tekstens situasjon, finne riktig regnemetode og bruke de relevante verdiene (a og b) tilgjengelig i teksten. Mens den beste representasjon av tekstoppgaver med algebraisk oppsett kan f.eks. være på formen $ax + b = c$, der a, b og c kan være tilgjengelig i teksten mens x er den ukjente. Tekstoppgavene som blir brukt i Sebrechts m.fl. (1996) blir kategorisert av forfatteren som algebraisk med grunnlag i at den beste måten å modellere problemet på er en lineær ligning med en eller to variabler, og derfor skiller seg ut fra aritmetiske tekstoppgaver. Jeg vil derfor argumentere for at tekstoppgavene jeg har konstruert blir vurdert som algebraiske i og med at den enkleste og beste måten å representere problemet på er gjennom en algebraisk ligning.

Tidligere forskning (Verschaffel m.fl., 1994; Walkington, m.fl., 2012) viser at det ofte er tekstens handling og lite hensyn til realistiske vurderinger som er problemet med elevenes svake prestasjoner på tekstoppgaver. Med bakgrunn i mitt andre forskningsspørsmålet vil jeg forsøke å gjøre elevenes språklige ferdigheter til en minst mulig faktor for deres prestasjoner. Jeg vil derfor lage oppgaver som jeg mener ikke bygger på krav om store realistiske vurderinger angående handlingen eller situasjonen i tekstoppgaven. For eksempel er tekstoppgavene brukt i Verschaffel m.fl. (1994) og Wyndhamn & Säljö (1997) konstruert for å vurdere elevenes realistiske betraktninger når de løser tekstoppgaver, som for eksempel:

> "Bruce og Alice går på samme skole. Bruce bort 17 kilometer fra skolen og Alice bor 8 km fra skolen. Hvor langt fra hverandre bor Bruce og Alice?" (Verschaffel m.fl., 1994, s. 276)

I dette tilfelle mener jeg at nøkkelen i løsningsprosessen er situasjonen som teksten formidler og ikke kalkuleringen elevene må gjennomføre. Reed (1999) mener derimot at elevene ofte forstår oppgavens kontekst – men utfordringen er å modellere situasjonen ut i fra mengdene og finne den ukjente. I følge Walkington (2012) kan elevene bruke situasjonsresonnering, altså en strategi hvor de bruker deres egne tilegnede kunnskaper fra virkeligheten til å styrke forholdet mellom mengdene og kalkuleringene som blir gjort på dem. Selv om jeg ikke vil fokusere for mye elevenes språkkunnskap, så kan tekstens situasjon påvirke elevenes resultat. Elevene vil altså kunne bruke oppgavens situasjon til et verktøy for å finne en løsning på tekstoppgaven, men jeg vil samtidig ikke konstruere oppgaver som stiller store krav til elevenes forståelse av den aktuelle situasjonen og til realistiske vurderinger slik som oppgaven vist over. I studien til Sebrechts m.fl. (1996) konkluderte de med at løsningen på algebraiske tekstoppgaver er hovedsakelig forståelse av forholdet mellom mengdene som teksten presenterer enn operasjonelle ferdigheter på verdiene. For å bruke den algebraiske tekstoppgaven fra kapittel 1 som et eksempel. For å finne løsningen på oppgaven handler det om å forstå forholdet mellom den totale mengden (som er kronene Ida, Omer og John har til sammen) og de ulike delmengdene (som er kronene de har hver for seg).

2.4 Oppsummering

For å oppsummere dette kapittelet så gikk jeg i begynnelsen innpå likhetstegnets semiotiske funksjon. Det betyr at tegnet i seg selv ikke har noen betydning og at det må skapes en referansekontekst til tegnet. Tidligere forskning har vist at tolkningen elevene gjør tar er sterkt preget av den konteksten likhetstegnet blir presentert i. Det som ga positive utslag var når likhetstegnet ble presentert sammenheng med ekvivalensoppgaver og i sammenligning med andre relasjonssymboler som <, > og ≠ (Hattikudur & Alibali, 2010; McNeil & Alibali, 2005). Jeg har videre gitt en definisjon på forskjellen mellom operasjonell forståelse og forståelsen av matematisk ekvivalens. Der førstnevnte ofte innebærer å tolke en aritmetisk setning hvor oppgaven er på venstre siden av likhetstegnet og svaret er på høyre siden, mens forståelse av matematisk ekvivalens betyr at du forstår relasjonen mellom mengdene som likhetstegnet knytter sammen og at mengdene er utskiftbare med hverandre (McNeil & Alibali, 2005; McNeil m.fl., 2011). Studiet til Knuth m.fl. (2006) viste at forståelsen på likhetstegnet også preger hvordan elevene presterer i arbeid med algebraiske ligninger. Elevene som viser forståelse for matematisk ekvivalens presterer altså bedre enn elevene som viser tegn på en operasjonell forståelse.

Siste del av dette kapittelet handlet om tekstoppgaver og med størst fokus på algebraiske tekstoppgaver. Delkapittelet inneholder teori som er relevant for mitt andre forskningsspørsmål, altså hvordan elevene løser algebraiske tekstoppgaver og om deres forståelse eller mangel på forståelse av matematisk ekvivalens preger løsningsprosessen. I delkapittelet skriver jeg om tekstoppgavens rolle i skolematematikken og hvordan oppgavene kan bli brukt til å knytte den virkelige verden sammen med matematikken. Når det gjelder algebraiske tekstoppgaver utreder jeg noe om hvilken rolle oppgavene kan spille i elevenes tidlig-algebra fase. Altså hvordan kan algebraiske tekstoppgaver bli brukt som et verktøy når elevene går fra aritmetikk til formell algebra. Her refererer jeg til en studie av Walkington m.fl. (2012) som viste at elever presterte bedre og hadde større variasjon av strategibruk på ligninger som inneholdt en historie eller kontekst i motsetning til abstrakte oppgaver.

3 Metode

Metoden er en viktig del av studiet som et redskap som forteller hvordan vi bør frem for å få den informasjonen vi trenger. Når jeg velger metode så går jeg ut i fra at den valgte metoden er den som vil gi meg best mulig data og belyse forskningsspørsmålet mitt på en faglig interessant måte (Dalland, 2015). Formålet med denne studien er å få innsikt i elevenes forståelse av matematisk ekvivalens og i tillegg avdekke hvordan elevene arbeider med algebraiske tekstoppgaver med fokus på strategivalg og gjennomførelse. Jeg vil spesielt undersøke om jeg finner noen forskjeller mellom elevene med ulik forståelse for matematisk ekvivalens. I denne delen av oppgaven vil jeg begrunne valg av forskningsdesign, før jeg forklarer prosessen rundt utvalget, deretter hvordan datainnsamlingen ble gjennomført og analysemetode, før jeg til slutt avslutter med en diskusjon rundt oppgavens etiske betraktninger.

3.1 Forskningsdesign

Forskningsdesign kan beskrives som planen eller prosedyren for forskningen og involverer flere avgjørelser med et overordnet mål om å betjene forskningsspørsmålene best mulig. Yin (1994) beskriver forskningsdesign som en handlingsplan for å komme seg fra en plass til en annen, altså å stille et sett med spørsmål (forskningsspørsmål eller hypotese) og prosessen du utfører til du kommer frem til svaret på spørsmålene.

3.1.1 Kvalitativ forskning

Jeg vil bruke et kvalitativt forskningsdesign der metoden jeg bruker innenfor den kvalitative forskningen vil klassifiseres som en kasusstudie. Begrunnelsen for valgene i forhold til det første forskningsspørsmålet er at det handler om å avdekke elevenes forståelse av matematisk ekvivalens i en femteklasse. Resultatet som fremkommer av det første forskningsspørsmålet vil bl.a. bli presentert i en tabell da forståelsen til elevene på forhånd er kategorisert til forståelse for matematisk ekvivalens og operasjonell forståelse. Denne deduktive tilnærmingen kan sies å ha preg av kvantitativ forskning (Wellington, 2015). Målet med denne delen av studie er å fordype meg i en enkelt femteklasse og den noe kvantitative presentasjonsformen er en måte å formidle innsikt fra denne ene klassen. I følge Yin (1994) kan en kasusstudie inkludere og noen ganger være begrenset til kvantitative data. Spesielt når resultatet er kategorisk, i motsetning til numerisk, er forskeren avhengig av kvalitativ tilnærming (ibid.). Slik er tilfelle i måten jeg må analysere elevenes ulike forståelse ut i fra dataene som blir innhentet. Datainnsamlingen inneholder f.eks. elevenes egen beskrivelse av likhetstegnet og det er opp til meg som analytiker å bestemme hvilken kategori elevene blir plassert i. Jeg er altså ikke løsrevet fra situasjonen som ofte preger kvantitativ forskning (Wellington, 2015).

Når det gjelder det andre forskningsspørsmålet er temaet hvordan elevene løser tekstoppgaver. Strategivalg og refleksjoner rundt valgene er en stor del av analysen og lar seg ikke tallfestes og analysen avhenger stort av meg som forsker. På bakgrunn av dette vil et kvalitativ forskningsdesign være naturlig. Det som kjennetegner kvalitativ design er dybden den gir forskningen. Forskere med en kvalitativ tilnærming studerer fenomener i deres naturlige setting og vil forsøke å tolke menneskers meninger om fenomenet (Dalland, 2015). Siden det er nettopp elevenes forståelse av et matematisk fenomen som jeg vil få frem, så vil kvalitative metoder være tilfredsstillende for denne studien og hva jeg prøver å oppnå i forskningen. Andre kjennetegn for kvalitativ forskning er nærheten til feltet, i form av forskning med direkte kontakt med eleven, er at forskeren ser fenomenet innenfra og data som samles inn skal få frem sammenheng og helhet (Dalland, 2015).

3.1.2 Kasusstudie

Som nevnt er kasusstudie forskningsstrategien jeg bruker i denne studiet. Generelt i metodelitteraturen finner man mange forskjellige definisjoner av kasusstudier. Wellington (2015) mener kasusstudie er en tilnærming, mens Yin (1994) beskriver kasusstudie som en forskningsmetode. Wellington (2015) har hentet en beskrivelse av kasusstudie fra Bogdan og Biklen (1982) som sier at kasusstudie er en "detaljert undersøkelse av setting, et enkelt subjekt, en samling av dokumenter eller en bestemt hendelse" (Wellington, 2015, s. 165). I denne studien, når det gjelder det første forskningsspørsmålet, vil jeg gå i dybden på en enkelt klasse. Jeg er bundet av tid siden jeg over to dager skal samle inn større mengder data ved å bruke en variasjon av innsamlingsmetoder. Dette er typiske kjennetegn for kasusstudier (Creswell, 2014; Yin, 1994). Valget av kasusstudie som strategi er begrunnet, men videre er det sentralt å begrunne design innenfor kasusstudie. I Wellington (2015) blir tre ulike beskrivelser (hentet fra Stake, 1994) av kasusstudier presentert. Kaususen som jeg vil jobbe innenfor, i det første forskningsspørsmålet, er *instrumentell kasusstudie.* Jeg har tidligere i oppgaven presentert et forskningsspørsmål om elevenes forståelse av matematisk ekvivalens og en instrumentell kasusstudie blir brukt for å klargjøre den spørsmålet. Kasusen i denne studien er en femteklasse, men i denne sammenhengen er kasusen sekundært. I instrumentelle kasusstudier blir ofte valget av kasus gjort for å avansere forståelsen av noe annet (idem), i dette tilfelle forståelse av matematisk ekvivalens. Men det er viktig å klargjøre for vanskeligheten med å skille *instrumentell kasusstudie* og *egenverdi (instrinsic) kasusstudie,* hvor sistnevnte har mer fokus på selve kasusen som forskeren mener er interessant i seg selv (Wellington, 2015).

For å besvare det andre forskningsspørsmålet skal jeg velge ut to grupper med elever med ulik forståelse av matematisk ekvivalens, noe jeg kommer nærmere innpå i neste delkapittel om utvalget til studiet. Jeg har derfor valgt å utføre noe som kan minne om det Yin (1994) beskriver som en multiple-kasusstudie, noen ganger kalt komparativ- (Ringdal, 2014) og kollektiv kasusstudie. Sistnevnte er den tredje beskrivelsen gjort av Stake (1994), som er nevnt i forrige avsnitt (Yin, 1994; Wellington, 2015). Multiple-kasusstudie er simpelthen studie av et flertall kasuser. I denne oppgaven er det snakk om to ulike kasus der forskningsobjektene har en ulik karakteristikk, altså elever med dokumentert ulik forståelse for likhetstegnet. De er valgt for at teorier kan generaliseres om begge kasuser, som er sentralt for denne typen kasusstudier (Wellington, 2015). Yin (1994) beskriver multiple-kasusstudie som mer overbevisende og robust når en sammenligner med single-kasusstudie, men samtidig krever det mer tid og ressurser. Videre beskriver han logikken bak utvelgelsen av kasus. I valg av de ulike kasusene må forskeren være nøye. Kasusene bør være slik at forskeren enten forutser like resultater som blir kalt en bokstavelig replikering. Eller kasusene oppnår kontrastene resultater som du har forutsett, som er en teoretisk replikering (ibid.). Tidligere forsknings tilsier at jeg forventer å få kontrastene resultater fra de to ulike kasus basert på tidligere forskning om forståelsen av likhetstegnet har en sammenheng med resultatene når elever løser algbraiske ligninger (Knuth m.fl., 2006).

3.2 Utvalget

I denne delen av oppgaven vil jeg fortelle om hvorfor og hvordan elevene i denne oppgaven ble valgt. I Wellington (2015) skilles det mellom to strategier for valg av forskningsobjekter: sannsynlighetsutvalg og ikke-sannsynlighetsutvalg. Han definerer sannsynlighetsutvalg som en plan der en kan spesifisere sannsynligheten for at en person, skole eller andre enheter vil bli inkludert i utvalget. Et ikke-sannsynlighetsutvalg er derfor en plan der det ikke er mulig å spesifisere sannsynligheten for at en enhet blir inkludert i utvalget. I denne studien har jeg på bakgrunn av forskningsspørsmålet, samt tilgjengelighet og ressurser, valgt et ikke-sannsynlighetsutvalg.

Et ikke-sannsynlighetsutvalg er ofte mer foretrekkende for kvalitativ forskning hvor feltarbeid er en viktig del av forskningen. For å få tilgang til en klasse jeg kan utføre forskningen på, vil det i dette tilfelle være lettvint og gunstig å bruke det Wellington (2015) kaller teoretisk eller hensiktsmessig utvelgelse (oversatt fra *convienient sampling)*. Kort sagt handler det om å ta kontakt med forskningsobjekter med en spesifikk hensikt i tankene. En av fordelene med hensiktsmessig utvelgelse er den økende sannsynligheten for at jeg får god respons. Og i forhold til størrelsen på dette forskningsprosjektet vil et sannsynlighetsutvalg være opp i mot umulig å oppnå (ibid.). Det er derimot ikke noe spesielle egenskaper denne klassen besitter. Hvorfor det kan kalles en hensiktsmessig utvelgelse er på bakgrunn av at jeg og flere andre studenter har samarbeidet tidligere med denne skolen, og derfor vil responsen erfaringsmessig være mer positiv. Det er viktig å påpeke at hensiktsmessig utvelgelse i denne studien ikke må misforstås med å fremprovosere en type resultat som vil svekke studiets reliabilitet.

For å besvare det første forskningsspørsmålet vil jeg bruke en hel femteklasse som individuelt skal utføre oppgavene jeg har konstruert. Utvalgsstrategien for det andre forskningsspørsmålet er en metode innenfor ikke-sannsynlighetsutvalg som kalles homogen utvelgelse der jeg velger ut elever som deler en spesiell karakteristikk, som i dette tilfelle er to elevgrupper med ulik forståelse for matematisk ekvivalens. Jeg vil altså ha en elevgruppe med operasjonell forståelse og en elevgruppe som ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens. Hver gruppe vil være på to elever og vil bli valgt ut på bakgrunn av hvordan de gjennomfører oppgavene jeg har designet for å besvare det første forskningsspørsmålet. Da det andre forskningsspørsmålet handler om hvordan elever med ulik forståelse for matematisk ekvivalens utfører algebraiske tekstoppgaver, og ikke effekten av elevenes generelle matematiske ferdigheter, må jeg tenke strategisk i utvelgelsen av elever til gruppene. Utvelgelsen av elever med god forståelse for matematisk ekvivalens er uproblematisk. Det vil være elever som gir en rik definisjon av likhetstegnet og samtidig viser at de forstår likhetstegnets funksjon som en representasjon for matematisk ekvivalens i gjennomførelsen av matematikkoppgavene. Utfordringen ligger i utvelgelsen av elever med operasjonell forståelse. For å styrke relasjonen mellom forståelsen av matematisk ekvivalens og prestasjonen i utførelse av algebraiske tekstoppgaver, må jeg unngå en stor avstand mellom elevgruppenes generelle matematiske ferdigheter. I Knuth m.fl. (2006) brukte de en standardisert test og inkluderte nasjonal statistikk for å kontrollere elevenes matematiske kompetanse. Jeg vil derfor inkludere noen matematikkoppgaver med et standard oppsett ($a + b = c$) og med alle fire regneoperasjoner som addering, divisjon, subtrahering og multiplikasjon. På bakgrunn av disse oppgavene kan jeg velge elever som besitter gode matematikkunnskaper, men har en svak forståelse av funksjonen og egenskapene til likhetstegnet og dermed ulik forståelse for matematisk ekvivalens.

Femteklassen jeg skal bruke i min forskning har blitt utvalgt av min veileder og ble kontaktet fordi skolen tidligere har vært positive til forskningsprosjekter av denne typen. Skolen ligger i Vest-Agder fylke og er en privatskole. De i klassen som deltok i forskningen og var en del av det første forskningsspørsmålet var 15 gutter og 18 jenter, mens deltagerne i andre del av forskningen var tre jenter og en gutt. Grunnen til at jeg har valgt å forske på 5. trinn er min antakelse om at elevene i denne alderen vil variere stort når det gjelder å gå fra en operasjonell til en relasjonell forståelse av likhetstegnet. I kapittel 2 skrev jeg om at forskningen har vist at elevene på småtrinnet (1.-4. klasse) har et klart flertall av elever med operasjonell forståelse for likhetstegnet, mens man på 7. trinn vil finne en økende andel av elever med relasjonell forståelse og noen studier viser et flertall av relasjonell forståelse (Knuth m.fl., 2006; McNeil & Alibali, 2005). I tillegg skriver Kieran (1981) at barn rundt 13 år befinner seg i en overgangsfase mellom en operasjonell forståelse for likhetstegnet og akseptere likhetstegnet som et symbol for ekvivalens. En periode hvor elevene opplever forvirring og kognitiv konflikt (Kieran, 1981; McNeil, 2008). Det vil derfor være interessant å se hvordan elevene i dette mellomsjiktet vil forstå likhetstegnet og matematisk ekvivalens og om det preger måten de regner algebraiske tekstoppgaver på samme måte som det preger måten elever løser ligninger (Knuth m.fl., 2006).

3.3 Gjennomføring av datainnsamling

Datainnsamlingen ble utført over to dager der dag 1 handlet om det første forskningsspørsmålet og dag 2 er om det andre. På den første dagen gjennomførte elevene matematikkoppgaver som var designet med mål om å avdekke deres forståelse for matematiske ekvivalens, mens den andre dagen gjennomførte jeg to oppgavebaserte gruppeintervjuer hvor elevene utfører algebraiske tekstoppgaver. I denne delen av oppgaven vil forklare nærmere om pilotundersøkelsen, så vil jeg gjennomgå oppgavene som ble designet for denne studien og deretter diskutere og argumentere for valg jeg har gjort i forhold til oppgavetyper og vanskelighetsgrad.

3.3.1 Pilotstudien

For å forsikre meg om oppgavenes kvalitet og riktig vanskelighetsgrad valgte jeg å utføre en pilotundersøkelse på en femteklasse ved en annen barneskole. En forespørsel ble sendt til tre ulike barneskoler og den utvalgte klassen var den som takket ja først. Opplegget ble utført slik at elevene begynte å jobbe individuelt med oppgavene som tilhører det første forskningsspørsmålet. Når de fortløpende var ferdig med alle oppgavene fikk de utdelt tekstoppgavene som tilhører det andre forskningsspørsmålet og de skulle jobbe sammen to og to med sin læringspartner. Klassen var delt inn i tre grupper og jeg hadde en skoletime per gruppe (rundt 45 min) til disponering. Dette var en stor klasse og oppgavene som tilhører det første forskningsspørsmålet ble testet av 56 elever. Når det gjelder tekstoppgavene var det ikke nok tid til at alle elevene ville rekke å komme seg gjennom alle oppgavene, så jeg ga beskjed om at elevene kunne begynne med hvilken som helst oppgave. På denne måten vil noen elever også få prøvd de siste oppgavene. Tekstoppgavene ble testet av 41 elever som hadde utført minst to av de fem oppgaven.

Oppsummert var jeg godt fornøyd med resultatet av pilotundersøkelsen og det framkom lite som gjorde omfattende endringer nødvendig i forhold til oppgavetyper eller nivå. En gjennomgang av besvarelsene viser at det er elever som har riktig svar og det er elever som har galt svar på de matematikkoppgavene og tekstoppgavene. Helhetsinntrykket var at det var en passende vanskegrad på oppgaven som derfor kunne gjennomføres med kun mindre justeringer i hovedundersøkelsen. Jeg gjorde bl.a. en språklig forandring i oppgaveteksten hvor jeg byttet ut "skriv tallet som mangler i ruten" med det noe mer presise "skriv tall i ruten som gjør regnestykke riktig". I tillegg fikk jeg god respons fra matematikklæreren til pilotklassen.

3.3.2 Skriftlig oppgave

For å vurdere og få innsyn i elevenes forståelse av matematisk ekvivalens har jeg designet matematikkoppgaver som skal gjennomføres individuelt i en 5. klasse. Oppgavene er delvis konstruert av forfatteren og delvis fra tidligere forskning og lærebøker. Som nevnt tidligere i oppgaven så spiller forståelsen av likhetstegnets funksjon en stor rolle innenfor konseptet matematiske ekvivalens, og det er nettopp det jeg har tatt utgangspunkt i når jeg har lagd oppgavene. Oppgave 1 (se figur 3.0) er hentet fra Knuth m.fl. (2006). Her skal elevene gi sin tolkning av hva de mener er likhetstegnets funksjon. Knuth m.fl. (2006) beskriver ulike virkemidler eller prompt (fremkallelse) som de har brukt for å få best mulig resultat. Første prompt er at elevene må navngi symbolet (oppgave 1a) som pilen peker på, andre prompt (oppgave 2a) er å gi en definisjon på hva tegnet står for, mens tredje og siste prompt (oppgave 3a) er å gi en alternativ forklaring. Bakgrunnen til første prompt er i følge Knuth m.fl. å hindre elevene i å bruke navnet "likhetstegnet" til å svare på det andre spørsmålet (andre prompt), altså å gi et svar som "det er erlik". Mens det tredje promptet er med for at elevene ofte gir flere tolkninger av likhetstegnets funksjon når de får sjansen (ibid.). Noe pilotundersøkelse ga bekreftelse på.

$$12+3=15$$

a) Pilen over peker på et tegn. Hva er navnet på tegnet?

Svar:

b) Hva betyr tegnet?

Svar:

c) Kan tegnet bety noe annet? Hvis ja, forklar.

Svar:

Figur 3.0. Oppgave 1.

Oppgave 2 (se figur 3.1) har flere funksjoner:

- Den har et standard oppgavesett på formen a + b = c eller a – b + c = d. Jeg vil gjøre elevene trygge og kjent med hvordan jeg vil at de skal skrive tallet som gjør regnestykket riktig, nemlig å kun skrive i ruten slik at de ikke begynner med noe ekstra kalkuleringer som gjør analysearbeidet mitt mer utfordrende.

- Den brukes til å sammenligne med de andre oppgavene for å skaffe innsikt i om det er elevenes generelle aritmetiske ferdigheter eller elevenes forståelse for matematiske ekvivalens som gjør at de ikke klarer å løse ekvivalensoppgavene.

- Den er ment for å øke skillet mellom de med forståelse for matematisk ekvivalens og operasjonell forståelse. Her har jeg hentet inspirasjon fra Chesney & McNeil (2014) hvor de mener at å først utføre oppgaver med operasjoner kun på venstre siden av likhetstegnet (a + b = c), standard oppsett, vil aktivere elevenes operasjonelle måte å tenke på. På denne måten vil jeg virkelig teste elevenes forståelse av matematisk ekvivalens og hvordan deres syn på likhetstegnet påvirker utførelsen.

Nivået på oppgave 2 vil jeg karakteriseres som middels og er satt slik at nesten alle elevene skal ha mulighet til å klare oppgavene. Men de svakeste elevene kan få noen problemer, spesielt med oppgave 2c) som er kjent for å være den vanskeligste multiplikasjonsoppgaven i den lille gangetabellen.

Oppgave 2) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) $230 - 40 + 2 = \square$

b) $70 + 70 + 70 = \square$

c) $8 \cdot 7 = \square$

d) $12 : 2 = \square$

Figur 3.1. Oppgave 2.

Oppgave 3 og 4 (se figur 3.2) er de som i hovedsak skal avgjøre hvilken forståelse for matematisk ekvivalens elevene besitter. Oppgavene har et ekvivalensformat med enten operasjoner på begge sidene av likhetstegnet eller operasjoner kun på høyre siden av likhetstegnet slik som oppgave 3c og 4c. Oppgave 4a inneholder også to likhetstegnet som gir elevene en ekstra utfordring, mens oppgave 4d kun inneholder et likhetstegn og eleven står fritt i å velge tall som de mener gjør regnestykke riktig. Sistnevnte er en oppgave som er veldig fjernt fra de elevene sannsynlig har arbeidet med tidligere og kan enkelt være forvirrende med tanke på oppsettet. Oppgaven er veldig enkel hvis man forstår likhetstegnets funksjon, men veldig vanskelig hvis man har et operasjonelt syn på likhetstegnet. Slik jeg vurderer det så vil en elev med forståelse for matematisk ekvivalens på denne oppgaven kunne skrive 10 = 10, altså at de ikke lager et regnestykke. En elev med svak forståelse for matematisk ekvivalens og med operasjonell forståelse vil høyst sannsynlig lage et regnestykke som 5 + 5 = 10. Rutene er konstruert litt større for å gi elevene denne muligheten.

Oppgave 3) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) $22 + 12 = \square + 5$

b) $120 + 7 = 110 + \square$

c) $11 = 11 + \square$

Oppgave 4) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) $11 + 7 = \square + 9 = \square$

b) $\square - 10 = 10 + \square$

c) $70 = 33 + \square$

d) $\square = \square$

Figur 3.2. Oppgave 3.

Nivået på operasjonene vil jeg defineres som elementært, og grunnen til dette er jeg kun vil se på hvordan forståelse de har matematisk ekvivalens og da vil ikke vanskelighetsgraden på oppgave være avgjørende. Jeg vil unngå en situasjon der en elev forstår matematisk ekvivalens men ikke klarer å vise det tydelig fordi operasjonene ble for vanskelige for eleven å utføre. Oppgave 4c er den eneste oppgaven som ikke kun inneholder addisjon. Grunnen til manglende variasjon i oppgave angående handlingstegn er at tidligere forskning viser at elever mangler konseptuell forståelse for negative tall (Vlassis, 2008). Selv om negative tall er en viktig del av forståelsen mellom det funksjonelle forholdet mellom to mengder, blir analysen angående elevenes ekvivalensforståelse mer utfordrende og omfattende hvis konseptet negative tall blir en faktor. Oppgavene er derfor konstruert med tanken om at hvis du har en god forståelse for matematisk ekvivalens og likhetstegnets funksjon så er oppgavene enkle og du vil ha alt riktig, men har du en operasjonell forståelse for likhetstegnet så vil du ofte ikke klare å løse oppgavene og du vil f.eks. på oppgave 3c få svaret 11 = 11 + <u>22</u>.

3.3.3 Algebraiske tekstoppgaver

For å besvare mitt andre forskningsspørsmål skal elevene arbeide med tekstoppgaver i et oppgavebasert intervju, der tekstoppgavene blir kategorisert som algebraiske. Som nevnt i kapittel 2 vil ikke elevene være i stand til å oversette tekstoppgaven til en ligning, men de vil måtte ta i bruk uformelle algebraiske metoder for å finne svaret. Tekstoppgavene i denne studien er konstruert med grunnlag i at handlingen som oppgaven er situert i skal være lett forståelig for elevene. Altså vil jeg ikke at elevene skal fokusere for mye på realistiske vurderinger opp i mot handlingen, men derimot på problemets matematiske utfordringer i forhold til ekvivalens mellom ulike mengder.

Elevene skal løse fem tekstoppgaver, der første tekstoppgave er ment som en oppvarmingsoppgave og som jeg definerer som elementært for elever på 5.trinn. Jeg har derfor valgt oppgave 1 først for å gi elevene selvtillit og som kan gi økt trygghet videre i intervjuet. Både oppgave 1 og 5 er av typen Reed (1999) kaller *ukjent start.*

Oppgave 1) Nils fikk noen penger fra bestefaren sin for å kjøpe seg noe fint. Etter handleturen har han 45 kroner igjen. Nils brukte 120 kroner på en CD og 85 kroner på fotballkort. Hvor penger fikk han fra bestefaren?

Oppgave 5) Emily har bursdag i dag, og hun ønsker seg flere pokemonkort. Etter bursdagen hadde samlingen blitt tre ganger så stor. Siden hun fikk så mange, ga hun bort 7 kort til vennen sin. Etter hun hadde gitt bort kortene til vennen sin hadde hun nå 14 pokemonkort. Hvor mange pokemonkort hadde Emily før bursdagen sin?

I tekstoppgavene over er altså startverdien ukjent og målet med oppgaven er å finne verdien ved hjelp av forandringene som er gjennomført på den ukjente verdien. Oppgave 1 er hentet fra læreboken Multi 5a - grunnbok skrevet av Alseth, Nordberg & Røsseland (2013) og oppgave 5 er konstruert med inspirasjon fra Stacey & MacGregor (1999). På oppgave 5 har jeg selv lagd handlingen, mens regneoperasjonene er fra den sistnevnte artikkelen.

Oppgave 2, 3 og 4 (se under) vil jeg påstå er mer utfordrende og ikke av typen *ukjent start* som oppgave 1 og 5. Oppgave 2 og 3 er hentet fra læreboken Radius 5a – matematikk for barnetrinnet skrevet av Dahl m.fl., mens oppgave 4 er konstruert av meg. Konteksten eller situasjonen i oppgaven skal være enkel for elevene å forstå, men i disse oppgavene stilles det høyere krav til å forstå relasjonen mellom ulike mengder og hvordan de påvirker hverandre.

Oppgave 2) Sara, Stine og Ida samler på viskelær. De har til sammen 180 stykker. Sara har dobbelt så mange viskelær som Stine, mens Ida har 20 flere viskelær enn Stine. Hvor mange viskelær har jenten, hver for seg?

Oppgave 3) Familien Hansen kjører 520 kilometer på to dager. Den første dagen kjører de 88 kilometer mer enn den andre dagen. Hvor mange kilometer kjører familien den første dagen?

Oppgave 4) Roger, Mari og Petter jobbers om avisbud. Denne uken har de levert til sammen 44 aviser. Roger har levert 8 aviser, mens Mari hadde levert dobbelt så mye som Petter. Hvor mange aviser hadde Roger, Mari og Petter levert, hver for seg, denne uken?

Selv om elevene er i en tidlig-algebra fase mener jeg at algebraiske tekstoppgaver vil kunne måle elevenes evne til å se sammenhengen mellom mengder og hvordan de funksjonelt henger sammen ut i fra oppgavenes situasjon. Og jeg vil kunne samtidig vurdere elevenes strategibruk opp i mot deres forståelse av matematisk ekvivalens.

3.3.4 Oppgavebasert intervju

For å besvare mitt andre forskningsspørsmål og for å få best mulig innblikk i elevenes tankesett har jeg også valgt å gjennomføre intervju som metode. Når jeg velger hva slags intervju jeg vil gjennomføre, så bør jeg ta utgangspunkt i hva jeg ønsker å oppnå og hva som hjelper meg til å sikre nok data til å besvare forskningsspørsmålet. Det finnes mange tilnærminger til et intervju og i utdanningsforskning er det ofte graden av struktur som skiller de ulike intervjuformene. Det vanlige er å definere strukturen ut i fra tre ulike stiler; ustrukturert, semi-strukturert og strukturert (Wellington, 2015). For denne studien er den aktuelle intervjuformen en semi-strukturert tilnærming og vil bli fokusert ytterligere på i dette delkapittelet. Intervjumetoden jeg har valgt kalles oppgavebasert intervju og jeg vil kombinere det med metoden *fokusgruppe*.

I utdanningsforskning innebærer oppgavebasert intervju, som navnet tilsier, at en eller flere elever løser oppgaver mens de blir observert og intervjuet. I følge Goldin (1997) har et slikt intervju formål om å observere matematisk atferd i en utforskende problemløsnings kontekst og trekke slutninger fra observasjonen til å si noe problemløserens mulige meninger, kunnskap og kognitive prosesser. Følgelig presiserer han viktigheten med å opprettholde det vitenskapelige skillet mellom hva som observeres og hvilke slutninger man tar fra observasjonen. Slik jeg tolker Goldin kan man ikke observere matematisk forståelse hos en elev, men forskeren søker etter en antakelse om eleven forståelse ut i fra dataen som fremkommer. Oppgavebaserte intervjuer kan karakteriseres som strukturerte, hvor forskeren har tydelige rammer for intervjuet og hva elevene skal gjennomgå (ibid.). Strukturerte intervjuer blir av Wellington (2015) beskrevet som et spørreskjema som blir utført ansikt til ansikt hvor man ikke avviker fra ordleggingen av spørsmålet eller rekkefølgen de kommer i. Det gir mye kontroll til forskeren og styres av forskerens agenda for intervjuet. Dette vil ikke være tjenlig for denne studien. Jeg vil som nevnt ta utgangspunkt i en noe løsere fremgangsmåte og nærme meg en semi-strukturert intervjuform.

Fleksibilitet er nemlig en viktig egenskap i oppgavebasert intervju og essensielt for at forskeren skal kunne avdekke individuelle forskjeller blant elevene i en problemløsningskontekst (Goldin, 1997). Et stort mål med oppgaven er å identifisere prosessene og strategiene som elevene tar i bruk spontant i arbeid med algebraiske tekstoppgaver og fleksibilitet er derfor viktig for å unngå "å lede" elevene inn i en noe Goldin kaller *forutbestemt retning* i oppgaveløsingen (ibid.). For å oppnå en slik fleksibilitet bør jeg som intervjuer tillate elevene frie arbeidsforhold så godt det lar seg gjøre, samtidig som de oppfordres til å snakke høyt om hva de tenker og gjør. Å tillate elevene frie tøyler kan ofte være vanskelig for intervjueren som med tanke på tidsbudsjettet vil få elevene gjennom alle aktuelle oppgaver. Forskeren kan samtidig oppnå et dilemma da rik og viktig informasjon blir borte med å bryte elevenes frie problemløsing, som også innebærer at alle typer elevproduksjon skal tillates (Goldin, 1997). Jeg skal altså ikke oppfordre elevene til å bruke enkelte problemløsningsmetoder eller gi svaret på en spesifikk form.

3.3.5 Fokusgruppe

I Ringdal (2014) blir fokusgruppe beskrevet som uformelle gruppeintervjuer der forskeren har kontroll og tar rollen som møteleder eller moderator. Det er en datainnsamlings metode hvor interaksjonen innad i gruppen studeres og er passende på studier der forskeren er interessert i hvordan individer ser på et fenomen eller et problem (Mertens, 2015). I min studie er det ikke selve interaksjonen mellom elevene relevant for analysen, men det blir brukt som et hjelpemiddel for å fremme elevers tanker og refleksjon rundt strategivalg. Ringdal (2014) mener utvalget i fokusgruppen bør ha et strategisk preg. Noen forskere vil ha homogene grupper, der deltakerne har noen fellestrekk som er sentralt for forskningen (lesevansker, høyt presterende, samme etnisitet), mens noen ganger vil forskeren ha en gruppe med ulike synspunkter eller erfaring (ibid.). Mitt utvalg er strategisk med at jeg har valgt to homogene grupper med ulik forståelse for ekvivalens. Og hver gruppe, isolert sett, er homogene i forhold til deres forståelse av et spesifikt matematisk fenomen. Elevene blir også valgt strategisk, med hjelp fra deres lærer, i forhold til at de må kunne samarbeide sammen og ikke være for reserverte. Svakheten til fokusgrupper er at den konstruerte situasjonen kan gjøre at elevers synspunkt ikke vil komme frem, og at noen elever er alt for dominerende i gruppa. Igjen er det forskeren sitt ansvar å sørge for at alle i gruppen får muligheten til å involvere seg (Ringdal, 2014; Wellington, 2015)

3.5 Metode for dataanalyse

Ringdal (2014) beskriver analyse som "et granskingsarbeid der utfordringen ligger i å finne ut hva materialet har å fortelle" (Ringdal, 2014, s. 144). Det finnes et klart skille mellom analyse av kvalitativ og kvantitativ datamateriell. Wellington (2015) beskriver analyseprosessen av kvalitativ data med at den innebærer "å samle inn all data, fordøye den, ta dem fra hverandre, sette dem sammen igjen (hvor det legges igjen masse ubrukt materiale) og noen ganger returnere for mer" (Wellington, 2015, s. 261). I forhold til analyse av data som fremkommer gjennom kasusstudier ligger det en stor utfordring i at strategier og teknikker ikke er veldefinert. Det er et stort problem blant forskning ved bruk av kasusstudier med at forskeren ikke har en klar tilnærming til hvordan dataen skal analysere (Yin. 2003). Dette vil jeg unngå ved å klargjøre for min tilnærming til analysemetoden i dette delkapittelet ved å belyse hvilken fremgangsmåte og strategi jeg vil bruke for å håndtere datainnsamlingen. Da jeg har to ulike forskningsspørsmål og to ulike tilnærminger for å besvare de, så vil også analysemetoden være forskjellige.

3.5.1 Analysemetode for å besvare 1. forskningsspørsmål

Jeg vil først utrede om analysen av data som kommer fra første forskningsspørsmål som omhandler elevers forståelse av matematisk ekvivalens. Jeg har fokusert på elevenes tolkninger av likhetstegnets funksjon og hvordan de viser forståelse for likhetstegnet i arbeid med matematikkoppgaver. Elevene vil bli plassert i tre ulike kategorier ut i fra hvordan de gjennomfører oppgavene, følgelig forståelse for matematisk ekvivalens, operasjonell forståelse og en annen kategori for de som svarer blankt eller viser en forståelse som ikke kan betegnes som operasjonell eller forståelse for ekvivalens. Kategoriene er pre-etablert (*a priori*) og er utledet fra tidligere forskning, først og fremst fra Knuth m.fl. (2006). I følge

Wellington (2015) så brukes pre-etablerte kategorier når en forsker skal gjenskape tidligere arbeid eller når det er visse temaer det fokuseres på som har fremkommet gjennom f.eks. en hypotese. Mitt første forskningsspørsmål blir til dels en gjenskapelse av Knuth m.fl. (2006). Men de kategoriserer elevene kun ut i fra responsen elevene gir til definisjonen av likhetstegnet, mens jeg i tillegg til elevenes definisjon også vil inkludere elevenes arbeid med ekvivalensoppgaver i analysen (eksemplifisert i datainnsamlingen tidligere i kapitlet).

Når det gjelder kodingen av elevenes respons på oppgave 1 a, b og c (se kap. 3.3.2), så har jeg tatt utgangspunkt i responsen fra piloteringen av samme oppgave og elevresponsen i Knuth m.fl. (2006). Elevenes definisjoner på likhetstegnet blir beskrevet som operasjonell og relasjonell, der sistnevnte er den beskrivelsen som viser tegn på ekvivalensforståelse.

- Disse definisjonene av likhetstegnet kategoriserer jeg som operasjonell:

"legge sammen tallene"

"svaret på oppgaven"

"knytte sammen svaret og regnestykket"

"hvor mye tallene blir til sammen"

"summen"

"svaret skal stå bak"

- Disse definisjonene av likhetstegnet kategoriserer jeg som relasjonell:

"samme som"

"venstre er lik det til høyre"

"samme verdi"

"likt på begge sider"

"balanse/vekt"

- Når det gjelder den siste kategorien som jeg har bare kalt *annen*, så vil elever som ikke viser noen form for forståelse havne her. F.eks. vil elever som beskriver likhetstegnets funksjon med kun "er lik".

Når det gjelder å analysere om elevene viser god forståelse for matematisk ekvivalens i praksis så er prosessen noe enklere. Hvis en elev svar riktig på ekvivalensoppgavene vil jeg vurdere det som en sterk indikasjon på at eleven har god forståelse for konseptet. Følgelig hvis eleven ikke svarer riktig, vil jeg bl.a. vurdere elevens besvarelser ut ifra de operasjonelle mønstre nevnt i kapittel 2 og beskrevet av McNeil m.fl. (2011).

- Operasjon = Svaret
    - Dette mønstre beskriver elevenes noe svake forestilling om at formatet på en matematikkoppgave skal være oppgaven er på venstre siden og svaret på høyre siden av likhetstegnet.

- Kalkulerer på alle tilgjengelig tall
    - Dette er en strategi der eleven vil bruke det gitte handlingssymbolet for de fire regneartene i oppgaven og kalkulere på de tilgjengelige tallene. Elever med denne strategien vil i mindre grad fokusere på formatet på oppgaven, og heller fokusere på hvor den ledige plassen befinner seg, altså hvor en kan skrive svaret.

- Kalkulere totalen
    - Et mønster der eleven vil tolke likhetstegnet operasjonelt som et handlingssymbol. Elever som viser tegn på et slikt mønster vil ofte skrive slike *regnekjeder* i to-stegs-oppgaver som 8 + 9 = 17 + 3 = 20.

(McNeil m.fl., 2011).

Altså vil elevenes resultat på ekvivalensoppgaver bli tatt med i betraktning når jeg skal plassere elevene i de tre kategoriene. Slik vurderer jeg elevene totale forståelse:

- Elever som svarer alt riktig på oppgavene og gir en relasjonell definisjon på oppgave 1, ut i fra definisjonene over, vil bli kategorisert som elever med god **forståelse for matematisk ekvivalens.**

- En elev kan bli vurdert med **forståelse for matematisk ekvivalens** hvis eleven viser god relasjonell forståelse i arbeid med oppgavene, selv om den eleven ikke gir en relasjonell definisjon i oppgave 1.

- En elev som gir en relasjonell definisjon av likhetstegnet, men ikke klarer å vise noe forståelse for likhetstegnets funksjon i arbeidet med oppgavene, vil jeg kategorisere som en elev med **operasjonell forståelse**.

- En elev vil bli vurdert med **operasjonell forståelse** hvis definisjonen er operasjonell ut i fra definisjonene over, og i tillegg ikke viser noen relasjonell forståelse i arbeid med oppgavene.

- En elev som gir en relasjonell definisjon på oppgave 1, men har noen feil i oppgave 3 og 4 kan bli kategorisert som en elev med **forståelse for matematisk ekvivalens eller operasjonell forståelse**. Det blir opp til analytikeren å vurdere.

Grunnen til at en elev kan bli vurdert med operasjonell forståelse selv om den gir en relasjonell tolkning av likhetstegnet i oppgave 1, er at en elev kan definere et begrep uten å vise forståelse av hva det innebærer i praksis. Og det er nettopp dette som skiller min studie fra Knuth m.fl. (2006).

3.5.2 Analysemetode for å besvare 2. forskningsspørsmål

Datainnsamlingen som jeg vil bruke for å besvare mitt andre forskningsspørsmål vil bestå av lydopptak fra et oppgavebasert intervju og elevbesvarelser fra deres arbeid med algebraiske tekstoppgaver. For å analysere hvordan elevene løser algebraiske tekstoppgaver vil jeg bruke en blanding mellom nevnte *a priori* og *a posteriori*. Sistnevnte innebærer at kategoriene ikke er etablert på forhånd, men dukker opp fra selve dataen på en induktiv måte. Det er noe som stiller høye krav til analytikeren, da en ikke kan forvente at kategoriene vil fremtre på magisk vis (Wellington. 2015). I følge Wellington (2015) er en miks mellom disse to metodene den mest rasjonelle måten å analysere kvalitativ data på. Jeg vil derfor ta i bruk eksisterende strategier for løsning av algebraiske tekstoppgaver som er hentet fra tidligere forskning, men samtidig skal jeg være åpen for at dataen jeg analyserer krever at nye kategorier blir opprettet. Jeg vil følgelig presentere noen strategier elevene kan ta i bruk når de løser tekstoppgaven og strategiene som jeg vil basere analysen min på.

Løsningsstrategiene er hentet fra Reed (1999) og Walkington m.fl. (2012).

A. Prøver flere operasjoner på de forskjellige tallene og velger det mest fornuftige svaret.

B. Ser etter nøkkelord eller tall i teksten som kan fortelle noe av valg av operasjon som skal brukes (f.eks. alle sammen, mer, mindre).

C. Velger operasjoner som passer til oppgavens situasjon.

D. Diagram, en strategi som går ut på å tegne situasjonen teksten forteller og finne svaret ut i fra illustrasjonen.

E. "Prøve og feile", hvor elevene velger forskjellige verdier for hva som ville vært den ukjente i en ligning og deretter ser om svaret da passer med oppgaveteksten.

    i. Innenfor denne strategien kan elevene ta i bruk en strategi som kalles å "skalere opp" eller "skalere ned" på et tidligere svar for å finne den riktige verdien.

Strategiene E og E.i involverer å fremtre i et funksjonelt forhold mellom mengdene og er knyttet direkte til handlingen på historien eller en ligning.

F. Eleven bruker en "rygge"-metode, denne metoden gjelder spesielt oppgaver som *ukjent start* (se oppgave 1 og 5 i kap. 3.3.3). De begynner med den kjente sluttverdien og reverserer operasjonene aritmetisk. Denne operasjonen skaper også et funksjonelt forhold mellom mengdene, men viser ikke noe tegn til balanse mellom det som ville vært to sider av en ligning.

(Reed, 1999; Walkington m.fl., 2012)

Strategiene A – D er knyttet opp mot aritmetisk-baserte strategier som stammer fra erfaringen de har med tidligere utførelse av tekstoppgaver eller erfaring fra livet utenom skolen (Reed 1999). Mens strategiene E – F blir i Walkington m.fl. (2012) katogorisert som uformelle strategier og ofte brukt av elever på algebraiske oppgaver når elevene ikke tar i bruk ligninger. Slike uformelle strategier, i motsetning til algebraiske ligninger, blir dratt hyppigere frem pga. konteksten i oppgaven lar elevene få større tilgang til oppgaven og mengden. Studiet til Walkington m.fl. (2012) viste at oppgaver med kontekst og spesielt oppgaver med personaliserende innhold førte frem uformelle strategier, mens elever tok i bruk formelle strategier i arbeid med abstrakte oppgaver.

3.6 Studiets validitet og reliabilitet

En viktig del av en kvalitativ tilnærming er åpenheten rundt forskerens rolle og påvirkning av studie som er en kontrast til andre forskningsdesign (Creswell, 2014). For å vurdere kvaliteten av denne studien vil jeg ta i bruk kjente og høyst diskuterte begreper i utdanningsforskning, følgelig *validitet* og *reliabilitet.* Validitet handler om metodebruk og om metoden faktisk måler det den skal gjøre i forhold til konseptet du studerer (Yin, 1994; Wellington, 2015). I forhold til mitt første forskningsspørsmål så vil jeg studere elevenes forståelse av matematisk ekvivalens. Metoden jeg bruker til å avdekke forståelsen til elevene er matematikkoppgaver som elevene skal utføre individuelt. Ut i fra min analyse av elevenes besvarelse skal jeg plassere elevene i tre ulike kategorier. Spørsmålet jeg må stille meg selv er om jeg faktisk måler elevenes forståelse for likhetstegnet eller om jeg måler elevenes generelle matematiske kunnskap? Oppgavene består av tre deler, på den første delen skal elevene gi en beskrivelse av likhetstegnet rolle, på den andre delen skal elevene løse matematikkoppgaver på standard aritmetisk format og den siste delen inneholder ekvivalensoppgaver. For å styrke studiet validitet har jeg derfor operasjonalisert analysen, hvor jeg på forhånd har opprettet en link mellom de mest typiske forklaringene og til kategoriene av forståelse. I tillegg er operasjonene på ekvivalensoppgavene av det enkle slaget. Operasjonene er høyst elementære for en elev i femte trinn, men siden oppgavene har et ekvivalensformat (10+3=__ + 2) mener jeg at elevenes forståelse av likhetstegnet og matematisk ekvivalens vil komme tydelig frem.

Når det gjelder det andre forskningsspørsmålet så er det aktuelle matematiske spørsmålet hvordan elever løser algebraiske tekstoppgaver. I følge Yin (1994) er en måte å konstruere validitet å bruke flere kilder og lage en *kjede av bevis*. For å besvare forskningsspørsmålet vil jeg, som nevnt tidligere i kapittel 3, bruke et oppgavebasert intervju. Kildene jeg bruker for å besvare på spørsmålet vil derfor være elevbesvarelsene i tillegg til intervju. Jeg kan på denne måten knytte besvarelsene til elevene opp i mot deres egne refleksjoner og ytringer.

Innenfor termen validitet er det vanlig innen forskning å vurdere både den interne og eksterne validiteten. Intern validitet er spesielt viktig i studier hvor en studerer årsakssammenhenger, som Yin (1994) beskriver det "hvis en forsker på feil grunnlag fastslår om årsak x førte til utfall y ... uten å vurdere om årsak z kan ha ført til utfall y, har forskningsdesignet mislykket med å håndtere trusselen til intern validitet" (Yin. 1994. s. 35). Dette mener jeg blir relevant for min studie med hensyn til at en del av det andre forskningsspørsmålet innebærer om elevenes ulike forståelse av matematisk ekvivalens (årsak x) fører til forskjellig resultat i arbeid med algebraiske tekstoppgaver (utfall y) (ibid.). I diskusjonsdelen bør jeg derfor vurdere om andre faktorer kan ha påvirket resultatet.

Innenfor kasusstudier er den eksterne validitet et nærmest uløselig problem. Ekstern validitet blir i Wellington (2015) beskrevet som vurderingen om observasjonene og målingene kan bli generalisert utenfor studiets grense og en kan aldri hevde full generalitet når det gjelder kasusstudier. Og jeg vil derfor, på bakgrunn av forskningsdesign og av antall forskningsobjekter, ikke prøve å hevde at mine funn kan generaliseres forbi mitt eget studie og det var heller ikke min hensikt før prosjektet begynnelse. Kasusstudier sørger for dybde og rike detaljer om en eller flere bestemte kasus, så vil det være opp til leserne å vurdere relevansen av funnene.

Sist i denne delen av metodekapittelet vil jeg komme innpå studiets reliabilitet. Reliabiliteten i studiet demonstrerer at metodene i studiet, som datainnsamlingen, kan repeteres med samme resultat (Creswell, 2014; Yin, 1994; Wellington, 2015). Målet med reliabiliteten er å minimere svakhetene og partiskheten. Grepene jeg har utført for å styrke reliabiliteten er å dokumentere godt for prosedyren for studiet og en detaljert beskrivelse av alle stegene jeg utfører ved datainnsamlingen. Spesielt når det gjelder det andre forskningsspørsmålet er det viktig å opptre objektiv og uten en forhåndsbestemt agenda.

3.7 Etiske betraktninger

Da denne studien involverer mennesker er forskningsetikk helt sentralt å reflektere over. Først og fremst vil jeg påpeke at dette prosjektet har godkjennelse fra Personvernombudet ved Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD) som medfølger at den tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven. Lærer og elevene i klassen har på forhånd blitt tildelt et samtykkeskjema, da elevene er under 18 år er det foreldrenes signatur som gjelder. Innholdet i samtykkeskjemaet er bl.a. opplysninger om selve studie og hva elevene forventes å gjennomføre hvis de samtykker. I tillegg inneholder skrivet viktig informasjon om behandlingen av data, bl.a. hvordan elevenes anonymitet ivaretas og sikkerheten rundt opplysninger om elevene (se vedlegg).

4 Resultat og analyse

I denne delen av oppgaven vil jeg analysere elevenes besvarelser fra datamaterialet mitt med utgangspunkt i analysemetoden fra kapittel 3. Dette kapittelet er delt inn i to deler hvor jeg først vil analysere datamaterialet knyttet til det første forskningsspørsmålet angående elevers forståelse av matematisk ekvivalens. Før jeg retter fokuset over på hvordan elevene arbeidet med algebraiske tekstoppgaver og analysere datamateriale som angår det andre forskningsspørsmålet. Elevene som blir analysert er blitt tildelt fiktive navn.

4.1 Analyse av elevenes forståelse av matematisk ekvivalens

I dette delkapittelet vil jeg begynne med resultatet av besvarelsene gitt av elevene i femteklassen rundt deres forståelse av matematisk ekvivalens. Jeg vil fokusere på elevenes tolkninger av likhetstegnet, hvordan det påvirker deres arbeid med ekvivalensoppgaver og misoppfatninger som fører med en operasjonell forståelse av likhetstegnets rolle i matematikkoppgaver.

4.1.1 Resultat av skriftlig oppgave

På den første dagen av datainnhentingen gjennomførte elevene i en femteklasse matematikkoppgaver som var konstruert for å avdekke deres forståelse av matematisk ekvivalens. Når jeg presenterte utvalget for denne studien i kapittel 3 kom jeg med en hypotese om at jeg kommer til å finne stor variasjon når det gjelder god forståelse for matematisk ekvivalens. Dette var på bakgrunn av resultater fra forskningen til Knuth m.fl. (2006) og McNeil & Alibali (2005). Disse studiene er knyttet opp mot elevenes tolkning av likhetstegnet og viste at en stor andel av elever på barneskolen viser en operasjonell forståelse. Den første oppgaven elevene skulle gjennomføre handlet om hvordan de tolker likhetstegnets rolle. I kapittel 2 har jeg skrevet om to ulike forståelser for likhetstegnet som jeg forventer å finne på bakgrunn av tidligere forskning, nemlig relasjonell- og operasjonell forståelse. I tillegg har jeg lagt til en kategori hvor elever ikke viser tegn på en konkret forståelse. Forskningen til Knuth m.fl. (2006) viste en sterk forbindelse med forståelse av likhetstegnet og utførelse av algebraiske ligninger. Et slikt resultat mener jeg tyder på at en relasjonell forståelse for likhetstegnet er en sterk indikator på at eleven har god forståelse for matematiske ekvivalens. I tillegg til elevenes tolkning av likhetstegnet vil jeg derfor analysere hvordan de tar i bruk sin forståelse i praksis med utførelse av ekvivalensoppgaver.

Følgende analyse ble utført med grunnlag i analysemetoden fra kapittel 3. Tabell 2 viser prosentfordeling av elevene i forskningsklassen angående deres forståelse for matematisk ekvivalens. Dette resultatet bekrefter altså mine tanker om at elevene i denne femteklassen viser stor variasjon fra en operasjonell forståelse til forståelse for matematisk ekvivalens og er samstemt med Kieran (1981).

Kategori	Antall elever	Fordeling %
Operasjonell forståelse	15	45,5
Ekvivalensforståelse	16	48,5
Andre	2	6

Tabell 2. Statistikk over elever med operasjonell- og ekvivalensforståelse.

Som tidligere forskning har vist, har en stor del av elevene på barneskolen en operasjonell forståelse for ekvivalens og likhetstegnet rolle i matematikken. Av de 33 elevene som var med i undersøkelsen så er det tett opp i mot halvparten av klassen som besitter operasjonell forståelse for likhetstegnet mens den andre halvparten ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens.

Tolkning av likhetstegnet

Elevenes definisjoner på likhetstegnet var deres første mulighet til å vise forståelse for matematisk ekvivalens og vil som ventet vise seg å være en sterk indikasjon på hvilken forståelse de til slutt blir kategorisert med. De ulike definisjonene av likhetstegnet stemte godt overens med hva jeg forventet å finne og det som var forventet ut i fra tidligere forskning. Dette er definisjonene som var kategorisert som operasjonelle og som ble brukt av elevene i oppgave 1.

"svaret på oppgaven"
"hva tallene blir til sammen"
"summen"

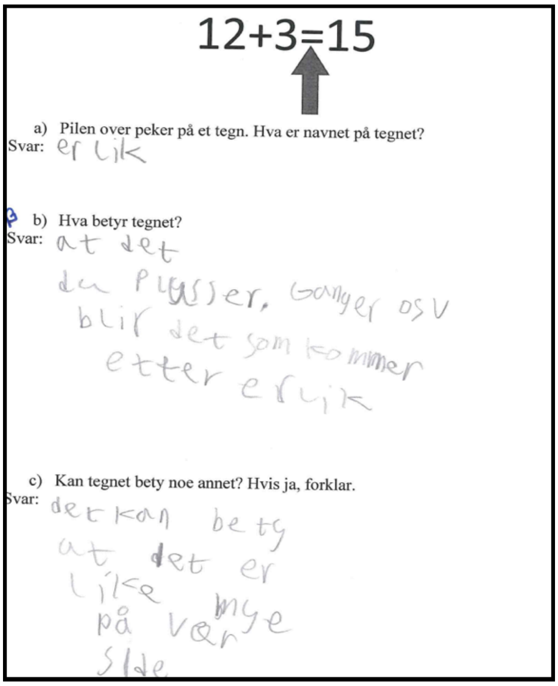
Alle definisjonene over baserer seg på den noe svake forståelsen av likhetstegnet om at oppgaven er på venstre siden av likhetstegnet og svaret er på høyre siden. Den første definisjonen, "svaret på oppgaven", var den som ble brukt hyppigst av definisjonene som var kategorisert som operasjonelle. De tre definisjonene gitt av elevene er også lik de tre operasjonelle mønstrene beskrevet i McNeil m.fl. (2011). Første definisjon, "svaret på oppgaven", handler om å tenke på en matematikkoppgave slik at operasjonen er på venstre siden av likhetstegnet og svaret er på høyre siden. McNeil m.fl. skriver at denne tolkningen av likhetstegnet viser at eleven ikke forstår hva likhetstegnet egentlig uttrykker og ser på tegnet som et handlingssymbol som genererer svaret på oppgaven. Neste definisjon, "hva tallene blir til sammen", vil jeg påstå beskriver løsningsstrategien der elevene *gjennomfører de gitte* *operasjonene på alle tilgjengelig tall*. En slik løsningsstrategi gir muligheten til å gi rask og presis utregning på standard aritmetiske oppgaver, men vil samtidig ignorere relasjonen mellom mengdene og derfor vil ikke strategien være tilstrekkelig på oppgaver med ekvivalensformat. Mens den siste definisjonen, "summen", kan sammenlignes med mønsteret eller strategien McNeil kaller *kalkulere totalen*. Som i likhet med tolkningen "svaret på oppgaven" tyder på at elevene har konstruert sterke assosiasjoner til likhetstegnet som et handlingssymbol og ikke et tegn som viser balanse mellom to mengder på hver side av seg (McNeil m.fl, 2011).

Dette er definisjonene som ble brukt av elevene og var på forhånd kategorisert som relasjonelle:

"likt på begge sider"
"samme som"
"= dette betyr at det er like mye"

Disse definisjonene viser tegn til forståelse for matematisk ekvivalens og den første definisjonen, "likt på begge sider", var den mest brukte av elevene i denne femteklassen. Kun to elever brukte de andre to definisjonene kategorisert som relasjonell. Eleven som ga den siste definisjon sammenlignet også likhetstegnet med andre relasjonstegn som < >. Hun beskrev tegnene som "krokodiller som viser når noe er større enn noe annet" og viste dermed sterke assosiasjoner til likhetstegnet som et relasjonstegn.

Når jeg analyserte elevenes forståelse tok jeg utgangspunkt i elevenes beste definisjon av likhetstegnet siden de i oppgave 1 fikk to muligheter til å beskrive symbolet. I kapittel 3 beskriver jeg hvordan de tre deloppgavene i oppgave 1 fungerer som tre ulike virkemidler for å få ut det elevenes beste tolkning av likhetstegnet. Et virkemiddel var c-oppgaven som ble inkludert fordi elever ofte ga mer enn en definisjon når de fikk muligheten (Knuth m.fl., 2006). I denne studien ga hele seks elever sin beste definisjon på oppgave 1c, altså de ga en operasjonell definisjon på oppgave 1b før de ga en relasjonell definisjon på oppgave 1c. Trond er et eksempel på det. Som figur 4 viser så svarer Trond på oppgave 1b at likhetstegnet betyr "at det du plusser, ganger osv. blir det som kommet etter er lik". En definisjon som jeg mener er en operasjonell tolkning av likhetstegnet som et handlingssymbol.

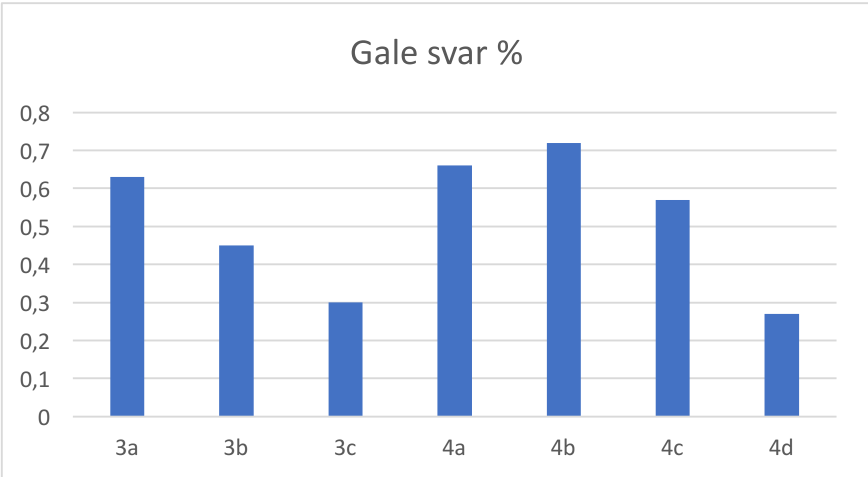


Figur 4. Trond sin besvarelse på oppgave 1.

Men når han igjen får muligheten til å gi sin tolkning på oppgave 1c, så svarer han "det kan bety at det er like mye på hver side". En tolkning som blir kategorisert i kapittel 3 som en relasjonell tolkning. Trond er et eksempel på hvor viktig oppgave 1c kan være som et virkemiddel for å kunne skaffe et best mulig innsyn i elevenes forståelse av matematisk ekvivalens. Han er også en av få elever som har svart riktig på alle ekvivalensoppgavene og har tydelig en god forståelse for matematisk ekvivalens.

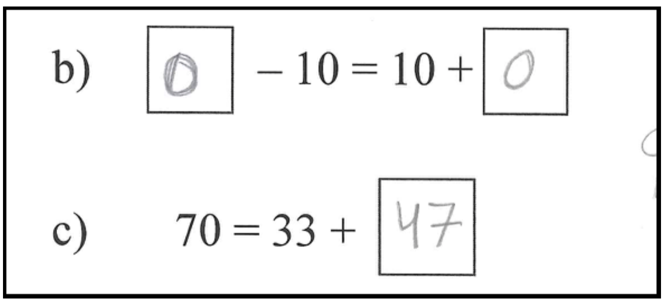
Forekomst av gale svar

I gjennomgangen av elevbesvarelsene kom det tydelig frem at noen oppgaver var mer utfordrende enn andre. Figuren under viser hvordan noen ekvivalensoppgaver skiller seg ut når det gjelder feilprosent.



Figur 5. Statistikk over feilprosent på ekvivalensoppgaven.

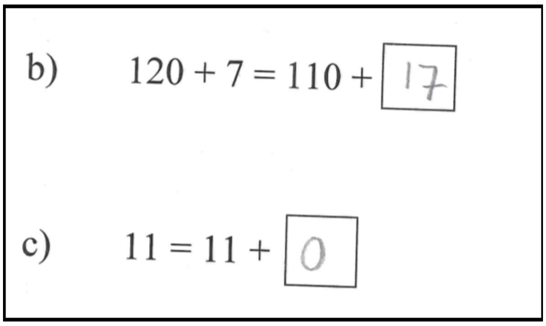
Som figur 5 viser var oppgavene 3a, 4a og 4b de som det var størst feilprosent på. Og det var ikke utelukkende elevene som ble kategorisert med operasjonell forståelse som hadde feil på ekvivalensoppgavene. Selv blant elevene med god forståelse var det allikevel forekomst av feil på disse ekvivalensoppgavene. I figuren ser man at oppgave 4b var den med høyest feilprosent på. Også seks elever som ble kategorisert med forståelse for ekvivalens hadde feil på denne oppgaven. De typiske feilene, som vist i figur 5.1, var at elevene ikke tok hensyn til fortegnet til tallene (- 10). Slik jeg tolker feilene i oppgave 4b så fokuserte elevene, spesielt elevene med relasjonell tolkning av likhetstegnet, på at det skulle være likt på begge sider av likhetstegnet. Siden sifferet 10 var på begge sidene tenkte også elevene med relasjonell forståelse for likhetstegnet at de kunne legge til 0 slik at det blir "likt" på hver side av likhetstegnet. Elevene tok derfor ikke med fortegnene i kalkuleringen.



Figur 5.1. Viser typiske feil på oppgave 4b og 4c.

Når det gjelder oppgave 4c (se figur 5.1), hvor det også var høy feilprosent, mener jeg at den høye feilprosenten ikke handlet om deres mangel på forståelse for ekvivalens. Av elevene som ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens mener jeg det var kun regnefeil som gjorde at de ikke svarte riktig på denne oppgaven. Å gi svaret 47 eller 36 (som også var et vanlig svar), mener jeg viser at de forstår relasjonen mellom mengdene på hver side av likhetstegnet, men at eleven kun har gjort regnefeil.

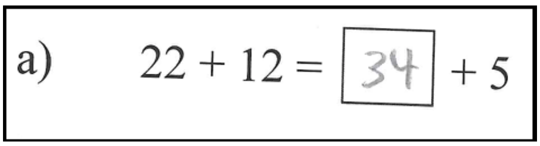
Oppgavene som det var minst feil på var 3b, c og 4d. Ingen elever med ekvivalensforståelse svarte feil på oppgave 3b, mens det kun var en elev som svarte feil på oppgave 3c i form av et spørsmåltegn. Det som kjennetegner både oppgave 3b og 3c er hvor ruten er plassert i matematikkoppgaven (se figur 5.2).

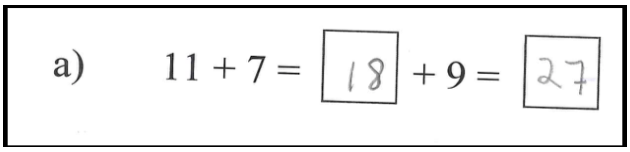


Figur 5.2 Viser oppgave 3b og 3c.

Ruten hvor elevene skal plassere tallet som gjør oppgaven riktig er plassert sist i oppgaven i et format av typen a + b = c + __ og a = b + __. Dette formatet mener jeg fremprovoserer større hensyn til relasjonen mellom mengdene da det kan være mer opplagt at også tallet 110 i oppgave 3b og tallet 11 i oppgave 3c må brukes i kalkuleringen.

Derimot har oppgave 3a og 4a, oppgavene med høyest feilprosent (se figur 5.3), et annet format der ruten er plassert rett til høyre for likhetstegnet. Mye kan tyde på elevene ikke syntes det var like opplagt hvilke tall som må involveres i kalkuleringen på disse oppgavene. Mange oppga svaret 34 på oppgave 3a (se figur 5.3) hvor de har ignorert tallet 5 på høyre siden av likhetstegnet og de fleste elevene med feil på oppgave 4a konstruerte *regnekjeder* (se figur 5.4).





Figur 5.3 og 5.4. Typiske feil på oppgave 3a (venstre) og 4a (høyre).

Kontrolloppgaven

I tillegg til oppgave 1c, som er analysert tidligere i kapittelet, så har oppgave 2 flere funksjoner. Jeg kunne f.eks. bruke denne oppgaven, som kun inneholdt deloppgaver med standard aritmetiske format (a + b = c), til å skaffe innsikt i om det er elevenes generelle aritmetiske ferdigheter eller elevenes forståelse for matematisk ekvivalens som preger deres prestasjoner. Oppgavene er varierte og innebærer operasjoner på de fire regneartene. Også Knuth m.fl. (2006) tok denne problemstilling til betraktning og så på elevenes generelle matematiske ferdigheter i forhold til hvordan de presterte på en standardisert test. Som nevnt i kapittel 2 så holdt resultatet i deres artikkel selv når de sammenlignet med elevenes generelle matematiske ferdigheter. Jeg har derfor sett etter en forbindelse mellom hvilken forståelse elevene ble kategorisert med og hvordan de presterer på oppgave 2.

Kategori	**1/4**	**2/4**	**3/4**	**4/4**
Elever med operasjonell forståelse	2	1	7	5
Elever med forståelse for ekvivalens	0	2	3	11
Andre	0	0	0	2

Tabell 3. Elevenes prestasjon på de fire deloppgavene i oppgave 2. Fra 1/4 - til 4/4 riktige.

Ut i fra tabellen over kan vi se at flertallet av elevene ligger på rundt 3/4 og 4/4 riktige svar på oppgave 2. 11 elever, altså rundt 68 %, med forståelse for ekvivalens har svart riktig på alle deloppgavene i oppgave 2. Mens fem elever, rundt 33 %, med operasjonell forståelse har svart alt riktig. Et slikt resultat kan tyde på det ikke bare er elevenes forståelse av ekvivalens, men også elevenes generelle aritmetiske evner som påvirker deres prestasjoner på matematikkoppgaver med et ekvivalensformat. At elever med forståelse for matematisk ekvivalens eller bedre konseptuell kunnskap om ekvivalens også presterer bedre på standard aritmetiske matematikkoppgaver, er samstemt med Rittle-Johnson m.fl. (2001) sin teori om at prosedyreferdigheter og konseptuell kunnskap influerer eller påvirker hverandre. En økning i elevenes ferdigheter når det gjelder regneoperasjoner kan også gjøre at elevenes konseptuelle kunnskap angående ekvivalens øker, og motsatt.

Ser man derimot på statistikken når det gjelder elever som har riktig på minst tre av fire oppgaver så vil jeg påstå at resultatet er mer balansert. Antall elever med operasjonell forståelse som har svart riktig på minst tre av fire oppgaver er 12 (80%), mens antall elever med god ekvivalensforståelse som har minst tre av fire riktige er 14 (87,5 %). På bakgrunn av denne statistikken vil jeg påstå at resultatet fra tabell 2 holder, selv med elevenes generelle matematiske ferdigheter som en faktor.

4.1.2 Likhetstegnet som et handlingstegn

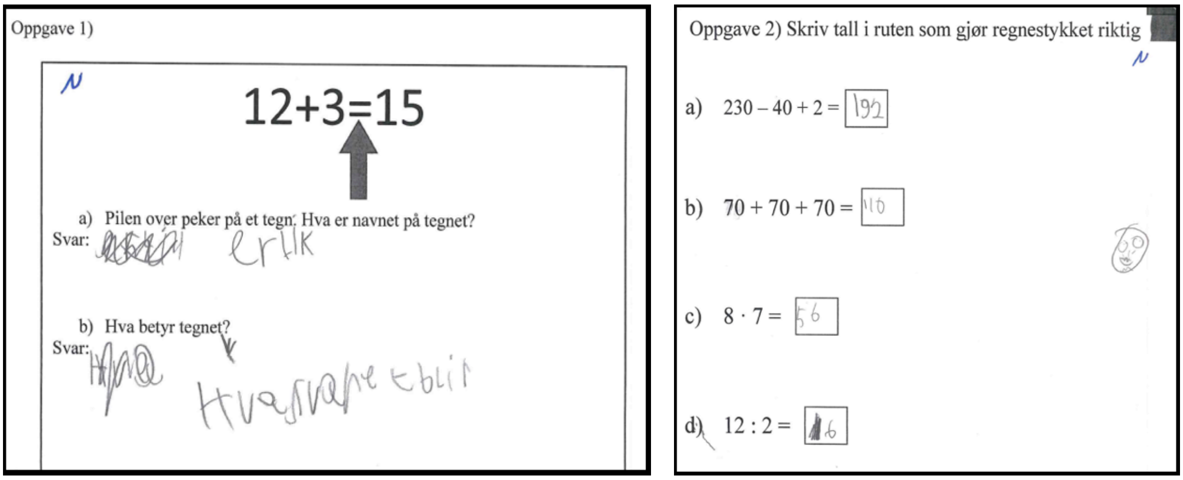
Jeg vil videre i dette kapittelet analysere ulike besvarelser utført av elever som ble kategorisert med operasjonell forståelse og det jeg mener påvirker elevenes forståelse for matematisk ekvivalens. Jeg vil bl.a. analysere hva som kjennetegner elevene som avviser ekvivalensoppgavene (oppgave 3 og 4) og argumentere for hvor stor betydning elevenes tolkning av likhetstegnet som en operasjon har for hvordan de løser matematikkoppgavene.

Avviser oppgaver med ekvivalensformat

I kapittel 2 ble begrepet *å avvise* brukt i forbindelse med studie til Cobb (1987). I Cobb sin undersøkelsen kunne elever som avviste oppgavene på ekvivalensformat gi alternative oppgaver som de mente var mer riktig. I denne studien vil ikke elevene få tilbud om konstruering av alternative oppgaver. Jeg vil derfor bruke begrepet *å avvise* på elever som svarer blankt på ekvivalensoppgave, da jeg tolker det slik at de ikke aksepterte det ukjente formatet. Jeg vil fokusere på tre elever som avviser/svarer blankt på ekvivalensoppgavene. Det var flere elever som svarer blankt enn de jeg vil ta opp i denne analysen, men det som er spesielt med disse elevene er alle tre viste ulik forståelse for likhetstegnet.

- Nils

Nils viser tydelig tegn på operasjonell forståelse av likhetstegnet og en elev som jeg mener ikke viser tegn på forståelse for matematisk ekvivalens. Under er hans besvarelse på oppgave 1 og oppgave 2.

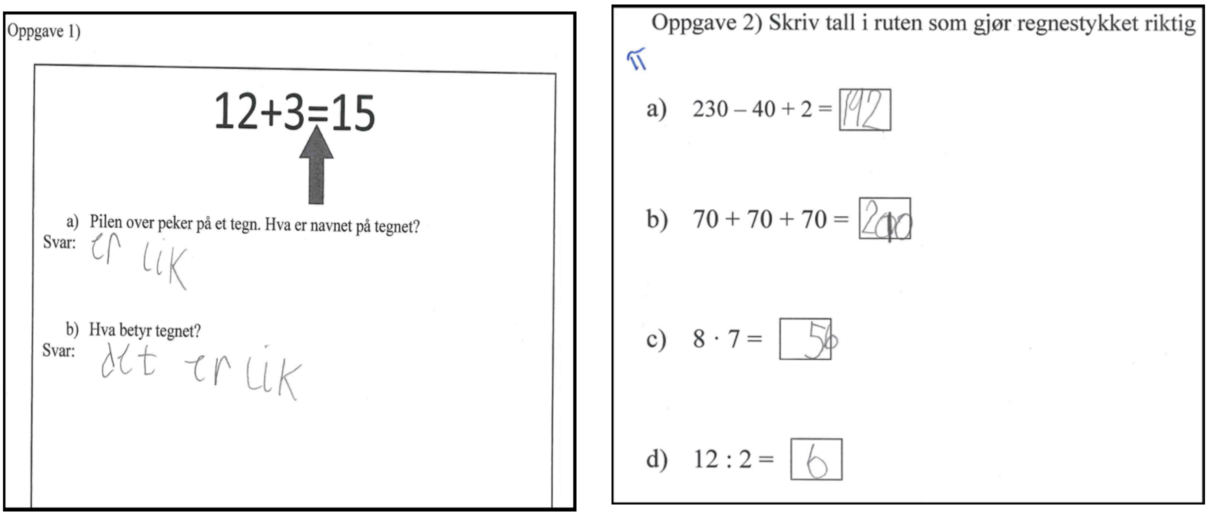


Figur 6.0. og 6.1 Nils sin besvarelse på oppgave 1 og 2.

Som vi kan se på oppgave 1b på figur 6.0 så er Nils sin tolkning av likhetstegnet kategorisert som operasjonell. Han mener at likhetstegnet kan tolkes som "hva svaret blir" og denne tolkningen preger resten av hans besvarelse. I følge Cobb (1987) vil en slik operasjonell tolkning av likhetstegnet være gyldig når eleven jobber med standard oppgaver med et format der oppgaven er på venstre siden av likhetstegnet. Hans forståelse blir derfor gyldig når Nils jobber med kontrolloppgavene i oppgave 2 (fig. 6.1). Nils svarer riktig på tre av fire kontrolloppgaver. Hvis man ser bort i fra formatet på oppgavene så vil jeg påstå at regneoperasjonene som utføres i oppgave 2 er mer avansert i forhold til oppgave 3 og 4. Men på ekvivalensoppgavene så har Nils svart blankt på alle deloppgavene. Slik jeg tolker det, så oppstår det en kognitiv konflikt og han avviser dermed ekvivalensoppgavene.

- Anders

Anders svarte blankt på 5/7 ekvivalensoppgaver. Det som skiller Anders fra nevnte Nils er at Anders var en av to som ikke ble kategorisert med operasjonell- eller ekvivalensforståelse. Han definisjon på likhetstegnet var "det er lik" (se fig. 6.2). I kapittel 3 skrev jeg om at deloppgavene i oppgave 1 fungerte som virkemidler (prompt) for å få frem elevenes beste definisjon på likhetstegnet. Oppgave 1a skulle sørge for at elevene ikke ga navnet på tegnet som tegnets betydning i 1b, noe denne eleven tydelig har gjort.

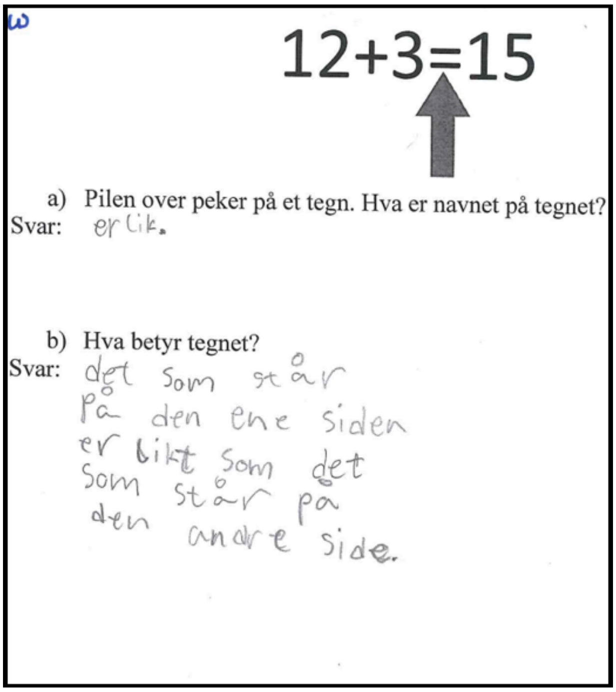


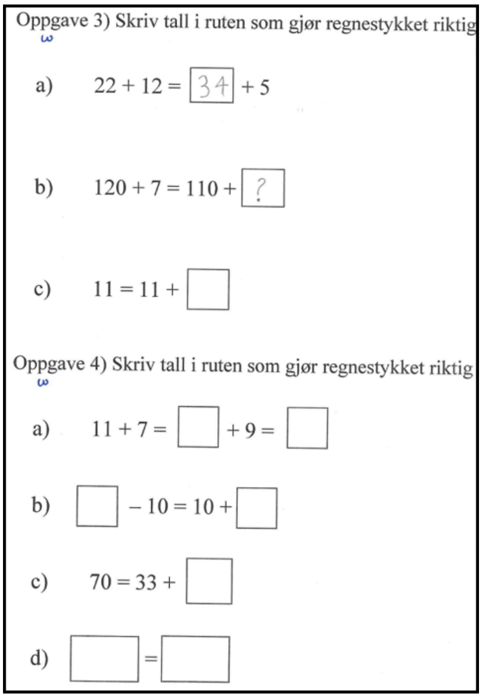
Figur 6.2 Anders sin besvarelse på oppgave 1 og 2.

På kontrolloppgavene (oppgave 2) har Anders alt riktig, så en kan tenke seg at hans svake tolkning av likhetstegnet handler mer om at han vanskeligheter med å uttrykke seg skriftlig om hva han mener. Noen elever skrev f.eks. at de vet hva likhetstegnet betyr men er usikker på hvordan de skal skrive det. Men som nevnt så avviser Anders ekvivalensoppgavene, eller rettere sagt svarer blankt på 5/7, og viser tydelig at han ikke besitter god forståelse for ekvivalens. De to oppgavene han har gitt svar på har han derimot fått riktig, følgelig oppgave 3c hvor han har korrekt skrevet 11 = 11 + 0 og oppgave 4d hvor han har skrevet at 1 = 1. Noen format er som nevnt lettere enn andre og a = b + c viser seg å være noe enklere å skjønne for en elev med operasjonell forståelse for likhetstegnet. Formatet ligner mest på det standard formatet (a + b = c) som de er vant med å møte i skolen og kan forklare hvorfor oppgave har lavere feilprosent enn mange av de andre oppgavene. Men Anders har ignorert den andre oppgaven med formatet a = b + c (oppgave 4c), og samlet sett er det derfor lite som tyder på at han forstår matematisk ekvivalens.

- Julie

Slik som Nils og Anders så avviser også Julie oppgavene med ekvivalensformat. Det som skiller de tre elevene er at Julie gir en tydelig relasjonell tolkning av likhetstegnet og viser derfor tegn av forståelse for matematisk ekvivalens (se figur 6.3). Julie beskriver likhetstegnets funksjon som "det som står på den ene siden er likt det som står på den andre siden", en tolkning som jeg definerer som relasjonell ut i fra analysemetoden i kapittel 3. Men noe overraskende, med tanke på hennes gode definisjon, så avviser også hun ekvivalensoppgavene.





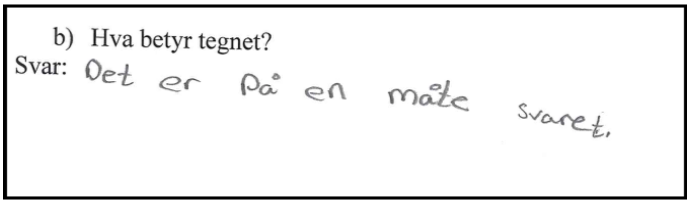
Figur 6.3 og 6.4. Julie sin besvarelse på oppgave 1, 3 og 4.

Vi kan se at hun har svart 34 på oppgave 3a (fig. 6.4), et svar som viser tegn på operasjonell forståelse da hun skriver "svaret" på 22 + 12 i den ledige ruten og tydelig ikke tar + 5 med i beregningen. Men på neste oppgave skriver hun kun et spørsmålstegn, og slik jeg forstår det har det nå oppstått en kognitiv konflikt og hun har tydelige problemer med å forstå ekvivalensformatet. Hun ignorer den relasjonelle definisjon og viser følgende ingen tegn på forståelse for matematisk ekvivalens i praksis. På kontrolloppgavene (oppgave 2) viser hun gode aritmetiske ferdigheter og svarer riktig på 3/4 oppgaver. Så jeg vil derfor avvise at hennes aritmetiske ferdigheter har en årsakssammenheng i forhold til hennes manglende besvarelser på oppgave 3 og 4.

Operasjonelle mønstre

Nils ga en pekepinn på hva konsekvensen kan være for en elev som tolker likhetstegnet operasjonelt hvor det kan ha ført til at han avviste ekvivalensoppgavene. Videre vil jeg nå fokusere på elever som tilsynelatende ikke oppnår noen kognitiv konflikt og følgende gir et svar på ekvivalensoppgavene. Disse elevene viser derimot tegn på manglende forståelse for relasjonen mellom mengdene i matematikkoppgaven og flere viser i tillegg tegn på de operasjonelle mønstrene i McNeil m.fl. (2011) som er beskrevet i kapittel 3.

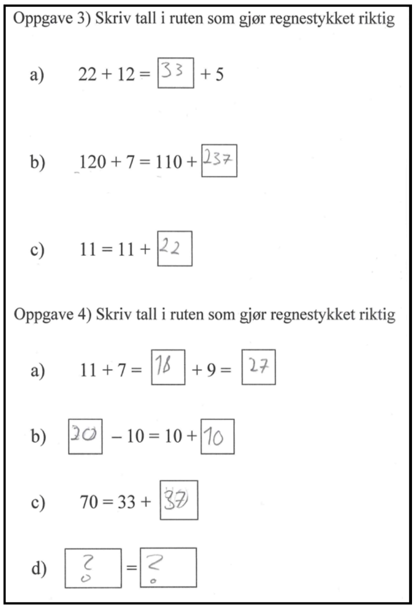
Noen av elevene i femteklassen viste bl.a. tegn på mønsteret *kalkulere på alle tilgjengelig tall* og blir av ut i fra McNeil m.fl. (2011) beskrevet som elever med overvekt av operasjonell tenking fremfor relasjonell. Ane er en jente jeg mener viser tegn på det nevnte mønsteret. Som figur 7.0 viser så definerer hun likhetstegnet som "det er på en måte svaret", en definisjon som jeg i kapittel 3 kategoriserte som operasjonell. Hun har også svart riktig på tre av fire kontrolloppgaver. En analyse av hennes arbeid med oppgave 3 og 4 mener jeg derfor kan bli gjort med tanke på hennes forståelse av matematisk ekvivalens som en påvirkning på hennes prestasjoner og ikke hennes generelle matematiske kunnskap.


b) Hva betyr tegnet?
Svar: Det er på en måte svaret.

Figur 7.0. Anes definisjon på likhetstegnet.

Mønsteret nevnt ovenfor innebærer at eleven ikke tar hensyn til likhetstegnets plassering i matematikkoppgaven og formatet på oppgaven. Som nevnt ga Ane en operasjonell definisjon på likhetstegnet og hennes besvarelser på ekvivalensoppgavene bærer preg av mønsteret (se fig.7.1). Slik jeg tolker hennes besvarelser så tar hun utgangspunkt i handlingssymbolene i matematikkoppgaven og tallene som er tilgjengelig og skriver deretter det hun mener er svaret i den ledige ruten som hun tidligere har erfaring med. På oppgave 3b tar hun utgangspunkt i addisjon og legger til alle tallene i oppgaven uansett hvordan side av likhetstegnet tallene er plassert. Det er tydelig at hun tolker oppgave 3b som 120 + 7 + 110 = 237, et format som jeg tenker hun er mer kjent med. En vanlig strategi i følge McNeil m.fl. (2011).

Samme strategi benytter Ane seg av i 3c hvor hun tydelig tolker oppgaven som 11 + 11 = 22. På oppgave 4b viser Ane bruk av mønsteret *operasjon=svaret* og konstruerer oppgaven 20 – 10 = 10 hvor hun ignorerer tallet 10 på høyre siden av likhetstegnet. Hun kan også ha omskrevet oppgaven til 20 = 10 + 10 og dermed ignorert tallet – 10 på venstre siden av likhetstegnet. Noe overraskende svarer hun riktig på oppgave 4c, den eneste oppgaven hun viser noe tegn på forståelse av matematisk ekvivalens. Det riktige svaret kan ha sammenheng med oppgave 4b hvor hun som nevnt kan ha tolket at oppgaven er 20 = 10 + 10. Formatet blir derfor a = b + c hvor operasjonen som må utføres befinner seg på høyre siden av likhetstegnet og svaret skal derfor stå i den tomme ruten på venstre siden. I kapittel 2 har jeg skrevet om at standard aritmetiske oppgaver kan fremprovosere en persons operasjonelle forståelse, til og med på universitetsnivå (Chesney & McNeil, 2014). Da Ane kanskje tolket oppgave 4b som 20 = 10 + 10, kan det tyde på at tolkningen hadde en positiv påvirkning på hennes besvarelse på 4c hvor hun kanskje noe ubevisst klarte å videreføre den strategien til neste oppgave.


Oppgave 3) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) 22 + 12 = 33 + 5

b) 120 + 7 = 110 + 237

c) 11 = 11 + 22

Oppgave 4) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) 11 + 7 = 18 + 9 = 27

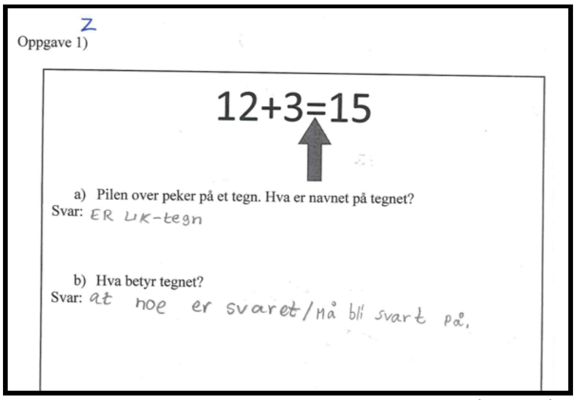
b) 20 – 10 = 10 + 10

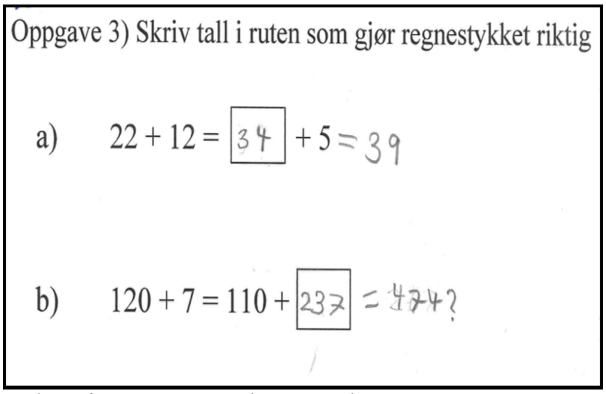
c) 70 = 33 + 37

d) ? = ?

Figur 7.1. Ane sin besvarelse på oppgave 3 og 4.

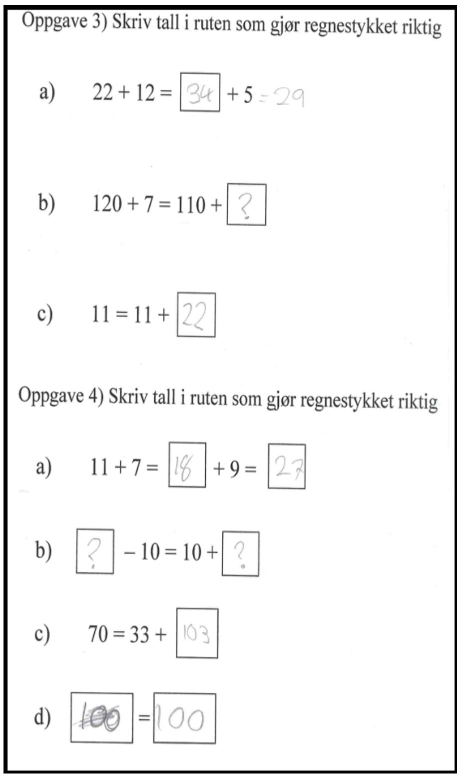
En annen elev som viste tegn på mønsteret *kalkulere på alle tilgjengelig tall* var Silje. Som vist i figur 7.2 var hennes definisjon på likhetstegnet "at noe er svaret/må bli svart på", som blir tolket som operasjonell ut i fra analysemetoden i kapittel 3. Hun ga en noe vag relasjonell tolkning på oppgave 1c, følgelig "jeg er ikke helt sikker, men jeg tror det kan bety de er like". Derimot bærer ikke hennes besvarelser på ekvivalensoppgavene noe preg av forståelse for matematisk ekvivalens. Noe interessant er hennes tolkning av likhetstegnet at "noe.. må bli svart på". Denne tolkningen påvirker tydelig hennes arbeid med oppgave 3 a og b (se figur 7.3).





Figur 7.2 og 7.3. Silje sin besvarelse på oppgave 1 a, b og 3 a, b.

Hennes bevarelser viser altså en trang på å "fullføre" matematikkoppgavene og lager derfor egne likhetstegn etter oppgaven hvor hun etter tegnet skriver svaret. Hun aksepterer dermed ikke at et regnestykke blir riktig før svaret er tilført i form av et enkelt tall og ikke en operasjon. På oppgave 3a oppretter Silje også en *regnekjede* som er et annet operasjonelt mønster beskrevet i kapittel 3. Silje bruker hennes operasjonelle definisjon på likhetstegnet og skriver da "svaret" på oppgaven i ruten etter likhetstegnet og lager fortløpende en ny matematikkoppgave (34 + 5) som hun mener *må* bli svart på og legger dermed til "= 39" etter oppgaven. Når det gjelder Siljes besvarelse på oppgave 3b viser hun tegn på mønsteret *kalkulere på alle tilgjengelig tall* og omskriver dermed oppgave 3b til 120 + 7 + 110 = 237 og ignorer posisjonen til likhetstegnet. Hun har heller ikke i denne oppgaven akseptert at høyre siden av likhetstegnet skal inneholde en operasjon. Men i denne oppgaven har hun ikke bare svart på operasjonen på høyresiden av likhetstegnet (som i oppgave 3a), hun har skrevet totalen på alle verdiene i oppgaven. Hun omskriver dermed oppgave 3b til 120 + 7 + 110 + 237 = 474. Jeg mener derfor Silje blir et tydelig eksempel på hvordan tolkningen av likhetstegnet preger en elevs utførelse på ekvivalensoppgaver.



Figur 7.4. Elisabeth sin besvarelse på oppgave 3 og 4.

Ut i fra analysene så langt i dette kapittelet kan det tyde på at formatet på oppgaven påvirker mye av strategivalgene til elevene. Elisabeth sin besvarelse på ekvivalensoppgavene er et nytt eksempel på det (se figur 7.4). Hun ble av forfatteren kategorisert med en operasjonell forståelse og definerte likhetstegnet med "20 + 2 = 22, da er det er lik som på en måte gir deg svaret". En definisjon kategorisert som en operasjonell tolkning ut i fra analysemetoden fra kapittel 3. Hennes første besvarelse på oppgave 3a vil jeg påstå er et typisk svar på en oppgave med på et slikt format, et svar som bærer preg av en operasjonell forståelse av likhetstegnet. I tillegg har eleven akkurat arbeidet med kontrolloppgavene med standard aritmetisk format (a + b = c) som derfor kan fremprovosere eller trigge en operasjonell forståelse (Chesney & McNeil, 2014). Elisabeth har videre på oppgave 3b skrevet et spørsmålstegn. På kontrolloppgavene så har hun klart 3/4 oppgaver, slik at hennes generelle matematiske ferdigheter ikke burde påvirke hennes manglende besvarelser. Jeg vil derfor tolke det slik at et format som a + b = c + __ ble uforståelig i forhold til hennes syn på likhetstegnet. Slik jeg ser det viser hun kjennetegn av mønsteret *operasjon = svaret* hvor eleven mener oppgaven skal være på venstre siden og svaret på høyre siden av likhetstegnet (McNeil m.fl, 2011). I oppgave 3c blir Elisabeth introdusert for et annet format (a = b + c) hvor operasjonen nå er plassert på høyre siden av likhetstegnet. I forhold til hennes operasjonelle forståelse oppstår det det nå en tydelig kognitiv konflikt og slik jeg ser det tar hun i bruk strategien *kalkulere på alle tilgjengelig tall* hvor hun omformer oppgave 3c til 11 + 11 = 22. Et klart tegn på at strategivalg blir påvirket av formatet på oppgaven er at hun bruker samme strategi på oppgave 4c som også har formatet "a = b + c". Mens på oppgave 4a oppstår det en *regnekjede* hvor formatet a + b = c + d = e blir omformet til to ulike regnestykker på formatet a + b = c og deretter c + d = e. Elisabeth bruker da det operasjonelle mønsteret *kalkulere totalen* hvor likhetstegnet blir tolket som et handlingssymbol fremfor et symbol som representerer relasjon mellom mengder.

4.1.3 "Likt på begge sider"

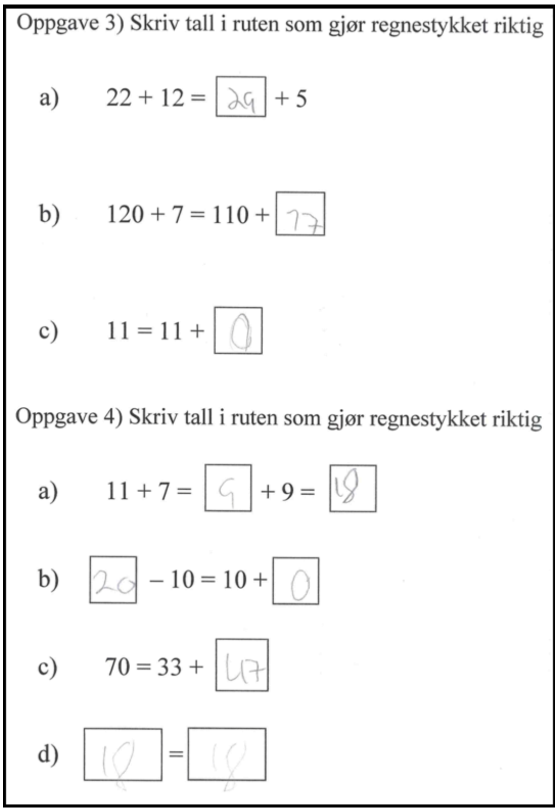
Jeg har til nå i dette kapittelet hatt størst fokus på elevene som viser operasjonell forståelse og hva som kjennetegner disse elevenes regnestrategier eller regnemønster på ekvivalensoppgaver. Videre vil jeg rette oppmerksomheten mot de elevene som jeg mener, ut i fra analysemetodene fra kapittel 3, viser god forståelse for matematisk ekvivalens.

I kapittel 2 blir det skrevet om forbindelsen mellom forståelse av likhetstegnet og prestasjoner ved løsning av algebraiske ligninger (Knuth m.fl., 2006). Elever som ga en relasjonell tolkning av likhetstegnets rolle i matematikkoppgave påviste større ferdigheter i arbeid med ligninger enn elevene som ga en operasjonell tolkning. Mine forskningsobjekter blir også vurdert i hvordan de tolker likhetstegnets rolle, samtidig som de blir vurdert i arbeid med ekvivalensoppgaver. Jeg har tidligere i dette kapitelet vist at en operasjonell tolkning kan påvirke elevenes prestasjoner på ekvivalensoppgaver på en negativ måte. Jeg vil derfor vise sammenhengen mellom elevene med ekvivalensforståelse og deres tolkning av likhetstegnet. Hvilken tolkning som blir kategorisert som operasjonell eller relasjonell ble presentert i analysedelen i kapittel 3.

Tolkning av likhetstegnet	**Antall elever**
Operasjonell tolkning	2
Relasjonell tolkning	14

Tabell 4. Statistikk over elevene som viste forståelse for matematisk ekvivalens og deres tolkning av likhetstegnet.

Som tabell 4 viser er det en opplagt sammenheng mellom elevenes tolkning av likhetstegnet og forståelse av matematisk ekvivalens. Av elevene som ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens ga alle bortsett fra to elever en relasjonell tolkning av likhetstegnet på enten oppgave 1b eller 1c. Det viser en sterk sammenheng mellom elevenes forståelse for matematisk ekvivalens og hvordan de tolker likhetstegnets rolle i en matematikkoppgave. Men resultatet betyr samtidig at det er to elever som ga en operasjonell tolkning av likhetstegnet og fortsatt ble kategorisert med god forståelse for matematisk ekvivalens. En av elevene med operasjonell tolkning var Pål. Hans besvarelse på oppgave 1b og hans tolkning av likhetstegnet funksjon er "hva tallene blir til sammen" og blir ut i fra min analysemetode kategorisert som en operasjonell tolkning


Oppgave 3) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) 22 + 12 = 29 + 5

b) 120 + 7 = 110 + 77

c) 11 = 11 + 0

Oppgave 4) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) 11 + 7 = 9 + 9 = 18

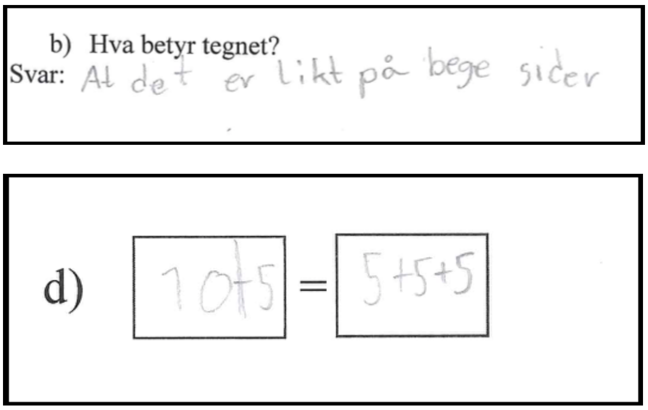
b) 20 – 10 = 10 + 0

c) 70 = 33 + 47

d) 18 = 18

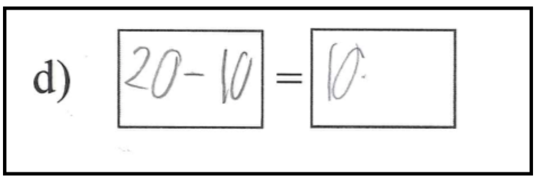
Figur 8.0. Pål sin besvarelse på oppgave 3 og 4.

Grunnen til at han ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens var hans gode besvarelser på oppgave 3 og 4 (se figur 8.0). Hvis vi ser bort i fra en opplagt regnefeil på oppgave 4c så har han alt riktig og viser god konseptuell forståelse for ekvivalens. Et annet tegn som viser Påls gode forståelse er hans svar på oppgave 4d hvor han skriver 18 = 18 (noe utydelig på figuren). Et svar som ignorerer hans tolkning om at likhetstegnet betyr "hva tallene blir til sammen" i og med at 18 = 18 ikke inneholder noen regneoperasjoner. De fleste elevene som ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens ga slike svar på oppgave 4d med formatet x = x. Men det var noen unntak. Siv konstruerte en ekvivalensoppgave 10 + 5 = 5 + 5 + 5 (se fig. 8.1) og hadde samtidig en relasjonell tolkning av likhetstegnet, følgelig "at det er likt på begge sider". Hun viste, slik jeg ser det, god forståelse for matematisk ekvivalens. Mens Julius derimot (se fig. 8.2) konstruerte en matematikkoppgave med et standard format (20 – 10 = 10), som opplagt er riktig, men som jeg mener viser mer operasjonelle trekk. Han konstruerer da et regnestykke med tegn på mønsteret *operasjon = svaret* hvor venstre siden av likhetstegnet skal inneholde en operasjon og svaret skal være til høyre.


b) Hva betyr tegnet?
Svar: At det er likt på bege sider

d) 10+5 = 5+5+5

Figur 8.1. Siv sin besvarelse på oppgave 1b og 4d

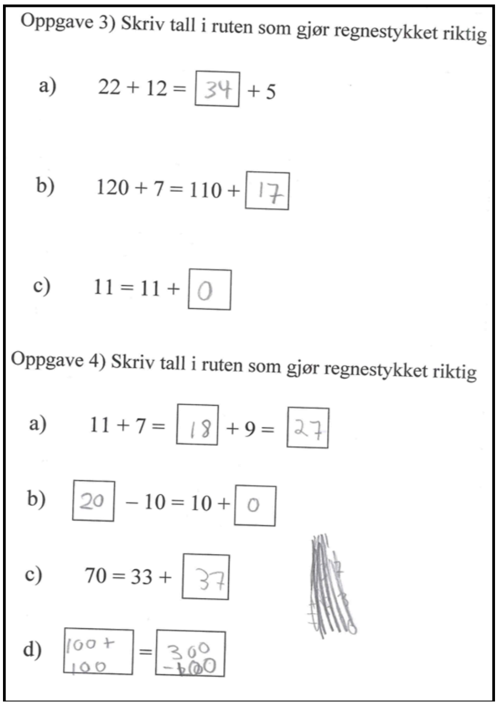

d) 20-10 = 10

Figur 8.2. Julius sin besvarelse på oppgave 4d.

Elever i overgangsfase

Elevene blir kategorisert ut i fra analysemetoden i kapittel 3. Men kriteriene for kategoriseringen er ikke helt tydelig. Når jeg analyserer må jeg ta stilling og hensyn til skjønn i forhold til regnefeil og at elevene befinner seg i en overgangsfase mellom to forståelser. Anita var en elev som, ut i fra min oppfatning, er i en tydelig overgangsfase. Hun ble derimot kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens pga. hvor langt i overgangsfasen hun var kommet. Hennes tolkning av likhetstegnet var "sum/hva noe blir tilsammen", som blir kategorisert som en operasjonell forståelse av likhetstegnet. En tolkning som kan knyttes med McNeil m.fl. (2011) sitt operasjonelle mønster *kalkulere totalen* hvor eleven tolker likhetstegnet som et handlingssymbol og vil bl.a. føre til *regnekjeder* i to-stegs-oppgaver.

Jeg har allerede i dette kapittelet analysert Pål som også ga en operasjonell tolkning av likhetstegnet, men som viste klare tegn på forståelse for ekvivalens med hans gode besvarelser på oppgave 3 og 4. Anita derimot har noe varierende resultat på samme oppgaver. Som figur 9 viser har hun svart feil oppgave 3a og 4a, oppgaver det var høy feilprosent på. Svarene er også typiske i forhold til hennes operasjonelle tolkning av likhetstegnet som handlingssymbol, hvor hun på oppgave 3a ignorerer verdien på høyre side av tegnet og på oppgave 4a konstruer *regnekjeder*. Derimot har hun svart godt på resten av oppgavene og hun har i tillegg konstruert en ekvivalensoppgave på oppgave 4d (100 + 100 = 300 – 100), som jeg tidligere har beskrevet som en sterk indikasjon på ekvivalens forståelse. Jeg kategoriserte derfor henne med forståelse for ekvivalens hvor jeg konkluderte med at hun viser større preg av ekvivalensforståelse enn operasjonell forståelse.


Oppgave 3) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) 22 + 12 = $\boxed{34}$ + 5

b) 120 + 7 = 110 + $\boxed{17}$

c) 11 = 11 + $\boxed{0}$

Oppgave 4) Skriv tall i ruten som gjør regnestykket riktig

a) 11 + 7 = $\boxed{18}$ + 9 = $\boxed{27}$

b) $\boxed{20}$ – 10 = 10 + $\boxed{0}$

c) 70 = 33 + $\boxed{37}$

d) $\boxed{100 + 100}$ = $\boxed{300 - 100}$

Figur 9. Anita sine besvarelser på oppgave 3 og 4.

4.2 Analyse av elevenes arbeid med algebraiske tekstoppgaver

I kapittel 4 har jeg til nå drøftet datamateriale som angår elevenes forståelse for matematisk ekvivalens. Jeg vil rette fokus på mitt andre forskningsspørsmål om hvordan elever som fremstår med ulik forståelse for matematisk ekvivalens løser algebraiske tekstoppgaver. For å svare på forskningsspørsmålet vil jeg analysere to elevgruppers gjennomførelse av tekstoppgavene. Siden jeg har valgt å gjennomføre en multiple-kasusstudie vil jeg først analysere elevene som viste en operasjonell forståelse i arbeid med ekvivalensoppgaver, før jeg deretter vil analysere elevene som viste en god forståelse for matematisk ekvivalens. Arbeidet med oppgavene ble gjennomført i et oppgavebasert intervju og jeg vil analysere utvalgte episoder fra intervjuene med utgangspunkt i analysemetoden fra kapittel 3. I denne analysedelen vil jeg kun fokusere på intervjuene og ikke det de noterte underveis. Notatene inneholdt kun svar på oppgavene og bæret ikke noe preg av strategivalgene de foretok seg. Jeg vil derfor bare fokusere på deres muntlige resonnering og diskurs.

4.2.1 Elevgruppe med operasjonell forståelse

Første gruppe består av elevene Ane (se analyse av hennes bevarelser på ekvivalensoppgavene i kap. 4.1.2) og Kristine. Begge elevenes arbeid med ekvivalensoppgavene mener jeg var sterkt preget av det som fremstår som operasjonell forståelse og de viste bl.a. tegn på den operasjonelle strategien *kalkulerer på alle tilgjengelig tall*. Men som nevnt i kapittel 3 så har jeg valgt elever som har svart godt på kontrolloppgavene og har derfor vist gode generelle matematiske ferdigheter. I intervjuene er det forfatteren av denne oppgaven som intervjuer elevene.

Oppgave 1

Den første oppgaven elevene skulle arbeide med er den letteste av de fem tekstoppgavene og ment mer som en oppvarmingsoppgave for elevene for å skape trygghet i intervjusituasjonen. Oppgavetypen betegnes som *ukjent start* og krevde to steg (operasjoner) for å finne svaret. Elevene fant derfor raskt ut løsningen på oppgaven.

Episode 1.

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
101	Ane	Jeg tror han får litt mer enn 200 kr eller noe ... for hvis man tar 120 + 85 da blir det jo 205 også har han 45 igjen, da må vi ta.	Nils fikk noen penger fra bestefaren sin for å kjøpe seg noe fint. Etter handleturen har han 45 kroner igjen. Nils brukte 120 kroner på en CD og 85 kroner på fotballkort. Hvor mye penger fikk han fra bestefaren?
102	Kristine	Plusse det på	
103	Ane	Da må vi ta 205 + 45 tror jeg.	
104	Kristine	205+45	
105	Ane	250	
106	Kristine	250 + 45?	
107	I	Det er lov å skrive ned, kladde litt.	
108	Ane	205, var det ikke det?	
109	Kristine	Jo, også tar vi pluss 45.	
110	Ane	Ja det blir 250.	
111	I	Ja det er helt riktig, men hva tenkte dere når dere så oppgaven?	
112	Ane	Vi tenkte å plusse på 120 + 85 + 45 for han hadde 45 kroner igjen, også brukte han jo 120 og 85, så vi må plusse alle tallene for å vite hvor mye penger han hadde ... også hadde han jo 45 igjen.	

Handlingen i oppgaven virket lett tilgjengelig for elevene og de fant raskt en strategi som ville finne den riktige løsningen. Slik jeg tolker elevenes regneprosess så var oppgavenes kontekst gjenkjennbar for elevene og de kunne derfor bruke deres tilegnede kunnskaper fra virkeligheten. De tok altså i bruk strategi-c fra analysemetoden i kapittel 3 som går ut på at elevene velger operasjoner som passer til oppgavenes situasjon.

Oppgave 2

Denne oppgaven mener jeg stiller høyere krav til elevene i forhold til å forstå relasjonen mellom mengdene som teksten representerer. Grunnen er at oppgaven ikke er av typen *et-steg-problem* som Reed (1999) mener er elementære tekstoppgaver som kun krever en enkelt aritmetisk operasjon. Og oppgaven krever også mer enn to steg som var tilfelle i oppgave 1. I denne oppgaven brukte Ane og Kristine flere strategier for å finne løsningen på oppgaven. Når de opplevde at første strategi ikke fungerte, gikk de så over på en ny strategi.

Episode 2

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
201	Ane	De hadde 180 stykker ... Hvordan skal vi finne svaret på det? *begge leser deler av oppgaveteksten på nytt*	Sara, Stine og Ida samler på viskelær. De har til sammen 180 stykker. Sara har dobbelt så mange viskelær som Stine, mens Ida har 20 flere viskelær enn Stine. Hvor mange viskelær har jentene, hver for seg?
202	Ane	Må vi ta å dele 180 da.	
203	I	Ja?	
204	Kristine	Delt på 3.	
205	Ane	Også må vi ta noen vekk fra Stine. Ok, 180 delt på 3. *Regner ut 180/3 = 60*	
206	Ane	Ja, og Sara har jo dobbelt så mange viskelær som Stine, derfor må vi ikke ta noen vekk fra Stine da?	
207	I	Stine vil ha minst ja, som dere sa.	
208	Ane	Derfor har Sara 120 viskelær? Hun har dobbelt så mange som Stine. Men vi skulle jo trekke i fra Stine.	

Episode 2 viser at Ane og Kristine ikke klarer å konstruere en sterk forståelse til relasjonen mellom mengdene i handlingen. Ane tar utgangspunkt i tallet 180 (sitat 201) og viser dermed at hun har skjønt hva oppgaven spør etter. Ane og Kristine er samstemte om at divisjon er riktig operasjon som må utføres (sitat 202-205). Denne metoden mener jeg viser tegn på strategi-B hvor elevene leter etter nøkkelord eller nøkkeltall i teksten. De tar utgangspunkt i at de til sammen har 180 viskelær og det skal deles på tre stykker. 180 og 3 blir nøkkeltall og fordelingen som må gjøres på de tre tyder på at divisjon er riktig valg av operasjon. Jeg mener også at deres metoder viser tegn på strategi-C som handler om å velge operasjon ut i fra tekstens situasjon. Oppgaven handler om å fordele et totalt antall viskelær på tre personer og divisjon blir en noe naturlig handling ut i fra tekstens situasjon. Men bruk av denne strategien viser ikke tegn på balanse mellom det som ville vært to sider av en ligning og er en strategi typisk brukt på standard aritmetiske tekstoppgaver (Reed, 1999). Ane og Kristine finner etterhvert ut at denne strategien ikke var tilstrekkelig for å finne løsningen (sitat 208). Oppgaven blir tilslutt løst med at jeg hjelper elevene til å ta i bruk "prøve og feile" metoden. Jeg hjelper elevene til å ta utgangspunkt i hvor mange viskelær Stine har og hvor elevene deretter bruker strategi-E.i som betyr å skalere opp eller ned på svaret de får til løsningen er funnet. Strategien betyr å gå fremover i et funksjonelt forhold mellom mengdene (Walkington m.fl. 2012). Men elevene viste ingen tegn på en slik forståelse siden jeg involverte meg mye og hjalp elevene med å finne en strategi som kunne gi de svaret på oppgave.

Oppgave 3

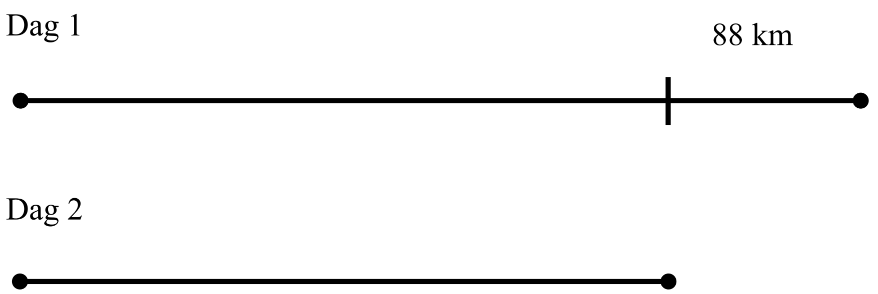
Tekstoppgavene i denne studien er konstruert med tanke på at språklige ferdigheter og realistisk vurdering ikke skal prege elevenes prestasjon. Oppgavenes handling skal være lett tilgjengelig for elevene. Ut i fra hvordan Kristine og Ane arbeidet med denne oppgaven i intervjuet, så kan det tenkes at lite hensyn til oppgavenes handling preget noe av deres resonnementer.

Episode 3

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
301	Kristine	Kan vi da det **peker på 520** minus det **peker på 88**?	Familien Hansen kjører 520 kilometer på to dager. Den første dagen kjører de 88 kilometer mer enn den andre dagen. Hvor mange kilometer kjører familien den første dagen?
302	Ane	520 - 88	
303	Kristine	Ja, hjelper det noe?	
304	I	Kanskje det, hvorfor tenkte du det?	
305	Ane	Familien Hansen kjører 520 km på to dager, den første dagen kjører de 88.	
306	Kristine	Ja, da har de jo kjørt det. Da må vi trekke i fra det, så det vi får der.	
307	Ane	Og det som vi får under der (520-88) er ikke det svaret på den første dagen?	

Sitat 301 og 302 viser hvordan Kristine og Ane velger tallene 520 og 88, de to tilgjengelige tallene i teksten. En handling som bærer preg av strategi-B hvor de peker ut nøkkeltall og nøkkelord i teksten som forteller hvilken operasjon som må utføres. Sitat 306 viser hvordan Kristine begrunner operasjonen og valg av subtraksjon som handlingstegn når det skal regne med tallene 520 og 88. De velger altså operasjon ut i fra at familien Hansen har kjørt 88 km, og de må derfor trekke i fra det. Min vurdering er derfor at de tar i bruk strategi-C hvor de velger operasjon ut i fra tekstens situasjon. Operasjonen de utfører kan gjøre at de kommer nærmere løsningen. Det er derimot lite som tyder på at de forstår sammenhengen mellom resultatet av operasjonen 520-88 og svaret på oppgaven. Ane viser i sitat 305 og 307 at hun ikke har vist nok hensyn til realistiske vurderinger og oppgavenes kontekst. Først viser hun dårlig leseforståelse eller realistisk vurdering med utsagnet om at den første dagen kjører familien Hansen 88 km, før hun lurer på om 432 km er svaret på den første dagen. Slik jeg tolker episoden og spesielt Anes resonnement er at de forventer at problemet er mer elementær og av typen *et-stegs-problem* (Reed, 1999). Som kan tyde på at Ane tenker 520-88 er operasjonen som fører de rett til svaret.

Elevene kommer ikke noe nærmere løsningen og jeg velger å hjelpe elevene i form av en tegning som illustrerer de to strekningene på dag 1 og dag 2 (se figur 10).



Figur 10. Illustrasjon basert på tegning lagd av intervjuer til oppgave 3.

Presentasjonen av tegningen til elevene genererte i episode 4 hvor nye strategivalg ble tatt.

Episode 4

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
308	Kristine	Men skal vi ikke ta 520 delt på 2 da, blir det ikke det? Da blir det likt her *peker på dag 1 i figur 10* og her *peker på dag 2 i figur 10* også plusse på 88.	Familien Hansen kjører 520 kilometer på to dager. Den første dagen kjører de 88 kilometer mer enn den andre dagen. Hvor mange kilometer kjører familien den første dagen?
309	I	Ok, prøv det ut. Vi kan bare bruke kalkulatoren her. 260.	
310	Ane	Da må vi ta 260 + 88.	
311	I	Ok, prøv.	
312	Ane	348.	
313	I	Hva har dere funnet ut nå?	
314	Ane	Hansen kjører 88 km mer enn den andre dagen, så da kjørte han 348 km den andre dagen.	
315	I	Den første dagen kjørte de 88 km enn den andre dagen.	
316	Ane	Den første dagen kjørte de 348, også den andre dagen ... kjørte han 260.	
317	I	Det blir ikke helt rett. For det blir over 520.	
318	Kristine	Da kan vi ikke dele på 2 da. Da blir det på en annen måte.	

Elevenes operasjoner i episode 4 mener jeg er preget av strategi-A fra analysemetoden. Sitat 308-310 viser at elevene prøver flere operasjoner på de forskjellige tallene tilgjengelig i teksten og velger til slutt det de mener er det mest fornuftige svaret (sitat 316) (Reed, 1999). Strategi-A vil ofte være tilstrekkelig på elementære tekstoppgaven, men i denne oppgaven stilles det derimot krav om forståelse mellom mengdene der kjørelengdene på dag 1 og dag 2 er i direkte relasjon til 520 km. Selv med mye hjelp i form av illustrasjon av kjørelengdene klarte ikke Ane og Kristine å løse denne oppgaven.

Oppgave 4

Denne tekstoppgaven er av samme typen som oppgave 3 og stiller dermed samme krav til forståelse for relasjonen mellom de ulike avismengdene og avismengden til sammen. Siden oppgaven har samme preg som oppgave 3 velger elevene også samme strategi.

Episode 5

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
401	Ane	Da har Roger levert 8 aviser. Mens Mari har levert 16 aviser. Også må vi finne ut hvor mye Petter har levert.	Roger, Mari og Petter jobber som avisbud. Denne uken har de levert til sammen 44 aviser. Roger har levert 8 aviser, mens Mari hadde levert dobbelt så mye som Petter. Hvor mange aviser hadde Roger, Mari og Petter levert, hver for seg, denne uken?
402	I	Ok, tenk over hva du sa. Roger har levert 8 aviser, det står i teksten.	
403	Ane	Også har Mari dobbelt så mange, så da har hun 16.	
404	I	Men dobbelt så mange som?	
405	Kristine	Roger ... Nei, Mari har ikke 16. Men da må vi finne ut hva Petter har. *pause*	

406 407 408	Ane Kristine Ane	De leverte 44 aviser. Da må vi ta 44 delt på 3. 44-8, og det blir 34 ... 36 ... Hvis Roger har levert 8, da har vi 36 aviser igjen. Da må vi dele 36 på 2 også ta det dobbelte. Jeg vet ikke.	

Sitat 401 viser hvordan Ane innleder en strategi-B hvor hun velger ut nøkkelord og tall som 8 og *dobbelt*. Slik jeg tolker sitat 401 så forventer ikke eleven at Mari har det dobbelte av en *ukjent* verdi, og Ane velger dermed det dobbelte av verdien som er kjent, nemlig Roger sin mengde med aviser. Når Anes strategi ikke viser seg å funke, velger Kristine i sitat 407 strategi-C som hun også brukte i oppgave 2. Oppgaven handler om å fordele en total mengde på tre personer der oppgaven stiller diverse krav til delingen. Kristine velger da strategi-C og deler totalmengden 44 på de tre personene. Så viser Ane god forståelse og fjerner Rogers sin mengde fra totalen og sitter dermed igjen med 36 aviser og to personer (sitat 408). Med det nye utgangspunktet så tar også Ane i bruk det jeg mener er strategi-C og vil dele 36 aviser på Mari og Petter og deretter doble svaret. Selv om Ane ikke helt kommer i land, viser det stor fremgang i forhold til oppgave 3. På forrige oppgave fjernet de også den ene delmengden fra totalen, men klarte ikke i å finne relasjonen mellom 432 km og de to strekningene som ble kjørt. Denne gangen mener jeg Ane er nærmere å forstå forholdet mellom 44-8 = 36 aviser og de ulike mengdene som skal fordeles på de resterende personene. Elevene klarte etterhvert å finne løsningen etter mye hjelp fra intervjuet. Episode 6 oppstår etter jeg hadde tegnet opp avisbunker for å illustrere mengdene.

Episode 6

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422	I Kristine I Kristine I Ane I Kristine I Kristine Ane I Ane Kristine	Hvordan kan vi finne ut hvor mange hver bunke (med aviser) er? Fordi de er jo like store. Hvis det er 8 aviser i hver bunke, er alle bunkene 8 hver. Men er det ikke 36 delt på 3 da? Hvorfor tror du det? Fordi hvis vi har to like tall, så plusser vi på den ene ... jeg vet ikke. Hva finner vi hvis vi deler på 3 da? Hvis vi har delt 36 på 3? Det blir 12. Så en bunke er 12 aviser. Ho (Mari) får 24 og han (Petter) får 12 da. Er det svaret? Nei jeg tror ikke det. Roger fikk bare 8. Og må vi ikke ta 36 delt på 2? Prøv å tenk det det her, når dere delte på 3, så fikk Petter 12 og Mari dobbelt så mange og Roger fikk 8. Men da fikk jo Petter 12 og Mari 24 og Roger fikk 8. Da er det jo svaret. Jeg trodde det var feil jeg.	Roger, Mari og Petter jobber som avisbud. Denne uken har de levert til sammen 44 aviser. Roger har levert 8 aviser, mens Mari hadde levert dobbelt så mye som Petter. Hvor mange aviser hadde Roger, Mari og Petter levert, hver for seg, denne uken?

Etter jeg har illustrert avismengdene kommer Kristine med en operasjon som hun mener vil kunne gi riktig svar (sitat 410). Operasjonen er helt riktig, men når hun blir utfordret rundt en forklaring på hvorfor operasjonen er riktig klarer hun ikke å komme et godt resonnement (sitat 412). Men i forhold til hennes svake resonnement og utsagnet på slutten (422) er det vanskelig å analysere om Kristine hadde en forståelse for hvorfor hun skulle ta 36/3. Det kan derimot tenkes at hun tok i bruk strategi-A hvor hun prøver ulike operasjoner på de forskjellige tallene. I sitat 416-418 har Kristine regnet ut at Mari får 24 og Petter dermed får 12, som er riktig svar. Men hun klarer ikke å overbevise seg selv om at det er den endelige løsningen.

Oppgave 5

Slik som oppgave 1 er denne tekstoppgaven av typen *ukjent start*. Løsningen handler om å finne verdien som var utgangspunktet i handlingen. Ane finner umiddelbart løsningen på oppgaven. Men når jeg utfordrer henne til å argumentere for svaret klarer hun ikke å forsvare løsningen.

Episode 7

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
501	Ane	Da hadde hun bare 7, hadde hun ikke det?	Emily har bursdag i dag, og hun ønsker seg flere pokemonkort. Etter bursdagen hadde samlingen blitt tre ganger så stor. Siden hun fikk så mange, ga hun bort 7 kort til vennen sin. Etter hadde hun gitt bort kortene til vennen sin hadde hun nå 14 pokemonkort. Hvor mange pokemonkort hadde Emily før bursdagen sin?
502	I	Hvorfor tror du det?	
503	Ane	Fordi 7+7 er 14 også blir 7 til så blir det 21, også ga hun bort 7.	
504	I	Prøv å skriv ned og forklar underveis.	
505	Kristine	Så skal vi ta 14 + 7 er 21 også skal vi ta minus.	
506	Ane	Tre ganger 7 også blir det 21.	
507	Kristine	Ja fordi hun hadde jo de to ja.	
508	Ane	Ja så hvis hun har 7 fra før av og fikk tre ganger så mye.	
509	Kristine	Nei vent litt.	
510	I	Prøv å skriv ned hva dere tenker.	
511	Ane	Jeg tenker hun hadde 7 først også fikk hun 14 stykker til, også ga hun bort 7, så hadde hun 14 igjen. Så jeg tenker hun hadde 21 pokemonkort.	
512	I	At hun hadde 21 pokemonkort før bursdagen?	
513	Kristine	Ja.	
514	Ane	Ja, også ga hun bort 7, og det blir 14.	
515	I	Hvis hun hadde 21 før bursdagen sin, også etter bursdagen hadde den blitt tre ganger så stort. Spørsmålet er jo hvor mange hun hadde før bursdagen?	
516	Ane	Da må du ta 21 også plusse 7 tre ganger.	
517	Kristine	Nei blir det 21 ganger 3 da? Eller blir det 7 ganger 21?	
518	I	Nei, jeg tror du (Ane) var ikke på det helt i starten.	

Ut i fra sitat 511 er det tydelig at Ane hadde funnet riktig løsning. Som i oppgave 1 var hun veldig rask med å finne riktig metode og viste dermed god forståelse for relasjonen mellom start- og sluttverdi. Sitat 503 viser preg av strategi-E hvor det kan tenkes at Ane prøver å kalkulere med tallet 7 for å se hvordan det passer inn i forhold til de andre verdiene. Slik jeg tolker hennes misforståelse, så er hun ikke vant med at startverdien er den ukjente, slik at svaret på operasjonen hun utfører blir til løsningen på oppgaven (siste setning i sitat 511). Jeg prøver å forklare hennes misforståelse i sitat 515. Kristine prøver å henge med (sitat 517), men i motsetning til Ane har hun ikke forstått oppgaven helt. Arbeidet med oppgave 5 ender opp, etter initiativ fra meg, med strategi-E.i fra analysemetoden i kapittel 3 hvor elevene foreslår ulike startverdier og ser om svaret blir riktig.

4.2.2 Elevgruppe med forståelse for ekvivalens

Den andre gruppen jeg intervjuet besto av elevene Jonas og Frida. Dette var elever som viste god forståelse for matematisk ekvivalens i gjennomførelsen av oppgavene konstruert for mitt første forskningsspørsmål. Begge elevene definerte likhetstegnet rolle som "likt på begge sider" og hadde følgelig alt riktig på kontrolloppgavene og ekvivalensoppgavene.

Oppgave 1

Som forventet var ikke denne oppgaven noe utfordrende for denne gruppen heller. Som gruppe 1 var det tydelig at elevene brukte situasjonsresonnering hvor deres kunnskaper fra virkeligheten styrket deres valg av strategi og kalkuleringer.

Episode 8

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
601 602 603	Frida I Frida	Det er ikke så vanskelig. Hva er det første du tenkte? Jeg tenkte vi kunne bare ta alle de tallene og plusse de sammen, fordi han hadde så mye igjen (45) også brukte han det (120 og 85).	Nils fikk noen penger fra bestefaren sin for å kjøpe seg noe fint. Etter handleturen har han 45 kroner igjen. Nils brukte 120 kroner på en CD og 85 kroner på fotballkort. Hvor mye penger fikk han fra bestefaren?

Episoden over viser at denne tekstoppgaven ble løst umiddelbart og sitat 603 mener jeg tyder på bruk av strategi-C. Jeg vil igjen tolke det slik at elevene har et sterkt forhold til en slik kategori (handle-kontekst) innenfor tekstoppgaver og de kunne bruke deres erfaringer fra tidligere oppgaver og fra virkeligheten til å velge de riktige operasjonene.

Oppgave 2

Denne oppgaven krever å forstå hvordan mengdene funksjonelt henger sammen og deres relasjoner i forhold til beskrivelser i teksten. Både Frida og Jonas viste i arbeid med oppgave 2 at de besitter god forståelse for balansen mellom det som ville vært to sider av en ligning.

Episode 9

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
701	Frida	Hvis Sara har dobbelt så mange som Stine, så har jo Sara mest av alle. Hvis ikke ...	Sara, Stine og Ida samler på viskelær. De har til sammen 180 stykker. Sara har dobbelt så mange viskelær som Stine, mens Ida har 20 flere viskelær enn Stine. Hvor mange viskelær har jentene, hver for seg?
702	I	Ja, det kommer vel an på hvor mange Stine har da.	
703	Frida	Enten Ida eller Sara.	
704	Jonas	Sara har jo dobbelt så mange som Stine.	
705	Frida	Mens Ida har 20 viskelær mer enn Stine. Hvis vi f.eks. sier at Sara har 80 viskelær. Også har hun dobbelt så mange som Stine, så har Stine 40 og derfor har Ida 60. Så hvis vi tar 80, 40, 20 så blir det 140.	

Elevene klarer raskt å sortere ut informasjonen tilgjengelig i teksten og sitat 705 viser at Frida har forståelse for det funksjonelle forholdet mellom mengdene. Hun bruker strategi-E som blir av Walkington m.fl. (2012) beskrevet som en "prøve og feile"-strategi og en uformell strategi knyttet direkte til handlingen på historien eller en algebraisk ligning. Frida tar en tilfeldig tall (80) og regner deretter ut hva de forskjellige mengdene blir med utgangspunkt i det tilfeldige tallet. Det tilfeldige tallet var også det riktige tallet for å løse oppgaven. Men som sitat 705 viser så regner Frida med feil verdier (20 istedenfor 60) og får derfor feil svar, selv om hun i utgangspunktet regnet riktig.

Episode 10

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
706	Frida	Så hvis vi sier at Sara har 90 da. Da har Stine 45 også har Ida 65. Da er det bare å regne ut det. Så hvis vi sier at Sara har 90, så har Stine 45, da blir det 200.	Sara, Stine og Ida samler på viskelær. De har til sammen 180 stykker. Sara har dobbelt så mange viskelær som Stine, mens Ida har 20 flere viskelær enn Stine. Hvor mange viskelær har jentene, hver for seg?
707	Jonas	Hva hvis vi tar 85 da.	
708	Frida	Da har Stine 42,5. *ler*	
709	I	Ok, det kunne ikke være 90 for da ble det for mye?	
710	Jonas	Ja.	
711	I	Har dere regnet på 80?	
712	Jonas	Vent, hvis du har 80, så har Stine 40, så har hun andre 60, da er det jo 100 også pluss 80, det er jo 180.	

Siden Frida i episode 9 regnet med gale verdier ble svaret feil. Frida og Jonas (sitat 705 og 706) bruker derfor strategi-E.i hvor de "skaler opp og ned" fra et tidligere svar for å finne løsningen. I sitat 711 hjelper jeg elevene med å hinte til at de bør prøve å regne på nytt med utgangspunkt i 80 viskelær og Jonas klarer deretter å finne det riktige svaret.

Oppgave 3

I oppgave 3 er det to tilgjengelig tall, følgelig 520 og 88. Slik jeg tolket den forrige gruppen strategi-B, utfører de en operasjon på de nevnte tallene ut i fra nøkkelord i teksten. Operasjonen gruppe 1 utførte kunne ført de nærmere løsningen, men de klarte som nevnt ikke å jobbe videre med tallet de fikk fra kalkuleringen. Frida finner frem til samme operasjon, men klarer å jobbe videre med den nye verdien.

Episode 11

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
801	Frida	Jeg føler egentlig, jeg vet ikke om det er riktig da, men jeg føler 520-88 også får du et svar, og hvis de kjører det, nei. Jeg er ikke helt sikker.	Familien Hansen kjører 520 kilometer på to dager. Den første dagen kjører de 88 kilometer mer enn den andre dagen. Hvor mange kilometer kjører familien den første dagen?
802	I	Hva får du hvis du tar 520-88 da. Kan bare ta det på kalkulatoren.	
803	Frida	432.	
804	I	Første dagen har de kjørt 88 km lengre enn den andre dagen *lager en tegning som illustrerer strekning*. Også til sammen av første og andre dagen er 520.	
805	Frida	Kan vi ikke ta 432 delt på 2 også sette 88 på en av dagene.	

Sitat 801 viser preg av strategi-B hvor Frida, i likhet med gruppe 1, utfører en operasjon på de to tilgjengelige tallene i teksten. Men der Ane forventet at 432 skulle være svaret på oppgaven, så tenker Frida at det må kalkuleres videre med tallet. Hun finner til slutt løsningen på oppgaven (sitat 805). Slik jeg ser det bruker ikke Frida noen av strategiene analysemetoden fra kapittel 3. Hun bruker en metode der hun først utfører en kalkulasjon som vil sørge for at hun er nærmere svaret, før hun deretter ser hvordan svaret passer inn i forhold til løsningen på oppgaven. Strategien har preg av hvordan man vil løse denne oppgaven som en ligning (ytterligere forklaring kommer i kap. 5). Jeg mener hun dermed viser god kontroll på hvordan de to kjørestrekningene fremtrer i et funksjonelt forhold med totalmengden. Siden Frida raskt fant svaret på oppgaven, var ikke Jonas like mye involvert i løsningsprosessen og det er vanskelig å si ut i fra lydopptaket om han forsto løsningsforslaget til Frida.

Oppgave 4

I oppgave 3 var Frida veldig fremtredende og Jonas fikk derfor ikke vist at han forsto oppgaven. I denne oppgaven viste han derimot at han også besitter god forståelse for det funksjonelle forholdet mellom mengdene.

Episode 12

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
901	Jonas	Vi vet at han har levert 8 (aviser), så må du ta 36 også skal Mari ha dobbelt så mye.	Roger, Mari og Petter jobber som avisbud. Denne uken har de levert til sammen 44 aviser. Roger har levert 8 aviser, mens Mari hadde levert dobbelt så mye som Petter. Hvor mange aviser hadde Roger, Mari og Petter levert, hver for seg, denne uken?
902	Frida	Roger har levert 8. Så hvis vi tar 44-8.	
903	Jonas	Det er 36.	
904	Frida	Også er det 36 delt på 2.	
905	Jonas	Nei, fordi Mari skulle ha dobbelt så mye som Petter.	
906	Frida	Ja.	
907	I	Dere er inne på noe da.	

908	Frida	Mari, dobbelt så mye som Petter. Hvis vi deler på tre da, også tar vi to av dem sammen, så blir det dobbelt så mye.	

Jonas forstår raskt at første operasjon som må utføres er å fjerne den kjente verdien (Rogers 8 aviser) fra totalmengden (sitat 901). Siden oppgave 3 og 4 er veldig lik i måten å løse oppgaven på, og derfor minner Jonas sin strategi på den Frida brukte i forrige oppgave. Han skjønner hvilken operasjon som må utføres først og svaret på den operasjon er i direkte relasjon til Mari og Petter sine mengder aviser. Frida tenker deretter feil (sitat 904) og slik jeg tolker det tar hun i bruk strategi-C fordi oppgaven nå tilsier at de skal dele 36 aviser på to personer. Jonas retter deretter opp Fridas feil og viser i sitat 905 at operasjonen som Frida vil utføre ikke vil føre til det riktige svaret. Operasjonen 36/2 fører til Mari og Petter har lik mengde med aviser, men som Jonas poengterer så skal Mari ha dobbelt så mye Petter. Episode 12 ender med at Frida finner det riktige svaret.

Oppgave 5

I oppgavene så langt så har Frida, og til dels Jonas, vist bra forståelse for det funksjonelle forholdet mellom mengdene knyttet til disse algebraiske tekstoppgavene. I denne oppgaven, av typen *ukjent start*, viser Frida igjen hvordan hun kjapt finner en god løsningsstrategi.

Episode 13

Nr.	Person	Sitat	Tekstoppgave
1001	Frida	Tror du vi kan ta 14+7, det blir jo 21. Også hvis du tar da 21, da har du jo 21 før ho har gitt bort til vennen, også siden den hadde blitt tre ganger så stor, så hadde ho 7 kort før bursdagen.	Emily har bursdag i dag, og hun ønsker seg flere pokemonkort. Etter bursdagen hadde samlingen blitt tre ganger så stor. Siden hun fikk så mange, ga hun bort 7 kort til vennen sin. Etter hadde hun gitt bort kortene til vennen sin hadde hun nå 14 pokemonkort. Hvor mange pokemonkort hadde Emily før bursdagen sin?
1002	I	Fordi?	
1003	Frida	La oss si at hun hadde 7 kort før bursdagen, så blir den tre ganger så stor, da har hun 21, hvis du tar 21-7 da blir det 14.	

Frida bruker tydelig strategi-F fra analysemetoden som i Walkington m.fl. (2012) blir kalt for *rygge-metoden.* Frida begynner med den kjente sluttverdien, som var 14 kort etter bursdagen sin, og reverserer operasjonene aritmetisk. Siden Emily i tekstoppgaven ga bort 7 kort, så må den operasjonen reverseres og derfor legges til sluttverdien. Og siden samlingen var blitt tre ganger så stor, så må det reverseres slik at 21 kort deles på 3. Denne strategien mener Walkington m.fl. skaper et funksjonelt forhold mellom mengdene, men den viser derimot ingen tegn på balanse mellom to sider av en ligning.

4.3 Oppsummering

Dette kapitlet begynte med resultatet fra analysen av en femteklasse sin forståelse for matematisk ekvivalens basert på deres tolkning av likhetstegnet og arbeid med ekvivalensoppgaver. Resultatet viste at rundt halvparten viste det som fremstår som operasjonell forståelse, mens den andre halvparten viste forståelse for ekvivalens. Et resultat som var forventet ut i fra tidligere forskning om at elevene i denne alderen er i en overgangsfase mellom de to forståelse (Kieran, 1981). Flere elever ga en tolkning av likhetstegnet som et handlingssymbol og jeg viste hvordan elevenes tolkning av likhetstegnet påvirket deres prestasjoner på ekvivalensoppgavene. I tillegg påviste jeg en sterk sammenheng mellom elevene som ble kategorisert med ekvivalensforståelse og relasjonell tolkning av likhetstegnet. Analyse viste i tillegg at noen ekvivalensoppgaver hadde betydelige høyere feilprosent enn andre, hvor jeg argumenterte for at oppgavenes format hadde direkte påvirkning på elevenes besvarelser.

I kapittel 4.2 gikk fokuset over på elevenes utførelse av algebraiske tekstoppgaver. Den første gruppen som ble analysert var elever som ble kategorisert med operasjonell forståelse. Tabell 5 viser en oversikt over hvilke strategier de to elevene tok i bruk når de skulle løse tekstoppgavene. I deres løsningsprosess kom det frem at de tok hyppig i bruk strategi-A, B og C, og ofte en variasjon av disse på samme oppgave. Strategiene er knyttet opp mot aritmetisk-baserte strategier og ofte brukt i elementære tekstoppgaver. Derimot på oppgave 5 tolket jeg det slik at Anes strategi bæret preg av *prøve-og-feile* som viste mer hensyn til forholdet mellom mengdene.

Oppgave	Strategi
1	C
2	B, C
3	B, A
4	B, C, A
5	E

Tabell 5. Ane og Kristine sine strategier i arbeid med tekstoppgavene.

Oppgave	Strategi
1	C
2	E, E.I
3	Ligning strategi
4	Ligning strategi, C
5	F

Tabell 6. Frida og Jonas sine strategier i arbeid med tekstoppgavene.

Mens gruppe 2, som besto av to elever som ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens, hadde en løsningsprosess som inneholdt andre strategier (se tabell 6). Jeg påviste tydelig bruk av strategi-E og strategi-E.i, samt strategi-F som alle blir beskrevet i Walkington m.fl. (2012) som uformelle strategier ofte brukt på algebraiske tekstoppgaver og viser tegn på forståelse for det funksjonelle forholdet mellom mengdene. I tillegg brukte Frida og Jonas en ukategorisert strategi som jeg har valgt å kalle for *ligning strategi*, da den er knyttet til hvordan man ville løst oppgaven som en ligning og har derfor preg av algebraisk innhold.

5 Diskusjon

I forrige kapittel ble først elevenes tolkning av likhetstegnet og deres arbeid med ekvivalensoppgaver analysert. Deretter ble elevenes arbeid med algebraiske tekstoppgaver analysert hvor fokuset var på elevenes strategivalg. Jeg vil i dette kapittelet drøfte materialet fra kapittel 4 i lys av teorien som var plattformen for denne oppgaven. Fokuset for denne delen av oppgaven er å drøfte hva analysen forteller angående forskningsspørsmålene.

Matematisk ekvivalens

Resultatet fra denne studien viser at nesten halvparten av elevene i en femteklasse ikke ble kategorisert med forståelse for matematisk ekvivalens ut i fra analysemetoden fra kapittel 3. Analysen viste deretter hvordan elevenes tolkning av likhetstegnet preget deres prestasjoner i arbeid med oppgaver med ekvivalensformat. Dette til tross for at elever på 5. trinn skal kunne, i følge kompetansemålene til Utdanningsdirektoratet, bruke matematiske symboler for å uttrykke matematiske sammenhenger. 45,5 % av denne klassen brukte altså likhetstegnet som et uttrykk for sammenhengen mellom "oppgaven" og "svaret" i oppgaveløsning, istedenfor et uttrykk for relasjonen mellom to like mengder. Resultatet er derimot samstemt med hva jeg forventet å finne basert på tidligere forskning om emnet (Kieran, 1981; Knuth m.fl., 2006). Et av funnene som jeg presenterte i kapittel 4 var sammenhengen mellom ekvivalens og tolkning av likhetstegnets rolle. Jeg har tidligere nevnt at matematiske ekvivalens ikke bare innebærer en relasjonell tolkning av likhetstegnet, men også hvordan man forstår relasjonen mellom mengdene i arbeid med matematikkoppgaver. Jeg fant altså en sterk sammenheng mellom en relasjonell tolkning av likhetstegnet og prestasjoner på ekvivalensoppgaver. Av de som presterte godt på ekvivalensoppgavene var det kun to elever som ga en operasjonell tolkning av likhetstegnet. Det er også et resultat som var forventet ut i fra forskningen til Knuth m.fl. (2006).

Men i analysen avdekket jeg flere unntak som bekreftet at tolkning av likhetstegnet ikke nødvendigvis automatisk betydde god forståelse for matematisk ekvivalens. Julie er et eksempel på dette. Hun gir en relasjonell tolkning av likhetstegnet, og kun ut i fra hennes tolkning ville Julie vært betegnet som en elev med god forståelse for likhetstegnet. Men når hun ikke klarer å vise at hun forstår likhetstegnets rolle i praksis vil jeg derfor ikke påstå at hun har forståelse for matematisk ekvivalens. Som vist i forrige kapittel så avviser hun ekvivalensoppgavene. Selv om Julie viser at hun forstår en sentral del i konseptet matematisk ekvivalens, nemlig likhetstegnets rolle, så har den konseptuelle forståelsen fortsatt store mangler. Og jeg mener hun er et tydelig eksempel på at tidlig kunnskap om et konsept er begrenset. Selv om Julie vet noe om X, i dette tilfelle rollen til likhetstegnet, betyr det ikke nødvendigvis at hun fullt forstår X (Rittle-Johnson m.fl., 2011).

Både i kapittel 2 og 4 blir begrepet *å avvise* diskutert. En sentral grunn til at jeg har valgt å bruke begrepet *å avvise* istedenfor elever som *ikke klarte* oppgavene er at operasjonene i ekvivalensoppgavene isolert sett er mindre utfordrende enn de på standard format i oppgave 2 og operasjoner som elever på femtetrinnet forventes å kunne. Og min vurdering av dette er at elever som svarer blankt på ekvivalensoppgavene avviser oppgavene fordi det kan ha oppstått en kognitiv konflikt. Jeg mener det er stor forskjell på elever som avviser oppgavene og de som svarte feil. Det stemmer overens med Cobb (1987) som mener elever med operasjonell forståelse for likhetstegnet ikke bare feilkalkulerer oppgavene med ekvivalensformat, men kan ofte oppleve en kognitiv konflikt og følgende ikke aksepterer oppgavene og svarer derfor blankt. Jeg fant derimot ingen sammenheng mellom elevene som avviste ekvivalensoppgavene, deres resultat på kontrolloppgavene og tolkning av likhetstegnet. Elevene som avviste ekvivalensoppgavene hadde altså ulike tolkninger, som nevnte Julie med en relasjonell definisjon og Nils med en tydelig operasjonell forståelse av likhetstegnets rolle.

Videre i analysen blir det i figur 5 presentert hvilke oppgaver som elevene i denne femteklassen hadde størst problemer med å løse. Ser man bort i fra den høye feilprosenten på oppgave 4c, der jeg konkluderte med at årsaken til resultatet var regnefeil, så var det tre oppgaver som skilte seg ut. Oppgave 3a og 4a var to av dem og hadde begge en feilprosent over 60%. Noe av årsaken til forekomsten av disse feilene vil jeg påstå er formatet på oppgaven og hvor ruten i oppgaven er plassert. Ruten hvor elevene skal skrive det ukjente tallet er plassert nærmest likhetstegnet på høyre siden. Dette formatet mener jeg får frem elevenes operasjonelle forståelse for likhetstegnet som et handlingssymbol fordi formatet ligner mest på mønsteret *operasjon = svaret* knyttet til McNeil m.fl. (2011) hvor kalkuleringen skjer på venstre siden av likhetstegnet og svaret på skal stå i den ledige plassen på høyre siden. Hvis elevene tidligere har jobbet mye med standard aritmetiske oppgaver (se fig. 2.0 og 2.1 i kapittel 2) kan det forklare mange av feilene som forekommer på disse oppgavene. For mye kan tyde på at formatet fremprovoserer elevenes tidligere kjennskap til standard aritmetiske oppgaver. Påstanden min tar utgangspunkt i Chesney & McNeil (2014) som mener at elever som har tilegnet seg operasjonell forståelse har vanskeligheter med å avlære tankesettet. Så selv om noen av elevene i denne studien viser god forståelse for matematisk ekvivalens kan en tidligere tilegnet operasjonell forståelse bli fremprovosert av arbeid med ekvivalensformatet med ruten på høyre siden av likhetstegnet. I tillegg kan oppgave 2 (kontrolloppgavene), som inneholdt oppgaver på standard aritmetiske format, aktivert elevenes operasjonelle forståelse. Chesney & McNeil (2014) mener altså at den operasjonelle forståelsen, hvis den først er tilegnet, alltid befinner seg i ubevisstheten.

Den høye feilprosenten på oppgave 3a og 4a hadde som nevnt årsak i at elevene tolket likhetstegnet som et handlingssymbol og dermed viste tegn på mønsteret *operasjon = svaret* fra McNeil m.fl. (2011). Et annet operasjonelt mønster som preget elevenes besvarelser på ekvivalensoppgavene var *kalkuler på alle tilgjengelige tall*. Et slikt mønster gjør at eleven totalt ignorerer hvor tallene og symbolene er plassert i oppgaven. Fokuset ligger derfor ikke på at oppgaven er plassert til venstre for likhetstegnet, som mønsteret *operasjon = svaret*, men derimot at alle tall som kommer før *svarruten* skal være med i kalkuleringen. I kapittel 4 presenterte jeg flere eksempler på slike elever. På oppgave 4c (11 = 11 +__) er ruten plassert helt til høyre. Elever med tegn på et slikt mønster vil derfor kalkulere på alle tallene som kommer før ruten, uavhengig av likhetstegnet, og i tillegg bruke det handlingssymbolet som er tilgjengelig. I dette tilfellet (4c) tegnet for addisjon. Silje var en elev sterk påvirket av hennes operasjonelle forståelse og av hennes tolkning av likhetstegnet som "at noe er svaret/må bli svart på". I tillegg til at hun viste tegn på mønsteret *kalkuler på alle tilgjengelige tall*, var det tydelig at hun ikke aksepterte et svar i form av en operasjon. På oppgave 3b (120 + 7 = 110 +__) viste hun tegn på det nevnte operasjonelle mønsteret med å skrive 237 i ruten, men hvor hun deretter ikke aksepterte at "svaret" kunne være en operasjon. Til tross for at elevene på forhånd fikk beskjed om å kun skrive i ruten, så lagde Silje en imaginær svarrute helt til høyre hvor hun adderte på alle tallene som kom før. Ut fra en slik tankegang har hun en svak plattform i det fremtidige møte med algebra, hvor plasseringen av tallene i forhold likhetstegnet er viktig. I tillegg må hun i algebra kunne akseptere svar som inneholder et handlingstegn (eks. x=2b+1).

Men oppgaven det var høyest feilprosent på var oppgave 4b og den eneste oppgaven som ikke bare inneholdt handlingstegnet for addisjon. Min forståelse av resultatet er at oppgaven var utfordrende i forhold til at minustegnet krevde en relasjonell forståelse for likhetstegnet og i tillegg forståelse for konseptet negative tall. De to mengdene som likhetstegnet skilte mellom inneholdt også begge sifferet 10, og elever som kun viser relasjonell forståelse for likhetstegnet, men ikke for negative tall vil derfor ofte feilkalkulere. Som nevnt i kapittel 3 har elever ofte problemer med negative tall og spesielt å forstå sammenhengen mellom negativer og minustegnet (Vlassis, 2008). Slik jeg ser det viste derfor elevene som klarte denne oppgaven god forståelse for matematisk ekvivalens når de i tillegg viste tegn på konseptuell forståelse for negative tall som jeg mener inngår i konseptet ekvivalens.

Algebraiske tekstoppgaver

Denne femteklassen var altså delt i forhold til hvilken forståelse de fremsto med i tolkningen av likhetstegnet og i arbeid med ekvivalensoppgaver. Mitt andre forskningsspørsmål spør om denne forståelsen påvirker hvordan elevene løser algebraiske tekstoppgaver. Hensikten med forskningsspørsmålet var å studere om elevenes strategivalg var preget av deres forståelse for matematisk ekvivalens og om strategiene inneholdt algebraisk tenkning. Første gruppen som gjennomførte tekstoppgavene var Ane og Kristine, elever som ble kategorisert med operasjonell forståelse. Som tabell 5 i forrige kapittel viser så brukte elevene nesten utelukkende strategier som er Reed (1999) definerer som aritmetisk-baserte strategier. Min forståelse av deres strategivalg er at de stammer fra tidligere utførelse av tekstoppgaver som er mer elementære i den forstand at de ikke krever mer enn to steg for å løse. Noen av tekstoppgavene i denne studien krever tre steg og elevene vil oppdage at de aritmetisk-baserte strategiene ikke vil være tilstrekkelig for å finne løsningen på svaret. Påstanden blir begrunnet i tabell 5 i forhold til at Ane og Kristine i oppgave 2, 3 og 4 brukte flere strategier for å finne løsningen. F.eks. i oppgave 4 begynte de med strategi-B der de plukker ut nøkkelord og tall i teksten, når de ikke lyktes skifter de over til strategi-C. Kristine foreslår altså å dele de 44 avisene på personene i handlingen, en operasjon som blir valgt ut i fra tekstens situasjon og ikke ut i fra mengdenes funksjonelle forhold med hverandre. De ender opp med å bruke strategi-A hvor de prøver ulike operasjoner på de forskjellige tallene til de ender opp med et svar. En slik strategi kan ofte være tilstrekkelig på elementære tekstoppgaver av typen et-stegs-problem, der elevene kun trenger å lage et regnestykke for å finne løsningen. På et-stegs-problemer er det begrenset med operasjoner som er mulig å utføre og elevene vil derfor prøve flere operasjoner før de finner et svar som virker riktig. På elementære tekstoppgaver kan elever ofte finne et riktig svar, men uten å kunne gi en riktig forklaring på hvordan eller hvorfor de kom frem til løsningen (Reed, 1999). Det var kun oppgave 1 og til dels oppgave 5 som gruppe 1 klarte å løse uten omfattende assistanse fra intervjueren. Mye kan dermed tyde på at gruppe 1 sine strategivalg var påvirket av elevenes tidligere arbeid med elementære tekstoppgaver. Eleven klarte heller ikke å utnytte situasjonsresonering, en strategi som Walkington m.fl. (2012) mener kan styrke forholdet mellom mengdene med å bruke kunnskaper fra virkeligheten. Ane og Kristine tok i bruk strategi-C flere ganger, hvor oppgavens handling preget løsningsprosessen og som kan tyde på situasjonsresonnering. Slik jeg ser det styrket ikke strategivalget deres forståelsen for relasjonen mellom mengdene, da strategien bl.a. førte til at de i oppgave 2 ville dele totalsummen av viskelærene likt på alle tre.

Gruppe 2 bestod av elevene Jonas og Frida, som begge var kategorisert som elever med god forståelse for matematisk ekvivalens. Tabell 6 viser deres strategivalg på de ulike oppgavene og viser i tillegg at de tok i bruk andre strategier enn gruppe 1. På oppgave 2 går Frida raskt inn i en "prøve og feile"-strategi som dermed kan tyde på at hun forstår hvordan mengdene funksjonelt henger sammen (Walkington m.fl, 2012). Jonas og Frida resonnerer seg frem til hvem som har flest viskelær og velger et antall viskelær som virker fornuftig ut i fra handlingen, en prosess med preg av situasjonsresonnering (ibid.). Slik jeg tolker Fridas løsningsprosess så ser hun på tekstoppgaven som en funksjon, hvor hun plotter inn en verdi og ser om verdien passer i forhold hvordan verdien funksjonelt henger sammen i forhold til totalmengden som var 180 viskelær. Hun treffer på første forsøk, men er unøyaktig i kalkuleringen og får dermed feil svar. Gruppen velger da strategi-E.i som Walkington m.fl. (2012) også mener involverer å fremtre i et funksjonen forhold mellom mengdene og er direkte knyttet opp mot tekstoppgavens situasjon. Ut i fra deres feilaktige kalkulering fant de ut at hvis Sara hadde 80 viskelær ble totalmengden for lav i forhold til tekstens handling. Frida "skalerer opp" og foreslår at Sara har 90 viskelær. At hun "skalerer opp" istedenfor *ned* viser god kontroll på hvordan mengdene blir påvirket ut i fra deres relasjon med hverandre. Med den nye verdien blir totalmengden for stor og de "skalerer ned" til 82,5, som fører til at Stine har 42,5 viskelær. Begge elevene ler og avviser dette resultatet, som jeg mener viser tegn på en realistisk vurdering om at et halvt viskelær er absurd i denne oppgaven. Verschaffel m.fl. (1994) viste f.eks. at elever kan svare 3,5 hvis oppgaven er å fordele sju ballonger på to personer. Realistisk vurdering mener jeg er sterkt knyttet til situasjonsresonnering iht. at elevene bruker kunnskap fra virkeligheten for å resonnere seg frem til løsningen. Siden elevene brukte strategi-E.i kunne det tatt lang tid før de kom frem til den riktige plottverdien siden de allerede hadde regnet på 80 viskelær og ville derfor avvise den verdien. Jeg hintet derfor til at elevene burde regne med 80 på nytt og da fant Jonas raskt løsningen på oppgaven.

I løsningsprosessen på oppgave 3 og 4 tar ikke Frida og Jonas i bruk noen av de forhåndskategoriserte strategiene fra kapittel 3. Jeg har kalt denne strategien for ligning-strategi fordi den innebærer å utføre de stegene man ville gjort for å løse tekstoppgaven som en algebraisk ligning. Strategien viser god forståelse for relasjon mellom mengdene og hvordan de funksjonelt henger sammen. Min vurdering av strategien er at den dermed har preg av algebraisk innhold. Første møte med ligning-strategien i intervjuet begynner med at Frida på oppgave 3 utfører 520 – 88, en operasjon som gjør at løsningsprosessen krever et ytterligere steg. Hvis elevene adderer 520 + 88 og deretter dividerer på 2, vil de komme rett til svaret. Men når de subtraherer krever oppgaven tre steg og ekstra hensyn til hvordan mengdene relaterer til hverandre i forhold til tekstens handling. Når elevene utfører 520 – 88 regner de med utgangspunkt i kjørestrekningen som familien Hansen utfører på dag 2 og ikke dag 1 som oppgaven spør om, og de må derfor addere 88 på svaret. Når hun velger å addere 88 på slutten kan dermed mye tyde på at Frida har en klar tanke på hvorfor hun gjør de ulike operasjonene og blir ikke et eksempel på en elev som kommer frem til riktig løsning men ikke gir en korrekt forklaring på hvordan (Reed, 1999).

Når det gjelder oppgavestruktur ligner oppgave 3 mye på oppgave 4. Men der oppgave 3 kan løses på to steg, krever oppgave 4 et ytterlig steg. På den sistnevnte oppgaven velger Jonas samme ligning-strategi som viste seg å funke bra på oppgaven før. Han fjerner først avisene til Roger fra totalmengden og Frida deler deretter 36 på 3. De resonnerer seg altså frem til at 36 aviser tilsvarer tre like mengder på 12. Elevene er nå avhengig av å forstå hvordan svaret på divideringen henger sammen med de andre mengdene for å finne løsningen. Det vil si at når Frida regner 36/3 må de forstå at svaret på operasjonen er Petter sin mengde og at Mari skal ha dobbelt så mange, noe Frida viser på slutten av episode 12 at hun forstår.

En annen strategi som viser god forståelse for relasjonen mellom mengdene i tekstoppgaven er strategi-F. Det er en strategi som gruppe 2 tar i bruk på oppgave 5 og er spesielt egnet for tekstoppgaver av typen *ukjent start* (Walkington m.fl., 2012). Strategien involverer at eleven tar utgangspunkt i den kjente slutverdien, som i dette tilfelle var 14 pokemonkort som eleven sto igjen med etter bursdagen sin, og reverserer operasjonene aritmetisk. Walkington m.fl. (2012) mener at denne strategien ikke viser noe tegn til balanse mellom det som ville vært to sider av en ligning, men skaper derimot et funksjonelt forhold mellom mengdene. Som nevnt i kapittel 2 kan disse tekstoppgavene bli definert som algebraiske fordi de best kan representeres som en algebraisk ligning. Oppgave 5 er ingen unntak og kan representeres med ligningen $3x - 7 = 14$ hvor x uttrykker startverdien og løsningen på oppgaven. Når Frida reverserer operasjonene utfører hun de stegene man ville gjort for å løse oppgaven med en algebraisk ligning på bakgrunn av x (se fig. 11). En strategi som i tillegg til ligning-strategien har et algebraisk innhold. På slutten av episode 13, som omhandler denne oppgaven, viser hun i tillegg forståelse for hvorfor de stegene blir utført med å plotte startverdien inn i teksten og hvor hun ender opp på sluttverdien.

$$3x - 7 = 14$$
$$3x - 7 + 7 = 14 + 7$$
$$3x/3 = 21/3$$
$$x = 7$$

Figur 11. Algebraisk løsning på oppgave 5.

Funnene fra de to intervjuene kan tyde på at elevene som ble kategorisert med operasjonell forståelse brukte strategier som var knyttet opp mot elementære tekstoppgaver. Dette var derimot algebraiske tekstoppgaver, og deres strategier viste seg ikke å være tilstrekkelig i forhold til å at løsningen krevde relasjonell forståelse for hvordan mengdene er knyttet funksjonelt sammen med hverandre. Gruppe 1 tok ofte i bruk strategi-C hvor nøkkelordene i teksten blir helt avgjørende om elevene vil løse oppgaven eller ikke. En studie av Nesher & Taubel (1975) hentet fra Reed (1999) viser at elever lykkes i større grad når nøkkelordene er i samsvar med riktig operasjon. Både oppgave 2 og 4 innehold nøkkelordet "hver for seg" som antyder til bruk av divisjon. Ane og Kristine tolket riktig, men nøkkelordet forteller ikke elevene *hva* som skal deles. Og her mener jeg elevene manglet en god forståelse for det funksjonelle forholdet mellom mengdene i handlingen. Derimot viser funnene fra intervjuet med Frida og Jonas at elever på 5. trinn kan bruke strategier som har et algebraisk innhold. De varierte godt med strategiene i forhold til hvordan strukturen på oppgaven var. Både Frida og Jonas viste med sine strategivalg og hvordan de utnyttet at de hadde god kontroll på hvordan mengdene i oppgavene var funksjonelt knyttet sammen. Og jeg syntes Frida viste spesielt god forståelse i oppgave 5 hvor hun brukte strategi-F siden strategien er sterkt knyttet til tekstoppgaver med *ukjent start* (Walkington m.fl, 2012). I fire av de fem oppgavene løste gruppe 2 tekstoppgavene som om de var algebraiske ligninger, hvor stegene de tok alltid var riktig i forhold til hvordan mengdene hengte sammen.

Siden jeg kun intervjuet to elever, kan ikke resultatet generaliseres utover denne studien. Resultatet må også vurderes ut i fra at andre faktorer kan ha spilt inn i elevenes besvarelser. En faktor kan være ulike erfaringer med tekstoppgaver eller at elevenes generelle matematiske ferdigheter kan ha spilt inn på resultatet.

6 Konklusjon

I denne delen av oppgaven ønsker jeg å besvare mine to forskningsspørsmål. Først vil jeg svare på hvilken forståelse av matematisk ekvivalens viser elever i en femteklasse. Resultatet fra denne studien viser at mange elever i denne femteklassen mangler en god forståelse for matematisk ekvivalens og resultatet er spesielt knyttet opp mot deres tolkning av likhetstegnets rolle. Funnene viser at rundt halvparten av elevene i denne femteklassen løste matematikkoppgaver med en operasjonell forståelse av likhetstegnet som et handlingssymbol istedenfor et uttrykk for relasjonen mellom to like mengder. Konsekvensen av en slik forståelse var at elevene løste ekvivalensoppgaver med metoder som kan knyttes til de operasjonelle mønstrene beskrevet i McNeil m.fl. (2011), og som ikke viser tegn på forståelse for ekvivalens. En annen konsekvens var at elever ikke aksepterte ekvivalensformatet og dermed avviste oppgavene. På bakgrunn av resultatet fra denne oppgaven, støtter jeg Chesney & McNeil (2014) som mener at disse elevene vil på et senere tidspunkt måtte overvinne et hinder som er bygget opp av deres operasjonelle forståelse av likhetstegnet.

Men denne femteklassen hadde også elever som ble kategorisert med god forståelse for matematisk ekvivalens. Og for å svare på mitt andre forskningsspørsmål, angående hvordan elevene løser algebraiske tekstoppgaver, var funnene entydige. Matematisk ekvivalens er et fundamentalt konsept innenfor algebra (Rittle-Johnson m.fl., 2011) og slikt jeg ser det brukte gruppe 2 strategier som virket å være knyttet til deres forståelse for ekvivalens, iht. at strategiene hadde algebraisk innhold. Derimot var strategivalgene til elevene som kategorisert med operasjonell forståelse knyttet opp mot elementære tekstoppgaver og de viste lite tegn på forståelse for relasjonen mellom mengdene.

På bakgrunn av resultatet fra denne oppgaven mener jeg at to pedagogiske implikasjoner fremtrer. Først og fremst bør matematikkundervisningen, på et tidligst mulig tidspunkt, støtte tilegnelse av relasjonell forståelse for likhetstegnet. Gjerne i tandem med andre matematiske tegn for å styrke likhetstegnets semiotiske funksjon som et relasjonstegn og ikke handlingstegn. I tillegg mener jeg at algebraiske tekstoppgaver bør integreres i elevenes første møte med algebraiske ligninger og funksjoner. Tekstoppgavene kan hjelpe elevene til å konstruere en kontekst til de abstrakte symbolene og dermed øke deres forståelse om mengdenes funksjonelle relasjon. Og elever som allerede har god forståelse for matematisk ekvivalens vil ha et bedre utgangspunkt i møte med formell algebra.

Litteraturliste

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and mathematics, 112*(3), 159-170.

Alseth, B. (2010). *Multi: Grunnbok 1b* (Bokmålsutgave). 2. utgave. Oslo: Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2013). *Multi: Grunnbok 5a.* Bokmålsutgave, 2. utgave. Oslo: Gyldendal undervisning.

Aritmetikk. (2009). *Store norske leksikon.* Hentet fra https://snl.no/aritmetikk

Borenson, H. (2013). A Balancing Act. *Teaching Children Mathematics, 20*(2), 90-94.

Chesney, D. L., & McNeil, N. M. (2014). Activation of Operational Thinking during Arithmetic Practice Hinders Learning and Transfer. *Journal of Problem Solving, 7*(1), 1079-1095.

Cobb, P. (1987). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 109-124.

Creswell, J. W. (2013). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Los Angeles, CA: Sage publications.

Dahl, H., Nohr, M., & Gulliksen, E. (2014). *Radius: Grunnbok 2A* (Bokmålsutgave). Oslo: Cappelen Damm.

Dahl, H, Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K., Nohr, M. Olsen, V. S., Værness, M. (2014). *Radius: Grunnbok 5A* (Bokmålsutgave). Oslo: Cappelen Damm.

Dalland, O. (2015). *Metode og oppgaveskriving* (5. utg, 4.opplag). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Fuchs, L. S., Powell, S. R., Cirino, P. T., Schumacher, R. F., Marrin, S., Hamlett, C. L., Changas, P. C. (2014). Does calculation or word-problem instruction provide a stronger route to prealgebraic knowledge? *Journal of Educational Psychology, 106(4),* 990-1006.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 40-177.

Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology, 107*(1), 15-30.

Hiebert, James. "A theory of developing competence with written mathematical symbols." *Educational Studies in Mathematics* 19.3 (1988): 333-355.

Johansson, E. Andersson, K. Ahlström, R. Skoogh, L. Pedersen, B. B. (2005). *Abakus: Grunnbok 2A* (1. utgave). Oslo: Aschehoug.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign. *Research in Mathematics Education, 15*(1), 34-49.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics*, *12*(3), 317-326.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37,* 297-312.

Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The journal of the learning sciences, 13*(2), 129-164.

McNeil, N. M. (2008). Limitations to teaching children 2+ 2= 4: Typical arithmetic problems can hinder learning of mathematical equivalence. *Child Development, 79(5),* 1524-1537.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development, 6*(2), 285-306.

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shipley, H. (2011). Benefits of practicing 4= 2+ 2: Nontraditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence. *Child Development, 82*(5), 1620-1633.

Mertens, D. M. (2015). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. (4. utgave). Thousand Oaks: Sage publications.

Naalsund, M. (2012. 31.5). Sitert i Jakobsen, H. Ø. Derfor er algebra vanskelig. *Forskning.no.* Hentet fra http://forskning.no/matematikk-barn-og-ungdom-skole-og-utdanning/2012/05/derfor-er-algebra-vanskelig

Reed, S. (1999). *Word problems: Research and curriculum reform* (The Studies in mathematical thinking and learning series). Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum.

Ringdal, K. (2014). *Enhet og mangfold: samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (3. utg. 2.opplag). Bergen: Fagbokforlaget.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85-104.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93(2)*, 346-362.

Sebrechts, M., Enright, M., Bennett, R. E., & Martin, K. (1996). Using algebra word problems to assess quantitative ability: Attributes, strategies, and errors. *Cognition and Instruction, 14*(3), 285-343.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149-167.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign?–An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 133-162.

Säljö, R. (2013). Støtte til læring – tradisjoner og perspektiver. I Krumsvik, R. J., & Säljö, R. (red.). *Praktisk-pedagogisk utdanning: en antologi* (s. 53-78). Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2015. 29.11) *Hovedresultater fra TIMSS*. Hentet fra https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hovedresultater.pdf

Utdanningsdirektoratet. *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-4.-arssteget-

Verschaffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 641-645): Dordrecht, Nederland: Springer.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*(4), 273-294.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. *Lisse,* Nederland: Taylor & Francis.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology, 21*(4), 555-570.

Walkington, C., Sherman, M., & Petrosino, A. (2012). "Playing the game" of story problems: Coordinating situation-based reasoning with algebraic representation. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 174-195.

Wellington, J. (2015). *Educational research: Contemporary issues and practical approaches*. (2. utgave): London: Bloomsbury Publishing.

Wyndhamn, J., & Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning—A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction, 7*(4), 361-382.

Yin, R. K. (1994). *Case study research: design and methods.* (2. utgave). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: design and methods.* (3. utgave). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Vedlegg

Vedlegg 1

Transkripsjonsnøkkel for intervju

- Intervjuer blir henvendt i transkripsjonen med "I".
- Person - den som gir utsagnet
- Nr - skift mellom utsagn.
- " . " - avsluttende utsagn.
- " ... " - pause i utsagnet.
- *.....* - beskrivende handling.
- " ? " - spørrende utsagn
- ( ) - ikke verbal henvisning

Vedlegg 2

Samtykkeskjema for lærer

Forespørsel til lærer Y ved X barneskole om å delta i en masterstudie ved Universitetet i Agder våren 2017

Jeg er grunnskolelærerstudent som nå skal skrive skolerettet masteroppgave i matematikk ved Universitetet i Agder. Temaet for oppgaven er matematiske symboler og elevers måter å løse tekstoppgaver i matematikk, og jeg ønsker å se på hvordan elevene jobber i grupper med slike oppgaver. Jeg har planlagt en undervisningsøkt der elevene skal jobbe med temaet (omfang rundt en skoletime), som jeg ber om tillatelse til at jeg gjennomfører i din klasse mens du er til stede. Kort tid (1-2 dager) etter denne undervisningsøkten vil jeg gjennomføre to gruppeintervjuer med utvalgte elever. Her vil elevene jobbe sammen med tekstoppgaver..

Det er altså et svært begrenset omfang på undersøkelsen (alt foregår på to dager) og det vil bare gjennomføres observasjon og elevsamtaler med et utvalg av elevene. Det er naturligvis frivillig for deg å godta at du og klassen deltar i undersøkelsen, og det er mulig å trekke seg fra undersøkelsen senere. Alle opplysninger vil bli behandlet konfidensielt, og ingen enkeltpersoner vil kunne gjenkjennes i den ferdige oppgaven. Opplysningene anonymiseres og lydopptak av samtale elever og av gruppe i arbeid vil lagres på et sikret dataområde på Universitetet i Agder hvor bare jeg og min veileder har tilgang. Disse lydfilene vil bli slettet kort tid etter at oppgaven er ferdig, senest innen 31.07.2017.

Dersom du aksepterer at du og din klasse deltar i forskningen, ber jeg om at du fyller ut den vedlagte samtykkeerklæringen. På forhånd takk! Dersom du gir ditt samtykke, vil et tilsvarende brev til foreldre/foresatte utformes for å innhente deres samtykke til at deres barn kan delta i undersøkelsen.

Hvis det er noe du lurer på kan du sende en e-post til Kristian Abrahamsen (krihab14@student.uia.no). Du kan også kontakte min veileder Ingvald Erfjord (ingvald.erfjord@uia.no) ved institutt for matematiske fag på telefonnummer 38 14 15 47.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD) og godkjent.

Med vennlig hilsen
Kristian Abrahamsen

…………………………………………………………………………………………………

Svarslipp

Angående undersøkelse om elevers måter å løse tekstoppgaver i matematikk. Jeg har gjort meg kjent med informasjon angående prosjektet og tillater deltakelse.

Lærers navn: ______________________

Dato:…………………Signatur:………………………………..

Vedlegg 3

Samtykkeskjema for elever og foresatte

Til foreldre/foresatte ved 5. trinn ved XX barneskole
Forespørsel om elevers deltakelse i en masterstudie ved Universitetet i Agder våren 2017
Jeg er grunnskolelærerstudent som nå skal skrive skolerettet masteroppgave i matematikk ved Universitetet i Agder. Temaet for oppgaven er elevers forståelse av matematiske symboler og måter å løse tekstoppgaver i matematikk, og jeg ønsker å se på hvordan elevene jobber i grupper med slike oppgaver. Jeg har planlagt en undervisningsøkt der elevene skal jobbe med temaet (omfang en time), som jeg har fått tillatelse av klassens lærer til å gjennomføre mens han/hun er til stede. I tillegg ønsker jeg å ha en samtale dagen etter med noen av elevene. Jeg vil bruke lydopptaker under samtalen for å få med meg alt som blir sagt. Samtalene blir gjort i grupper og vil vare i rundt 30 min per gruppe.
Det er altså et svært begrenset omfang på undersøkelsen (alt foregår på to dager) og bare et utvalg av elevene vil delta i samtale eller bli observert. Det er naturligvis frivillig å være med på undersøkelsen, og det er mulig å trekke seg fra undersøkelsen senere. Alle opplysninger vil bli behandlet konfidensielt, og ingen enkeltpersoner vil kunne gjenkjennes i den ferdige oppgaven. Opplysningene anonymiseres og lydopptak av samtale med elever og av gruppe i arbeid vil lagres på et sikret dataområde på Universitetet i Agder hvor bare jeg og min veileder har tilgang. Disse lydfilene vil bli slettet kort tid etter at oppgaven er ferdig, senest innen 31.07.2017.
Dersom du aksepterer at ditt barn deltar i spørreundersøkelsen, ber jeg om at du fyller ut den vedlagte samtykkeerklæringen og at den leveres til klassens matematikklærer. På forhånd takk!
Hvis det er noe du lurer på kan du sende en e-post til Kristian Abrahamsen (krihab14@student.uia.no). Du kan også kontakte min veileder Ingvald Erfjord (ingvald.erfjord@uia.no) ved institutt for matematiske fag på telefonnummer 38 14 15 47.
Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD) og godkjent.

Med vennlig hilsen
Kristian Abrahamsen
- -

Svarslipp
Angående undersøkelse med temaet elevers måter å løse tekstoppgaver i matematikk: Jeg har gjort meg kjent med informasjon angående prosjektet og tillater deltakelse.

Dato:___________

Elevens navn: ______________________

Foresattes underskrift:____________________

Vedlegg 4

Intervjuguide

Utvalg: To grupper med to elever på 5. trinn

Sted: Et grupperom på deres skole

Tid: 30-40 minutter

Utstyr: Matematikkhefte, lydopptaker

Fase 1: Løst prat og informasjon

- Uformell prat
    - Faktabaserte oppvarmingsspørsmål
- Informasjon om intervjuet og prosjektet
    - Informasjon om meg selv og oppgaven
    - Hva skal foregå underveis i intervjuet?
    - Forklar båndopptakeren og anonymiteten deres
    - Noen spørsmål?
- Start opptak

Fase 2: Oppgavedelen

- Elevgruppene løser oppgavene i kronologisk rekkefølge, fra 1 til 5.
- Elevene får tid først til å lese oppgaven
- Spørsmål til elevene
    - Hva er deres første tanker om oppgaven?
    - Hva tenker dere nå?
    - Hvorfor tenkte du det?

Fase 3: Oppsummering

- Hva syntes dere om oppgavene?

Vedlegg 5

Intervju med Ane og Kristine

Oppgave 1

Person	Sitat
Ane	*Ane leser oppgaveteksten*
I	Hvis dere har en ide så er det bare å prate i mellom dere.
Ane	Jeg tror han får litt mer enn 200kr eller noe .. for hvis man tar 120 + 85, da blir det jo 205, også har han 45 igjen ... da må vi ta.
Kristine	Plusse det på.
Ane	Da må vi ta 205 + 45 tror jeg.
Kristine	205 + 45
Ane	250
Kristine	250 + 45?
I	Det er lov å skrive ned, å kladde litt.
Ane	205 var det ikke det?
Kristine	Jo, også tar vi pluss 45.
Ane	Ja det blir 250
Kristine	Ja, vent litt. Ja det blir 250.
I	Ja, det er helt riktig det. Men hva tenkte dere når deres så oppgaven?
Ane	Vi tenkte å plusse på 120 + 85 + 45, for han hadde jo 45 kr igjen, også brukte han jo 120 + 85. Så vi må plusse alle de tallene for å vite hvor mye penger han hadde ... også hadde han jo 45 igjen.

Oppgave 2

Person	Sitat
Kristine	*Kristine leser oppgaveteksten*
I	Ja her må man tenke litt.
Kristine	Stine har minst tror jeg
Ane	Ja
I	Stine har minst?
Kristine	Også tror jeg Ida har mest eller flest
Ane	Sara har dobbelt så mange viskelær som Stine, mens Ida har 20 flere viskelær enn Stine
Kristine	Ja, da har Ida flest
Ane	De hadde 180 stykker .. hvordan skal vi finne svaret på det?
	begge leser deler av oppgaveteksten på nytt
Ane	Må vi ikke ta å dele 180 da
I	Ja?
Kristine	Delt på 3
Ane	Også må vi ta noen vekk fra Stine. Okei, 180 delt på 3.

	regner ut 180/3
I	Svaret på det er 60 da, det er ikke så nøye, kunne egentlig hatt
	kalkulator. Men ok, la oss si at de har 60 hver da.
Ane	Ja, og Sara har jo dobbelt så mange viskelær som Stine, derfor må
	vi ikke ta noen vekk fra Stine da?
I	Stine vil ha minst ja, som dere sa.
Ane	Derfor har Sara 120 viskelær? Hun har dobbelt så mange som
	Stine. Men vi skulle jo trekke i fra Stine.
	lang pause
Ane	Hvis dette er Sara, så har hun 120 stykk og da må du ta ... Også
	har Ida 20 flere, da har hun 80, og da blir det jo 180, gjør det ikke
I	det?
	Nja, hvis det der er Stine også har Sara 120, da blir det 180 og da
Ane	er ikke Ida med.
	Er det sånn at vi skal trekke vekk 20 fra Stine?
I	*Lang pause*
	Hvis det her er viskelærne til Stine *lager en illustrasjon*. Så vet
	vi at Sara har dobbelt så mange som det her. Også har Ida 20 flere.
Ane	Så det vil si at hun har det her, pluss 20 til.
	Da må vi jo fire 20 ganger.
Ane	*Lang pause*
	Hvis vi trekker fra 20 fra Stine. Hvis hun har 60, da får jo Ida ...
I	*pause*
	Ok, la oss si at vi starter med det her da, 180/3 er 60. Så da fant vi
	at Stine har 60. Og det ble alt for høyt. Hun kan ikke ha 60. For da
Ane	må Sara ha 120 og Ida må ha 60+20
I	Som er 80.
Kristine	Sa hva kan vi gjøre da for at det skal på opp?
I	Enn hvis hun har 50 da?
Kristine	Ok, hva skjer da.
I	Hvis Stine har 50.
	Hvor mange har Sara da?
Kristine	*Elevene tenker høyt*
Ane	Det er Ida som har flest trur jeg.
Kristine	Nei, det var Sara for det sto ... eller så er det Ida.
	Så hvis vi finner ut hvor mange viskelær Stine har så kan vi finne
I	ut hvor mye ho har (Sara), også kan vi finne ut hvor mye ho (Ida)
Ane	skal ha.
I	Så nå tok du utgangspunkt i at Stine hadde 50. Da fant du ut at Ida
Ane	hadde?
I	70
Ane	Og hvor mye hadde Sara da?
I	100
Ane	Går det opp da? Da skulle de tre tallene her.
Kristine	Det går ikke.
Ane	Sa hva må vi gjøre da? Vi er jo litt nærmere. Nå blir det 220.
I	Men skal Stine ha 30? Jeg aner ikke.
Kristine	Men hva om vi tar halvparten av 180 og finner vi liksom ... eller.
Ane	Halvparten av 180 er 90
I	

Ane	Du kommer nok ikke noe nærmere på det. Men hva hvis Stine
Kristine	hadde 30?
Ane	Da har Sara 60 og Ida hadde 20 flere, da blir det 50 og da ...
Kristine	60 + 30 ... Det blir 140.
Ane	Stemme det?
	Nei. Enn med 40 da? Da blir det 80 på Sara og Ida har 60.
	Og hva skal Ida ha da?
	Det er svaret. 40, 60, 80. Det blir 180.
	Ja!
	Den var vanskelig.

Oppgave 3

Person	**Sitat**
Ane	*Ane leser oppgaveteksten*
Kristine	Kan vi ta det (520) minus det (88)
Ane	520-88
Kristine	Ja, hjelper det noe?
I	Kanskje det, hvorfor tenkte du det?
Ane	Familien Hansen kjører 520 km på to dager, den første dagen kjører de 88.
Kristine	Ja, da har de jo kjørt det. Da må vi trekke i fra det, så det vi får der.
Ane	Og det som vi får under der (520-88) er ikke det svaret på første dagen?
I	Vi får se.
Ane	Men nå er det minus, går an å? Var det pluss eller minus?
	Minus
	Regner ut
I	Vi kan bare bruke kalkulatoren. Det blir 432.
Ane	Familien Hansen kjører 520 km på to dager. Den første dagen kjører de 88 km mer enn den andre dagen. Oja, men da kjørte de jo den første dagen 432 km.
Kristine	Men de kjørte mer, liksom at de kjørte 88 km mer enn en den andre dagen.
I	Riktig. Så det er to dager de har kjørt.
	Intervjuer prøver å tegne opp distanser
I	La oss si at det her er distansen han har kjørt første dagen. Da har han kjørt så mange kilometer. Her er første dagen, da kjørte de fra A til B, mens andre dagen kjørte de litt mindre. Så til sammen skal det her blir 520 km.
Ane	Vi fikk svar på 520-88 = 432, kjørte han det den dagen?
I	Hvis de har kjørt det den ene dagen. Så har du jo kjørt nesten like lang den andre dagen, og det blir for mye.
Kristine	Men kan vi ikke bare ta det (432) pluss 88
Ane	Men da blir det jo 520
Kristine	Jaja det blir det jo. Må ha minus da.
I	Det dere har gjort er å ta 520 – 88, så dere har fjernet en liten del også har dere det her igjen.
Ane	Men da mangler han jo 432 km.
Kristine	Men skal vi ikke ta 520 delt på 2 da, blir det ikke det? Da blir det likt her og her, også plusse på 88.
I	Ok, prøv det ut.

	Regner ut
I	Vi kan bare bruke kalkulatoren her. 260.
Ane	Da må vi ta 260 + 88.
I	Ok, prøv.
Ane	348.
I	Hva har dere funnet ut nå?
Ane	Hansen kjører 88 km mer enn den andre dagen, så da kjørte han 348 km den andre dagen.
I	Den første dagen kjørte de 88 km mer enn den andre dagen.
Ane	Den første dagen kjørte de 348, også andre dagen kjørte han 260.
I	Det blir ikke helt rett. For det blir over 520. For det som skjer da.
Kristine	Skal vi ikke bare plusse på det der å komme opp på 520 da.
I	Men det dere gjorde, var å dele det på 2. Også tok dere å plussa 88 på første dagen. Det som skjer da, er at det blir lengre enn 520.
Kristine	Da kan vi ikke dele det på 2 da. Da blir det på en annen måte.
I	Hva om dere tar 432? Det var 520 – 88. 432 det er derfra til dit.
Ane	Ok, så første dagen er lik den andre dagen.
I	Nesten, pluss 88 på den første dagen.
Ane	Så andre dagen kjørte du 432 km sa du?
I	Nei. Ok, jeg kan bare gi dere svaret. Dere tok 520 – 88, for da har dere fjernet det de kjørte ekstra første dagen. Da kan dere dele på to. For da finner du derfra til dit. Da finner dere distansen der og der, også plusse på 88.
Ane	Ok, vi må dele 432 delt på 2. Også på den ene plusser vi på 88. Og da får vi svaret.

Oppgave 4

Person	Sitat
Ane	*Ane leser oppgaveteksten*
Ane	Da har Roger levert 8 aviser. Mens Mari har levert 16 aviser. Også må vi finne ut hvor mye Petter har levert?
I	Ok, tenk over hva du sa. Roger har levert 8 aviser, det står i teksten.
Ane	Også har Mari dobbelt så mange, så da har hun 16.
I	Men dobbelt så mange som?
Kristine	Roger ... Nei Mari har ikke 16. Men da må vi finne ut hva Petter har. *pause*
Ane	De leverte 44 aviser.
Kristine	Da må vi ta 44 delt på tre.
Ane	44-8, og det blir 34 ... 36 ... Hvis Roger har levert 8 da har vi 36 aviser igjen. Da må vi dele 36 på 2 også ta det dobbelte. Jeg vet ikke.
I	Ok, 36, siden dere har tatt minus 8 da har dere 36 igjen. Da e det kun Mari og Petter igjen. La oss si 36 aviser *tegner en illutrasjon av aviser*, her er Petter sin bunke med aviser, så har Mari dobbelt så mange som Petter.
Ane	Må vi ikke da ta 36 delt på 2.
Kristine	Ganske vanskelig.

I	Njaa. Hvor mange hadde Mari levert?
Ane	Dobbelt så mange som Petter.
I	Ok, så da har hun en bunke slik som Petter pluss en til.
Kristine	Men da blir det jo 36 delt på 2, så også når vi finner ut det ... nei nei nei.
I	Hvor mange bunker er det der?
Ane	Det er 36 aviser.
I	Og Petter har levert det her, og Mari har levert dobbelt så mange, altså to.
Ane	To bunker.
Kristine	Men da må jo han, hvis f.eks. han har 20 så må ho ha 40, hvis han hadde det.
I	Hvordan kan vi finne ut hvor mange hver bunke er? Fordi de er jo like stor. Hvis det er 8 aviser i en bunke, er alle bunkene 8 hver.
Kristine	Men er det ikke 36 delt på 3 da?
I	Hvorfor tror du det?
Kristine	Fordi hvis vi har to like tall, så plusser vi på den ene ... jeg vet ikke.
I	Hva finner vi hvis vi deler på tre da?
Ane	Hvis vi har delt 36 delt på 3?
I	Det blir 12. Så en bunke er 12 aviser.
Kristine	Ho får 24 og han får 12 da.
I	Er det svaret?
Kristine	Nei jeg tror ikke det.
Ane	Roger fikk bare 8. Og må vi ikke ta 36 delt på 2?
I	Prøv å tenk, når dere delte på 3, så fikk Petter 12 og Mari dobbelt så mange, og Roger hadde 8.
Ane	Men da fikk jo Mari 24 og Petter 12 og Roger fikk 8. Da er det jo svaret.
Kristine	Jeg trodde det var feil jeg.
Ane	Det er riktig.
I	Hvordan kan du finne ut om det er riktig svar?
Ane	Du tar 24+12+8
I	Og svaret blir da?
Ane	44

Oppgave 5

Person	Sitat
Kristine	*Kristine leser oppgaveteksten*
Ane	Da hadde hun bare 7, hadde hun ikke?
I	Hvorfor tror du det?
Ane	Fordi 7+7 er 14 også blir 7 til så blir det 21, også ga hun bort 7.
I	Prøv å skriv ned og forklar underveis.
Kristine	Så skal vi ta 14 + 7 er 21 også skal vi ta minus
Ane	Tre ganger 7 også blir det 21
Kristine	Ja fordi hun hadde jo de to ja.
Ane	Ja så hvis hun har 7 fra før av og fikk tre ganger så mye.
Kristine	Nei vent litt.
I	Prøv å skriv ned det dere tenker.
Ane	Jeg tenker hun hadde 7 først også fikk hun 14 stykk til, også ga hun bort 7, så hadde hun 14 igjen. Så jeg tenker hun hadde 21 pokemonkort.
I	At hun hadde 21 pokemonkort før bursdagen?

Kristine	Ja
Ane	Ja også ga hun bort 7, og da blir det 14.
I	Hvis hun hadde 21 før bursdagen sin, også etter bursdagen hadde den blitt tre ganger så stor. Spørsmålet er jo hvor mange hun hadde før bursdagen?
Kristine	Da må du ta 21 også plusse på 7 tre ganger.
Ane	Nei blir det 21 ganger 3 da? Eller blir det 7 ganger 21.
I	Nei tror du var inne på det helt i starten.
Ane	Nei hun hadde 21 fra før av. *Går igjennom oppgaveteksten på nytt*
Kristine	Ok, hvis du har 7 + 14 så har hun 21 kort.
Ane	Da tipper jeg at hun hadde 28 ... nei.
Kristine	Blir det ikke? Hvis vi finner, nei vent litt ... Hun fikk 21 pokemonkort til bursdagen.
I	Eller etter bursdagen, så hadde hun 21 pokemonkort, og hadde noen fra før av. Det er det vi prøver å finne ut. Hvor mange hadde hun fra før av?
Ane	21 Pokemon etter bursdagen. Så ga hun bort 7, så hadde hun 14 igjen. Var det 27? Nei 21 pokemonkort hadde hun etter bursdagen. Men da hadde hun bare 7 da?
I	Før bursdagen?
Ane	Det er det jeg tror. Hun hadde 7 fra før og da må du ta..
Kristine	Da blir det 21 minus..
Ane	Da får hun 28, for hun fikk tre ganger så mye, nå plussa jeg bare på to.
Kristine	Da blir det 28 der. Nei da blir det fire ganger 7 det blir 28.
Ane	Hvis hun hadde 7 pokemonkort fra før, også fikk hun tre ganger så mye mer da blir det 28 og ga bort 7, da blir det 21 og det står at hun hadde 14. *pause*
Ane	Men 14 + 14 blir 28.
I	Hva har dere funnet ut med 28. Hun kan ikke ha 28 før bursdagen.
Kristine	Men hadde hun ikke veldig lite da. 7 eller mindre da. Hva med 4 da? *Intervjuer tegner opp bunker med pokemonkort*
I	Samlingen blir tre ganger så stor. Også gir hun bort 7. Det må være et lavt tall.
Ane	Da er det ikke 7, 6 eller 5 da?
Kristine	Hva med 4 da, jeg føler det er 4.
I	Hvis dere tar 5, så blir det 5, 10, 15.
Kristine	Hva med 2 da?
Ane	Men da er det jo 7.
I	Fordi?
Ane	For hvis du tar 7+7+7 så blir det 21 og hvis du tar bort 7 så blir det 14.

Vedlegg 6

Intervju med Frida og Jonas

Oppgave 1

Person	Sitat
Jonas	*Jonas leser oppgaveteksten*
Frida	Det er ikke så vanskelig.
I	Hva er det første du tenkte?
Frida	Jeg tenkte vi kunne bare ta alle de tallene og plusse de sammen, fordi han hadde så mye igjen (45) også brukte han det (120 og 85).
I	Du kan jo notere og se om det blir riktig, kladde. *Regner ut*
Jonas	205 også 45 da blir det...
Frida	Hva kom du fram til?
Jonas	250
Frida	Det gjorde jeg også.
I	Så hva tenkte dere når dere så oppgaven? Dere valgte å plusse sammen alt?
Frida	Ja, fordi han brukte jo det, også hadde han jo det igjen, og da blir det jo alle tilsammen.

Oppgave 2

Person	Sitat
Frida	*Frida leser oppgaveteksten*
I	Så tre jenter skal tilsammen ha 180, hva er det første dere tenker?
Frida	Hvis Sara har dobbelt så mange som Stine, så har jo Sara mest av alle. Hvis ikke..
I	Ja det kommer vel an på hvor mange Stine har da.
Frida	Enten Ida eller Sara.
Jonas	Sara har jo dobbelt så mange som Stine.
Frida	Mens Ida har 20 viskelær mer enn Stine. Hvis vi f.eks. sier at Sara har 80 viskelær. Også har hun dobbelt så mange Stine, så har Stine 40, og derfor har Ida 60.
Jonas	Ja.
Frida	Så hvis vi tar 80, 40, 20, det blir 140. Så hvis vi sier at Sara har 90 da. Ti mer. Da har Stine 45 også har Ida 65. Da er det bare å regne ut det. Så hvis vi sier at Sara har 90, så har Stine 45 * regner ut* da blir 200.
Jonas	Hva hvis vi tar 85 da.
Frida	Da har Stine 42,5 *ler*.
I	Ok, det kunne ikke være 90 for da ble det for mye?
Jonas	Ja.
I	Har dere regnet på 80?
Frida	Ja det ble det alt for lite.
Jonas	Vent, hvis du har 80, så har Stine 40, så har hun andre 60, det jo 100 også pluss 80 det e jo 180.

Oppgave 3

Person	Sitat
Jonas	*Jonas leser oppgaveteksten*
Jonas	J: Så de kjører 88 mer.
I	I: Hva tenker dere aller først? Hvis det er to dager.
Frida	F: Jeg føler egentlig, jeg vet ikke om det er riktig da, men jeg føler 520-88 også får du et svar, og hvis de kjører det, nei. Jeg er ikke helt sikker.
I	I: Hva får du hvis du tar 520-88. Kan bare ta det på kalkulatoren.
Frida	F: 432.
I	I: Første dagen har de kjørt 88 km lengre enn den andre dagen *lager en tegning av strekninger*, også til sammen av første og andre dagen er 520.
Frida	F: Kan vi ikke ta 432 delt på 2 også sette 88 på en av dagene.
I	I: Ja prøv det ut.
Jonas	J: 216 ja
Frida	F: 216 + 88 = 304
I	I: Er det første eller andre dagen?
Frida	F: Hvis det er første så kjører de 216 på den andre dagen.
I	I: Ok så dere begynte med 520?
Frida	F: 520 også tok vi minus 88
I	I: Så dere tok vekk den lille biten de kjørte ekstra, det ble 432.
Frida	F: 432, også pluss 88.
I	I: Da får du bare 520 igjen.
Frida	F: Vi delte det på to. Også fikk vi 216, og 216 + 88 er lik svaret.
I	I: Så andre dagen så er det 216 og første dagen er 216..
Frida	F: Pluss 88. 216+88 er lik 304. Så svaret er 304?
I	I: Ja.

Oppgave 4

Person	Sitat
Frida	*Frida leser oppgaveteksten*
Jonas	Vi vet at han har levert 8, så må du ta 36 også skal Mari ha dobbelt så mye.
Frida	Roger har levert 8. Så hvis vi tar 44-8.
Jonas	Det er 36.
Frida	Også er det 36 delt på to.
Jonas	Nei, fordi Mari skulle ha dobbelt så mye som Petter.
Frida	Ja.
I	Dere er inne på noe da.
Frida	Mari, dobbelt så mye som Petter. Hvis deler på tre da, også tar vi to av de sammen, så blir det dobbelt så mye.
I	Ja prøv.
Frida	Delt på tre er lik 12, 12+12=24, så hvis Mari tok 24 og Petter tok 12.
I	Kan du forklare Jonatan hva du tenker?
Frida	Siden Roger har levert 8, så er det 36 igjen. Så Mari skulle ha dobbelt så mye som Petter. Så hvis du deler 36 på tre og hvis du legger sammen to blir det dobbelt så mye.
Jonas	Vi må ta på tre. Ja.

Oppgave 5

Person	Sitat
Jonas	*Jonas leser oppgaveteksten*
I	I: Vi vet altså ikke hva hun hadde før bursdagen, men etter hadde hun 14, men da har hun gitt bort 7.
Frida	F: Trur du vi kan ta 14+7 det blir jo 21, også hvis du tar da 21, da har du jo 21 før ho har gitt bort til vennen, også siden den hadde blitt tre ganger så stor, så hadde ho 7 kort før bursdagen.
I	I: Fordi?
Frida	F: La oss sia at hun hadde 7 kort før bursdagen, så blir den tre ganger så stor, da har hun 21, hvis du tar 21 – 7 da blir det 14.
I	I: Skjønte du Jonas?
Jonas	J: Njaaa.
Frida	F: Skjønte du det?
I	I: Forklar engang til da.
Frida	F: Hvis vi sier at hun har 7 kort før bursdagen, så etter bursdagen så er den jo tre ganger, og 7 ganger 3 er jo 21
Jonas	J: Oja sånn ja.
I	I: Så du fant ut hva hun hadde etter bursdagen, før hun ga bort.
Frida	F: Også delte jeg på tre. Fordi samlingen var tre ganger så stor.
I	I: Hva syntes dere om oppgaven?
Frida	F: Det var ikke sånn at du visste svaret med engang, du måtte jo tenke litt før du fant ut svaret. De var ikke sånn kjempe vanskelig heller. Jeg syntes de var passelig på en måte.