UNIVERSITETET I AGDER

Matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate

En norsk pilotstudie om bruken av et instrument utviklet i USA designet for å utforske læreres matematiske 'meanings'

JUNE KARINA ERIKSEN FLATELID

VEILEDER

Simon Goodchild

Universitetet i Agder, 2017

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag

Forord

Med denne masteroppgaven avslutter jeg den femårige lektorutdanningen i realfag ved Universitetet i Agder. Når jeg nå skal levere inn oppgaven reflekterer jeg over alt jeg har lært gjennom disse fem årene som student ved UiA, og spesielt dette siste halvåret med arbeidet med denne oppgaven. Arbeidet med masteroppgaven har vært en lang prosess, med både motgang og medgang og det har vært en prosess der jeg har lært mye om forskning generelt og også om meg selv. Det å få muligheten til være med på et større internasjonalt forskningsprosjekt har vært veldig spennende og lærerik, og jeg er glad for at jeg fikk denne muligheten.

Forskningen som blir presentert i denne masteroppgaven har blitt støttet av stipend fra NOKUT gjennom MatRIC (Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching).

Det er flere jeg ønsker å rette en stor takk til. Først ønsker jeg å takke alle studentene som frivillig brukte et par timer av deres tid til å være med i denne studien. I tillegg vil jeg takke førsteamanuensis Mette Susanne Andersen, førsteamanuensis Christop Kirfel, professor Frode Rønning og førsteamanuensis Claire Marie Juliette Dominique Vaugeland Berg. De har hjulpet til med å videreformidle studien til studentene og i tillegg ordnet praktiske ting rundt datainnsamlingen ved de ulike universitetene.

En stor takk går også til Pat Thompson for tillatelse til å bruke instrumentet, og Hyunkyoung Yoon for gjennomføring av kurs der vi skulle lære å score besvarelsene til instrumentet. I tillegg vil jeg takke Inger Johanne Håland Knutson og Olav Kristian Gunnarson Dovland for hjelp med korrekturlesing av den norske oversettelsen av instrumentet.

En helt spesiell takk går til min veileder, professor Simon Goodchild. Som gjennom hele prosessen har vært engasjert, motiverende og gitt gode tilbakemeldinger, takk for all hjelp! I tillegg vil jeg takke Magnhild Rugland for samarbeidet med oversettelsen, datainnsamling og scoring av besvarelser. Det hadde ikke vært det samme å gjøre dette uten deg!

Jeg vil også takke min samboer Konrad Johan Jensen for hjelp med korrekturlesing av masteroppgaven og støtte gjennom hele dette halvåret.

Kristiansand, mai 2017

June Karina Eriksen Flatelid

Sammendrag

Temaet for denne masteroppgaven er matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate. Det er en pilotstudie om bruken av instrumentet «Mathematical Meanings for Teaching secondary mathematics», MMTsm, i Norge. Instrumentet er utviklet i USA av professor Pat Thompson ved Arizona State University. Det er et diagnostisk instrument som er designet for å utforske læreres matematiske 'meanings', og det er utviklet innenfor et konstruktivistisk synspunkt. Jeg har i denne masteroppgaven fokusert på det matematiske emnet endringsrate, som flere av oppgavene i instrumentet MMTsm er knyttet til. Instrumentet har også i sammenheng med masteroppgaven blitt oversatt til norsk, og denne oppgaven inneholder også refleksjon over denne oversettelsesprosessen. Jeg vil med denne masteroppgaven prøve å besvare forskningsspørsmålet: *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate?* Jeg bruker i denne oppgaven det engelske ordet 'meaning', og for å gi en kort forklaring på hvordan dette begrepet brukes i denne studien, så kan man si at 'meaning' er anvendelse av kognitive skjema, som her blir uttrykt gjennom studentenes svar på oppgavene i instrumentet

27 matematikklærerstudenter ved tre ulike universiteter i Norge har gjennomført den norske versjonen av instrumentet. For å kunne si noe om deres uttrykte 'meaning' på de ulike oppgavene, utviklet jeg et analyseverktøy basert på scoringsmanualer utviklet av professor Thompson. Dette er et konseptkart som inneholder viktige konsepter som er knyttet til endringsrate, og som har blitt fargekodet ut ifra besvarelsene til studentene. Med hjelp av dette verktøyet har jeg forsøkt å se hva instrumentet har avslørt om disse studentenes matematiske 'meaning' om endringsrate.

Resultatene viser at flere av disse studentene uttrykte en dårlig utviklet 'meaning' om flere av konseptene knyttet til endringsrate. Blant annet var det veldig få som uttrykte en god, produktiv og konsistent 'meaning' på alle oppgavene som var knyttet til konsepter som «Forholdet mellom distanse og tid», «Gjennomsnittlig hastighet» og «Konstant hastighet».

Alle studentene som deltok i denne studien hadde minst 60 studiepoeng innen matematikk på universitetsnivå. Man kan ut ifra det konkludere med at de har oppnådd en tilfredsstillende forståelse av matematikk på høyere nivå. Imidlertid så kan inkonsistensen med studentenes besvarelser på oppgavene stille spørsmål om hvor klare de er til å undervise om endringsrate på en klar og nøyaktig måte. Det kan da også stilles spørsmål om tilstrekkeligheten av matematiske studier på lærerutdanningsprogrammer.

Abstract

The theme for this masters dissertation is mathematics teacher education students' mathematical meaning of rate of change. It is a pilot study that uses the research instrument Mathematical Meanings for Teaching secondary mathematics (MMTsm) in Norway. The instrument is developed in the USA by Professor Pat Thompson at Arizona State University. It is a diagnostic instrument designed to investigate teachers' mathematical meanings and it is developed from a constructivist perspective. In the work for this dissertation I have focused on the subject 'rate of change', that is the subject of several of the tasks included in the MMTsm instrument. Also in the work for this dissertation the instrument has been translated from English to Norwegian, the report includes a reflection on this translation process. In this dissertation, I address the research question *"What does the MMTsm instrument expose when it is used to investigate Norwegian mathematics teacher education students' mathematical 'meaning' about rate of change?"* Through the Norwegian text the English word 'meaning' is used, 'meaning' may be very briefly explained as the application of cognitive schema expressed through students responses to the tasks set.

27 mathematics teacher education students from three universities in Norway engaged with the Norwegian version of the MMTsm instrument. To be able to say something about their meanings expressed in the individual tasks I developed an analysis tool based on the scoring rubric designed by Professor Thompson. The analysis tool is a concept map that contains important concepts connected to rate of change, and which has been color coded in relation to the answers students gave. With help of this analysis tool I have searched to see what the instrument exposes about these students mathematical meanings about rate of change.

The results indicate that several of these students express poorly developed meanings about the concepts related to rate of change. Amongst these, there were very few who expressed a good productive and consistent meaning across all the tasks connected to the concepts "The relationship between distance and time", "Average speed" and "Constant speed".

All the students included in the study had passed university mathematics courses accumulating at least 60 ECTS points. One might conclude that they have attained a satisfactory functional understanding of higher level mathematics. However, the inconsistencies expressed in their responses to the tasks raise questions about their readiness to teach the subject in a clear and unambiguous manner, thus raising questions about the adequacy of mathematical studies on teacher education programmes.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

I et av fagene vi hadde våren 2016 ble vi presentert for et diagnostisk instrument som er utviklet i USA og designet for å utforske læreres matematiske 'meanings'. I tillegg med spørsmålet om noen var interessert i å oversette dette til norsk, bruke det i Norge og basere sin masteroppgave på dette. Jeg syntes dette hørtes interessant ut, blant annet fordi som fremtidig lærer er dette noe som er relevant for meg. Jeg tenkte det ville være spennende å forske på lærerstudenters matematiske 'meanings', og håpte at jeg i den prosessen også kunne lære litt om mine egne matematiske 'meanings'. I tillegg så var det å kunne være med på en større internasjonal studie spennende. Instrumentet som brukes i denne forskningen er hovedsakelig utviklet av Pat Thompson ved Arizona State University, med hjelp fra andre internasjonale forskere. Å kunne være med å bidra til et større internasjonalt forskningsprosjekt var noe av det som var interessant med å være med på dette prosjektet. Både meg og min medstudent Magnhild viste interesse for dette prosjektet, og endte opp med å arbeide med dette instrumentet i våre masteroppgaver. Vi har samarbeidet både med oversettelsen av instrumentet og datainnsamlingen, ellers har vi arbeidet individuelt og fokusert på ulike oppgaver i instrumentet. Jeg valgte å fokusere på det matematiske emne endringsrate, og Magnhild valgte å fokusere på funksjoner. Instrumentet som brukes kalles MMTsm (Mathmatical Meanings for Teaching secondary mathematics), og er det diagnostisk instrument som består av 44 oppgaver fordelt på 7 matematiske emner (Thompson, 2015). En mer detaljer forklaring av instrumentet kan ses i kapittel 4.2.

Det var flere grunner til at jeg valgte å fokusere på det matematiske emnet endringsrate. En av dem er at 8 av oppgavene i instrumentet er knyttet opp til dette emnet, og jeg ønsket å ha mulighet til å se på flere oppgaver. Ellers så er endringsrate et viktig konsept, som er en del av læreplanen for alle matematikkfag som kan tas på videregående skole utenom matematikk 1P og 1P-Y (Kunnskapsdepartementet, 2006a, 2006b, 2013a, 2013b, 2013c). I Norge brukes ofte ordene vekstfart eller veksthastighet istedenfor endringsrate på litt lavere utdanningsnivå, og det er de begrepene som er brukt i læreplanen. Jeg vil likevel konsekvent bruke begrepet endringsrate videre i min masteroppgave.

Formålet med denne studien er å utforske matematikklærerstudenters 'meanings' om endringsrate, og for å kunne gjøre dette, bruke instrumentet utviklet av Pat Thompson. Jeg ønsker å se på hva instrumentet avslører om studentenes 'meanings' om det matematiske konseptet endringsrate. I tillegg til dette, så er denne studien en pilotstudie av å bruke den norske oversettelsen av instrumentet i Norge. Dermed vil et annet formål med denne studien være å se hva man lærer fra en pilotstudie der et amerikansk instrument brukes i Norge, det er altså ønskelig å se på om instrumentet er effektivt å bruke i en norsk kontekst.

Jeg vil også presisere at det er en grunn til at jeg har valgt å beholde det engelske ordet 'meaning' i denne forskningen. Vi ønsket å bruke den samme definisjonen som Pat Thompson har brukt i sin forskning, og vi hadde problemer med å finne en god norsk oversettelse for hvordan han definerer dette begrepet. Hvordan 'meaning' blir definert i denne forskningen og mer begrunnelse på hvorfor vi ikke fant en god norsk oversettelse kommer jeg tilbake til i kapittel 2.2.

Både den engelske versjonen av instrumentet og den norske oversettelsen er opphavsrettsbeskyttet for å sikre fortsatt pålitelighet av forskningsinstrumentet. I denne masteroppgaven har jeg med utdrag av oppgaver fra både den opprinnelige engelske versjonen av instrumentet og den norske oversettelsen, i tillegg til utdrag fra de tilhørende scoringsmanualene. Oppgavene fra den originale versjonen, og utdrag fra scoringsmanualene gjengis med tillatelse fra Pat Thompson. Jeg er veldig takknemlig for å få mulighet til å buke oppgavene fra instrumentet i min masteroppgave og for å få tillatelse til å reprodusere dem i denne rapporten. Opphavsretten må strengt følges, ingen av de engelske oppgavene eller utdragene fra scoringsmanualen kan brukes uten skriftlig tillatelse fra Pat Thompson. For tillatelse til å bruke oppgavene i den norske versjonen kontakt Simon Goodchild ved Universitetet i Agder.

1.2 Forskningsspørsmål

Formålet med denne studien er å studere matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate. Det er en pilotstudie om bruken av et instrument utviklet i USA, som er designet for å utforske læreres matematiske 'meanings'. Etter å ha oversatt dette instrumentet, og begrenset meg til kun et av de matematiske emnene instrumentet belyser, så endte jeg opp med følgende forskningsspørsmål som jeg med denne studien tar sikte på å belyse:

- *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate?*

1.3 Disposisjon

Jeg vil nå gi en beskrivelse av hvordan denne oppgaven er strukturert. Masteroppgaven min består av åtte kapitler. Kapittel 1 er allerede gjennomgått, og jeg har presentert bakgrunn for oppgaven og mitt forskningsspørsmål. I kapittel 2 presenteres det relevant teori, og jeg vil her gå mer inn på både konstruktivismen, 'meaning', og det matematiske emnet endringsrate. I kapittel 3 presenteres noe tidligere forskning, etterfulgt av kapittel 4 der metoden beskrives. I metodekapittelet presenteres både forskningsdesign, beskrivelse av metoden, beskrivelse av instrumentet, og også beskrivelse av oversettelses- og scoringsprosessen. I tillegg omtales etiske hensyn, og også studiens validitet og reliabilitet. I Kapittel 5 presenteres utviklingen og anvendelsen av analyseverktøyet som jeg bruker, og også analysen av datamaterialet. Deretter følger diskusjon av resultatene i kapittel 6. Etter det vil jeg i kapittel 7 prøve å gi en konklusjon i forhold til oppgavens forskningsspørsmål, etterfulgt av pedagogiske implikasjoner, forslag til videre forskning innenfor området og refleksjoner rundt eget arbeid. Avslutningsvis, i kapittel 8, er masteroppgavens referanseliste.

2. Teori

I dette kapittelet vil jeg presentere relevant teori for min oppgave. Først blir det en innføring i konstruktivismen (2.1), og deretter ses det på begrepet 'meaning' (2.2). Til slutt vil det matematiske emnet endringsrate (2.3) bli omtalt.

2.1 Konstruktivismen

Instrumentet vi bruker i denne oppgaven, MMTsm, er utviklet innenfor det konstruktivistiske læringssynet. Derfor er det viktig å se på hvordan man innenfor konstruktivismen ser på både læring og kunnskap. Dette er i tillegg viktig for å forstå hvordan 'meaning' defineres i denne forskningen (kapittel 2.2). Jeg vil her fokusere på det som ofte blir kalt for kognitiv konstruktivisme, altså den retningen innenfor konstruktivismen som vi finner hos Jean Piaget (1896-1980). Piaget regnes som en av de viktigste bidragsyterne til konstruktivismen (Imsen, 1998).

Det som det fokuseres på innenfor det konstruktivistiske læringssynet er menneskets tankevirksomhet, altså de indre, kognitive prosessene. Klarer vi å forstå hvordan mennesket tenker, så kommer vi også til å forstå læring, utvikling, hukommelse og flere andre fenomener (Krumsvik & Säljö, 2013). I følge Piaget så er det det man allerede kan som avgjør hvordan man forstår alle nye ting man står overfor. All stimulering blir altså tolket gjennom den eksisterende kunnskapen (Imsen, 1998). Når Piaget snakker om kunnskapen og erfaringene menneskene har, så bruker han begrepet skjema. Skjemaer er mentale strukturer som knytter konsepter sammen (Skemp, 1971). Skjemaene man har er i utgangspunktet nokså enkle, men de vil etter hvert ble mer og mer avanserte og komplekse. Skjemaer er altså kognitive strukturer som inneholder all erfaring, kunnskap og tenkemåter som hvert enkelt menneske har (Lyngsnes & Rismark, 2014). Når skjemaer blir utviklet så er det hjernen som kategoriserer dens egne aktiviteter (Davis & Tall, 2002).

Det er to ulike typer prosesser som tenkingen blir utviklet gjennom. Disse kalles for assimilasjon og akkomodasjon. Assimilasjon er den prosessen som finner sted når man tar i bruk det man allerede vet, til å forstå det som skjer. Ved å assimilere noe nytt til de skjemaene man allerede har, så knytter man sammen det man kan fra før av og denne nye kunnskapen, og dette gjør at man kan organisere verden meningsfylt (Hundeide, 1973). Assimilering er ofte forbundet med absorpsjon, at objekt A er assimilert til objekt B når A er transformert til å bli del av B (Thompson, 2015). For å knytte dette til Piaget, så brukte han dette ordet i kognitiv forstand, og det handler da i hovedsak om absorpsjon av informasjon (Thompson, 2013). Man kan si at det man opplever (A) er assimilert til et eksisterende skjema (B), når denne nye informasjonen (A) har blitt en del av det eksisterende skjemaet (B).

Den andre prosessen, akkomodasjon, spiller inn om man opplever noe nytt som ikke stemmer overens med det man allerede vet. Da må man endre sin måte å tenke på slik at det passer til den nye informasjonen. Det som skjer er altså en rekonstruering av de eksisterende skjemaene (Skemp, 1976). Enten så må de opprinnelige skjemaene endres, eller så kan det være nødvendig å skape helt nye skjemaer (Lyngsnes & Rismark, 2014). Akkomodasjonsprosessen fører altså til forandring av skjemaer, og det er dette som fører til utvikling og ny læring (Imsen, 1998). I Lyngsnes & Rismark (2014) blir det sagt veldig tydelig og konsist: «Vi tilpasser oss altså stadig mer komplekse omgivelser ved å bruke eksisterende skjemaer når disse kan anvendes (assimilasjon), og ved å modifisere, tilføye og lage nye skjemaer når det er påkrevd (akkomodasjon)».

Ved hjelp av assimilasjon og akkomodasjon så vil man klare å oppnå likevekt mellom de skjemaene man har, og ny erfaring man får. Sagt på en annen måte; våre forestillinger og måter å tenke på vil være i balanse med omverden (Krumsvik & Säljö, 2013). Hvis det ikke er likevekt, så vil det oppstå det vi kan kalle for kognitiv konflikt. Da blir man på en måte motivert til utvikling, det å skaffe seg ny og nødvendig kunnskap for å oppnå denne likevekten igjen. Piaget mener at dette er en indre motivasjon (Lyngsnes & Rismark, 2014). Det er også viktig å poengtere at det er mulig at det oppstår situasjoner der hverken assimilasjon eller akkomodasjon foregår. Grunnen til dette er at det er mulig at skjemaene en person har på et gitt tidspunkt ikke er nok utviklet til å klare å ta inn den nye informasjonen (Lyngsnes & Rismark, 2014).

Når det kommer til synet på kunnskap, så er hovedprinsippet at kunnskap må konstrueres av hvert enkelt menneske, det kan ikke overføres fra en person til en annen. Piaget skilte mellom to ulike typer kunnskap; figurativ kunnskap og operasjonell kunnskap. Figurativ kunnskap er fakta, detaljer og informasjon som ikke er relatert til noe skjema (Lyngsnes & Rismark, 2014). Pugging er et godt eksempel på en type læring som fører til figurativ kunnskap. Man kan pugge noe og gjenta det, men man vil ha problemer med å bruke kunnskapen i nye sammenhenger. Et eksempel som er knyttet til matematikk er at elever kan for eksempel bruke formler ukritisk uten å vite hva symbolene står for (Imsen, 1998). Operasjonell kunnskap er derimot relatert til skjema. Det er kunnskap som oppstår ved hjelp av assimilasjon og akkomodasjon. Det er kunnskap som man kan anvende i nye situasjoner. I forhold til matematikken kan det være å løse problemløsningsoppgaver eller praktiske oppgaver (Lyngsnes & Rismark, 2014).

2.2 ‘Meaning’

Som nevnt i innledning så har jeg valgt å bruke det engelske ordet ‘meaning’ i denne forskningen. Grunnen til dette var som sagt at vi slet med å finne en god norsk oversettelse. Jeg vil nå først skrive om hva som legges i begrepet ‘meaning’, deretter hva som er forskjellen på ‘meaning’ og kunnskap, og også hvorfor Pat Thompson valgte å fokusere ‘meaning’, ikke kunnskap. Etter at begrepet ‘meaning’ er blitt forklart vil jeg si litt mer om hvorfor vi valgte å bruke det engelske begrepet og ikke oversette det.

‘Meaning’ kan ses på og defineres på flere litt forskjellige måter (Thompson, 2013), men i denne forskningen så vil ‘meaning’ bli definert på samme måte som Pat Thompson bruker i sin forskning. Denne definisjonen baserer seg i stor grad på konstruktivismen, og er knyttet til Piaget sitt begrep assimilering til skjema (Thompson, 2015). I følge Piaget så er det å forstå det samme som å assimilere til et skjema. Så fra et Piagetisk synspunkt så er det å konstruere en ‘meaning’ det samme som å konstruere en forståelse, altså et skjema. Det kan altså være litt utfordrende å skille mellom forståelse og ‘meaning’, og for Piaget så var disse begrepene synonymer (Thompson, 2013).

I følge Piaget og Garcia (1991) så har alle handlinger en ‘meaning’, og det må være implikasjoner mellom handlinger, og dermed mellom deres ‘meanings’. Alt det en person gjør og sier er gjennomsyret med ‘meaning’. De ‘meanings’ som en person har, antyder hva han vil gjøre eller si (før en handling), og hans ‘meanings’ er underforstått av hva han gjorde eller sa (etter en handling) (Thompson, 2016). Piaget og Garcia (1991) definerer skjema på denne måten: “a scheme is what can be repeated and generalized in an action”, og ut i fra dette så sier de at ‘meaning’ til et objekt er hva som kan gjøres med objektet. Altså hvilke handlinger som kan gjøres med det. Det er viktig å få frem at når Piaget snakket om handlinger (actions) så mente han all bevegelse, all tenking og alle følelser som svarer til et behov (Thompson, 2015). I følge Thompson (2015) så er en av de fremste karakteristikkene med 'meanings' at de oppstår når man tolker noe, og det å tolke noe er en handling.

Alle handlinger man gjør er altså knyttet til hver persons individuelle 'meaning', og man kan si at 'meaning' er anvendelse av skjema. Altså, de kognitive skjemaene man har inneholder all kunnskapen man har, mens 'meaning' er hvordan denne kunnskapen anvendes. I følge Thompson (2015) så guider læreres matematiske 'meanings' de sine handlinger, og de 'meanings' som de har utgjør de sitt bilde av den matematikken som de skal undervise og også har som hensikt at elevene skal ha.

Tidligere forskning som er gjort på læreres matematiske kunnskap har for det meste fokusert på læreres deklarative kunnskap, og det er det utfordrende å knytte sammen med hvordan en lærer underviser (Thompson, 2015). I følge Oxford Living Dictionary (u.å.) så er kunnskap (knowledge) fakta, informasjon, og evner som man tilegner seg gjennom erfaring eller utdanning, og den såkalte klassiske måten å definere kunnskap på er at det er en «begrunnet sann oppfatning» (Holmen, 2014). 'Meaning', som jeg nettopp har forklart, er derimot mer personlig og kommer til uttrykk i alle handlinger en person gjør. Thompson (2015) mener altså at det er mer produktivt å fokusere på lærernes matematisk 'meaning' i forhold til å forbedre læreres undervisning. Han sier «Understanding what people mean gives more insight into their thinking than does understanding what they believe to be true».

I følge Thompson (2015) så er det også slik at to personer som har ulik 'meaning' kan i flere tilfeller gi like svar på spørsmål om hva de vet om noe. Eksempelet som Thompson ser på er to læreres 'meaning' om ligninger og fremgangsmåter for å løse disse. Det er mulig at begge lærerne kan gi like svar hvis de blir spurt om hva de vet om ligninger, men hvis man ser på hvilken 'meaning' de innehar er det nokså ulikt. Den ene læreren, Lærer 1, kan tenke at så lenge noe inneholder et likhetstegn så er det en ligning, og strategien for å løse en algebraisk ligning er å «gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet», og at for å løse den så må man ende opp med noe lignende x = (tall), og hele poenget med ligninger er å oppnå dette svaret. Den andre læreren, lærer 2, sin 'meaning' er derimot at en algebraisk ligning er en «statement of equality» sammen med spørsmålet «for hvilke verdier av variabelen vil dette være sant?». Lærer 2 har som mål å kunne svare på dette spørsmålet, og istedenfor å tenke at «man må gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet» så er Lærer 2 sin strategi for å løse ligningen å bruke en ekvivalens-bevarende transformasjon på ligningen sik at hun vil komme nærmere å svare på spørsmålet. Disse to lærerne innehar nokså ulik 'meaning' om ligninger og fremgangsmåten for å løse de. Ved å endre fokuset fra å undersøke læreres kunnskap til å undersøke deres 'meanings', så kan man oppdage 'meanings' som dette. Dette er altså en grunn til at Thompson valgte å fokusere på 'meaning' og ikke kunnskap. Som Thompson (2015) sier «Their different meanings, however, would provide different potentialities regarding what they say to students *about* equations and equation solving».

Hvordan en lærer formidler sin 'meaning' til sine elever er viktig. Dette er viktig i forhold til hva elevene ender opp med å lære. Et eksempel som Thompson (2016) presenterte var at det kan være at hvis en lærer sier til elevene at « - -x = x», så er det mulig at elevene ender opp med en 'meaning' som inneholder «hvis det står mer enn et minus tegn, så skal jeg skrive det uten noen minus tegn». Selv om læreren har en godt utviklet 'meaning' som innebærer å vite at for eksempel « - - - x = -x», så vil hvordan læreren formidler det være avgjørende for hvordan elevene konstruer sin 'meaning'. En lærer vil alltid formidle sine 'meanings' til elevene, uansett om læreren er klar over hvilke 'meanings' de selv har eller ikke, og uansett hvor god lærerens 'meanings' er (Thompson, 2015). Både hvor gode lærerens 'meanings' er, og også hvor godt læreren mestrer å formidle disse er altså avgjørende for elevenes mulighet til å utvikle gode matematiske ‘meanings’. Thompson (2013) trekker også frem et annet viktig aspekt i forhold til å formidle en ‘meaning. Det er at for å kunne formidle en ‘meaning’ så må begge deltakerne, altså både formidleren og den som det blir formidlet til «delta». Altså, hvis det er snakk om en samtale mellom to personer, så må den personen det blir formidlet til være en del av samtalen og bry seg om hva den andre personen prøver å formidle. I en undervisningssituasjon vil dette si at læreren formidler til elevene, og for at elevene skal kunne konstruere en ‘meaning’ så må elevene ha som intensjon å prøve å forstå lærerens formidlede ‘meaning’.

Dette fører oss til en annen grunn til at det i forskningen til Pat Thompson og Hyunkyong Yoon fokuseres på lærernes matematiske ‘meaning’. Det er at lærerens ‘meaning’ er sentralt i forhold elevenes konstruksjon av ‘meaning’. I undervisningen så kan elevene konstruere sin ‘meaning’ ut ifra andre ting, som for eksempel medelevene eller oppgaver de gjør. Likevel, så mistenker de at hva læreren sier og gjør er en viktig kilde til hvordan elevene konstruerer sin matematiske ‘meaning’ (Yoon, Byerley & Thompson, 2015).

Konstruktivismen tilbyr en teori om læring, men siden denne teorien ikke kan bevises eller bekjennes mener Ernest (2006) at det er bedre å se på det som en ‘filosofi’ for læring. Sentralt i teorien er individets rolle til å bygge sine egne modeller som tolker verden de bor i og styrer deres handlinger i verden. Disse modellene er basert på skjemaene som oppstår fra de to prosessene assimilasjon og akkommodasjon. Inntil modellene blir utfordret og man går inn i en tilstand der det ikke er likevekt, er skjemaene og modellene nokså stabile. Det vi merker oss er at modellene ‘tilhører’ individet, og at de oppstår som et resultat av individets kognitive aktivitet. I tillegg er modellene idiosynkratiske, fordi de er individuelt bestemt av individet, (og det er ikke mulig at kampen mellom modellen og den virkelige verden kan være trygg). Det er også antatt at individets ‘meanings’ som er innebygd i deres mentale modeller, kan bli avslørt gjennom deres svar på de ulike oppgavene i instrumentet. En persons ‘meanings’ vil ikke forandre seg fra oppgave til oppgave, men ulike oppgaver kan avsløre forskjellige nyanser av ‘meanings’ som er innebygd i personens modeller av verden. (Goodchild, 2001).

Når vi (Magnhild, Simon og meg) avgjorde at vi mente det engelske begrepet ‘meaning’ ville være best å bruke, så var det hovedsakelig fordi vi ikke fant en norsk oversettelse vi mente var tilfredsstillende. Det mest logiske å oversette ‘meaning’ til på norsk vil være ‘mening’, men vi var redd dette lett kunne ha blitt forvekslet med det som på engelsk kalles ‘opinion’. Akkurat dette var noe vi opplevde da vi skulle oversette instrumentet, som er noe jeg vil gå nærmere inn på i kapitel 4.3.1 Andre norske oversettelser vi var innom var ‘forståelse’, ‘oppfatning’ og ‘betydning’, men dette er begreper som kan oversettes til henholdsvis ‘understanding’, ‘perception’ og ‘importance’. Ved å bruke det engelske begrepet unngikk vi alle misforståelser som muligens kunne ha oppstått.

2.3 Endringsrate

I denne masteroppgaven fokuserer jeg på det matematiske konseptet endringsrate, og lærerstudenters ‘meaning’ om dette. Da er det viktig å vite hva endringsrate faktisk er og hvordan det defineres. I tillegg er det interessant å se på hvordan endringsrate kommer til utrykk i læreplanen på videregående skole.

2.3.1 Definisjon av endringsrate

Endringsrate handler om hvordan noe endrer seg i forhold til noe annet. Hvis x er den uavhengige variabelen og y er den avhengige variabelen, så vil:

$$\text{Endringsrate} = \frac{\text{Endringen i y}}{\text{Endringen i x}}$$

Endringsrate kan være enten positiv, negativ, eller null, hvis det ikke er noen endring (Varsity Tutors, u.å.). For eksempel så er hastighet en endringsrate. Hastighet er distanse per tidsenhet (James & James, 1976). Da får vi endringen i distanse over endringen i tid.

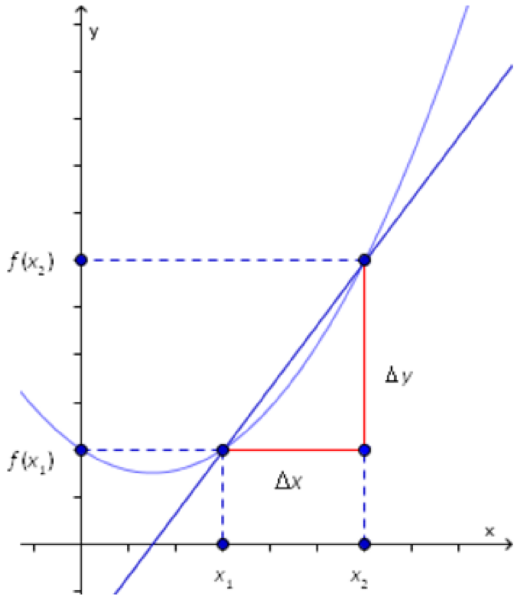
$$\text{Hastighet} = \frac{\text{Endringen i distanse}}{\text{Endringen i tid}}$$

Å finne endringsraten til funksjoner er viktig innenfor kalkulus, da spesielt differensialregning (differential calculus). Geometrisk så vil det å finne (den momentane) endringsraten til en funksjon være å finne stigningstallet til tangenten i et spesifikt punkt på funksjonen. Det man da gjør er å finne hastigheten til et objekt hvis man vet posisjonen som en funksjon av tid (Downing, 2009)

I Norge brukes ofte begrepet vekstfart, av og til også veksthastighet, istedenfor endringsrate. Dette gjøres spesielt på litt lavere undervisningsnivå, som for eksempel på videregående skole. I læreplanen til matematikk 1T er et av læreplanmålene at eleven skal kunne «Berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdier for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta» (Kunnskapsdepartementet, 2013c). Her i læreplanen ser vi at begrepet vekstfart blir brukt istedenfor endringsrate. Begrepet veksthastighet blir blant annet brukt i læreplanen til matematikk S1 (Kunnskapsdepartementet, 2006b). Jeg vil senere i dette kapittelet si litt mer om hvordan endringsrate kommer til uttrykk i læreplanen generelt. Videre i denne teksten vil jeg også bruke begrepet endringsrate konsekvent, bortsett fra tilfeller der jeg siterer. Begrepet endringsrate kan også sies å være mer abstrakt og generelt enn begrepet vekstfart. Vekstfart forbindes ofte med vekst av noe, altså endring i positiv retning, mens begrepet endringsrate derimot åpner i større grad opp for endring i både positiv og negativ retning.

Vi skiller mellom gjennomsnittlig endringsrate og momentan endringsrate. Hvis man ikke har en lineær funksjon så vil endringsraten variere i forhold til hvor man er på grafen (NDLA,2010). Gjennomsnittlig endringsrate er den endringen en funksjon vil ha om den hadde endret seg, altså økt eller minket, likt hele veien. Når man skal finne gjennomsnittlig endringsrate over et intervall $[x_1, x_2]$så må man finne stigningstallet til sekanten gjennom x_1 og x_2. Gjennomsnittlig endringsrate defineres slik (matematikk.org, 2014):

> Den gjennomsnittlige vekstfarten til en funksjon f(x) mellom to punkter på x-aksen, x_1 og x_2, er:
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



Figur 2.1: Gjennomsnittlig endringsrate (NDLA,2009a)

Figur 2.1 viser definisjonen på gjennomsnittlig endringsrate grafisk. Helt i starten av kapittelet ble det sagt at endringsrate = endringen i y delt på endringen i x. Det kommer tydelig frem av formelen og fra Figur 2.1 at det er dette forholdet. Endringen i y er $f(x_2) - f(x_1)$, mens endringen i x er $x_2 - x_1$. Når man finner forholdet mellom disse to endringene, så vil man finne ut hvor mye funksjonen endrer seg over intervallet, og man vil da finne den gjennomsnittlige endringsraten. Et eksempel på gjennomsnittlig endringsrate er gjennomsnittlig hastighet. Den gjennomsnittlige hastigheten til et objekt over et bestemt tidsintervall, er kvotienten av distansen reist over dette tidsintervallet og lengden til tidsintervallet (James & James, 1976). Det som er viktig å legge merke til i forhold til gjennomsnittlig endringsrate er at det er over et bestemt intervall. I grafen så kan vi se at det er over intervallet mellom to punktet, og i forhold til gjennomsnittlig hastighet så er det over et tidsintervall.

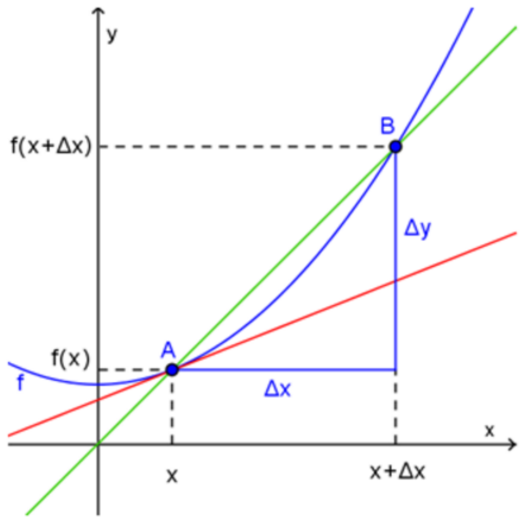
Når vi skal finne momentan endringsrate, så ser vi på endringen i et punkt, ikke over et intervall. Momentan endringsrate defineres slik (matematikk.org, 2014):

> Den momentane vekstfarten til funksjonen f(x) når x = a er stigningstallet til tangenten til kurven i punktet

Å finne den momentane endringsraten til funksjonen f(x) er ekvivalent med å derivere f(x) (Hervik, 2017). Hvis funksjonen er y = f(x), så er den deriverte (Downing, 2009):

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Figur 2.3 viser definisjonen på momentan endringsrate grafisk. Her kan vi se at det er tegnet inn en tangent til punktet A, og stigningstallet til denne tangenten i punktet A er den momentane endringsraten. Endringsrate er som nevnt flere ganger endringen i y delt på endringen i x. Hvis vi ser på dette i forhold til Figur 2.2 så ser vi at endringen i y er $f(x + \Delta x) - f(x)$, mens endringen i x er $x + \Delta x - x$, altså Δx. Dette kjenner vi igjen i definisjonen av den deriverte. Finner man forholdet mellom disse to endringene der $\Delta x \to 0$, så vil man finne ut hvor mye funksjonen endrer seg i punktet, og man vil finne den momentane endringsraten.



Figur 2.2: Momentan endringsrate (NDLA,2009b)

Endringsrate er altså tett knyttet til dette med derivasjon, da momentan endringsrate er det samme som den deriverte. Selv om jeg i denne oppgaven skal fokusere på endringsrate, og ikke derivasjon, så synes jeg det er relevant å nevne at derivasjon er en viktig del av flere av matematikkfagene som kan velges i videregående skole. Endringsrate kan sies å være et terskelkonsept, 'threshold concept', til derivasjon og differensialregning, på norsk kan man si at endringsrate på en måte er en inngangsport til dette. Et terskelkonsept kan ses på som en portal, en åpning, til tidligere utilgjengelige måter å tenke på (Meyer & Land, 2006). Et terskelkonsept kan altså ses på som et konsept som må kunnes for å klare å forstå noen andre konsepter. Endringsrate er altså et viktig konsept i forhold til å kunne få en velutviklet god 'meaning' om derivasjon.

2.3.2 Endringsrate i læreplanen

Endringsrate en del av læreplanen for de fleste matematikkfag som kan velges på videregående skole, alle utenom 1P og 1P-Y (Kunnskapsdepartementet, 2006a, 2006b, 2013a, 2013b, 2013c). Vel å merke så brukes ikke begrepet endringsrate, men vekstfart eller veksthastighet. Jeg vil i dette kapittelet se på hvordan endringsrate kommer til uttrykk i læreplanen, men jeg vil også se på hvordan viktige konsepter knyttet til endringsrate kommer til uttrykk. Eksempler på slike konsepter er hastighet, distanse og tid, derivasjon og proporsjonalitet.

Selv om det i læreplanene til 1P og 1P-Y ikke eksplisitt nevnes endringsrate, eller vekstfart, så kan noen av læreplanmålene knyttes til viktige konsepter i forhold til endringsrate. I begge disse læreplanene står det at det er et mål for opplæringa at eleven skal kunne: «rekne med forhold, prosent, prosentpoeng og vekstfaktor» og «behandle proporsjonale og omvendt proporsjonale storleikar i praktiske samanhengar» (Kunnskapsdepartementet, 2013c). Her ser vi at elevene skal kunne regne med forhold, og også vite hva proporsjonale størrelser er og kunne bruke dette i praktiske sammenhenger.

I forhold til konsept som kan knyttes til endringsrate, så fokuserer matematikk 2P og 2P-Y hovedsakelig på at elevene skal kunne finne gjennomsnittlig vekstfart og tilnærmingsverdier for momentan vekstfart. Det samme gjelder for T-matte (inkludert 1T-Y), men der er det også fokus på at elevene skal kunne gi noen praktiske tolkinger av disse aspektene. Læreplanmålene som kan knyttes til endringsrate for S- og R-matte fokuserer hovedsakelig på derivasjon, da å kunne definisjonen på den deriverte og kunne bruke den deriverte i praktiske sammenhenger. Definisjonen av den deriverte er i tillegg også en del av læreplanen til 1T. Som man kan se her så er det i de fleste av matematikkfagene et fokus på å kunne bruke vekstfart eller derivasjon i praktiske sammenhenger.

Begreper som hastighet (eller fart), tid og distanse blir ikke nevnt i læreplanene for de ulike matematikkfagene for videregående skole. Flere av dem blir derimot nevnt i læreplanene for barne- og ungdomsskolen. I læreplanen for matematikk fellesfag så kan man se at på barne- og ungdomsskolen er et av hovedområdene «Måling», og flere av disse begrepene blir nevnt i kompetansemål under dette hovedområde. I læreplanens kompetansemål etter 7. årstrinn står det blant annet at elevene skal kunne «bruke forhold i praktiske sammenhengar, rekne med fart og rekne om mellom valutaer», og etter 10. årstrinn er et av målene for opplæringa at elevene skal kunne «gjere overslag over og berekne lengd, omkrins, vinkel, areal, overfalte, volum, tid, fart og massetettleik og bruke og endre målestokk» (Kunnskapsdepartementet, 2013c). Dette er altså begreper som introduseres tidlig, og er begreper elever som går ut av grunnskolen skal kjenne til og kunne bruke. Når elevene lærer om blant annet fart, tid og lengde, så blir det ikke da knyttet til endringsrate. Likevel er dette viktige konsepter å inneha en god ‘meaning’ om når de senere i sitt skoleløp blir introdusert for endringsrate.

3. Tidligere forskning

Pat Thompson, sammen med de andre deltakerne i «Projct Aspire», har utviklet instrumentet som brukes i denne forskningen, MMTsm. Som nevnt i kapittel 2.2, så er det tidligere forsket mest på læreres matematiske kunnskap, og ikke matematiske 'meaning'. Derfor vil jeg i dette kapitelet kun se på forskning gjort med dette instrumentet, og resultatene fra det. Instrumentet er opprinnelig utviklet for å brukes i videreutdanning («professional development programs»), og det er et diagnostisk instrument (Thompson, 2015). Instrumentet er blitt brukt i studier i USA og i Sør-Korea. Hyunkyoung Yoon, en doktorgradsstudent ved Arizona State University som Pat Thompson veileder, har oversatt instrumentet til koreansk og utprøvd det i Sør-Korea. Jeg vil i dette kapittelet se litt på hvordan utviklingen av instrumentet foregikk, og se noe på hva instrumentet har avslørt om læreres matematiske 'meanings' når det ble brukt i både USA og Sør-Korea. Jeg vil fokusere på resultater fra noen av oppgavene i instrumentet som er knyttet til endringsrate, siden det er dette matematiske emnet jeg fokuserer på i min forskning.

For å lage et best mulig instrument var det en lang prosess på 3 år for å få utviklet oppgavene som er i instrumentet nå (Yoon, Byerley & Thompson, 2015). Thompson (2015) beskriver 8 steg i denne utviklingsprosessen. (1): lage utkast på noen oppgaver, og intervjue lærere som svarte på oppgaven. I disse intervjuene var de hovedsakelig interessert i å se om lærerne tolket oppgavene slik forskerne ønsket, og i tillegg om de fikk svar de forventet og ønsket. I tillegg var det en gruppe på 4 matematikere og 6 matematikklærere som ga tilbakemeldinger på oppgavene ved flere stadier i utviklingen av dem. (2): Endre oppgavene, og intervjue lærere igjen. (3): Administrere en samling av oppgavene til en stor gruppe lærere, og analysere svarene ut ifra hvilken 'meaning' og tenkemåter de ser ut til å avsløre. (4): Forkaste ubrukelige oppgaver. (5): Intervjue lærere for å forstå hvorfor de svarte som de gjorde. (6): Endre de resterende oppgavene i forhold til hva de lærte av intervjuene. (7): Administrere en samling av de endra oppgavene til en stor gruppe lærere. (8): Utvikle scoringsmanualer for å kunne score oppgavene.

Det er altså tydelig at dette er en prosess som har vært lang, men som har endt med et godt instrument for å undersøke læreres 'meanings'. Første runde med datainnsamling foregikk i 2012, der 144 lærere deltok, dette var altså steg (3) i prosessen. I 2013 ble det utført en pilotstudie med de endrede oppgavene, og det var ut ifra svarene til de 96 «high school» lærerens som deltok i denne at scoringsmanualene ble utviklet (Thompson, 2015; Yoon, Byerley & Thompson, 2015). Jeg vil nå presentere noen av resultatene fra disse to pilotstudiene i 2012 og 2013, i tillegg til noen resultater fra den koreanske versjonen av instrumentet når det ble gjennomført sommeren 2014.

Byerley og Thompson (2014) presenterer resultater på en oppgave som ble laget for å avsløre læreres 'meanings' om konstant hastighet. Resultatene som blir presentert her er fra den første runden med datainnsamling sommeren 2012. Oppgaven er en flervalgsoppgave, som kan ses i Figur 3.1. Denne oppgaven er også en av oppgavene som er med i den nåværende versjonen av instrumentet.

Every second, Julie travels j meters on her bike and Stewart travels s meters by walking, where $j > s$. In *any* given amount of time, how will the distance covered by Julie compare with the distance covered by Stewart?

a. Julie will travel $j - s$ meters more than Stewart.
b. Julie will travel $j \cdot s$ meters more than Stewart.
c. Julie will travel j / s meters more than Stewart.
d. Julie will travel $j \cdot s$ times as many meters as Stewart.
e. Julie will travel j / s times as many meters as Stewart.

Figur 3.1: Oppgave som handler om konstant hastighet

De ulike 'meanings' som ligger bak hvert av svaralternativene i denne oppgaven er i ulik grad gode og produktive 'meanings'. Svaralternativ (e) blir sett på som den mest produktive måten å tenke på konstant hastighet. Alternativ (e) tyder på at lærerne tenker multiplikativt, og ikke additivt når de løste denne oppgaven. De andre alternativene, spesielt alternativ (a) og (c) tyder på additiv tenking. Resultatet på denne oppgaven viser at en stor andel, 70 %, ikke reflekterte multiplikativt når de løste oppgaven, og omtrent 2/3 av disse valgte svaralternativ (a).

Yoon, Byerley og Thompson (2015) presenter to oppgaver som handler om gjennomsnittlig endringsrate. Den ene oppgaven, som ble kalt «difference from rate», handler om en funksjons gjennomsnittlige endringsrate over et intervall (Figur 3.2). Den andre, som ble kalt «San Diego to El Centro», handler om en bils gjennomsnittlige hastighet (Figur 3.3). Begge disse oppgavene er med i den nåværende versjonen av instrumentet, men den siste er endret litt.

Det ønskelige svaret, som gir den høyeste scoren på oppgaven «difference from rate» er alternativ (a), og dette tyder på at lærerne tenker på gjennomsnittlig hastighet på denne måten: «hvor mange ganger større er en endring i y enn en endring i x over et intervall». De andre svaralternativene ble utviklet for å avsløre andre 'meanings'. Resultatet fra pilotstudien i USA viser at omtrent halvparten av lærerne fra USA svarte alternativ (a), som vil si at de har uttrykt en god 'meaning'. Pilotstudien i Sør-Korea viser at hele 61 av 66 valgte alternativ (a).

Consider a non-linear function defined on the interval 7.3 to 7.6. The function's average rate of change over that interval is 4. What is the difference between the value of the function at $x = 7.6$ and the value of the function at $x = 7.3$?

Select the best answer.

a. 0.3×4
b. 4
c. $0.3 / 4$
d. $4 / 0.3$
e. $7.6 - 7.3$
f. Not enough information.

Figur 3.2: Oppgaven som blir kalt «difference from rate» (Yoon, Byerley & Thompson, 2015)

A car went from San Diego to El Centro, a distance of 90 miles, at 40 miles per hour. At what speed would it need to return to San Diego if it were to have an average speed of 60 miles per hour over the round trip?

Part B. A round trip of 180 miles at an average speed of 60 mi/hr will take 3 hours. Is this fact consistent with your answer on the prior page? Explain.

If you would like to rework the problem, do so on this page. Please do not cross out your prior work.

Figur 3.3: Oppgaven som blir kalt «San Diego to El Centro», Del A og Del B (Yoon, Byerley & Thompson, 2015)

I forhold til oppgaven «San Diego to El Centro» så var det ønskelig at lærerne sin 'meaning' var at: gjennomsnittlig hastighet er den konstante hastigheten bilen må reise for å ha reist den samme distansen på samme tid som den opprinnelige turen. Oppgavenes Del A ble scoret ut ifra om lærerne klarte å komme frem til de riktige svaret, som er 120 mph., uten å tenke på gjennomsnittlig (average) som aritmetisk gjennomsnitt (mean). Resultatene fra pilotstudien i USA viser at omtrent en tredjedel (31/96) av lærerne avslørte en 'meaning' for gjennomsnittlig endringsrate som aritmetisk gjennomsnitt. Som vil si at de løste oppgaven ved å sette opp noe lignende som (40+S)/2=60, og fikk svaret 80 mph. I motsetning, så var det kun 2 av 66 koreanske lærerne som hadde en slik 'meaning' for gjennomsnittlig endringsrate, mens resten av de koreanske lærerne uttrykte en ønskelig god 'meaning'

Yoon, Byerley og Thompson (2015) konkluderte med at, basert på svarene i disse oppgavene i disse to pilotstudiene, så er de koreanske lærernes 'meanings' om endringsrate betydelig sterkere enn de amerikanske lærernes 'meanings'. Nesten alle de koreanske lærerne visste at gjennomsnittlig endringsrate sier noe om endringen i y over endringen i x over et intervall, og blandet heller ikke gjennomsnittlig (average) med aritmetisk gjennomsnitt (mean). Mens en god del av de amerikanske lærerne hadde problemer med dette, og uttrykte en dårlig og lite produktiv 'meaning' for gjennomsnittlig endringsrate.

Generelt, så har det vist seg at Sør-koreanske lærere presterer bedre på oppgavene i instrumentet, som vil si at de uttrykker bedre og mer produktive 'meanings' enn de amerikanske lærerne. Poenget er likevel ikke at Sør-koreanske lærere kan mer matematikk enn de amerikanske lærerne, heller at en større andel av Sør-koreanske lærere har matematiske 'meanings' som potensielt er mer produktive for elevenes læring (Thompson, 2016).

4. Metode

Metode er måten man velger å innhente datamaterialet på. Metoden man velger bør være hensiktsmessig i forhold til forskningsspørsmålet. I dette kapittelet vil jeg først gi et innblikk i oppgavens forskningsdesign og bakgrunn for valg av metode (4.1), etterfulgt av en beskrivelse av instrumentet (4.2). Deretter vil oversettelses- og scoringsprosessen (4.3) beskrives, før valg av deltakere og beskrivelse av metoden (4.4) presenteres. Videre følger det et eksempel på hvordan vi har arbeidet med å oversette og score en av oppgavene (4.5). Til slutt omtales etiske hensyn (4.6) og oppgavenes validitet og relabilitet (4.7).

4.1 Forskningsdesign og bakgrunn for valg av metode

Det ble tidlig bestemt at når vi valgte å være med på dette prosjektet, og å bruke dette instrumentet, så ville vi gjennomføre det så likt som mulig som Pat Thompson gjorde i USA. Dette førte selvfølgelig til at hvordan selve datainnsamlingen skulle foregå var nokså låst, da det var klare instrukser om hvordan gjennomføringen av instrumentet skulle være (se neste kapittel 4.2 Beskrivelse av instrumentet). Dermed er metoden for innsamling av datamaterialet i denne forskningen kun innsamling av skriftlige besvarelser. Dette er hensiktsmessig i forhold til mitt forskningsspørsmål, som er: *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate?* I forhold til forskningsspørsmålet mitt så er jeg altså kun interessert i hva som kommer frem gjennom instrumentet. Dermed ble det ikke vurdert som nødvendig å samle inn datamateriale på noe annen måte i tillegg, som for eksempel intervju.

Jeg vil definere denne forskningen som en kvalitativ pilotstudie. Jeg vil i det etterfølgende gi en begrunnelse for dette.

Man skiller ofte mellom kvalitativ og kvantitativ forskning, men det er likevel viktig å se på kvalitative og kvantitative metoder som supplerende metoder, som ikke kan erstatte hverandre (Malt, 2015). Jeg ønsket å gå i dybden på datamaterialet mitt, så det er gjort en kvalitativ analyse av datamaterialet. Kvalitativ forskning ses på som beskrivende og tolkende. Likevel vil jeg si at denne forskningen har noen trekk fra kvantitativ forskning. Først og fremst fordi instrumentet er utviklet for å kunne gjennomføres på et stort antall personer. I forhold til hvordan scoringsmanualene er utviklet så er det også mulig å lage en oversikt over hvor mange som har scoret på de ulike nivåene, og evt. generalisere, osv. Jeg vil uansett kategorisere denne forskningen som kvalitativ på grunn av hvordan jeg ønsker å analysere datamaterialet, og fordi det kun er 27 deltakere i denne studien. Det såpass lite antall vil ikke kunne gi grunnlag for en kvantitativ undersøkelse som kan gi valide resultater.

Denne oppgaven er en pilotstudie, der den norske oversettelsen av instrumentet blir utprøvd i Norge. Det er en pilotstudie innenfor en større forskningsstudie som vil fortsette etter at arbeidet med denne masteroppgaven er fullført. En pilotstudie defineres som en utprøving av metode i relativt liten skala, der det er planlagt å benytte metoden i større vitenskapelige studier (Braut, 2014). Siden dette er en pilotstudie, så vil denne studien i tillegg til å svare på forskningsspørsmålet, kunne si noe om styrker og svakheter med bruken av denne metoden. For eksempel i forhold til den norske oversettelsen og også i forhold til bruken av selve instrumentet. Likevel vil det neste steget innenfor dette prosjektet ikke nødvendigvis være en studie i store skala. Det kan være nødvendig med flere pilotstudier, som blant annet går mer i dybden ved å intervjue deltakere, slik som Pat Thompson gjorde da de utviklet instrumentet (Thompson, 2015).

4.2 Beskrivelse av instrumentet

«Mathematical Meanings for Teaching secondary mathematics», MMTsm, er et diagnostisk instrument som består av 44 oppgaver. Det ble utviklet av Patrick Thompson for å brukes i videreutdanning («professional development programs») (Thompson, 2015).
Oppgavene fokuserer på 7 ulike emner (jeg har oppført emnene på engelsk i parentes):

- Variasjon og samvariasjon (Variation and covariation)
- Funksjonsegenskaper, modellering og notasjon (Function properties, modeling, notation)
- Referansesystem (ved relativ bevegelse) (Frames of Reference)
- Størrelser og målinger (Magnitude and measure)
- Proporsjonalitet (Proportionality)
- Endringsrate (Rate of Change)
- Gjenkjenne/identifisere strukturer (Structure sense)

Fordelingen av antall oppgaver i hvert av emnene er henholdsvis 4, 13, 2, 4, 5, 8 og 8. De emnene som blir dekket av flest oppgaver i instrumentet er altså: funksjonsegenskaper, modellering og notasjon, endringsrate, og strukturforståelse. De første 6 oppgavene i instrumentet presenteres som animasjoner, og de resterende presenteres skriftlig. Deltakerne svarer på alt skriftlig, rett på oppgavearkene. Deltakerne får 2 timer til å svare på instrumentet, dette er inkludert animasjonsbiten på ca. 20 min. Instrumentet består av ulike oppgavetyper; noen av oppgavene er flervalgsoppgaver, noen krever et tekstsvar, mens andre kun krever et matematisk svar, som for eksempel et tall eller en formel. Noen av oppgavene er også utformet slik at deltakeren må tegne, da gjerne en graf eller for eksempel et punkt på en graf. Oppgavene i instrumentet er ikke nummerert, og noen av oppgavene går over to sider, så selv om det kun er 44 oppgaver så er det 50 sider. Siden de ikke er nummerert så har jeg valgt å kalle dem for det sidetallet de er på, altså oppgave 17 er den oppgaven som er på side 17, men det er ikke den 17’ende oppgaven i instrumentet. Hvis en oppgave går over to sider, så kaller jeg oppgaven for begge sidetallene. For eksempel oppgaven som går over side 11 og 12 vil jeg kalle for oppgave 11-12.

4.3 Oversettelses- og scoringsprosessen

I dette delkapittelet vil jeg først fortelle litt over oversettelsesprosessen (4.3.1), der jeg både går inn på hvordan vi gikk frem da vi skulle oversette og også utfordringer vi støtte på underveis. Deretter presenteres scoringsprosessen (4.3.2), der jeg vil forklare hvordan scoringsverktøyet til instrumentet er utformet og også hvordan det brukes.

4.3.1 Oversettelsesprosessen

Instrumentet vi bruker var originalt på engelsk. Så for å kunne bruke dette i Norge så måtte det først oversettes. Dette var en lang og omfattende prosess. For å få oversettelsen så bra som mulig så valgte vi å først oversette til norsk og deretter tilbake til engelsk, for så å sammenligne med originalen. Vi gjorde det på den måten at Magnhild og meg delte oppgavene i to, og oversatte hver vår halvdel fra engelsk til norsk. Etterpå så byttet vi oppgaver, og oversatte fra norsk til engelsk. Fordelen med at vi oversatte halvparten av oppgavene hver, var at når vi skulle oversette fra norsk til engelsk igjen så hadde vi ikke sett originalen. Dette gjør at oversettelsen ikke ble påvirket av dette. Etter at all oversettelsen var gjennomført møttes meg, Magnhild og Simon for å sammenlikne den engelske oversettelsen med den originale engelske versjonen, og i tillegg gikk vi gjennom nesten hver eneste oppgave og diskuterte ordlyden. En matematikk professor på UiA gjennomgikk også den norske versjonen for å sjekke at det passet sammen med norsk matematikkutdanning. I tillegg ble oversettelsen fra norsk til engelsk sendt til Pat Thompson i Arizona slik at han kunne lese gjennom det og komme med tilbakemeldinger. Som det kommer frem her, har vi altså tatt flere grep for å kvalitetssikre oversettelsen av instrumentet. Vi oversatte to ganger, vi har diskutert mye, og vi har fått tilbakemeldinger fra andre. En annen ting som kan være med å styrke oversettelsen er at Magnhild og mitt sitt morsmål er norsk, mens Simon sitt er engelsk. Dette kan ha vært en fordel når vi diskuterte ordlyden på alle oppgavene.

Vi støtte på flere problemer underveis, men en av de mest utfordrende var å oversette ordet 'meaning'. Hele instrumentet handler om matematiske 'meanings', så det er helt klart veldig viktig at betydningen av dette blir den samme på norsk som på engelsk. Som nevnt i kapittel 2.2 så kan 'meaning' oversettes til flere ting på norsk, for eksempel: oppfatning, mening, betydning og forståelse. Det er konteksten som avgjør hvilket av disse ordene som er mest korrekt å bruke. Så selv om vi endte opp med å bruke det engelske begrepet 'meaning' i selve forskningen, så valgte vi å bruke flere forskjellige ord i oversettelsen av instrumentet. Vi så det ut ifra konteksten, noen steder var det kanskje mest naturlig å bruke mening, mens andre steder betydning. Det ville ikke vært naturlig for deltakerne om vi hadde brukt det engelske begrepet flere steder i oppgavene. Et av problemene knyttet til oversettelsen av 'meaning' støtte vi på under tilbake-oversettelsen, altså når det skulle oversettes fra norsk til engelsk. Hvis det i originaloppgaven sto 'meaning', så ble dette som oftest oversatt til 'mening' når vi oversatte fra engelsk til norsk. Når dette da skulle oversettes til engelsk igjen så ble det ved flere tilfeller til 'opinion', som ikke er det samme som 'meaning'. Derfor var vi nøye på å se gjennom oppgavene der ordet 'meaning' ble brukt og diskuterte oss frem til den beste oversettelsen i hvert av tilfellene.

En annen stor utfordring var at vi ønsket at ordlyden på oppgavene skulle være den samme både på norsk og på engelsk. Altså at betydningen skulle være lik, at oppgavene skulle forstås på samme måte. Det var viktig å passe på at ikke oppgavene gjennom oversettelsen for eksempel ble lettere eller vanskeligere, men at de beholdt samme vanskelighetsgrad. Dette kom av og til i konflikt med hva som kanskje var mest korrekt norsk, så å finne denne balansen var til tider vanskelig. I tillegg måtte vi gjøre noen forandringer knyttet til den kulturelle konteksten. For eksempel at i Norge tiltales lærere med fornavnet, ikke Mr. eller Mrs. slik som i USA. Vi tok også og endret alle personnavn som er unaturlige på norsk, til vanlige norske navn. For eksempel så ble «Stewart» endret til «Stian». Selv om vi endret navnene, så beholdt vi samme kjønn som i originalen.

En annen endring som kanskje er en selvfølge, var at «miles per hour» ble endret til «kilometer i timen», da det brukes forskjellig måleenheter i USA og i Norge. Utfordringen med dette er at én mile og én kilometer ikke er det samme, så vi måtte diskutere om noen av tallene skulle endres. I den ene animasjonsoppgaven så kunne vi endre tallene, da de ikke skulle brukes i noen utregning og rett og slett hadde lite innvirkning på oppgaven. Dette gjorde oppgaven mer realistisk. I en av de skriftlige oppgavene så endte vi opp med å ikke endre tallene, da de var sentrale i oppgaven og skulle brukes i utregninger. Så selv om det ikke er helt realistisk at en bil kjører med en gjennomsnittsfart på 40 km/t på en 90 km lang strekning, så valgte vi å beholde tallene. Hovedgrunnen til dette er at oppgaven fort kunne fått en annen vanskelighetsgrad om tallene hadde blitt endret. Spesielt siden deltakerne ikke hadde noen hjelpemidler, som for eksempel kalkulator, så var det viktig at tallene skulle være greie å regne med.

En del av oppgavene i instrumentet er som nevnt flervalgsoppgaver, nesten en fjerdedel av alle oppgavene. Mosvold, Fauskanger, Jakobsen og Melhus (2009) hevder at dette er en oppgaveform som ikke har vært spesielt utbredt i Norge, og dermed kan være litt ukjent for norske lærere. De sier også at de likevel har sett indikasjoner på at dette kanskje holder på å endre seg i Norge. Flervalgsoppgaver har altså blitt mer og mer vanlig i Norge, og brukes spesielt i noen sammenhenger, som for eksempel nasjonale prøver og TIMSS. Nasjonale prøver brukes for å gi kunnskap om elevers grunnleggende ferdigheter i lesing, regning og engelsk (Utdanningsdirektoratet, 2016). TIMSS er en internasjonale undersøkelser som undersøker elevers kompetanse i matematikk og naturfag (Universitetet I Oslo, 2017). Selv om det kan se ut som at flervalgsoppgaver har blitt mer vanlig i Norge, så fant Mosvold og Fauskanger (2010) ut i sin pre-pilot studie at flervalgsoppgaver var litt uvant for norske lærere. Det hadde uansett ikke vært aktuelt for oss å gjøre om oppgavene fra flervalgsoppgaver til et annet format, siden vi ønsket at den norske versjonen av MMTsm var så lik som mulig originalen. Likevel kan det være interessant å merke seg at dette er et format som ikke er like utbredt i Norge som i USA, og at det er mulig at det kan, i noe grad, påvirke resultatene.

4.3.2 Scoringsprosessen

Til hver av de 44 oppgavene i instrumentet så er det laget en veldig nøyaktig scoringsmanual («scoring rubric»). Scoringsmanualene ble originalt utviklet ut i fra svarene de fikk fra 96 «high school» lærere i USA i 2013 (Thompson, 2015), men flere av dem har blitt oppdatert underveis som instrumentet har blitt brukt og man har sett behov for endringer i scoringsmanualene. Noen av scoringsmanualene har kun trengt å endres en eller to ganger, mens andre er for eksempel nå på versjon 8 og 9.

Scoringsmanualene er utviklet for å vise ulike nivåer av produktiv 'meaning'. Med «produktiv» menes det i hvor stor grad en 'meaning' vil være nyttig for elevers fremtidige matematiske læring der en lærer formidler sin 'meaning' (Thompson, 2015). Det er viktig at disse nivåene ikke ses på som en karakter, eller at et svar gir en høyere poengsum eller lignende. Nivåene er kun brukt som symboler på ulike 'meanings' som oppgavene kan avsløre.

Nesten alle scoringsmanualene er bygd opp på den samme måten. De aller fleste inneholder først et avsnitt som omhandler oppgavens hensikt («purpose») og oppgavens begrunnelse («rationale»). Så følger generelle scorings instrukser («Scoring instructions»), som for eksempel at man skal ignorere små regnefeil hvis svaret ellers er riktig. Deretter følger oppsummeringen av nivåene («summary of levels»). I oppsummeringen av nivåer beskrives det hva svarene må inneholde for å passe inn i de ulike nivåene. Hvor mange nivåer som er laget til hver av oppgavene avhenger av oppgaven, av og til kan det være for eksempel bare 3-4 nivåer, mens andre ganger kan det fort være dobbelt så mange. Hvis det for eksempel er nivå 0, 1, 2 og 3 på en oppgave, så vil nivå 3 inneholde beskrivelse av hvilken 'meaning' det er ønskelig at man skal ha, altså en god produktiv 'meaning'. Det høyeste nivået i en scoringsmanual vil alltid være en beskrivelse av hvilken 'meaning' det er ønskelig at deltakeren skal ha. Til slutt følger eksempler på svar som passer inn i hvert av nivåene, og også en begrunnelse til hvorfor svaret passet inn i akkurat det nivået («expanded levels»). Et eksempel på hvordan en scoringsmanual ser ut kan ses i kapittel 4.5.1. Figurene 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 og 4.11 viser henholdsvis hvordan «purpose», «rationale», «scoring instructions» og «summary of levels» ser ut i scoringsmanualen som hører til oppgave 11-12.

Scoringsmanualene er blitt utviklet over tid, og inneholder nok nivåer som passer til veldig mange mulige svar. Likevel så kan det tenkes at noen av svarene som blir gitt av de norske deltakerne ikke passer like godt inn. Da hva lærere skal kunne kan være litt ulikt i de forskjellige landene, eller at noe som kan uttrykkes på flere måter i et land, kun kan uttrykkes på en måte i et annet land. Det er et godt eksempel på dette da de skulle oversette instrumentet fra engelsk til koreansk. Oppgave 46 kunne ikke brukes i den koreanske versjonen av

MMTsm (den engelske versjonen av oppgave 46 kan ses i Figur 4.1). Grunnen til at den ikke kunne brukes var at i Korea så bruker de ikke ordet «over» når de snakker om brøk. For eksempel så kan man ikke si «2 over 3» til brøken 2/3 på koreansk (Hyunkyoung Yoon, 14.03.17, personlig kommunikasjon).

> A college science textbook contains this statement about a function *f* that gives a bacterial culture's mass at moments in time.
>
> The change in the culture's mass over the time period Δx is 4 grams.
>
> **Part A.** What does the word "over" mean in this statement?

Figur 4.1: Den engelske versjonen av oppgave 46. © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

For å lære hvordan oppgavene skulle scores så ble det gjennomført et kurs over fire kvelder, på til sammen 16 timer, over videosamtale med Hyunkyoung Yoon. Under disse videosamtalene ble scoringsmanualen til hver oppgave gjennomgått og etterpå ga hun eksempler på svar som vi, deltakerne på kurset, skulle prøve å score. Kurset hjalp oss til å bli vant til å bruke scoringsmanualene, samtidig som vi fikk satt oss mer inn i hver enkelt oppgave, som var en fordel når vi skulle score.

Når alle besvarelsene vi hadde samlet inn skulle scores, så gjorde vi det på den måten at både Magnhild, Simon og meg scoret oppgavene hver for oss. Deretter møttes Magnhild og meg for å se gjennom hva vi hadde scoret på hver oppgave, og diskuterte de besvarelsene vi hadde scoret forskjellig. De gangene vi var uenige så fant vi frem både besvarelsen vi var uenige om og den tilhørende scoringsmanualen. Vi så gjennom oppgaven på nytt og forklarte til hverandre hvorfor vi hadde gitt den scoren vi hadde. I hvert av tilfellene vi var uenige, så ble vi alltid enige til slutt etter litt diskusjon. Så når vi hadde gjort dette så var Magnhild og meg enige om scoringen på alle oppgavene. Etterpå møttes vi alle tre for å se om scorene Magnhild og meg hadde gitt var de samme som Simon hadde gitt. Det ble gjort på akkurat samme måte, og vi diskuterte de vi var uenige om, og kom til enighet til slutt. Ved å gjøre det på denne måten, så kan vi være nokså sikre på at oppgavene har blitt scoret så korrekt som mulig.

4.4 Valg av deltakere og beskrivelse av metode

En av de få forskjellene på bruken av instrumentet her i Norge er at vi valgte deltakerne til å være lærerstudenter, ikke ferdig utdannede lærer. Kravet vi satt til deltakerne var at de måtte ha minst 60 studiepoeng i matematikk, og at studiet de gikk på var enten lektorutdanning eller Praktisk pedagogisk utdannelse (PPU), altså kommende matematikklærere. Grunnen til at vi ønsket at deltakerne skulle gå på et av disse studiene er at da burde de ha tilstrekkelig forkunnskaper innen matematikk og i tillegg så vil de ha vært gjennom noe praksis på enten ungdomsskole eller i videregående skole. Noe av grunnen til at vi valgte lærerstudenter over ferdig utdannede lærere var at det var lettere å organisere, og det er generelt større villighet blant studenter til å være med på slike ting. Alle studentene deltok frivilling, men de fikk en liten gave som takk for hjelpen.

I tillegg til å samle inn data fra Universitet i Agder (UiA), så reiste vi til to andre universiteter i Norge. Vi valgte dette for å få et bedre bilde generelt, og ikke være like knyttet opp til bare lærerstudiene på UiA. Det var også for å få flere deltagere enn det vi ville fått om vi bare hadde samlet inn data på UiA. Vi valgte å reise til disse to andre universitetene selv, slik at gjennomføringen av instrumentet ville være så lik som mulig ved alle innsamlingstidspunktene.

Det er 29 lærerstudenter, fordelt på 3 universitet som har deltatt. Innsamlingen av data foregikk i 4 omganger, der mellom 4 og 11 studenter deltok hver gang. Som nevnt så var både Magnhild og meg der under hver gjennomføring, slik at informasjonen studentene fikk før de startet skulle være så lik som mulig. Vi ga litt informasjon muntlig, og deretter ba vi alle lese de to første arkene i instrumentet, som inneholder litt informasjon om instrumentet (se vedlegg 3) før vi startet. Studentene fylte i tillegg ut et ark om hvilket studie de gikk på og hvilke matematiske fag de har hatt på universitetet så langt (se vedlegg 1). Oppgavene lå i en konvolutt som hver enkelt fikk utdelt, og som de igjen skulle levere besvarelsen i. Oppgavene er som sagt designet slik at studentene kunne skrive rett på oppgavearket og de fikk 2 timer til å svare fra animasjonen startet. Vi brukte prosjektor til å vise animasjonene for alle samtidig, og når den var ferdig arbeidet de videre. Studentene ble informert om at hvis de ble ferdig før det var gått 2 timer så leverte de, og hvis ikke de rakk gjennom alle oppgavene så gikk det også greit. I etterkant av innsamlingen fant vi ut av at to av studentene ikke hadde 60 studiepoeng i matematikk. Dette fant vi ut av med å se på dette arket som de fylte ut med hvilke fag de hadde hatt. Siden jeg hadde satt som krav at deltakerne måtte ha 60 studiepoeng, har jeg derfor valgt å ikke ta med besvarelsene til disse to studentene i oppgaven min.

4.5 Eksempel på prosessen med oversettelse og scoring

For at det skal komme tydelig frem hvordan vi arbeidet med instrumentet, både i forhold til oversettelsen og scoringen, så vil jeg her ta utgangspunkt i en av oppgavene og gjennomgå hele prosessen. Da først hvordan vi oversatte, og konkrete utfordringer vi støtte på i forhold til akkurat denne oppgaven. Deretter hvordan scoringsmanualen til denne oppgaven er utformet og eksempler på svar som er blitt scoret. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i oppgaven som er på sidene 11 og 12 i instrumentet, og kaller denne oppgaven for oppgave 11-12. Denne oppgavens hensikt er finne ut av deltakernes 'meaning' om gjennomsnittlig hastighet. Oppgaven består av tre deler; del A (umerket), del B og del C (se Figur 4.2). Del A står på en egen side (side 11), og del B og del C står på den neste siden (side 12). Grunnen til dette er for å forhindre deltakerne i å se på del B før de svarer på del A, da dette kan gi de hint om hvordan de skal svare på del A (Yoon, Byerley & Thompson, 2015).

A car went from San Diego to El Centro, a distance of 90 miles, at 40 miles per hour. At what speed would it need to return to San Diego if it were to have an average speed of 60 miles per hour over the round trip?

Part B. A round trip of 180 miles at an average speed of 60 mi/hr will take 3 hours. Is your answer on the prior page consistent with this fact?

☐ Yes ☐ No ☐ I Don't Know

Part C. If you checked "No" or "I Don't Know", then please re-work the problem here. ***Do not*** cross out your work on the prior page.

Figur 4.2: Oppgave 11-12 på engelsk. © 2014 Arizona Board of Regents.
Brukes med tillatelse.

Side 11 (her må stedsnavnene endres og miles må endres til kilometer. Men skal de samme tallene brukes?)

En bil kjørte fra San Diego til El Centro, distansen er 90 miles, og farten er 40 miles i timen. Hvor raskt må bilen kjøre på vei tilbake til San Diego hvis gjennomsnittsfarten på hele turen skal være 60 miles i timen?

Side 12

Del B. En kjøretur (round trip) på 180 miles, der gjennomsnittsfarten er 60 miles i timen vil ta 3 timer. Er svaret ditt på den forrige siden i samsvar med dette?

- Ja - Nei - Vet ikke

Del C. Hvis du krysset av på «Nei» eller «Vet ikke», vennligst prøv å løs problemet på nytt her. **Ikke** kryss ut det du gjorde på den forrige siden.

Figur 4.3: Første oversettelse av oppgave 11-12

Når jeg oversatte denne oppgaven til norsk, så ble resultatet slik som kan ses i Figur 4.3. Jeg endret her ikke stedsnavn og fartsenhet, men kommenterte det. I tillegg så kan det ses at jeg var usikker på om de samme tallene skulle brukes, altså 90, 60 og 40. Grunnen til dette er at 1 mile ikke er samme avstand som 1 kilometer, 1 mile er ca. 1,6 kilometer (Hofstad, 2015). Tanken er at om vi hadde endret tallene så hadde oppgaven blitt mer realistisk, men problemet er at oppgaven fort kunne fått en annen vanskelighetsgrad. 90, 60 og 40 er relativt enkle tall å regne med, og om disse skulle omregnes til kilometer så hadde det blitt ca. 145, 97 og 64. Hadde vi altså omregnet fra miles til kilometer så hadde utregningene i oppgaven blitt mer utfordrende og det var viktig for oss at vanskelighetsgraden forble så lik originalen som mulig. Derfor valgte vi å beholde de originale tallene, som kan ses i Figur 4.5.

Page 11

A car drove from San Diego to El Centro, the distance is 90 miles, and the speed is 40 miles per hour. How fast must the car drive back to San Diego if the average speed for the entire trip should be 60 miles per hour?

Page 12

Part B. A 180 miles round trip, where the average speed is 60 miles per hour will last for 3 hours. Is your answer to the previous page in accordance with this?

- Yes - No - I don`t know

Part C. If you answered «No» or «I don`t know», please try to solve the problem again. Do **not** cross out what you did on the previous page.

Figur 4.4: Oversettelse av oppgave 11-12 fra norsk til engelsk

Siden jeg oversatte denne oppgaven fra engelsk til norsk, så var det Magnhild som oversatte fra norsk til engelsk. Denne oversettelsen kan ses i Figur 4.4. Det er noen forskjeller mellom denne oversettelsen og originalen, men få av dem er av betydning. Mange av dem har nok muligens oppstått fordi en del er direkte oversatt.

En bil kjørte fra Kristiansand til Tvedestrand, distansen er 90 kilometer, og farten er 40 kilometer i timen. Hvor raskt må bilen kjøre på vei tilbake til Kristiansand hvis gjennomsnittsfarten på hele turen skal være 60 kilometer i timen?

Del B. En kjøretur på 180 kilometer, der gjennomsnittsfarten er 60 kilometer i timen, vil ta 3 timer. Er svaret ditt på den forrige siden i samsvar med dette?

- ☐ Ja ☐ Nei ☐ Vet ikke

Del C. Hvis du krysset av på «Nei» eller «Vet ikke», vennligst prøv å løse problemet på nytt nedenfor. **Ikke** kryss ut det du gjorde på den forrige siden.

Figur 4.5: Oppgave 11-12 på norsk. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

I Figur 4.5 vises oppgaven slik den endte opp etter oversettelsen. Vi var opprinnelig fornøyd med oversettelsen av denne oppgaven, og følte at det var tydelig hva oppgaven spurte om. Etter å ha samlet inn store deler av datamaterialet, så oppdaget vi at det var noen av deltakerne som hadde misforstått oppgaven. 7 av 27 deltakere misforsto «Hvor raskt må bilen kjøre på vei tilbake …». Det som oppgaven egentlig er ute etter er hvor stor farten til bilen må være på vei tilbake til Kristiansand, mens disse 7 deltakerne trodde oppgaven spurte om hvor lang tid bilen måtte kjøre. Dette er et problem som har oppstått i oversettelsen, da ordlyden på engelsk er: «At what speed would it need to return …» (se Figur 4.2) som direkte oversatt til norsk blir «Hvilken hastighet vil den behøve å ha tilbake …» Det er verd å legge merke til at dette problemet oppsto allerede ved den første oversettelsen fra engelsk til norsk, og har så blitt videreført gjennom oversettelsen fra norsk til engelsk igjen, og oversett i korrekturlesingen. Det er ikke feil det som står, og de fleste har forstått oppgaven slik som det var meningen den skulle forstås. Likevel, når flere misforstår hva de skal gjøre i oppgaven så er det ikke godt nok formulert.

Under følger et eksempel på en besvarelse der deltakeren har misforstått oppgaven, dette er det som ble svart på del A (Figur 4.6). Hvis vi tar utgangspunkt i at deltakeren har oppfattet spørsmålet til å handle om tid, så er oppgaven løst korrekt.

S er ~~strekningen~~ avstanden fra Kristiansand til Tvedestrand

$S = 90$ km, $v = 40$ km/t => tiden det tok en vei er

$t = \frac{90 \text{ km}}{40 \text{ km/t}} = \frac{9}{4}$ time

Ny approach:

Bilen må tilbakelegge 180 km med en snittfart på 60 km/t

da må turen unnagjøres på 3 timer.

=> Hjemturen blir da på $\underline{\underline{3 \text{ timer} - \frac{9}{4} \text{ time.}}}$

Figur 4.6: Student 9 sin besvarelse

Så kommer vi til scoringsprosessen. Vi har ikke oversatt scoringsmanualene til norsk, vi har brukt originalen som er på engelsk. Noe av grunnen til at vi mente det ikke var nødvendig å oversette scoringsmanualene var at det var kun vi, forskerne, som skulle bruke disse. Det ville også blitt mer jobb å oversette enn det ville vært til hjelp å ha de på norsk. Flere av scoringsmanualene er veldig lange, så det ville tatt lang tid å oversette. Scoringsmanualene er kun et verktøy for å si noe om deltakernes 'meaning', og om de er på engelsk eller norsk har ikke så mye å si for bruken av dem.

Som jeg har forklart tidligere i kapittel 4.3.2, så består scoringsmanualen av "purpose", "rationale", "scoring instructions", "Summary levels" og "expanded levels". Hensikten med denne oppgaven er som sagt å finne ut av deltakernes 'meaning' om gjennomsnittlig hastighet, som også kan ses i Figur 4.7. Bakgrunnen for oppgaven er at en del elever og lærere tenker at "gjennomsnitt" (average) betyr det samme som aritmetisk gjennomsnitt (mean). Dette er forklart litt nærmere i scoringsmanualen under "Rationale" (Figur 4.8).

Purpose
To see the teacher's meaning for average speed.

Figur 4.7: "Purpose". © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

Rationale:
Students and teachers have a strong tendency to think of "average" as having the same meaning as arithmetic mean. Those with this meaning often answer this question by thinking, "What number S do I need so that (40 + S)/2 = 60?" (They end up finding S = 80.) However, the most coherent meaning of average speed is the constant speed that will take to travel the same distance in the same amount of time. If the car were to travel 180 miles at a constant speed of 60 mi/hr, it would travel for 180/60 hours (3 hours). It spent 90/40 hours (2.25 hours) traveling the first leg of the trip. It has 0.75 hours remaining to travel the rest of the trip. So it must travel at a speed of 90/0.75 mi/hr (120 mi/hr) in the second leg of the trip to have an overall average speed of 60 mi/hr. The item includes Part B to see whether teachers who thought of average speed as the arithmetic mean of two speeds can recognize the inconsistency of their response with an obviously true property of the situation

Figur 4.8: "Rationale". © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

I forhold til selve scoringen så er det noen overordnet scoringsinstruksjoner som først må tas hensyn til (Figur 4.9). Deretter ser man på scoringstabellene (se Figur 4.10 og Figur 4.11) og plasserer svaret på det nivået som passer. På Del A så er det seks ulike nivåer svaret kan scores til (inkludert «jeg vet ikke» (IDK) og blankt svar (X)). De svarene som blir kategorisert som nivå 3 er svar som viser at deltakeren har en god forståelse av gjennomsnittlig hastighet.

Scoring Instructions:
- You will record two (2) scores for this item.
- This problem has three parts, which we refer to as Part A (unlabeled), Part B and Part C.
- If a response fits multiple levels, score it at the highest level.
- Ignore any work on Part C. Do not score it beyond recording what box the teacher selected.
- Pay attention to crossed out work on Part A.

Figur 4.9: «Scoring instructions». © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

Det vil si at den forståelsen deltakerne formidler stemmer overens med den som er beskrevet i «Rationale». Hvis deltakeren svarte ved å finne det aritmetiske gjennomsnittet av to hastigheter, så ble det scoret som nivå 1. De deltakerne som først fant aritmetisk gjennomsnitt, eller hadde annet arbeid som var krysset ut som ikke stemte overens med det høyeste nivået, men deretter endret svaret til å passe inn i det høyeste nivået ble kategorisert som nivå 2. Del B er enkel å score, da man kun skal se på hva deltakeren har krysset av på. I følge scoringsinstruksjonene så skal arbeid gjort på del C ignoreres.

Summary Levels
Part A

Level A3 Response:	***Any*** of the following: - The teacher determined that the return speed is 120 mph and does not have scratch work that is inconsistent with high-level reasoning described in the Rationale. - The teacher exhibited valid reasoning (as explained in the rationale), but made a minor computational, non-conceptual error.
Level A2 Response:	The teacher ultimately found a return speed of 120 mph on the first page, but has scratch work that is inconsistent with high-level reasoning described in the Rationale
Level A1 Response:	***Any*** of the following: - The teacher found an arithmetic mean of two speeds (e.g. (40 + S)/2 = 60). - The teacher responded 80 mph without explicitly showing that they were using arithmetic mean of two speeds.
Level A0 Response:	***Any*** of the following: - The response does not fit a higher level. - The scorer cannot interpret the response. - The response consists of scratch work with no clear indication of a final answer. - The response does not address the prompt; that is, the response is off-topic (see Purpose and Rationale). - The page contains no work, but does contain at least one mark to suggest that the teacher saw this item.
IDK Response:	The response consists only of "I don't know", or something equivalent that suggests that the teacher is unsure of how to respond. If the teacher stated uncertainty and gave an additional response, score the response ignoring the uncertainty.
X Response:	The page is completely blank

Figur 4.10: «Summary levels Part A». © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

Part B

Consistent with Part A response (*y*)	The teacher checked "yes". Enter "y".
Inconsistent with Part A response (*n*)	The teacher checked "no". Enter "n".
Cannot tell	The scorer cannot tell what the teacher thinks. Enter "ct".
IDK Response:	The response consists only of "I don't know", or something equivalent that suggests that the teacher is unsure of how to respond. If the teacher stated uncertainty and gave an additional response, score the response ignoring the uncertainty.
X Response:	The page is completely blank

Figur 4.11: «Summary levels Part B». © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

Jeg har nå plukket ut to av svarene som ble gitt på denne oppgaven. Generelt så var det ikke alltid like lett å score alle svarene, og vi var heller ikke alltid enige om hvilken score vi mente passet. Derfor har jeg har valgt å ta med to veldig tydelige eksempler, der det er lett å finne ut av hvilket nivå de er på, for å tydeliggjøre hvordan scoringen fungerte. Av de to eksemplene jeg har plukket ut så er det ene på nivå 1 (Figur 4.12) og det andre på nivå 3 (Figur 4.13). Ved å velge disse eksemplene så kommer forskjellen mellom disse to deltakernes 'meaning' frem.

Hvis vi ser på Figur 4.12 så ser vi at besvarelsen passer nøyaktig inn i det første punktet under nivå A1 i scoringsmanualen. Der står det: "The teacher found an arithmetic mean of two speeds (e.g. (40 + S)/2 = 60)", og det er akkurat dette denne deltakeren har gjort. Vi kan også se at dette er en deltaker som først misforsto oppgaven, og startet å finne ut hvor mange timer bilen måtte kjøre og ikke hvor mange kilometer (se det som er streket over). Så kan vi se på Figur 4.13, som er en besvarelse som passer inn på nivå 3 i scoringsmanualen. Måten denne deltakeren har kommet frem til riktig svar på er akkurat slik som det blir beskrevet i "Rationale" (Se Figur 4.8).

Så feil på oppgaven...

$K \to T: \quad s = 90\text{ km}, \quad v = 40\text{ km/t} \quad \Rightarrow \quad \cancel{t = \frac{s}{v} = \frac{90\text{ km}}{40\text{ km/t}} = 2{,}25\text{ t}}$

$T \to K: \quad 80\text{ km/t}$

Siden $\frac{80\text{ km/t} + 40\text{ km/t}}{2} = \frac{120\text{ km/t}}{2} = 60\text{ km/t}$

For at hele turen skal ha $\bar{v} = 60\text{ km/t}$, må han kjøre med 80 km/t på tilbaketuren som gj. fart.

Figur 4.12: Student 16 sin besvarelse av oppgave 11-12, scores til nivå 1

$s = v \cdot t$

$\left.\begin{array}{l}\text{Snittfart} = 60\text{ km/t} \\ \text{Totaldist} = 180\text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Total tid } 3\text{t}$

$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{90\text{ km}}{40\text{ km/t}} = 2.25\text{ t}$

$t_2 = 3\text{t} - 2.25\text{ t} = 0.75\text{ t}$

$v_2 = \frac{90\text{ km}}{0.75\text{t}} = \underline{\underline{120\text{ km/t}}}$

Bilen må kjøre tilbake til kr.sand med fart 120 km/t for å nå en gjennomsnittsfart på 60 km/t

Figur 4.13: Student 5 sin besvarelse av oppgave 11-12, scores til nivå 3.

4.6 Etiske betraktninger

Når man gjennomfører et forskningsprosjekt så er det flere etiske hensyn som skal tas, spesielt i forhold til de det forskes på. Noen viktige forskningsetiske hensyn er at: deltakerne skal bli behandlet med ærlighet og respekt, det skal alltid bli gitt god informasjon om hensikten med forskningen, deltakernes anonymitet skal bevares og det skal være frivillig deltakelse (Wellington, 2015).

Som nevnt tidligere, så var Magnhild og meg selv tilstede under hver datainnsamling. Noe av grunnen til dette var å sørge for at alle deltakerne fikk tilstrekkelig og lik informasjon om studien de deltok i. Ved å være tilstede så hadde vi også mulighet til å svare på eventuelle spørsmål som deltakerne hadde.

Vi syns det var viktig at studentene som deltok i denne forskningen deltok frivillig. Ved flere av innsamlingene hadde vi et samarbeid med læreren til studentene, og ved et av tilfellene foregikk datainnsamlingen i en av deres undervisningstimer. Likevel var vi hele veien tydelig på at det var helt frivillig for dem å delta, og håper og tror at studentene ikke har følt noe press til å delta av sin lærer eller noe sånn.

Vi var hele tiden tydelige på at alle studentene var anonyme. De fikk beskjed om å ikke skrive navn på besvarelsene, og når vi samlet dem inn så ble de kun merket med nummer. Jeg har også valgt å omtale deltakerne som for eksempel «Student 1» videre i denne oppgaven, altså det tallet som ble skrevet på besvarelsene. Det vil heller ikke bli nevnt hvilke studenter som hører til hvilket universitet. Noe av grunnen til dette er for i større grad bevare deltakernes anonymitet, men også for at det ikke skal være noen sammenligning mellom studentene på de ulike universitetene.

De skriftligere besvarelsene har hele tiden blitt oppbevart på Simon sitt kontor, og de ble også scannet og oppbevart digitalt. Besvarelsene ble da oppbevart på en dropbox mappe som Simon opprettet og delte med Magnhild og meg. Det kreves passord for å logge inn på denne. Dette arket der deltakerne skrev hvilket studie de hadde gått på, hvilke fag de hadde osv. ble ikke scannet. Dette ble kun oppbevart fysisk, og Magnhild og meg hadde ikke tilgang til dette da vi skulle score besvarelsene. Dette ble gjort slik at hva som sto på dette arket ikke kunne påvirke oss på noen som helst måte når vi scoret besvarelsene.

Jeg vil også minne om opphavsretten, både på den originale versjonen av instrumentet og den norske oversettelsen. Opphavsretten må hele tiden strengt overholdes, og ingen av oppgavene eller utdragene fra scoringsmanualen kan reproduseres uten skriftlig tillatelse (se kapittel 1.1). Opphavsretten er viktig å opprettholde, og alle utdrag som gjengis fra instrumentet er gjengitt med tillatelse. Utdragene fra den originale engelske versjonen vil være merket med «© 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse» og utdragene fra den norske versjonen med «© 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse»

4.7 Validitet og reliabilitet

Validitet omhandler i hvilken grad en studies metoder faktisk måler det de er ment til å måle (Wellington, 2015), det dreier seg altså om hvor relevante og gyldige dataene jeg har samlet inn i denne studien er i forhold til problemstillingen som undersøkes. Det er viktig at validitet ikke oppfattes som noe absolutt, altså at data er valide eller ikke, det er mer et mål på i hvor stor grad en studie er valid. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det er også viktig å nevne at graden av validitet avhenger helt og holdent av hvordan det som måles er definert (Wellington, 2015).

I forhold til validitet, så er det viktig å få frem hvordan 'meaning' i denne forskningen er definert, og vurdere validiteten ut i fra dette. Måler instrumentet det som det er ment å måle, altså læreres matematiske 'meaning'? Den originale versjonen av instrumentet har blitt utviklet gjennom en prosess på flere år, og gjennom utprøving av oppgavene i pilotstudier og også intervjuer av lærere om oppgavene. Pat Thompson og de andre som har utviklet instrumentet, har gjort dette nøye og over lang tid, som er med på å styrke troverdigheten og påliteligheten til den originale versjonen av instrumentet. Vi har prøvd å godt som mulig at oppgavene i den norske versjonen av instrumentet skal bety det samme for de norske deltakerne, som de engelske oppgavene gjør for de engelske deltakerne. Likevel så mangler det fremdeles å bli gjennomført intervjuer i forhold til den norske versjonen, slik som det ble gjort i USA. Vi kan altså ikke vite om de norske lærerstudentene tolker oppgavene på samme måte som de amerikanske lærerne. Dette er en svakhet med den norske versjonen av instrumentet, og med denne studien, men siden dette kun er en masteroppgave på 30 studiepoeng så var det ikke mulig å få til i denne omgang. Vi er fremdeles kun på pilotstudie stadiet i Norge, og det vil kreve flere studier for å kunne styrke den norske versjonen av instrumentets validitet. Likevel så er det en styrke at det brukes et instrument som er blitt utviklet og utprøvd over flere år, det er med på å styrke validiteten, at instrumentet i stor grad måler det det faktisk er ment å måle.

Reliabilitet handler om forskningens evne til å bli reprodusert/gjenskapt. Altså i hvilken grad forskning kunne gitt samme resultater både om det utføres av andre forskere, men også på ulike tidspunkt (Wellington, 2015).

Reliabiliteten til denne studien er nokså god, da instrumentet som brukes i denne forskningen er brukt i både USA og Sør-Korea. Dette ble utført av andre forskere, og også på ulike tidspunkt, og resultatene kan sammenliknes. Denne studien er i nokså stor grad en gjenskapelse av det som er blitt gjort tidligere, i alle fall i forhold til metoden som er brukt. Likevel så har jeg i denne studien kun samlet inn data fra en liten gruppe deltakere, dette gjør det litt vanskelig å sammenlikne og kunne si noe om i hvor stor grad resultatene fra denne studien og de foregående studiene er like. Jeg vil også nevne at når Pat Thompson var på besøk i Kristiansand i november 2016 ble det sett på noen tidlige resultater fra gjennomføringen av den norske versjonen av instrumentet (ikke nødvendigvis oppgavene knyttet til endringsrate), og det var flere likheter mellom resultatene fra USA og Norge. Dette er med på å i noen grad styrke reliabiliteten til studien, men det trengs å gjennomføres flere studier i Norge for å være sikker på dette. Uansett så er denne forskningens evne til å bli reprodusert nokså stor. Instrumentet som brukes i denne studien kan enkelt brukes i nye studier, og hvordan gjennomføringen av instrumentet og scoringen av besvarelsene skal gjøres er veldig konkret og følger en bestemt måte. Jeg har også i denne studien brukt et analyseverktøy, som også kan videreføres og bruke på andre besvarelser, dette er med på å styrke reliabiliteten.

5. Analyse

I dette kapittelet vil jeg først presentere analyseverktøyet som blir brukt i denne oppgaven, som er et konseptkart. Jeg vil både gi en forklaring på utviklingen av dette (5.1.1), beskrive det nærmere (5.1.2), og også si noe om hvordan det i denne forskningen anvendes (5.2). Deretter vil jeg presentere funn fra konseptkartene (5.3), både generelt, og organisert etter noen utvalgte konsepter. Til slutt vil jeg også se litt nærmere på tre av studentene som deltok i forskningen, og prøve å si noe om hva svarene de har gitt på oppgavene i instrumentet kan si om deres 'meaning' om endringsrate (5.4).

5.1 Utvikling og beskrivelse av analyseverktøyet

5.1.1 Utviklingen av analyseverktøyet

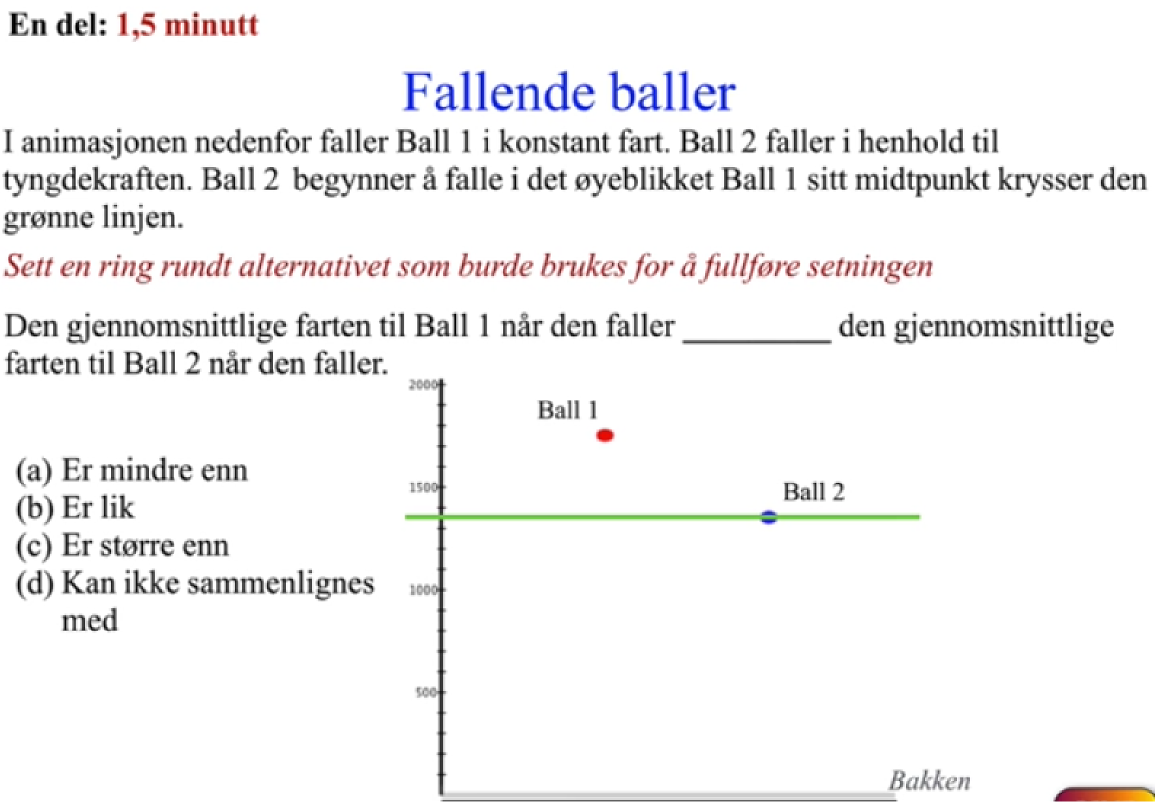
Det matematiske konseptet endringsrate blir forstått gjennom en samling av flere forskjellige konsepter. Oppgavene i instrumentet dekker mange av disse konseptene, men det kan være noen som ikke er inneholdt i instrumentet. Så ut i fra de 8 oppgavene i instrumentet som er knyttet til endringsrate har jeg laget et konseptkart. Et konseptkart er et visuelt bilde av et begrep eller en teori, og består av to ting: konsepter og forholdet mellom disse (Maxwell, 2005). Man kan utvikle konseptkart på bakgrunn av flere forskjellige ting, og det kan brukes på ulike måter. Jeg har hentet noe inspirasjon fra Denvir og Brown (1986a, 1986b) sitt «descriptive framework», da jeg utviklet dette. De brukte det som en guide for å undervise grunnskoleelever som hadde problemer med å lære, der det ble merket av hva elevene kunne og ikke. Jeg har valgt å bruke det slik at jeg får en oversikt over hvilke konsepter studentene har en god, middels eller dårlig 'meaning' om. For å få en oversikt har jeg valgt å fargekode konseptene ut ifra studentenes uttrykte 'meaning'. Så konseptkartet er da en samling av konsepter som til sammen kan si noe om en persons 'meaning' om endringsrate. Jeg vil gå nærmere inn på selve anvendelsen av konseptkartet i kapittel 5.2.

Før jeg lagde konseptkartet laget jeg en liste over hva de 8 oppgavene i instrumentet «undersøker». Altså hvilke konsepter som er knyttet til hver av oppgavene. For eksempel om det var knyttet til konstant eller gjennomsnittlig hastighet, eller om det var knyttet til en funksjon over et intervall. Jeg brukte aktivt scoringsmanualene, spesielt «Rationale» og beskrivelsene av hvert av nivåene når jeg lagde denne listen. Noe som var viktig var å se på konseptene som lå bak alle nivåene, og ikke bare det høyeste. Noen av konseptene gikk igjen i flere av oppgavene, som for eksempel «Hastighet er en endringsrate», mens andre kun kunne knyttes sammen med en spesifikk oppgave, som for eksempel «Matematiske betydningen av 'over' vs. hverdagsbetydningen av 'over'». Jeg endte opp med en liste på 16 forskjellige konsepter, se vedlegg 2. 10 av konseptene på listen var knyttet til en av oppgavene, resten var knyttet til mellom to og fem av oppgavene.

For å gi et konkret eksempel så kan vi se på oppgave 6. Det er en animasjonsoppgave som viser to baller som faller i henholdsvis konstant hastighet og i forhold til tyngdekraften, og oppgaven er å si noe om ballenes gjennomsnittlige hastighet i forhold til hverandre (se Figur 5.1). Det ble laget to konsepter som er knyttet til denne oppgaven:

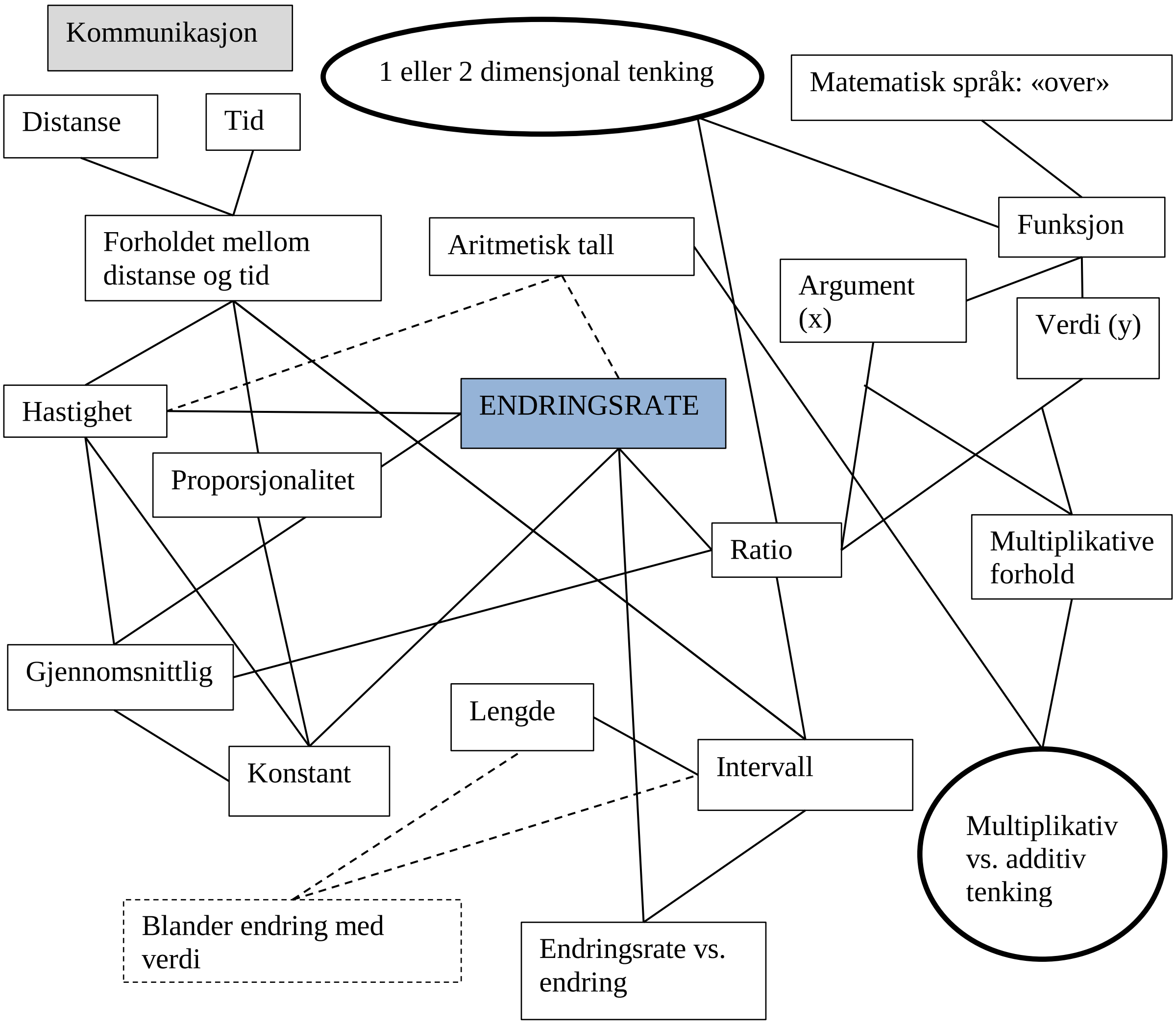
- Hastighet er en endringsrate
- Forholdet mellom konstant hastighet og gjennomsnittshastighet

Denne oppgaven er forholdsvis kort og konkret, og handler i hovedsak om en spesifikk ting: hastighet. Derfor ble det kun laget to konsepter til denne oppgaven. For å ha en god 'meaning' om endringsrate er det viktig å forstå at hastighet er en endringsrate. Derfor ble dette konseptet det første, og er et nokså generelt konsept. Akkurat denne oppgaven handler som sagt om to baller som faller i ulik hastighet, der den ene faller i konstant fart. For å kunne si noe om ballenes gjennomsnittlige hastighet i forhold til hverandre, må deltakeren kunne noe om forholdet mellom kontant hastighet og gjennomsnittshastighet, derav det andre konseptet.



Figur 5.1: Animasjonen til oppgave 6. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

Når jeg nå skulle lage konseptkartet tok jeg utgangspunkt i denne listen. Jeg startet med å lage en boks der det sto «Endringsrate» som jeg farget blå (for å gjøre den tydelig) og plasserte i midten av arket. Deretter gikk jeg gjennom listen med konsepter, og lagde nye bokser til kartet. Hvis vi igjen ser på konseptene som ble laget til oppgave 6: «Hastighet er en endringsrate» og «Forholdet mellom konstant hastighet og gjennomsnittshastighet». Disse konseptene førte til boksene «Hastighet», «Konstant», «Gjennomsnittlig», og linjene mellom disse boksene. Et annet eksempel som førte til fem av boksene i kartet er konseptet «Et objekt som beveger seg med konstant hastighet vil alltid dekke en gitt lik andel av den totale distansen og den totale tiden». Dette konseptet er knyttet til oppgave 37, og førte til boksene «Konstant», «Hastighet», «Distanse» «Tid» og «Proporsjonalitet». Slik arbeidet jeg systematisk gjennom hvert av konseptene på listen, og jeg endte opp med et ferdig konseptkart som i tillegg til «Endringsrate» består av 18 konsepter, to tenkemåter og «Kommunikasjon» (se Figur 5.2). I neste kapittel vil jeg gi en forklaring på de ulike delene av konseptkartet.



Figur 5.2: Konseptkartet

5.1.2 Beskrivelse av analyseverktøyet

Hver av boksene inneholder et begrep som er knyttet til endringsrate, mens rundingene symboliserer ulike tenkemåter som deltakerne kan ha. Linjene mellom boksene og rundingene i kartet viser at konseptene henger sammen. For eksempel så er «Hastighet», «Konstant» og «Gjennomsnittlig» knyttet sammen med hverandre. Siden det i alle oppgavene i instrumentet er snakk om gjennomsnittlig eller konstant i sammenheng med hastighet. De stipla linjene skal symbolisere at det er et konsept det ikke er *ønskelig* at man skal ha. I forhold til boksen «Aritmetisk tall», så er det slik at hastighet er ikke et aritmetisk tall, og det er heller ikke endringsrate. Med aritmetisk tall så mener jeg at det er ikke et tall som kan brukes i de grunnleggende aritmetiske binære operasjonene (addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon). Derfor er linjene som er knyttet til «Aritmetisk tall» stiplet. Boksen rundt «Blander endring med verdi» er også stiplet, dette for å vise at det ikke er *ønskelig* at man skal blande dette. For hvis man blander endring med verdi, så vil man få problemer når det kommer til lengder og intervall.

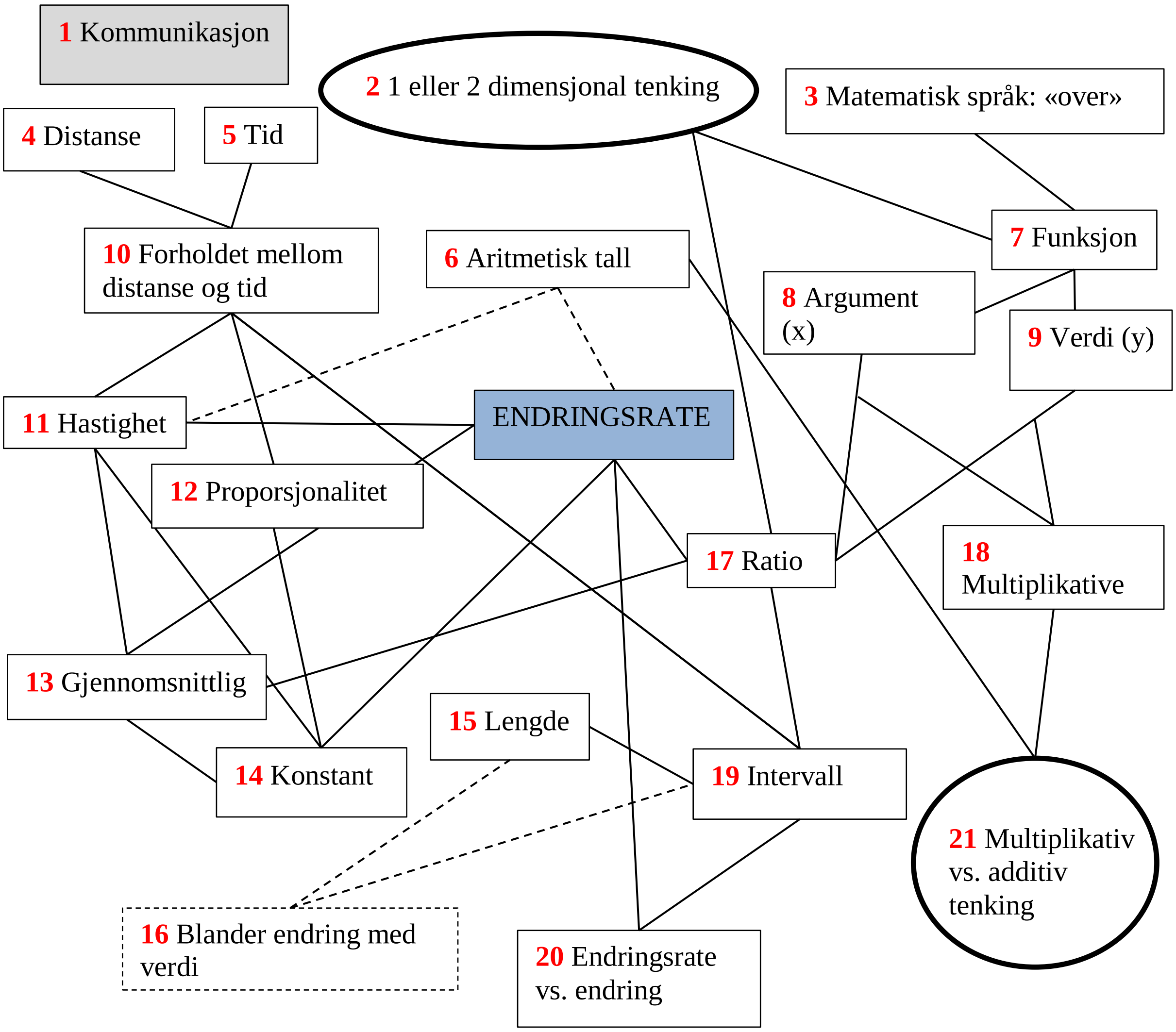
Teksten i rundingene i kartet symboliserer ulike tenkemåter. Man kan tenke både en- og to-dimensjonalt, og man kan tenke additivt eller multiplikativt. Jeg valgte å skille disse fra konseptene, men mente det var viktig å ha dem med likevel. For det å tenke om en ting på den ene eller andre måten er ikke et konsept, men det kan si noe om en deltakers ‘meaning’ om et konsept. Hvis man for eksempel tenker additivt om endringsrate så vil det si at man ikke har en god, velutviklet 'meaning' om endringsrate, da endringsrate er et multiplikativt forhold.

En av boksene i konseptkartet er litt annerledes, og det er denne som jeg har kalt for «Kommunikasjon», jeg har fargelagt den grå for å gjøre det tydelig at den er annerledes enn de andre. I dette tilfelle ser jeg ikke på kommunikasjon som er konsept, men mer som en kompetanse eller evne. Jeg har valgt å ikke knytte denne boksen til noen av de andre, da den er mer overordnet, og egentlig kan knyttes til alle de andre boksene i kartet. Det er en kompetanse som er viktig å ha som lærer uansett hvilke konsepter man skal undervise. Jeg har valgt å ta den med i mitt analyseverktøy, da det er viktig å se på hvordan deltakerne klarer å kommunisere sin 'meaning'. Hvordan en lærer formidler sin 'meaning' er viktig for elevens læringsutbytte, og de sin egen konstruksjon av 'meaning'. Ut ifra de oppgavene jeg ser på, så kan det være mulig å si noe om deltakernes kommunikasjon på de oppgavene som ikke kun er flervalgsoppgaver. For de andre oppgavene krever at deltakeren skriver en tekst, regner eller tegner for å uttrykke hvilken 'meaning' de har. Når de gjør dette så vil de kommunisere sin 'meaning' skriftlig, og det kan være med på å si noe om deltakernes kommunikasjonsevne. Flere andre konsepter fra konseptkartet vil bli diskutert nærmere på passende steder utover i analysen, jeg vil dermed ikke gå nærmere inn på flere konsepter her.

Jeg har laget en tabell for å vise hvilke konsepter i konseptkartet som er knyttet til hvilke oppgaver (se Tabell 5.1). De åtte oppgavene som handler om endringsrate er listet opp nedover i tabellen, mens de 21 delene i konseptkartet er listet opp bortover. For å få en oversiktlig tabell valgte jeg å nummerere de ulike konseptene, for å se hvilket nummer som er knyttet til hvilket konsept se Figur 5.3. Ved å bruke denne tabellen så kan man tydelig se hvor mange konsepter som er knyttet til hver oppgave, for eksempel så er det mange konsepter knyttet til oppgave 1 og 9, mens det er nokså få knyttet til oppgave 6 og 46. Man kan også se på det motsatt, som at for eksempel at konsept 2, 3, 16, 17, 18 og 20 kun er knyttet til en oppgave hver.

Tabell 5.1: Oversikt over hvilke konsepter som er knyttet sammen med hvilke oppgaver

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	X			X	X	X				X	X		X	X	X		X		X		
6											X		X	X							
9		X					X	X	X				X		X			X	X		
11-12	X			X	X	X				X	X		X						X		
17				X	X					X	X	X		X							X
27-28							X	X	X										X	X	
37	X			X	X					X	X	X		X							X
46	X		X													X					



Figur 5.3: Konseptkartet der konseptene er nummerert

5.2 Anvendelse av analyseverktøyet

For hver av de 27 studentene fargekodet jeg boksene i konseptkartet enten grønt, oransje eller rødt. Fargene representerer om de har uttrykt en god, middels eller dårlig 'meaning' på oppgavene som er knyttet til de ulike konseptene. Ved å kategorisere det på denne måten, og ved å lage et konseptkart per deltaker, fikk jeg oversikt over hvordan deltakerne som gruppe hadde gjort det. Altså, om det for eksempel var noen konsepter som mange hadde uttrykte en god 'meaning' om, eller om det var noen konsepter der jeg kun hadde fargelagt oransje eller rødt.

Jeg valgte å være nokså streng i forhold til fargekodingen av studentenes uttrykte 'meaning'. Om en deltaker ikke hadde scoret høyeste nivå på de oppgavene konseptet var knyttet til, ble ikke boksen fargelagt grønn. På samme måte hvis det var tre oppgaver knyttet til et konsept og deltakeren har scoret lavt på to av dem, og middels på en, så vil denne boksen fargelegges rød. Jeg valgte å være nokså streng på dette, fordi hvis en lærer ikke har en fullstendig god produktiv 'meaning' om et konsept, så kan det gjennom formidlingen til elevene oppstå misoppfatninger. Da kan det være at elevene ikke utvikler 'meanings' som de burde hatt. For å si det på en annen måte, så kan elever av en lærer som underviser riktig fire ganger i uka, men ikke helt riktig den siste dagen, muligens bli forvirret og ikke utvikle en god matematisk 'meaning'.

Det var flere utfordringer som oppsto da jeg skulle fargekode konseptkartene, i forhold til hvilken farge som vil representere den deltakerens uttrykte 'meaning' om et konsept på best mulig måte. Som nevnt så måtte deltakeren ha uttrykt en 'meaning' som sto overens med den høyeste scoren på hver av oppgavene knyttet til et konsept for at dette skulle fargekodes grønt. Var det noe som ikke stemte helt, så ble den fargelagt oransje. Dette førte til at om en boks ble fargekodet med oransje så kunne det betyr to ting, enten at deltakeren så vidt ikke har en god nok 'meaning', eller så vidt uttrykte en 'meaning' som var god nok til å ikke fargekodes som rød. Denne kategorien i midten inneholder altså nokså mye mer enn de andre to. Likevel ble det naturlig å ikke dele det inn i flere enn tre kategorier, da dette mest sannsynlig hadde blitt mer uoversiktlig og vanskelig.

En annen ting jeg måtte ta hensyn til var om deltakeren hadde svart «vet ikke», og da scoret IDK, eller ikke svart på oppgaven, altså scoret X. Jeg valgte å ta den avgjørelsen at jeg ikke kan si noe om deltakerens 'meaning' i disse tilfellene. Grunnen til dette er at det kan være flere ulike grunnen til at deltakeren har svart «vet ikke» eller blankt, og jeg kan ikke vite hvorfor. For eksempel i flere tilfeller rakk ikke deltakerne å bli ferdig med alle oppgavene i instrumentet, og har da fått scoren X på de oppgavene de ikke rakk å gjøre. Ellers kan jeg ikke vite om deltakeren ikke klarte å svare på en oppgave, om de syns den så vanskelig ut og ikke gadd å prøve, eller ikke forsto helt hva oppgaven spurte om. Så for eksempel hvis det er to oppgaver knyttet til et konsept, og deltakeren har svart utvist en god 'meaning' på den ene og ikke svart på den andre, så vil dette konseptet fargelegges grønt i konseptkartet. Dette vil også gjelde om det er snakk om flere enn to oppgaver. Altså om det er tre oppgaver knyttet til et konsept og deltakeren har enten svart «vet ikke» eller blankt på to av dem, så tar jeg kun hensyn til den oppgaven de har svart på. Hvis de på denne oppgaven har scoret det høyeste nivået, og utvist en god 'meaning', blir den fargelagt grønn, og hvis de har scoret det laveste nivået; rød. Hvis en deltaker ikke har svart på den eller de oppgavene som er knyttet til et konsept, så kan jeg ikke si noe om deltakerens 'meaning' og har derfor ikke fargelagt konseptet i konseptkartet. Den boksen vil da forbli hvit. Et eksempel på dette er at 11 av deltakerne ikke rakk å svare på oppgave 46 som er knyttet til konseptet «Matematisk språk: 'over'». Så i 11 av de 27 konseptkartene vil denne boksen være hvit. Se Figur 5.4 for oppgaven, den engelske versjonen av oppgaven kan ses i Figur 4.1 i kapittel 4.3.2.

> En vitenskapelig lærebok inneholder denne uttalelsen om en funksjon f som gir en bakteriekulturs masse til enhver tid.
>
> Forandringen i kulturens masse over tidsperioden Δx er 4 gram
>
> **Del A.** Hva betyr ordet «over» i denne uttalelsen?

Figur 5.4: Den norske versjonen av oppgave 46, Del A. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

En annen ting jeg har lyst å nevne i forhold til fargekodingen av kartet, er hvordan dette ble gjort i forhold til konseptene «Distanse», «Tid» og «Forholdet mellom distanse og tid». Ingen av oppgavene tar for seg enten kun distanse eller tid, de relevante oppgavene tar alle for seg forholdet mellom disse. Derfor kan jeg, ut ifra hva deltakerne har uttrykt, kun si noe om deltakernes 'meanings' om «Forholdet mellom distanse og tid». Tanken er da at om noen ikke har utvist en god 'meaning' om forholdet mellom distanse og tid, så kan jeg ikke si noe om hvilken 'meaning' de har om distanse og tid enkeltvis. Det kan være at deres 'meanings' om distanse og tid er god, men at de kun har problemer med forholdet mellom disse. Så i de tilfellene der jeg har fargekodet «Forholdet mellom distanse og tid» rødt eller oransje, så vil «Distanse» og «Tid» forbli hvite. Hvis noen uttrykker en god 'meaning' om forholdet mellom distanse og tid, så har de mest sannsynlig også en god 'meaning' om distanse og tid. Så i de tilfellene vil alle tre konseptene kunne fargekodes med grønt.

Jeg vil også nevne at når jeg valgte hvilken farge jeg skulle fargelegge boksene så ble det utvist noe skjønn. Da det var forskjellig antall oppgaver som var knyttet til hvert av konseptene, og deltakerne hadde svart en god del ulikt. Men generelt så gjorde jeg slik som jeg har nevnt ovenfor, og jeg har prøvd å være så konsekvent som mulig i valgene mine.

5.3 Funn fra konseptkartene

Etter at jeg nå har gått gjennom alle de 27 konseptkartene, og fargekodet dem i forhold til hver enkelt deltakers uttrykte 'meanings', blir det naturlig å se etter tendenser i datamaterialet. Hvordan har deltakerne gjort det som gruppe? Er det noen konsepter som det kan se ut som de fleste innehar en god 'meaning' om, og er det noe som det kan se ut som nokså mange av deltakerne innehar en dårlig 'meaning' om? Det er dette jeg ønsker å presentere i dette kapittelet. Først vil jeg se på det veldig generelt, og se på alle delene av konseptkartet. Deretter vil jeg trekke frem, og gå nærmere inn på, noen interessante funn i forhold til noen av konseptene (kapittel 5.3.1-5.3.3), og i tillegg se litt nærmere på «Kommunikasjon» (kapittel 5.3.4).

For å gi en oversikt over hvordan deltakerne har gjort det i forhold til konseptene laget jeg Tabell 5.2. Denne viser hvor mange konseptkart som konseptene har blitt fargelagt med henholdsvis grønn, oransje, rød og hvit. Der det loddrett i tabellen er ramset opp de 21 konseptene, tenkemåtene og kompetansen som er i konseptkartet, og det vannrett er de fire fargekategoriene.

Det er flere interessante ting man kan lese ut ifra denne tabellen, både i forhold til hva de har uttrykt en god 'meaning' om, og hvilke konsepter deltakerne ikke har uttrykt en god, helhetlig 'meaning' om. Vi kan først se litt på hva de fleste deltakerne har kontroll på, og altså har en godt utviklet 'meaning' om. Hvis vi ser på konseptet «Matematisk språk: 'over'», så kan vi se at av alle som rakk å svare på oppgave 46 (som dette konseptet er knyttet til), så er det kun 1 av deltakerne som ikke klarte dette. Resten av deltakerne har svart tilfredsstillende i forhold til scoringsmanualen, og det kan derfor tyde på at de har en god 'meaning' om dette. Det samme gjelder dette med å tenke en- eller to-dimensjonalt, hele 17 av de 27 deltakerne ga et svar som viste at de tenkte to-dimensjonalt. Det siste jeg vil trekke frem, som er veldig tydelig, er at det var veldig få som tenkte på endringsrate som et aritmetisk tall. Hvis vi ser i tabellen under «Aritmetisk tall», så kan vi se at 23 av 27 ikke har tenkt på denne måten, og uttrykker altså en god 'meaning' om dette. Så som vi kan se, er det noen av konseptene der flertallet av deltakerne har utrykt en god, helhetlig 'meaning' om, men det er likevel mange av konseptene dette ikke er tilfelle for.

Tabell 5.2: Hvor mange konseptkart som konseptene har blitt fargelagt med henholdsvis grønn, oransje, rød og hvit

	Grønn	**Oransje**	**Rød**	**Hvit**
Kommunikasjon	0	19	8	0
1 eller 2 dimensjonal tenking	17	0	6	4
Matematisk språk: 'over'	15	0	1	11
Distanse	0	0	0	27
Tid	0	0	0	27
Forholdet mellom distanse og tid	0	17	10	0
Hastighet	0	22	5	0
Proporsjonalitet	1	9	16	1
Gjennomsnittlig	0	24	3	0
Konstant	1	21	5	0
Aritmetisk tall	23	1	3	0
Funksjon	11	10	4	2
Argument (x)	11	10	4	2
Verdi (y)	11	10	4	2
Multiplikative forhold	14	1	4	8
Ratio	10	0	17	0
Lengder	6	10	11	0
Intervall	3	17	7	0
Blander endring med verdi	13	0	2	12
Endringsrate vs. endring	12	2	12	1
Multiplikativ vs. additiv tenking	6	16	3	2

For noen av konseptene er det ganske spredt hvordan deltakerne har gjort det. Dette kommer frem hvis vi for eksempel ser på konseptene «Funksjon», «Argument (x)», «Verdi (y)», «Ratio», og «Endringsrate vs. endring». I forhold til konseptene «Funksjon», «Argument (x)» og «Verdi (y)», så kan vi se at fordelingen av fargekodene er helt lik. Grunnen til dette er at disse tre konseptene er veldig nært knyttet til hverandre, og oppgavene som er knyttet til disse konseptene omhandler alle tre. Vi kan se at en del av deltakerne uttrykker en god 'meaning' i forhold til disse konseptene, men omtrent like mange viser at de ikke har en klar 'meaning'. Hvis vi ser på konseptet «Ratio», så er det ingen av konseptkartene der dette har blitt fargekodet med oransje. Grunnen til dette er at dette konseptet er kun direkte knyttet til en oppgave, og ut i fra hva deltakeren har svart på denne oppgaven har det blitt fargelagt grønt eller rødt. Flertallet av deltakerne har likevel ikke uttrykt en god 'meaning' om dette konseptet, hele 17 har uttrykt en 'meaning' som ikke er tilfredsstillende. Vi kan likevel se at det er nokså spredt blant deltakerne i forhold til akkurat dette konseptet. Et annet konsept der deltakerne har gjort det veldig delt er «Endringsrate vs. endring». Hvis vi ser i tabellen så kan det tyde på at omtrent halvparten av deltakerne ikke blander sammen disse begrepene, mens halvparten gjør det. En betydelig andel av de 27 deltakerne har altså problemer med å skille mellom endringsrate og faktisk endring.

Det som kanskje er mest interessant å se på er hvilke konsepter deltakerne ikke innehar en klar og helhetlig 'meaning' om, og det er en del av konseptene dette er tilfellet for. Det kan for eksempel ses i forhold til konseptene «Forholdet mellom distanse og tid» «Hastighet», «Gjennomsnittlig», «Konstant», «Proporsjonalitet», «Intervall» og «Multiplikativ vs. additiv tenking». Det er altså mange konsepter hvor det er slik, og i alle de jeg nå har nevnt så er det en hovedvekt av konseptkartene der konseptene har blitt fargekodet med enten oransje eller rød, og veldig få eller ingen der de har blitt fargelagt grønn.

Av de konseptene jeg nå har nevnt er det noen jeg har spesielt lyst å trekke frem og se mer på. Et konsept som jeg mener det vil være interessant å se mer på er «Multiplikativ vs. additiv tenking». Selv om nokså få har fått dette fargekodet rødt, er det for veldig mange blitt fargekodet oransje. Dette konseptet er knyttet til to oppgaver, en flervalgsoppgave og en tekstoppgave. Noe som er interessant er at mange av deltakerne har gitt svar som tyder på additiv tenking på en av oppgavene, men ikke den andre. Jeg har også lyst å se nærmere på konseptet «Forholdet mellom distanse og tid». Grunnen til at jeg har lyst å se nærmere på dette er at ingen av de 27 deltakerne har i besvarelsene vist at de har en klar og god ‘meaning’ i forhold til dette konseptet. For 10 av dem kan det se ut som de har en dårlig utviklet ‘meaning’, da det for disse deltakerne har blitt fargekodet rødt i konseptkartet.

I tillegg har jeg også lyst å trekke frem «Hastighet», «Gjennomsnittlig» og «Konstant». Grunnen til at jeg ønsker å se på disse samlet er at i alle oppgavene der det er snakk om hastighet, så er det i forhold til gjennomsnittlig hastighet eller konstant hastighet. I tillegg er det også ofte snakk om begge disse hastighetene i samme oppgave, derfor ble det naturlig å se på dette sammen. Det som er mest interessant i forhold til disse konseptene er at for de aller fleste deltakerne, over 20 i hvert av de tre konseptene, har det i konseptkartet blitt fargekodet med oransje. Dette viser at de aller fleste har vist på noen av oppgavene at de har en god ‘meaning’, mens de på andre oppgaver har uttrykt at de har en dårlig utviklet ‘meaning’ om disse konseptene. Til slutt vil jeg nevne «Kommunikasjon», som nevnt tidligere er en viktig kompetanse for deltakerne i denne studien å ha i forhold til at de er fremtidige lærere. Jeg vil i de neste delkapitlene se mer på disse konseptene som jeg nettopp har trukket frem.

Generelt så kan funnene presentert i Tabell 5.2 tyde på at det er få av konseptene som flertallet av deltakerne har uttrykt en god, velutviklet ‘meaning’ om. I forhold til noen av konseptene er det en del som viser at de har en klar ‘meaning’, men det er flere konsepter der besvarelsene til deltakerne tyder på at de ikke har en godt utviklet ‘meaning’. Uten å spekulere for mye i det nå, så kan det ut i fra datamaterialet mitt tyde på at blant de 27 studentene, så er det en relativt stor del av dem som har en mangelfull ‘meaning’ i forhold til endringsrate.

5.3.1 Multiplikativ vs. additiv tenking

Dette konseptet er knyttet til to av oppgavene i instrumentet, oppgavene 17 og 37 (se Figur 5.5 og 5.11). Grunnen til at det er relevant å se på dette, er at endringsrate er et multiplikativt forhold mellom to endringer. Så det er altså ønskelig at deltakerne skal tenke multiplikativt når de skal løse oppgaver som er knyttet til endringsrate.

Hvert sekund sykler Julie j meter og Stian går s meter, der $j > s$. I et hvilken som helst gitt tidspunkt, hvordan vil avstanden dekket av Julie være sammenliknet med avstanden dekket av Stian?

a. Julie vil ha reist $j - s$ meter mer enn Stian

b. Julie vil ha reist $j \cdot s$ meter mer enn Stian

c. Julie vil ha reist j/s meter mer enn Stian

d. Julie vil ha reist $j \cdot s$ ganger så mange meter som Stian

e. Julie vil ha reist j/s ganger så mange meter som Stian

f. Jeg vet ikke

Figur 5.5: Oppgave 17. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

Oppgave 17 (Figur 5.5) er en flervalgsoppgave, og i forhold til hvilket svaralternativ deltakerne velger, så er det mulig å si noe om de mest sannsynligvis har tenkt additivt eller multiplikativt når de løste oppgaven. I følge scoringsmanualen så ble oppgaven utviklet for å avsløre læreres 'meaning' for relativ konstant hastighet. For å se hva som er ønsket 'meaning' så kan vi se på «Rationale» i scoringsmanualen (Figur 5.6).

Rationale:

If an object is traveling at a constant speed, the amount of time elapsed is proportional to the associated change in distance. For a particular constant speed, say r meters per second, the number of meters traveled is always r times as large as the number of seconds elapsed. In the case of Julie and Stewart Julie travels j meters per second, and Stewart travels s meters per second. In n seconds Julie travels nj meters and Steward travels ns meters. Julie will travel $(nj)/(ns)$ times as many meters as Stewart.

Another way to think about this is that in 1 second Julie travels j meters and Stewart travels s meters. So each second, Julie travels j/s times as far as Stewart, so in any number of seconds, Julie will have traveled j/s times as far as Stewart.

The quotient j/s gives a measure of how many times as far Julie travels as Stewart in any amount of time. The other answer choices were created to be inviting to teachers with other meanings of constant speed, as described in the rubric.

Figur 5.6: Rationale til oppgave 17. © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

Vi endret navnet Stewart i denne oppgaven til navnet Stian, da Stewart ikke er et typisk norsk navn. Så når jeg nå skriver om oppgaven vil jeg bruke navnet Stian, men når jeg har med utdrag fra den engelske scoringsmanualen så vil navnet Stewart bli brukt. I «Rationale» ser vi at deltakerne må vite hva det vil si at et objekt beveger seg i konstant hastighet. Altså at det vil si at tiden brukt er proporsjonal til endringen i distanse. For en bestemt konstant hastighet, for eksempel *r* meter i sekundet, så vil det si at antall meter reist er alltid *r* ganger så stor som antall sekunder brukt. Det riktige svaralternativet er altså (e) «Julie ville ha reist j/s ganger så mange meter som Stian». De andre svaralternativene ble utviklet på en slik måte at de skulle være inviterende for lærere med en annen 'meaning' for konstant hastighet. For eksempel for å avsløre additiv tenking, som svaralternativene (a) og (c).

Svaralternativ (a) «Julie vil ha reist j – s meter mer enn Stian», kan tyde på at deltakeren tenker på forskjellen i distanse additivt istedenfor multiplikativ. I følge scoringsmanualen så kan dette svaralternativet også tyde på annen tenking, som for eksempel en upresis 'meaning' av *j* og *s*. For eksempel at deltakeren tenker at *j* betyr Julies distanse og *s* betyr Stian sin distanse. Hvis deltakeren tenker på denne måten så vil dette svaralternativet gi mening. Så hvis en deltaker har svart alternativ (a), så kan det være flere ulike tenkemåter som ligger bak. Likevel så tyder i alle fall ikke dette svaralternativet på multiplikativ tenking, da det er snakk om subtraksjon. Dermed vil de som har svart dette svaralternativet i noen grad ha tenkt additivt.

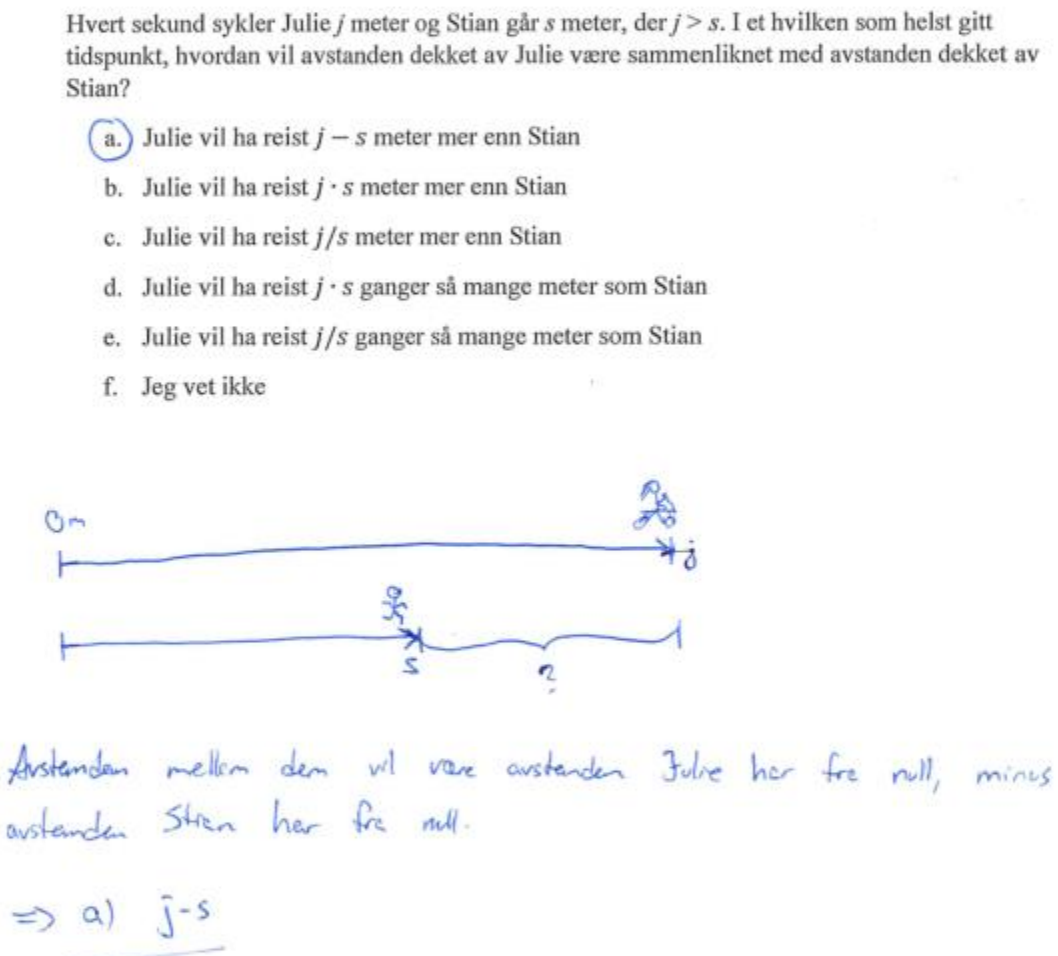
I forhold til svaralternativ (c) «Julie vil ha reist j/s meter mer enn Stian», så er kvotienten riktig, men her er det ordlyden som tyder på additiv tenking. I det riktige svaralternativet, (e), så står det «j/s ganger så mange meter», mens i dette alternativet står det «j/s meter mer enn». Forskjellen her er at i svaralternativ (e), så er kvotienten et mål på relativ størrelse av to distanser, mens det i alternativ (c) er differansen mellom to mengder. I forhold til dette alternativet så er det altså mulig å komme frem til den riktige kvotienten, for eksempel ved å erstatte bestemte verdier for *j* og *s*. Men det er også viktig å vite hva denne kvotienten står for, og dette svaralternativet er med på å avsløre hvilken 'meaning' deltakerne har om dette.

For å gi en oversikt over hvordan deltakerne har svart på denne oppgaven har jeg laget Tabell 5.3. I tabellen så ser vi hvor mange av deltakerne som har scoret på de ulike nivåene i denne oppgaven, og i parentes bak nivåene står det hvilke svaralternativ det inneholder. På denne oppgaven så var det også 2 personer som krysset av for både svaralternativ (a) og (e). Jeg har derfor i bunnen av tabellen lagt inn en ekstra linje som viser dette. I følge scoringsmanualen, så står det ikke hvordan svar som dette skal scores, og derfor er det ingen score. De som har valgt å svare både alternativ (a) og (e) uttrykker en tvetydig og uklar 'meaning', men det er vanskelig å si hva som er grunnen til at de har valgt begge alternativene. Det kan være flere grunner, blant annet at de var usikre på hvilken som var riktig og valgte begge for sikkerhets skyld. Det er også mulig at de mener at begge svaralternativene er like gode og uttrykker det samme. Det er vanskelig å si, men uansett så har ikke disse uttrykt en god og velutviklet 'meaning'. Ellers så kan vi se at er en veldig stor overvekt av deltakerne som har valgt alternativ (a), hele 16 stk. En deltaker har svar alternativ (c), så til sammen, også inkludert de to som valgte både (a) og (e), så har altså 19 av 27 valgte svaralternativ som tyder sterkt på additiv tenking. I tillegg er det kun 4 som har utvist en god, velutviklet 'meaning', og tenker multiplikativt når det kommer til relativ konstant hastighet.

Tabell 5.3: Hvor mange av deltakerne som har scoret hva på oppgave 17

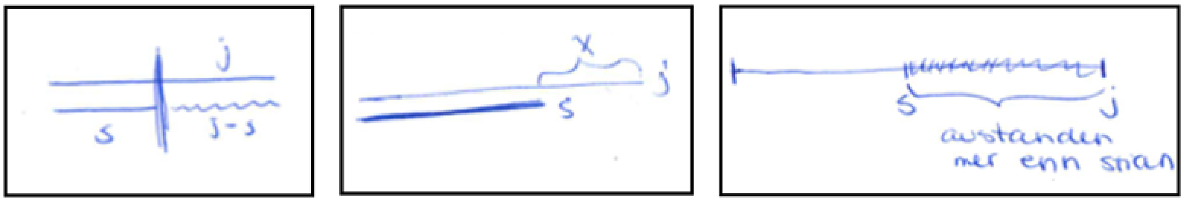
	Antall deltakere
3 (e)	4
2 (c)	1
1 (a)	16
0 (d, b)	1
IDK (f)	3
X	0
a og e	2

Selv om denne oppgaven er en flervalgsoppgave så er det flere av deltakerne som i tillegg har skrevet noe mer som kan si noe om hvordan de har tenkt når de løste oppgaven. Jeg vil først gi et eksempel på en som har svart (a), se Figur 5.7. Denne deltakeren har tegnet opp linjer som skal representere distanse. Det er også flere andre deltakere som har tegnet lignende figurer og har endt opp med det samme svaralternativet. For eksempler på noen av disse tegningene se Figur 5.8. Alle disse tegningene uttrykker at Julie har reist en spesifikk lengde (lang linje), og Stian har reist en spesifikk lengde som er mindre (kort linje), og deretter er blitt konkludert med at Julie vil ha reist j – s meter mer enn Stian


Hvert sekund sykler Julie j meter og Stian går s meter, der $j > s$. I et hvilken som helst gitt tidspunkt, hvordan vil avstanden dekket av Julie være sammenliknet med avstanden dekket av Stian?

a. Julie vil ha reist $j - s$ meter mer enn Stian
b. Julie vil ha reist $j \cdot s$ meter mer enn Stian
c. Julie vil ha reist j/s meter mer enn Stian
d. Julie vil ha reist $j \cdot s$ ganger så mange meter som Stian
e. Julie vil ha reist j/s ganger så mange meter som Stian
f. Jeg vet ikke

Figur 5.7: Student 9 sin besvarelse av oppgave 17, har svart alternativ (a)



Figur 5.8: Tegninger som hører til besvarelsene til henholdsvis Student 13, 23 og 11 på oppgave 17 som har svart alternativ (a)

Det var kun en av deltakerne som hadde svart alternativ (c), som var å komme frem til riktig kvotient, men ordlyden tydet på additiv tenking. Denne deltakeren har vist sin tenkemåte for hvordan han kom frem til kvotienten, se Figur 5.9. Her ser vi at deltakeren har valgt å prøve med spesifikke verdier for *j* og *s*, og se på forholdet mellom dem. Dette er en måte å gjøre det på som jeg nevnte tidligere, og som jeg også nevnte da så kan dette tyde på at denne deltakeren kun ser på dette som differansen av to mengder.

Prøver med tall $j = 3$, $s = 2$

Etter ~~3·4 sek dj = 3·4 = 12, ds = 2·4 = 6~~

Etter	1 sek	3	2	$j/s = 3/2$
	2 sek	6	4	$j/s = 3/2$
	3	9	6	– " –
	4	12	8	– " –
	5	15	10	– " –

Figur 5.9: Forklaring som hører til Student 5 sin besvarelse av oppgave 17, har svart alternativ (c)

Det siste eksempelet jeg har lyst å se på er en besvarelse der deltakeren kommer frem til det riktige svaralternativet, (e), se Figur 5.10. Denne deltakeren har vist hvordan han tenkte for å komme frem til kvotienten j/s. Her har forholdet mellom avstanden til hver av dem blitt satt opp, deretter omformulert litt, og slik kom han frem til j/s. Vi kan også se at alternativ (c) først ble valgt, men så har deltakeren kommentert at han «leste for fort», men la merke til det og fikk rettet opp i det ved å velge det riktige svaralternativet. Denne deltakeren har her da uttrykt en god ‘meaning’, og vist at han tenker multiplikativt når det kommer til endringsrate.

Hvert sekund sykler Julie j meter og Stian går s meter, der $j > s$. I et hvilken som helst gitt tidspunkt, hvordan vil avstanden dekket av Julie være sammenliknet med avstanden dekket av Stian?

a. Julie vil ha reist $j - s$ meter mer enn Stian

b. Julie vil ha reist $j \cdot s$ meter mer enn Stian

leste for fort →

~~c. Julie vil ha reist j/s meter mer enn Stian~~

d. Julie vil ha reist $j \cdot s$ ganger så mange meter som Stian

e. Julie vil ha reist j/s ganger så mange meter som Stian

f. Jeg vet ikke

Avstand etter gitt tid:

$$\left.\begin{aligned} J(t) &= j \cdot t \\ S(t) &= s \cdot t \end{aligned}\right\} \quad \frac{J(t)}{j} = \frac{S(t)}{s} \quad \rightarrow \quad J(t) = \frac{S(t)}{s} \cdot j$$

med $j > s$

Julie reist = Stian reist $\cdot \frac{j}{s}$

Figur 5.10: Student 8 sin besvarelse av oppgave 17, har svart alternativ (e)

Oppgave 37 (Figur 5.11) er derimot ikke en flervalgsoppgave, men en oppgave som krever at deltakeren skriver en forklaring. Det er slik at om en person løper i konstant hastighet så vil denne personen alltid dekke en gitt lik andel av den totale distansen og den totale tiden. I følge scoringsmanualen ble denne oppgaven utviklet for å se hvordan lærere forbinder dette sammen, altså forbinder konstant hastighet med like deler av total distanse og total tid. Det som oppgaven i hovedsak er interessert i er å se om lærerens forklaring gir en klar sammenheng mellom at Alice har løpt 78 % av hennes totale tid og at hun har løpt 78 % av hennes totale distanse.

Lisa Hansen gav dette problemet til elevene sine.

> Inger Miller løp 200 meter sprint i 1999 på tiden 21,77 sekunder. Alice Cast løp 200 meter sprint i 1922 på tiden 27,80 sekunder. Anta at de kappløp. Omtrent hvor mange meter ville det vært mellom dem når Inger Miller krysset mållinjen?

Tore forklarte sitt resonnement på denne måten:

> Anta at de løp med konstant fart. 21,77 er omtrent 78% av 27,80. Så Alice ville ha vært cirka 44 meter bak Inger.

Forklar til klassen hvorfor det er relevant at 21,77 er 78% av 27,80 for å løse oppgaven.

Figur 5.11: Oppgave 37. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

I tillegg er det i scoringen av denne oppgaven lagt inn noe som blir kalt «Percentage Error?». Det er her multiplikativ vs. additiv tenking kommer inn. Denne ekstra scoringen er for å se om deltakeren tenker om prosent additivt istedenfor multiplikativt. Hvis deltakeren tenker additivt så vil han skrive at «Alice løper 78 % fortere enn Inger», som bokstavelig betyr at Alice sin hastighet er 178 % så stor som Inger sin. Den korrekte forklaringen er at «Alice sin hastighet er 78 % av Inger sin», eller «Alice løp 78 % så raskt som Inger». Denne ekstra scoringen, «Percentage Error?» kan ses i Figur 5.12.

Percentage Error?	What you enter
The response ***has clear evidence*** that the teacher made an additive-for-multiplicative error in reasoning about percentages, such as "Alice is 78 % faster than Inger" (instead of 78 % as fast as), or "Inger is 22 % faster than Alice" (instead of 22 % faster than Alice") which should be ignored when recording the main R21 score. Other percentage errors may be "Alice is 78 % behind Inger" or "Inger is always 22 % ahead of Alice", among others.	y
The response ***does not have clear evidence*** that the teacher made an error in reasoning about percentages.	n
Response is IDK	IDK
No response	X

Figur 5.12: «Percentage Error?» til oppgave 37. © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

For å gi en oversikt over hvordan deltakerne har scoret på denne oppgaven har jeg laget Tabell 5.4 og Tabell 5.5. Den første tabellen viser hvordan de har scoret på selve oppgaven, mens den andre viser om deltakeren har tenkt additivt istedenfor multiplikativt når det kommer til prosenten. Se Figur 5.12 for forklaring på de ulike scorene i Tabell 5.5.

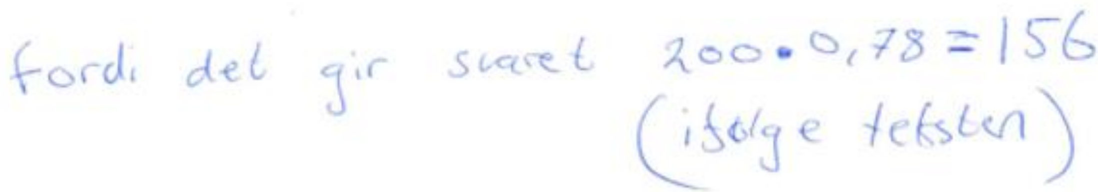
Tabell 5.4: Hvor mange av deltakerne som har scoret hva på oppgave 37

	Antall deltakere
4	4
3	5
2a	0
2b	1
1	0
0	11
IDK	0
X	5

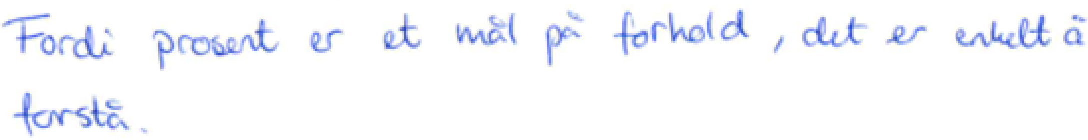
Tabell 5.5: Hvor mange av deltakerne som har scoret hva på «Percentage Error?» på oppgave 37

	Antall deltakere
y	0
n	22
IDK	0
X	5

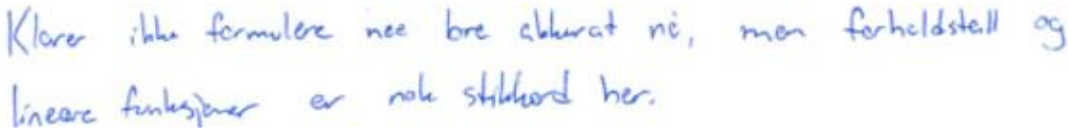
Som det kan ses ut ifra Tabell 5.4 så er det ikke så veldig mange som har scoret høyt på denne oppgaven. Det er kun 4 som har svart slik at besvarelsen har blitt scoret til det høyeste nivået, og 5 stk. som har scoret på det nest høyeste nivået. Likevel har ingen av deltakerne gitt et svar der det er helt tydelig at de tenker additivt istedenfor multiplikativt. Noe av grunnen kan være at blant de 11 deltakerne som har scoret 0, så er det egentlig ikke noen som har gitt et svar der det er mulig å si noe om de tenker additivt ellet multiplikativt om prosenten. Og siden det på scoringen av «Percentage Error?» kun skal merkes av for ja (y) om det er helt tydelig at de tenker additivt istedenfor multiplikativt, så blir slike svar merket nei (n). Noen av svarene fra deltakere som har scoret 0, og som har blitt scoret til n på «Percentage Error?» kan ses i de neste figurene.


fordi det gir svaret $200 \cdot 0{,}78 = 156$
(ifølge teksten)

Figur 5.13: Student 28 sin besvarelse på oppgave 37, har scoret 0 og n


Fordi prosent er et mål på forhold, det er enkelt å forstå.

Figur 5.14: Student 13 sin besvarelse på oppgave 37, har scoret 0 og n


Klarer ikke formulere noe bra akkurat nå, men forholdstall og lineære funksjoner er nok stikkord her.

Figur 5.15: Student 9 sin besvarelse på oppgave 37, har scoret 0 og n

Som kan ses i figurene over så er det ikke mulig å si om de hadde tenkt additivt eller multiplikativ, og på grunn av at på mange av besvarelsene så er det ikke mulig å si noe om dette, så kan ikke denne oppgaven vektlegges like mye som oppgave 17. Det eneste som er klart er at de som har scoret det høyeste nivået på denne oppgaven ikke har tenkt additivt, men multiplikativt.

Så generelt for dette konseptet, «Multiplikativ vs. additiv tenking», så ser det ut som en god del av de 27 deltakerne i denne forskningen har problemer med dette. Først og fremst fordi veldig mange valgte et svaralternativ som tyder på additiv tenking i oppgave 17. I tillegg så er det ikke mulig å si noe klart om hvordan mange av deltakerne tenkte i forhold til oppgave 37, siden så mange av dem ikke ga gode svar her. Jeg kan ikke anta her at de som ikke har fått til oppgaven tenker additivt, men jeg skal diskutere det litt mer seinere. Det at så pass mange som 11 stk. som scoret 0 på denne oppgaven, og det sier noe om at de har problemer med dette med konstant hastighet og hvordan det henger sammen med distanse og tid. Jeg vil nå i neste kapittel (5.3.2) gå nærmere inn på distanse og tid da jeg vil se på konseptet «Forholdet mellom distanse og tid», som i tillegg til å være knyttet til et par oppgaver til også er knyttet til oppgave 17 og 37.

5.3.2 Forholdet mellom distanse og tid

Konseptet «Forholdet mellom distanse og tid» er knyttet til oppgavene 1, 11-12, 17 og 37 (se henholdsvis Figur 5.21 og 5.22, 5.20, 5.5 og 5.11), og jeg vil her fokusere på disse oppgavene. Det er interessant å se på dette konseptet da mange av deltakerne hadde problemer med flere av oppgavene knyttet til dette. I tillegg, når jeg lagde hver enkelt deltakers konseptkart, var det ingen av deltakerne som uttrykte en god, helhetlig 'meaning' og fikk dette konseptet fargelagt grønt. Alle oppgavene som er knytet til dette konseptet handler hovedsakelig om enten gjennomsnittlig hastighet (1 og 11-12) eller konstant hastighet (17 og 37). Det er viktig å vite hvordan distanse og tid henger sammen med hverandre, som for eksempel at hastighet er distanse per tidsenhet (James & James, 1976), så derfor har jeg valgt å fokusere på dette

Jeg har i forrige kapittel (5.3.1) skrevet om oppgave 17 og 37, så jeg vil ikke her gå like mye inn på dem. For å oppsummere kort så er begge oppgavene knyttet til konstant hastighet, og utforsker om deltakerne vet at om et objekt beveger seg i konstant hastighet så er tiden som har gått proporsjonal med den tilhørende endringen i distanse. I forhold til oppgave 37 så er de mest interessert i å se om deltakerne vet at et objekt som beveger seg i konstant hastighet alltid vil dekke en gitt lik andel av den totale distansen og den totale tiden. Spesifikt for denne oppgaven blir det altså at om Alice har løpt 78 % av den totale tiden hennes, så har hun også løpt 78 % den totale distansen hennes. Som vi så i forrige kapittel så var det nokså få av deltakerne som ga et svar som viste at de hadde en god 'meaning' om dette. Det var kun 4 deltakere som scoret det høyeste nivået på både oppgave 17 og 37, og da har ingen av de 27 deltakerne klart å score det høyeste nivået på begge oppgavene.

Jeg vil nå først se på oppgave 17 i forhold til konseptet «Forholdet mellom distanse og tid». I oppgaveteksten så kommer det frem til at j står for antall meter Julie sykler hvert sekund, og s står for antall meter Stian går hvert sekund. Her ser vi at oppgaveteksten opplyser om et forhold mellom distanse og tid, i tillegg til å si at $j > s$, som da vil si at Julie beveger seg lenger hvert sekund enn det Stian gjør. Så ber oppgaven deltakeren om å sammenlikne det man har fått opplyst, og gi et svar på hvor mye lenger Julie har reist. Hvis noen av deltakerne har scoret det høyeste nivået på denne oppgaven så tyder det på at de er bevisste på det proporsjonale forholdet mellom distanse og tid. Siden dette er en flervalgsoppgave så kan det være vanskelig å vite hva deltakerne har tenkt når de har valgt et svaralternativ. Likevel så kan det at så mange som 16 av de 27 deltakerne svarte alternativ (a), som var «Julie vil ha reist j – s meter mer enn Stian», tyde på at disse deltakerne ikke har væt på bevisste på dette forholdet. Som igjen vil si at de ikke har uttrykt en god 'meaning' om forholdet mellom distanse og tid.

I forhold til oppgave 37 så er det, som nevnt tidligere, fokus på å undersøke om deltakerne vet at et objekt som beveger seg i konstant hastighet alltid vil dekke en gitt lik andel av den totale distansen og den totale tiden. Det er kun 4 av deltakerne som har utvist en god 'meaning' i forhold til dette og da scoret på det høyeste nivået. Dette vil si at de har klart å se dette forholdet mellom distanse og tid, se den øverste ruten i Figur 5.16 som viser hva som skal til for å score på nivå 4. 5 deltakere har scoret på nivå 3, som vil si at de kun har svart i forhold til distanse og ikke tid. Altså at Alice har fullført 78 % av distansen (eller hadde 22 % av distansen igjen), men ikke nevnt noe om at det samme gjelder for tiden.

Summary of Levels

Level 4 Responses:	*All* of the following: + The teacher stated that Alice completed 78 % of her total time (or had 22 % of total time left). + The teacher stated that Alice completed 78 % of her total distance (or had 22 % of total distance left).
Level 3 Responses:	The teacher stated that Alice completed 78 % of her total distance (or had 22 % of total distance left).
Level 2a Responses:	The teacher referred to 78 % as a ratio of the women's speeds, but did not go on to explicitly explain that Alice has completed 78 % of her distance.
Level 2b Responses:	The teacher stated that time is proportional to distance, speed is proportional to distance, or speed is proportional to time.
Level 1 Responses:	*Any* of the following: - The teacher stated that Tanya was wrong or that the given percentage is irrelevant to the problem. - The teacher solved the problem another way ignoring the given ratio of times (such as using d=r·t).
Level 0 Response:	*Any* of the following: - The response does not fit a higher level. - The scorer cannot interpret the response. - The response consists of scratch work with no clear indication of a final answer. - The response does not address the prompt; that is, the response is off-topic (see Purpose and Rationale). - The page contains no work, but does contain at least one mark to suggest that the teacher saw this item.
IDK Response:	The response consists only of "I don't know", or something equivalent that suggest that the teacher is unsure of how to respond. If the teacher stated uncertainty and gave an additional response, score the response ignoring the uncertainty.
X Response:	The page is completely blank.

Figur 5.16: «Summary levels» til oppgave 37. © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

Resten av deltakerne (bortsett fra 1 som har scoret 2b) har gitt svar som kan tyde på at de har en dårlig 'meaning' om dette forholdet mellom distanse og tid. Noen har for eksempel kun begrunnet med tanke på utregning av oppgaven, og ikke gitt noe god forklaring på hvorfor det er relevant at 21,77 er 78 % av 27,80. Eksempler på dette kan ses i de neste bildene, som er fra tre ulike besvarelser som har scoret 0 (se Figur 5.17, 5.18 og 5.19). Det at de kun har fokusert på utregningen og ikke på hva dette forholdet betyr og hvorfor det er viktig, kan tyde på at de ikke har en godt nok utviklet 'meaning' om forholdet mellom distanse og tid, og også i akkurat dette tilfellet «Konstant hastighet» (som jeg skal se litt nærmere på i neste kapittel, 5.3.3).

fordi det gir svaret $200 \cdot 0{,}78 = 156$
(ifølge teksten)

Figur 5.17: Student 28 sin besvarelse av oppgave 37, har scoret 0

Hvis de bruker vei,fart,tid trekanten,
kan de bare gange svaret fra
utregningen om Alice med 0,78 og
få svaret

Figur 5.18: Student 15 sin besvarelse av oppgave 37, har scoret 0

$\frac{\text{delen}}{\text{det hele}} = \frac{21{,}77}{27{,}80} = \text{prosentfaktor} \cdot 100\% = 78\%.$

For å vite hvor mye/langt bak I var bak A.

Figur 5.19: Student 24 sin besvarelse av oppgave 37, har scoret 0

De to andre oppgavene om er knyttet til dette konseptet, oppgave 1 og 11-12, handler hovedsakelig om gjennomsnittlig hastighet. Igjen, her handler det om at deltakerne må vite sammenhengen mellom distanse og tid i forhold til hastighet. Gjennomsnittlig hastighet er den konstante hastigheten det vil ta å reise den samme distansen på samme tid.

Oppgave 11-12 ble gjennomgått detaljert i kapittel 4.5 som et eksempel på oversettelses- og scoringsprosessen. Som nevnt da så består oppgaven av tre deler (A, B og C), se Figur 5.20. Jeg vil her kun fokusere på del A, da de andre delene kun er med for å se om de som har gjort feil på første delen legger merke til det.

En bil kjørte fra Kristiansand til Tvedestrand, distansen er 90 kilometer, og farten er 40 kilometer i timen. Hvor raskt må bilen kjøre på vei tilbake til Kristiansand hvis gjennomsnittsfarten på hele turen skal være 60 kilometer i timen?

Del B. En kjøretur på 180 kilometer, der gjennomsnittsfarten er 60 kilometer i timen, vil ta 3 timer. Er svaret ditt på den forrige siden i samsvar med dette?

- ☐ Ja ☐ Nei ☐ Vet ikke

Del C. Hvis du krysset av på «Nei» eller «Vet ikke», vennligst prøv å løse problemet på nytt nedenfor. **Ikke** kryss ut det du gjorde på den forrige siden.

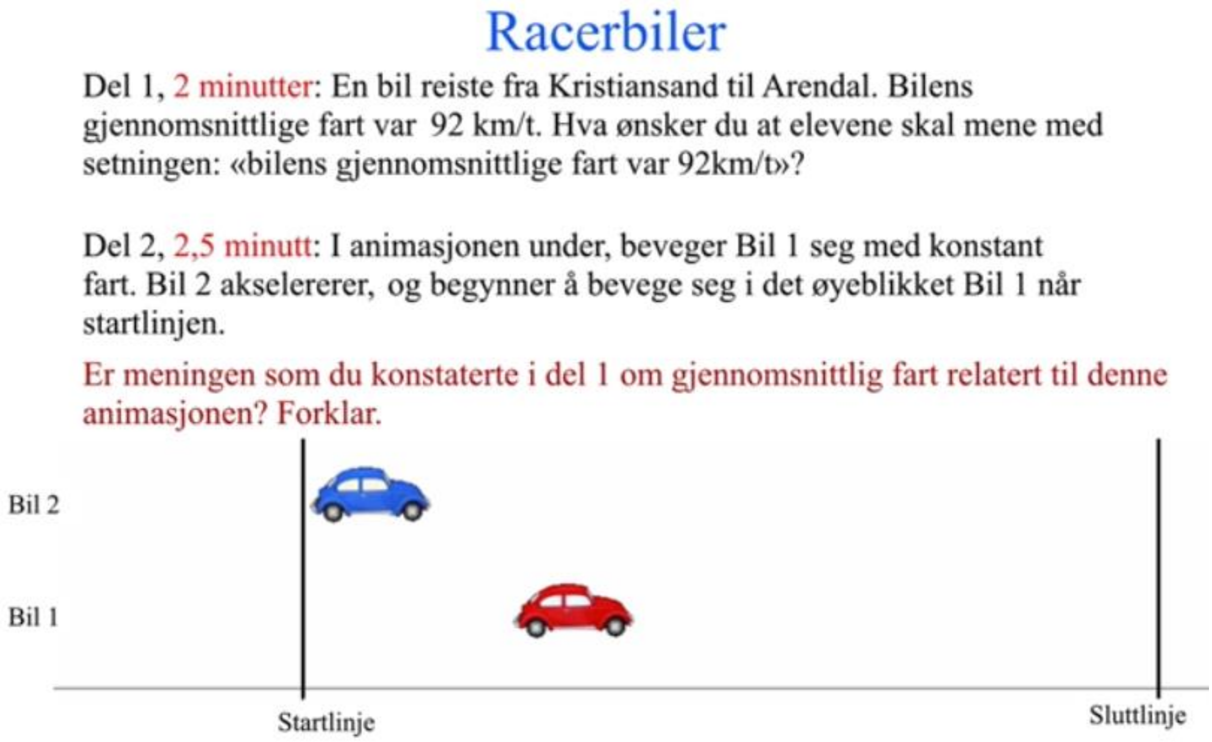
Figur 5.20: Oppgave 11-12. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

Som det kan ses i Tabell 5.6 så har faktisk en del av deltakerne gitt svar som tyder på en god 'meaning', hele 12 stk. har scoret på nivå 3. I tillegg så er det kun 3 av deltakerne som har løst oppgaven ved hjelp av aritmetisk gjennomsnitt, altså scoret 1. Det kan altså se ut som at dette er en feil som ikke er spesielt utbredt blant de 27 deltakerne som deltok i denne forskningen. Som nevnt i kapittel 4.5 så var det 7 av deltakerne som misforsto denne oppgaven, de regnet ut hvor lang tid bilen måtte kjøre, ikke hvor raskt. Disse deltakerne ble scoret til nivå 0. Hvis vi ser bort ifra disse som har misforstått, er det kun 5 deltakere som har uttrykt en dårlig utviklet 'meaning'. I forhold til disse 7 deltakerne som misforsto, så er det ikke mulig å si noe om hvilken 'meaning' de har i forhold til gjennomsnittlig hastighet, og da også forholdet mellom distanse og tid. Dermed kan det, kun ut i fra denne oppgaven tyde på at en god del av deltakerne har en godt utviklet 'meaning' om forholdet mellom distanse og tid når det kommer til gjennomsnittlig hastighet.

Tabell 5.6: Hvor mange av deltakerne som har scoret hva på oppgave 11-12, del A.

	Antall deltakere
3	12
2	0
1	3
0	12
IDK	0
X	0

Oppgave 1 gir deltakerne mulighet til å koble deres personlige 'meaning' om gjennomsnittlig endringsrate i en konkret setting. Oppgaven er to-delt, der deltakerne først skal gi en forklaring på hva de ønsker at de sine elver skal mene med setningen «bilens gjennomsnittlige fart var 92km/t» (Del A). Deretter skal de, på Del B, koble forklaringen de ga med en animasjon av to biler som kjører lik avstand på samme tid, men den ene akselerer (bil 2) og den andre kjører i konstant hastighet (bil 1). Jeg har her valgt å fokusere kun på Del A, da de her må uttrykke sin 'meaning' om gjennomsnittlig hastighet, der forholdet mellom distanse og tid er viktig. Jeg vil også se litt mer på Del B i kapittel 5.3.4 som handler om «Kommunikasjon».



Figur 5.21: Bilde av animasjonen til oppgave 1. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

Del 1: Uttrykk den oppfatningen du ønsker elevene skal ha.

Del 2: Er den uttrykte oppfatningen som du har skrevet i del 1 relatert til animasjonen? Forklar.

Figur 5.22: Oppgaveteksten til oppgave 1 på arket. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

Ut ifra scoringsmanualen (Figur 5.23) kan vi se at om deltakerne har uttrykt en ‘meaning’ som passer inn på nivå 3 eller 2a, så vil de uttrykke forholdet mellom distanse og tid på en god måte i forhold til gjennomsnittlig hastighet. Jeg vil bare presisere at når vi oversatte denne oppgaven endret vi 62 mi/hr til 92 km/t, derfor vil det i Figur 5.23 som viser scoringsmanualen står 62 mi/hr. I Tabell 5.7 kan vi se en oversikt over hvor mange av deltakerne som har scoret hva på Del A. Der ser vi at 10 av deltakerne har gitt et svar som tyder på at de har en god ‘meaning’ om forholdet mellom distanse og tid når det kommer til gjennomsnittlig hastighet. De deltakerne som har scoret på nivå 3 har gitt en tilfredsstillende besvarelse som uttrykker at gjennomsnittlig hastighet er den konstante hastigheten det vil ta å reise den samme distansen på samme tid. Deltakerne som har scoret på nivå 2a har enten forklart at gjennomsnittlig hastighet er en ratio av distanse og tid, eller skrevet en korrekt formel for gjennomsnittlig hastighet. Alle disse beskrivelsene viser at deltakerne har en nokså god ‘meaning’ om forholdet mellom distanse og tid.

Tabell 5.7: Hvor mange av deltakerne som har scoret hva på oppgave 1, del A.

	Antall deltakere
3	2
2a	8
2b	5
1	5
0	7
IDK	0
X	0

Summary of Levels

Part A

Level A3 Response:	The teacher wrote ***all*** of the following: + If the same car, or a second car, were to travel at a constant speed of 62 mi/hr, + It would travel the same distance as the actual car + In the same amount of time as the actual car.
Level A2a Response:	***Any*** of the following: - The teacher explained that the average speed is a ratio of distance and time, but without mentioning a hypothetical constant speed - The teacher wrote a correct formula to calculate an average speed.
Level A2b Response:	***Any*** of the following: - The response is consistent with explaining "Average speed of 62 mph means that the car travels 62 miles in one hour." - The response is consistent with explaining "Average speed is the distance traveled in 1 hour"
Level A1 Response:	***Any*** of the following: - **Arithmetic mean:** the teacher conveyed that the average speed is an arithmetic mean of speeds – adding a number of things and dividing by the number of things. - **Circular meaning, as in:** the teacher said only that average speed is an average or is determined "on average".
Level A0 Response:	***Any*** of the following: - The response does not fit a higher level. - The scorer cannot interpret the response. - The response consists of scratch work with no clear indication of a final answer. - The response does not address the prompt; that is, the response is off-topic (see Purpose and Rationale). - The page contains no work, but does contain at least one mark to suggest that the teacher saw this item.
IDK Response:	The response consists only of "I don't know", or something equivalent that suggest that the teacher is unsure of how to respond. If the teacher stated uncertainty and gave an additional response, score the response ignoring the uncertainty.
X Response:	The page is completely blank.

Figur 5.23: «Summary levels Part A» til oppgave 1. © 2014 Arizona Board of Regents. Brukes med tillatelse.

Generelt for dette konseptet, «Forholdet mellom distanse og tid», så ser det ut som en god del sliter når det kommer til konstant hastighet. Som er noe vi kan se ut i fra hvilken 'meaning' deltakerne har uttrykt på oppgavene 17 og 37. Det kan se ut som problemet er knyttet til proporsjonalitet, da begge disse oppgavene fokuserer på det proporsjonale forholdet mellom distanse og tid. I konseptkartet er et av konseptene «Proporsjonalitet», og veldig mange av deltakerne har fått dette konseptet fargelagt rødt, 16 av 27 stk. Dette er med på å styrke mistanken om at det er det proporsjonale forholdet mellom distanse og tid som flere sliter med. I forhold til oppgave 1 og 11-12, så er det flere deltakerne som gir svar som tyder på at de har en god 'meaning' om forholdet mellom distanse og tid, knyttet til gjennomsnittlig hastighet. 10 deltakere på oppgave 1, og 12 deltakere på oppgave 11-12. Likevel er det under halvparten av deltakerne, i forhold til begge disse oppgavene, som har uttrykt en velutviklet og ønskelig 'meaning'. Så man ikke si at dette ikke er et konsept som deltakerne sliter med, fordi det er mange som uttrykt 'meanings' som ikke tydelig viser at de innehar en god 'meaning' om forholdet mellom distanse og tid. I forhold til oppgave 12, så er det også vanskelig å si noe om hvilken 'meaning' de syv som misforsto oppgaven innehar.

5.3.3 Hastighet, gjennomsnittlig og konstant

«Hastighet», «Gjennomsnittlig» og «Konstant» er konsepter som jeg allerede har vært innom i de to foregående kapitlene i ulik grad. Dette er fordi oppgavene jeg har sett på i forhold til konseptene «Multiplikativ vs. additiv tenking» og «Forholdet mellom distanse og tid» også er knyttet til de tre konseptene jeg fokuserer på her. Hele 6 av de 8 oppgavene som handler om endringsrate er knyttet til minst et av disse tre konseptene, det er altså viktige konsepter å forstå når det kommer til å ha en god 'meaning' om endringsrate. Alle, utenom en av de seks oppgavene, fokuserer på enten gjennomsnittlig hastighet, konstant hastighet, eller begge deler. Så her vil jeg fokusere på de to ulike typene hastighet, og ikke konseptene «Gjennomsnittlig» og «Konstant» hver for seg. Derfor vil jeg se på de 5 oppgavene som omhandler det, og det er oppgave 1, 6, 11-12, 17 og 37. Jeg har vært innom de fleste av disse oppgavene i de foregående kapitlene, men vil her gå mer spesifikt inn på hvordan deltakerne har gjort det i forhold til gjennomsnittlig og konstant hastighet. Oppgave 17 og 37 er, som nevnt tidligere, utviklet for å undersøke læreres 'meanings' for konstant hastighet. Oppgave 1 og 11-12 fokuserer på læreres 'meanings' for gjennomsnittlig hastighet, mens oppgave 6 handler om å kunne sammenlikne gjennomsnittshastigheten til to objekter som har ulik hastighet.

Jeg vil først fokusere på konstant hastighet, som vil si oppgavene 17 og 37 (se henholdsvis Figur 5.5 og 5.11). For å kunne score på det høyeste nivået på disse oppgavene så må deltakerne vite om forholdet mellom distanse og tid når det kommer til konstant hastighet. For å score det høyeste nivået på oppgave 17 måtte deltakerne velge svaralternativ (e) «Julie vil ha reist j/s ganger så mange menter som Stian». I «Rationale» (Figur 5.6) står det beskrevet hva som er ønsket 'meaning' om konstant hastighet, og det er at hvis et objekt reiser i konstant hastighet, så vil tiden gått være proporsjonal med den tilhørende endringen i distanse. Deltakerne må uttrykke en slik 'meaning' for å score på det høyeste nivået, og kun 4 av de 27 deltakerne ga et svar som tyder på at dette er en 'meaning' som de innehar.

I forhold til oppgave 37 så er det en mer spesifikk «egenskap» med konstant hastighet som undersøkes. For å kunne score på det høyeste nivået på denne oppgaven så må deltakerne vite at om en person løper i konstant hastighet så vil denne personen alltid dekke en gitt lik del av den totale distanse og den totale tiden. Det er kun 4 av deltakerne som har gitt et svar på denne oppgaven som uttrykket at de har en god 'meaning' om dette konseptet. 5 av deltakerne har gitt et svar som kan tyde på at de innehar en viss 'meaning' om dette, men den er ikke godt nok utviklet. Disse deltakerne, som ble scoret på nivå 3, klarte kun å løse oppgaven med tanke på distanse, se under «Level 3 Responses» i Figur 5.16. Om en av deltakerne har svart på denne måtens så kan det være et tegn på at de har en ‘meaning’ om dette som ikke er feil, men at deltakerens ‘meaning’ ikke er godt nok utviklet og omfatter alt som den burde.

Generelt er det få av deltakerne som har scoret høyt på disse oppgavene, og det kan se ut som at flere av deltakerne i denne gruppa på 27 stk. har en nokså dårlig ‘meaning’ om konstant hastighet ut ifra hva de har uttrykt på disse oppgavene. Likevel så kan problemet deltakerne har være mer sammensatt enn som så. Som jeg allerede har trukket frem i forhold til disse oppgavene så var det mange som hadde problemer med at de tenkte additivt istedenfor multiplikativt, og i tillegg har vi sett på at det kan være at flere av deltakerne har problemer med forholdet mellom distanse og tid. For å kunne ha en velutviklet ‘meaning’ om konstant hastighet så er det multiplikative forholdet mellom distanse og tid essensielt. Dette er noe jeg har tatt opp i de tidligere kapitlene, der jeg også har sett på eksempler på besvarelser. Det jeg har trukket frem der vil også gjelder her, når det nå fokuseres på konstant hastighet, da det som sagt henger nært sammen.

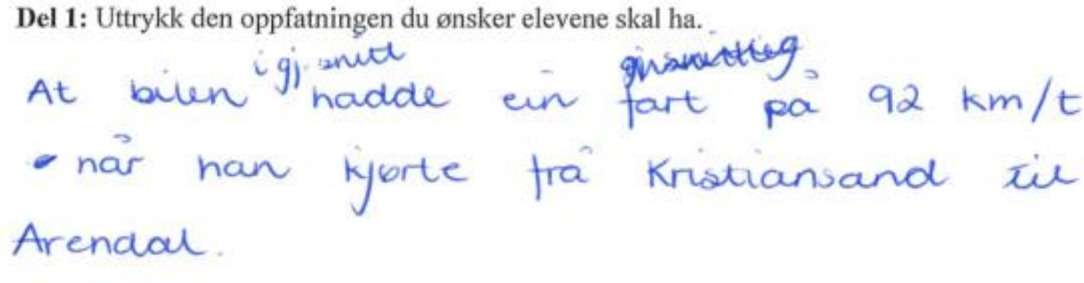
Gjennomsnittshastighet er hovedfokuset i oppgave 1 og 11-12 (se henholdsvis Figur 5.21 og 5.20). Oppgave 1 gir som sagt deltakerne mulighet til å koble deres personlige ‘meaning’ om gjennomsnittlig endringsrate i en konkret setting. Jeg vil her også fokusere på Del A i oppgaven, som krever at deltakerne forklarer hva de ønsker at sine elever skal mene med setningen «bilens gjennomsnittlige fart var 92km/t».

For å score på det høyeste nivået på Del A må deltakerne nevne tre ting (se Figur 5.23):

- Hvis den samme bilen, eller en annen bil, kjørte med den konstante hastigheten 92km/t,
- Så ville den reist den samme distansen som den opprinnelige bilen
- På samme tid som den opprinnelige bilen

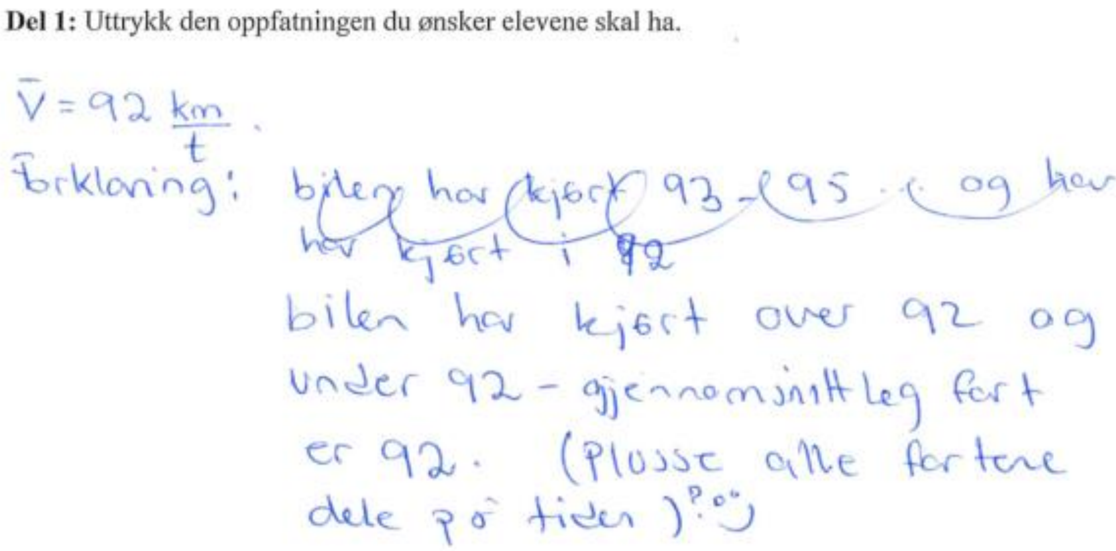
Dette er veldig spesifikt, og det er veldig få av deltakerne som har fått med alle disse tre tingene, kun 2 stk. Deltakerne må likevel uttrykke en slik ‘meaning’ for å score på det høyeste nivået i dette instrumentet. Det er veldig spredt hvordan deltakerne har gjort det på Del A, som kan ses i Tabell 5.7. Dette kan tyde på at blant de 27 deltakerne som har deltatt i denne forskningen, så er det flere ulike ‘meanings’. Som det kan ses i tabellen, så er det nokså jevnt fordelt blant de ulike scorene fra 0 til 2a, og de ulike ‘meanings’ som ligger bak hver av disse scorene kan ses i Figur 5.23 som er oppgave 1 sin «Summary of Levels» for Del A.

Det spesifiseres i scoringsmanualen at besvarelsene som scores til nivå 1 ikke er bedre enn besvarelser som scores til nivå 0. Besvarelsene scores kun til nivå 1 for å skille ut disse spesifikke måtene å tenke på som viser at deltakerne har en dårlig utviklet ‘meaning’. Det er 5 av deltakerne som har uttrykt enten en sirkulær ‘meaning’ (4 stk.) eller at gjennomsnittshastighet er et aritmetisk gjennomsnitt av hastigheter (1 stk). Sirkulær ‘meaning’ kan tyde på at deltakeren ikke klarer å gi en forklaring på hva gjennomsnittlig hastighet er, da det ifølge scoringsmanualen vil si at de har sagt «…average speed is an average…» eller noe lignende. Mens det å tenke på gjennomsnittlig hastighet som et aritmetisk gjennomsnitt er feil, og viser at disse deltakerne har utviklet en ‘meaning’ som det ikke er *ønskelig* at de skal ha. Eksempler på denne type ‘meaning’ kan ses i Figur 5.24 og 5.25.


Del 1: Uttrykk den oppfatningen du ønsker elevene skal ha.

At bilen i gj.snitt hadde ein gjennomsnittleg fart på 92 km/t
• når han kjørte frå Kristiansand til
Arendal.

Figur 5.24: Student 21 sin besvarelse på oppgave 1A som viser sirkulær ‘meaning’.


Del 1: Uttrykk den oppfatningen du ønsker elevene skal ha.

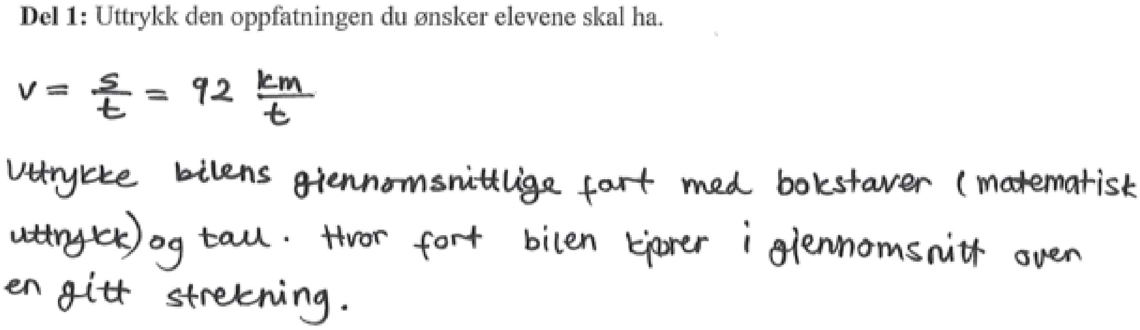
$\bar{V} = 92 \frac{km}{t}$.

Forklaring: ~~bilen har kjørt 93 - 95 - og har har kjørt i 92~~
bilen har kjørt over 92 og
under 92 – gjennomsnittleg fart
er 92. (Plusse alle fartene
dele på tiden)?

Figur 5.25: Student 23 sin besvarelse på oppgave 1A som viser aritmetisk gjennomsnitt.

8 av deltakerne har gitt et svar som kan scores til nivå 2a. Ut ifra scoringsmanualen (Figur 5.23) så er svarene som passer inn på dette nivået svar som enten forklarer at gjennomsnittlig hastighet er en ratio av distanse og tid, eller skriver en korrekt formel for å regne ut gjennomsnittlig hastighet. De ‘meanings’ som ligger bak dette nivået er ikke feil, det er bare at uttrykt ‘meaning’ ikke er fullt utviklet i forhold til det som er *ønskelig* ‘meaning’. Så disse 8 deltakerne sine besvarelser tyder på at de har en litt utviklet ‘meaning’ om gjennomsnittlig hastighet. Eksempler på besvarelser om viser de to ulike ‘meanings’ for å score nivå 2a kan ses nedenfor. I Figur 5.26 ser vi et eksempel på en besvarelse der deltakeren har skrevet en korrekt formel for å regne ut gjennomsnittshastighet. Som vi kan se fra forklaringen gitt i denne besvarelsen så er det viktigste for denne deltakeren at han sine elever kan uttrykke bilens gjennomsnittlige hastighet ved bruk av en formel. Så selv om det denne deltakeren skriver er riktig, så er det ikke helt *ønsket* ‘meaning’ for en lærer å ha. Besvarelsen i Figur 5.27 viser et eksempel på en deltaker som har gitt en korrekt definisjon på gjennomsnittlig

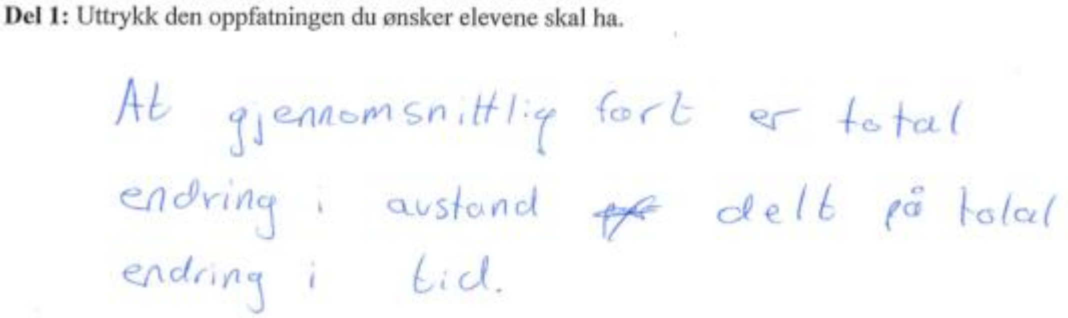
hastighet i forhold til at det er en ratio av distanse og tid. Deltakeren har ikke nevnt noen hypotetisk konstant hastighet, og det er grunnen til at denne besvarelsen scores til nivå 2a.


Del 1: Uttrykk den oppfatningen du ønsker elevene skal ha.

$v = \frac{s}{t} = 92 \frac{km}{t}$

Uttrykke bilens gjennomsnittlige fart med bokstaver (matematisk uttrykk) og tall. Hvor fort bilen kjører i gjennomsnitt over en gitt strekning.

Figur 5.26: Student 24 sin besvarelse på oppgave 1A som scores til nivå 2a.

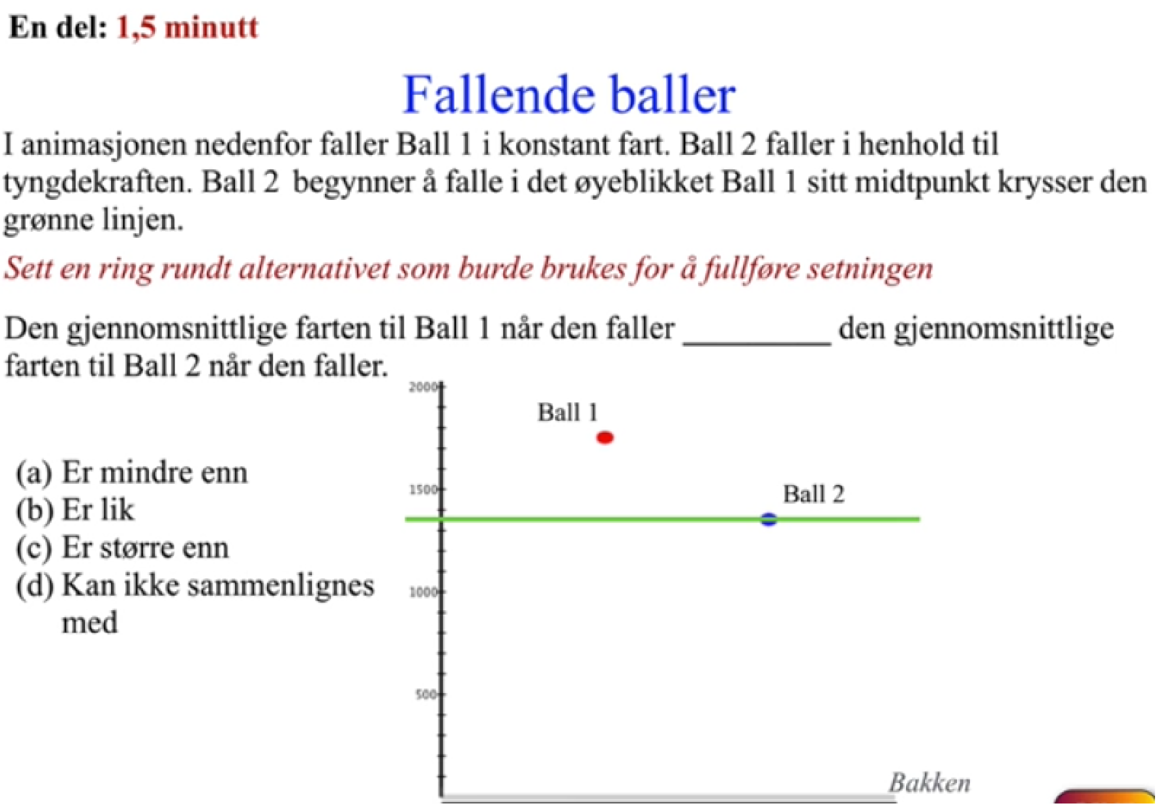

Del 1: Uttrykk den oppfatningen du ønsker elevene skal ha.

At gjennomsnittlig fort er total endring i avstand ~~på~~ delt på total endring i tid.

Figur 5.27: Student 28 sin besvarelse på oppgave 1A som scores til nivå 2a.

Jeg vil ikke gå noe særlig inn på oppgave 11-12 (Figur 5.20), da det som nevnt i det forrige kapittelet er vanskelig å si noe om hva som er problemet pga. at så mange av de som har scoret 0 misforsto oppgaven. Noe av det som kan være relevant å se på er at hele 12 av deltakerne uttrykte en god ‘meaning’ på denne oppgaven, og da altså om gjennomsnittlig hastighet. Når vi så på oppgave 1 så kunne vi se at det var flere ulike ‘meanings’ blant deltakerne, dette kommer ikke tydelig frem i oppgave 11-12. Noe som er ulikt på disse oppgavene er at på oppgave 11-12 så må man ikke forklare sin ‘meaning’, man må kun bruke det i forhold til å regne ut svaret på oppgaven. Så det er en mulighet for at flere av deltakerne som har klart å komme frem til samme svar, og altså scoret det høyeste nivået, har litt ulik ‘meaning’.

Den siste oppgaven jeg har lyst å fokusere på i forhold til disse konseptene er oppgave 6 (Figur 5.28). Oppgaven handler om å kunne sammenlikne gjennomsnittshastigheten til to baller som har ulik hastighet. Begge ballene bruker like lang tid på å falle fra den grønne streken til bakken, men de har ulik fart. Ball 1 faller i konstant fart, mens Ball 2 faller i henhold til tyngdekraften.

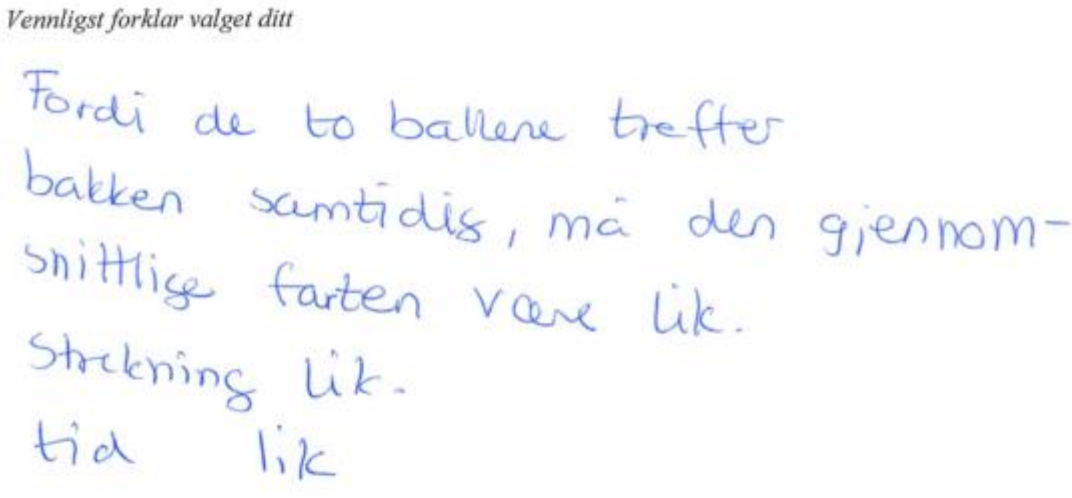


Figur 5.28: Animasjonen til oppgave 6. © 2016 Simon Goodchild. Brukes med tillatelse.

Tabell 5.8: Hvor mange av deltakerne som har scoret hva på oppgave 6

	Antall deltakere
3 (b)	21
2 (d)	1
1 (a, c)	5
0	0
IDK (e)	0
X	0

Som vi kan se ut ifra Tabell 5.8 så har nesten alle deltakerne valgt det riktige svaralternativet, og med det uttrykt en god 'meaning' om dette. Dette er en flervalgsoppgave, og det er mulig at noen av deltakerne kan ha gjettet eller brukt en elimineringsmetode, og på den måten endt opp med riktig svar. Noe som likevel er med på å styrke det at de fleste av disse deltakerne har en god 'meaning' er at oppgaven ber om at man skal forklare valget. De fleste som har valgt svaralternativ (b) «er lik», som er det riktige alternativet, har også gitt en tilfredsstillende forklaring. De fleste har gitt en forklaring som er tilsvarende til den som kan ses i Figur 5.29. Siden såpass mange av deltakerne har valgt riktig svaralternativ og i tillegg har gitt en god forklaring så tyder det på at de fleste av de 27 deltakerne har en god 'meaning' når det kommer til å sammenlikne gjennomsnittshastighetene til to objekt over samme distanse.



Figur 5.29: Student 19 sin besvarelse på oppgave 6, har valgt svaralternativ (b)

Generelt, ut ifra de ‘meanings’ som deltakerne har uttrykt, så kan det se ut som de har en bedre ‘meaning’ om gjennomsnittlig hastighet enn konstant hastighet. På begge oppgavene knyttet til konstant hastighet, oppgave 17 og 37, så var det få av deltakerne som ga svar som uttykker en god ‘meaning’. Mens det i forhold til oppgavene knyttet til gjennomsnittlig hastighet var flere ulike ‘meanings’ som ble uttrykt. I forhold til oppgave 6 og i noen grad oppgave 11-12 så var det nokså mange som ga svar slik at det ser ut som at deres ‘meaning’ om gjennomsnittlig hastighet er god. Problemet oppstår i forhold til oppgave 1, der det er flere ulike ‘meanings’ blant deltakerne, og ikke så mange som utviste en ‘meaning’ som ble scoret til det høyeste nivået. Oppgave 1 er en oppgave som krever at deltakerne må forklare hva de ønsker at de sine elever skal mene med gjennomsnittlig hastighet, mens oppgave 6 er en flervalgsoppgave og oppgave 11-12 er mer en utregningsoppgave. Det kan diskuteres hvilken av disse oppgavene som kanskje tydeligst får frem hvilken ‘meaning’ deltakerne faktisk har. Uansett så er det flere av deltakerne som har problemer når det kommer til både konstant hastighet og gjennomsnittlig hastighet.

5.3.4 Kommunikasjon

«Kommunikasjon» er litt annerledes enn de andre konseptene jeg til nå har diskutert, da jeg ikke i denne sammenhengen ser på kommunikasjon som et konsept, men som en kompetanse eller evne. Som jeg nevnte da jeg beskrev konseptkartet (kapittel 5.1.2), så er dette noe som er viktig for alle konseptene i konseptkartet, og en viktig egenskap for fremtidige lærere. Fordi hvordan en lærer formidler sine ‘meanings’ er en viktig kilde for hvordan elevene konstruer sine egne ‘meanings’ (Yoon, Byerley & Thompson, 2015). Jeg vil også poengtere at all kommunikasjonen jeg ser på her kun er skriftlig kommunikasjon, og det i undervisningssammenhenger som regel er mest av muntlig kommunikasjon. Likevel, så vil hvordan deltakerne klarer å kommunisere skriftlig kunne gi noen antydninger til hvor gode deltakerne er på å kommunisere. Som lærer må man også kunne kommunisere på andre måter enn muntlig for å få frem sin ‘meaning’, og derfor er dette relevant å se på. Hvis en av deltakerne har en dårlig utviklet ‘meaning’ om noe, så vil nok denne deltakeren kunne få problemer med å kommunisere sin ‘meaning’.

Deltakerne må kommunisere i alle oppgavene i instrumentet som ikke er flervalgsoppgaver. De av oppgavene som er rene regneoppgaver krever ikke like mye kommunikasjon som oppgavene som krever forklaringer. Jeg vil her fokusere på oppgave 1 og 37, som er to oppgaver som krever at deltakerne kommuniserer sin 'meaning', fordi i begge disse oppgavene så blir deltakerne bedt om å gi en forklaring på noe. I oppgave 1 (se Figur 5.21 og 5.22) må de både si noe om hvilken 'meaning' de ønsker at elevene sine skal ha om gjennomsnittlig hastighet (Del A), i tillegg til å forklare hvordan det de har sagt i Del A passer sammen med animasjonen (Del B.) I oppgave 37 (se Figur 5.11) må de skrive ned hvordan de hadde forklart noe til noen elever i en klasse.

Et eksempel i forhold til oppgave 1, som jeg allerede har trukket frem når jeg så på oppgave 1 i tidligere kapittel, var den deltakeren som ønsket at elevene skulle kunne uttrykke gjennomsnittshastighet som en formel (se Figur 5.30). Svaret på Del 1 her kan tyde på denne deltakerens 'meaning' om gjennomsnittlig hastighet er knyttet til formelen, og kun det. Denne deltakerens 'meaning' vil være den som han formilder til sin elever, og som elevene selv kanskje ender opp med å konstruere. I tillegg så kan vi se at i forklaringen på Del 2 så er det vanskelig å tyde hva deltakeren mener. Det er vanskelig å forstå hva deltakeren her prøver å formidle, da det kan se ut som han mener at gjennomsnittlig fart kun gjelder om man har noe som beveger seg i konstant hastighet. Dette gir ikke så mye mening, og dette kan da være utydelig og forvirrende for denne deltakerens elever også. Det at deltakeren har problemer med å kommunisere sin 'meaning' kan også være et tegn på at denne deltakerens 'meaning' m gjennomsnittlig hastighet er nokså dårlig.

Del 1: Uttrykk den oppfatningen du ønsker elevene skal ha.

$$v = \frac{s}{t} = 92\ \frac{km}{t}$$

Uttrykke bilens gjennomsnittlige fart med bokstaver (matematisk uttrykk) og tall. Hvor fort bilen kjører i gjennomsnitt over en gitt strekning.

Del 2: Er den uttrykte oppfatningen som du har skrevet i del 1 relatert til animasjonen? Forklar.

En viktig presisering må være at gjennomsnittlig fart gjelder når vi har konstant fart, og ikke den farten vi får når en bil akselererer. Manglet presisering i punkt/del 1.

Figur 5.30: Student 24 sin besvarelse på oppgave 1

På oppgave 37 (Figur 5.11) så er det flere som har gitt forklaringer som kan tyde på at deltakerne har problemer med å kommunisere sin 'meaning'. Hvis en lærer forklarer til klassen sin ved å si «Fordi prosent er et mål på forhold, det er enkelt å forstå.» (se Figur 5.31), så er det tydelig problemer med kommunikasjonen. Læreren klarer her ikke å forklare hvorfor det er relevant at 21,77 er 78 % av 27,80 på noen annen måte å si at prosent er et mål på forhold. Det er mulig at denne deltakeren kanskje innehar en bedre 'meaning' enn han klarer å uttrykke, men som lærer er det det man formidler som er det viktigste. Et annet eksempel er en besvarelse der det kan se ut som deltakeren innehar en god 'meaning' om konstant hastighet, men forklaringen denne deltakeren gir er ikke helt tydelig og kan nok være litt komplisert (se Figur 5.32). Det denne deltakeren har uttrykt her er ikke feil i forhold til oppgaven som blir presentert i oppgave 37, men det er likevel heller ikke en god forklaring på hvorfor det er relevant at 21,77 er 78 % av 27,80 for å løse oppgaven. Dette er altså et eksempel som viser at selv om en lærer innehar en god 'meaning' om et konsept, så betyr ikke det at læreren nødvendigvis klarer å formidle det på en god måte.

Fordi prosent er et mål på forhold, det er enkelt å forstå.

Figur 5.31: Student 13 sin besvarelse på oppgave 37

hvis $v_1 = 78\% \cdot v_2$,
så er $s_1 = v_1 \cdot t_4 = 0,78\% \cdot v_2 \cdot t$,
altså, for hver meter I løper, så
løper A 78 cm

Figur 5.32: Student 26 sin besvarelse på oppgave 37

Det kan altså være flere grunner til at det kan se ut som at noen av deltakerne ikke klarer å kommunisere sin 'meaning' på en god måte. Jeg har både sett på en deltaker som ga en veldig uklar forklaring (Figur 5.30), som tyder på at denne deltakeren har litt problemer med sin kommunikasjon. I tillegg til at jeg har sett på to deltakere som ikke kommuniserer godt, men der den ene mest sannsynlig innehar en god 'meaning' (Figur 5.32) og den andre ikke (Figur 5.31). Det at en lærer ikke klarer å formidle en 'meaning' godt må altså ikke nødvendigvis bety at læreren ikke innehar en god 'meaning', likevel er nok det ofte tilfellet.

5.4 Tre studenters konseptkart

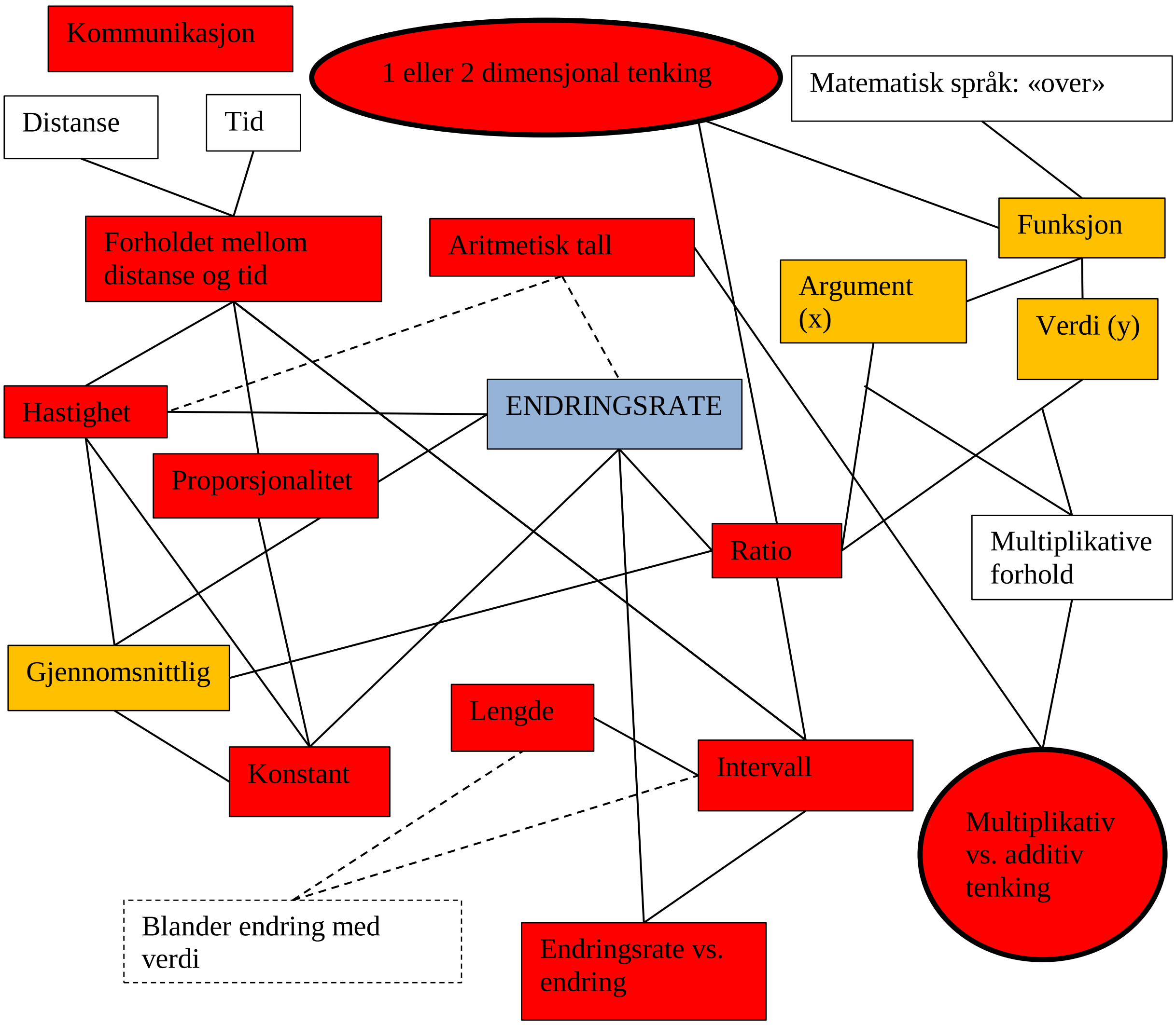
I dette kapittelet vil jeg presentere konseptkartene til tre av studentene, og se prøve å si noe om hva instrumentet ser ut til å avsløre om disse deltakernes 'meanings'. Jeg har valgt ut en student som generelt har uttrykt nokså dårlig 'meaning', en som har gjort det nokså gjennomsnittlig på oppgavene, og den studenten som har uttrykt best 'meaning'. Student 23 er den første jeg valgte, og er den studenten som har hatt problemer med flest oppgaver, og da også har fått flest konsepter fargelagt rødt i konseptkartet. Den andre deltakeren jeg vil se nærmere på er Student 3, som er en god representant for hvordan denne gruppen på 27 studenter har gjort det generelt på oppgavene som handler om endringsrate. Student 3 har gjort det nokså gjennomsnittlig, og har en grei fordeling mellom konsepter som er fargelagt både rødt, oransje og grønt. Den siste studenten jeg vil se på er student 26, som er den studenten som ved sine svar har uttrykt best ‘meaning’ på disse oppgavene. Jeg vil nå prøve å si noe om hva konseptkartet til hver enkelt av dem muligens kan si noe om deres ‘meaning’ om endringsrate.

5.4.1 Student 23 sitt konseptkart

Den første deltakeren jeg ser på her er som sagt Student 23, og den som har gjort det dårligst. Som vi kan se fra konseptkartet (Figur 5.32) så er det ingen av konseptene som er blitt fargelagt grønne. Det vil si at denne studenten ikke har utvist en god og velutviklet ‘meaning’ i forhold til noen av konseptene i kartet. Hoveddelen av konseptene, 13 av 20, har blitt fargelagt rød. Dette vil si at studenten i forhold til disse konseptene har gitt svar som tyder på en dårlig eller feil utviklet ‘meaning’ om konseptene. Denne studenten har fått fire av konseptene fargelagt oransje, som betyr at han har i noen å tilfeller vist en tilfredsstillende ‘meaning’. Studenten har scoret det høyeste nivået på to av oppgavene, og begge disse var flervalgsoppgaver. Studenten har scoret lavt på alle de andre oppgavene, og det er også to oppgaver som han ikke har svart på.

Dette er en student som har i sine besvarelser vist både additiv og en-dimensjonal tenking, istedenfor multiplikativ og to-dimensjonal tenking som det er ønskelig at en som løser oppgaver om endringsrate skal gjøre. I tillegg til dette har denne studenten også blandet endringsrate med faktisk endring, og vist at han ser på endringsrate som er aritmetisk tall. Alle disse fire konseptene, eller tenkemåtene, er viktig i forhold til å kunne ha en god ‘meaning’ om og forstå konseptet endringsrate.

Ut ifra hva denne studenten har uttrykt av sin ‘meaning’, så kan det se ut som at dette er en student som generelt har en dårlig ‘meaning’ om endringsrate, og også de fleste andre konseptene som er med i konseptkartet. Dette er urovekkende for en som tar en lærerutdanning der han i teorien kan undervise på alle nivåer i videregående skole. Jeg har i tillegg for denne studenten sett på dette arket som hver av deltakerne måtte fylle ut før selve gjennomføringen av instrumentet. På dette måtte de fylle ut hvilket studie de gikk på, hvilke matematikkfag de hadde på videregående, antall studiepoeng i matematikk og også hvilke matematiske fag de har hatt å universitetet. Student 23 har, i tillegg til å ha hatt 1T, R1 og R2 på videregående, 70 studiepoeng i matematikk. Denne studenten har altså tatt flere matematiske fag på universitetet, og dette inkluderer kurs i kalkulus. I forhold til hvilken utdanning denne studenten har, så burde nok denne studenten inneha en bedre ‘meaning’ om endringsrate enn resultatene på dette instrumentet tyder på.



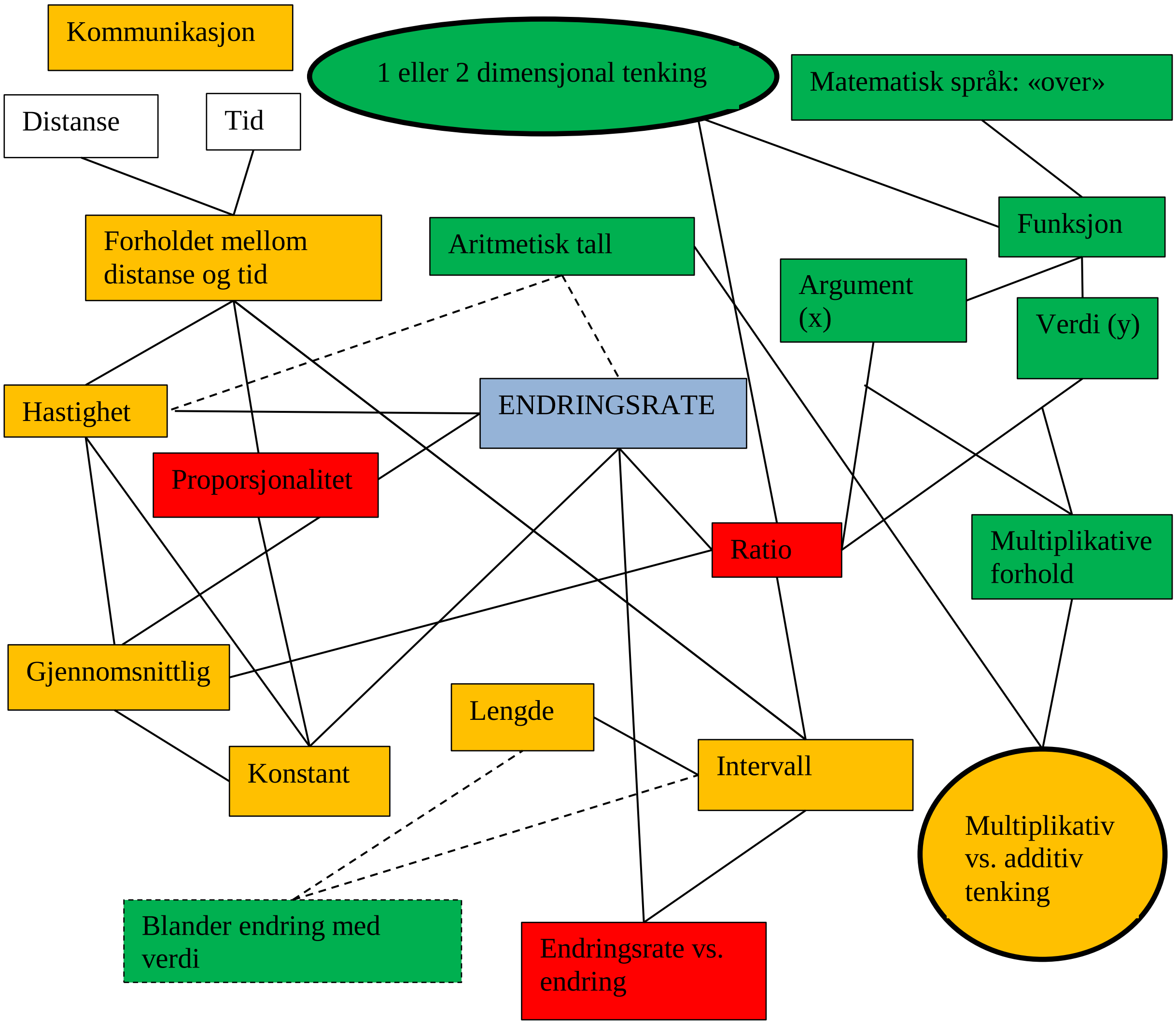
Figur 5.32: Konseptkartet til Student 23

5.4.2 Student 3 sitt konseptkart

Student 3 har gjort det nokså gjennomsnittlig på oppgavene om endringsrate og i forhold til hvordan konseptene er blitt fargelagt i konseptkartet (Figur 5.33) så er dette en god representant for hvordan disse 27 deltakerne har gjort det generelt. Tabell 5.2 (se side 36) viser hvor mange konseptkart som konseptene har blitt fargelagt med henholdsvis grønn, oransje, rød og hvit. Hvis vi ser på konseptkartet til Student 3 så kan vi se at fargen for de fleste konseptene stemmer overens med det flest deltakere har fått, som Tabell 5.2 viser. For eksempel så kan vi se i tabellen at for konseptene «1 eller 2 dimensjonal tenking og «Aritmetisk tall» så har de fleste av deltakerne fått fargelagt disse grønne. I forhold til konseptene «Hastighet», «Gjennomsnittlig» og «Forholdet mellom distanse og tid», så har flest fått disse fargelagt oransje. Det har også Student 3, og som sagt så er dette tilfellet for nesten alle konseptene. På grunn av dette, så vil beskrivelsen av denne studentens 'meaning' om endringsrate i tillegg kunne si noe om hele denne gruppen med studenters 'meaning'.

Som vi kan se på konseptkartet til denne studenten så uttrykker han god 'meaning' om noen av konseptene, dårlig 'meaning' om noen av de andre, og en ikke fullstendig god 'meaning' om resten. Så alt i alt, kan det se ut som denne studenten kommuniserer en 'meaning' om endringsrate som ikke er helt fullstendig godt utviklet. Ut ifra hvilken 'meaning' Student 3 har uttrykt på de ulike oppgavene, så kan det se ut som denne studenten ikke har problemer med funksjoner og hvordan det er knyttet til endringsrate. Da både konseptet «Funksjon» og alle konseptene som er knyttet til dette er fargelagt grønt. Det kan se ut som denne studenten har problemer med proporsjonalitet, som i disse oppgavene er knyttet til det proporsjonale forholdet mellom distanse og tid når det kommer til konstant hastighet. I forhold til konseptet «Proporsjonalitet» så er har Student 3 uttrykt en dårlig 'meaning', og i tillegg er konseptene som er knyttet til dette blitt fargekodet oransje. Det at et konsept har blitt fargekodet med oransje i konseptkartet betyr at studenten har uttrykt en god 'meaning' på noen av oppgavene knyttet til instrumentet, men en mindre god 'meaning' på de andre oppgavene. Dermed kan det tyde på studentens 'meanings' om disse konseptene ikke er godt nok utviklet.

Denne studenten har uttrykt en 'meaning' som tyder på additiv tenking om endringsrate, og i tillegg har studenten også blandet sammen endringsrate med endring. Dette er to ting som det *ikke er ønskelig* at en fremtidig lærer skal ha problemer med. I tillegg så er dette med proporsjonalitet og ratio viktige konseptet i forhold til endringsrate, og denne studenten har uttrykt en dårlig 'meaning' om disse. Likevel så kan vi se i forhold til fargekodene på kartet at denne studenten har uttrykt en god 'meaning' om flere konsept enn han har uttrykt en dårlig 'meaning' om. Det kan da diskuteres om denne studenten samlet har en god nok 'meaning' i forhold til at dette er en fremtidig lærer. Læreres 'meanings' og formidlingen av disse er viktig i forhold til elevers konstruksjon av deres egne 'meanings'. En lærer som innehar en slik 'meaning' om endringsrate som denne studenten har uttrykt i dette instrumentet, vil mest sannsynlig kunne få noen problemer med formidlingen av konseptet endringsrate til sine elever.

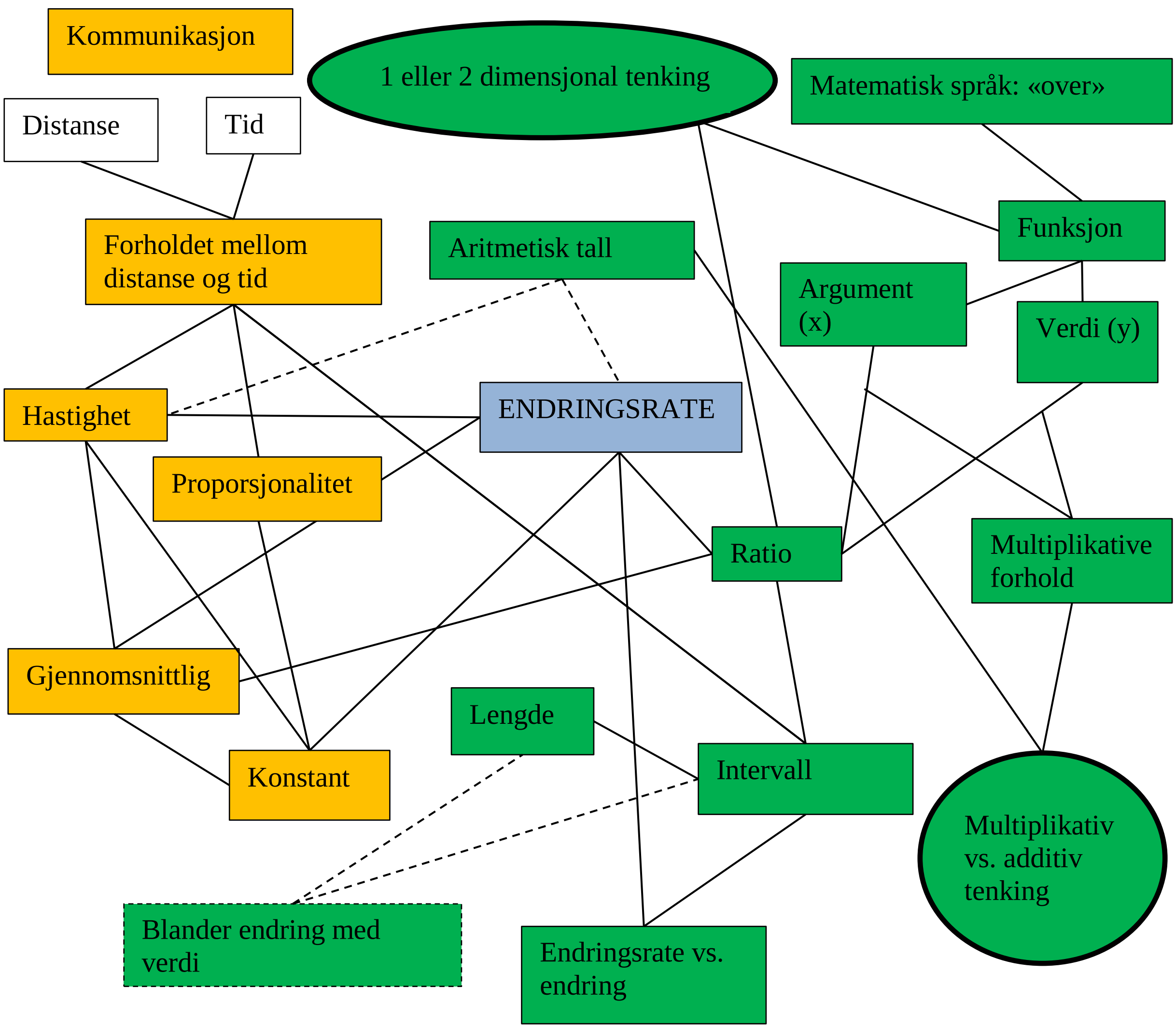


Figur 5.33: Konseptkartet til Student 3

5.4.3 Student 26 sitt konseptkart

Den siste deltakeren jeg vil se nærmere på er Student 26, som er den studenten som har uttrykt en god 'meaning' på flest oppgaver. Altså den studenten som generelt har utvist best 'meaning' om endringsrate ut av hele gruppen på 27 deltakere. Jeg valgte å ta med å se på denne studenten fordi det er interessant å se på hvor godt den som har gjort det best faktisk har gjort det. Som vi kan se ut ifra konseptkartet så er en god del av konseptene fargekodet med grønn, og det er heller ingen av dem som er blitt fargelagt rød. Denne studenten har altså ikke på noen av oppgavene uttrykt en dårlig utviklet 'meaning'. Grunnen til at fem av konseptene er blitt fargelagt oransje, er at jeg var, som nevnt tidligere, nokså streng i forhold til fargekodingen. Så i de få tilfellene denne studenten ikke har scoret på det høyeste nivået, og da ikke utvist en fullstendig god 'meaning', så har studenten likevel heller ikke uttrykt en dårlig 'meaning'.

Ut ifra hvilke oppgaver denne studenten ikke har klart å uttrykke en god 'meaning', så er det mulig at problemet til denne studenten hovedsakelig er kommunikasjonen av sin 'meaning'. Besvarelsen på oppgave 37 som jeg så på i kapittelet «Kommunikasjon» (se Figur 5.31), er det Student 26 som har skrevet. Der så jeg på at det kan se ut som studenten innehar en god 'meaning' om matematikken i oppgaven, men studenten hadde problemer med å formidle dette på en god måte, altså kommunikasjonen er problemet. For generelt, ut ifra konseptkartet, så har denne studenten uttrykt gode 'meanings' om de fleste konseptene. Likevel så kan det diskuteres om dette er godt nok? Hvis vi nå tar utgangspunkt i at denne studenten sin 'meaning' om endringsrate er som presentert i konseptkartet. Da vil denne studenten som lærer i de fleste tilfeller formidle gode 'meanings' til sine elever. Likevel så kan det hende at innimellom så vil de 'meanings' som blir formidlet ikke være helt *riktig*. Dette vil som sagt kun være tilfellet om vi kun tar utgangspunkt i 'meanings' som har blitt uttrykt i gjennomføringen av dette instrumentet. Generelt så kan det altså se ut som at denne studenten har noen godt utviklet 'meanings' om konseptene i konseptkartet, og også endringsrate. Problemet for denne studenten er nok hovedsakelig kommunikasjonen, men det å formidle sine 'meanings' på en god måte er noe som er helt essensielt som lærer.



Figur 5.34: Konseptkartet til Student 26

Etter å nå ha sett på tre av studentenes konseptkart, så kan vi se at det er nokså stor forskjell på Student 3 og Student 26 sin 'meaning' om endringsrate. Likevel så kan begge disse, etter endt utdanning, arbeide i videregående skole og undervise sine elever om det matematiske emnet endringsrate, i tillegg til de andre konseptene presentert i konseptkartet. Disse to studentene er jo ytterpunktene, på godt og vondt, i denne gruppa på 27 studenter. Generelt, så har de fleste uttrykt 'meaning' som plasserer dem en plass mellom disse to. Som jeg nevnte når jeg så på student 23 sitt konseptkart, så kan det gi et bilde på hvordan de fleste har gjort det. Fordi hvis vi sammenligner Tabell 5.2 med dette konseptkartet, så kan vi se at om man skulle laget et konseptkart som viser den fargen som flest har fått fargelagt på hvert av konseptene, så hadde det vært nokså likt som Student 23 sitt. Dermed vil Student 23 sitt konseptkart være en god indikasjon på hele gruppens 'meaning' om endringsrate. Generelt har de fleste studentene uttrykt god 'meaning' i forhold til noen av konseptene, nokså dårlig 'meaning' i forhold til noen få, og ikke en fullt utviklet god 'meaning' på resten. Hvis man setter alle konseptene i konseptkartet sammen, og nå ser på endringsrate, så ser det ut som de fleste av studentene ikke har en godt nok utviklet eller produktiv 'meaning' om endringsrate.

6. Diskusjon

Formålet med denne studien er å studere matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate. I dette kapittelet vil jeg diskutere denne studiens funn med sikte på å besvare forskningsspørsmålet, som er:

- *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate?*

For å belyse dette spørsmålet har jeg analysert de skriftlige besvarelsene til 27 studenter som gjennomførte instrumentet. Det ble utviklet et analyseverktøy for å kunne analysere besvarelsene, dette var et konseptkart som viste hvilke konsepter som er viktige i tilknytningen til begrepet endringsrate. Jeg vil i dette kapittelet diskutere funnene som ble presentert i det forrige kapittelet, i lys av teori og tidligere forskning som ble presentert i kapittel 2 og3.

Først ønsker jeg å kort se litt nærmere på den komplekse 'meaning' om endringsrate, og også kort hvordan endringsrate kommer frem i læreplanen. Deretter vil jeg fokusere på utfordringer knyttet til å kommunisere sine 'meanings', før jeg vil gå nærmere inn på analysen av datamaterialet og diskutere dette opp imot forskningsspørsmålet mitt. Til slutt vil jeg reflektere kort over hvor klare studentene i denne studien er for å undervise egne elever om endringsrate.

Ut ifra presentert litteratur, oppgavene i instrumentet og konseptkartet så kommer det frem at en personers 'meaning' om endringsrate er veldig kompleks. Det er mange konsepter som er knyttet til konseptet endringsrate, og som man må inneha en god 'meaning' om for å kunne inneha en god 'meaning' om endringsrate. Dette kommer tydelig frem ved å se på konseptkartet. Konseptkartet er også kun utviklet med tanke på oppgavene i instrumentet, og hva de ønsker å undersøke. Dette vil si at det kan være mer komplekst, og da være flere konsepter som man må inneha en god 'meaning' om for å virkelig ha en velutviklet og produktiv 'meaning' om endringsrate. Likevel dekker instrumentet flere av de viktigste konseptene i tilknytning til endringsrate. Jeg vil nå trekke frem noen av dem jeg mener er de viktigste ut ifra presentert litteratur, fokuset til oppgavene i instrumentet og mitt eget engasjement i denne studien.

Et av de aller viktigste konseptene er nok hastighet. Fokuset til oppgavene i instrumentet er spesielt med på å underbygge dette, da 6 av de 8 oppgavene som omhandler endringsrate er knyttet til hastighet. Hovedsakelig enten gjennomsnittlig hastighet eller konstant hastighet. Jeg har også lyst å trekke frem forholdet mellom to varierende mengder som et viktig konsept, da endringsrate er hvordan noe endrer seg i forhold til noe annet. I flere av oppgavene så er disse mengdene distanse og tid, og da forholdet mellom dem, som igjen kan knyttes til hastighet. I tillegg vil jeg trekke frem dette med at endringsrate er ikke et aritmetisk tall, det er altså et tall som ikke stemmer overens med de grunnleggende aritmetiske operasjoner. Dette er viktig å vite om endringsrate, spesielt i forhold til å anvende det. Det er to oppgaver i instrumentet som kan avsløre denne type tenking, og begge to handler om gjennomsnittlig hastighet. Det er altså ikke ønskelig at noen skal bruke aritmetisk gjennomsnitt for å finne gjennomsnittshastighet.

I forhold til endringsrate så er det også viktig å tenke på dette multiplikativ og ikke additivt, da endringsrate er et multiplikativt forhold. Det er dermed viktig å tenke multiplikativt for å kunne ha en klar og god 'meaning' om endringsrate. To av de åtte oppgavene som omhandler endringsrate fokuserer på å avsløre hvilken av disse måtene deltakerne tenker på. Ut ifra mine resultater så var det mange av deltakerne i denne studien som slet med dette, og tenkte additivt. Dette er noe jeg vil diskutere nærmere litt senere i kapittelet. De konseptene som nå er blitt trukket frem er hovedsakelig de konseptene jeg har gått i detalj på i kapittel 5. Jeg mener at disse er noen av de mest relevante konseptene i forhold til endringsrate, i forhold til oppgavene i dette instrumentet i alle fall. Det betyr absolutt ikke at de andre konseptene ikke er viktige i forhold til å inneha en god og produktiv 'meaning' om endringsrate, men at de jeg har valgt å fokusere på er noen av konseptene som er viktige.

Studentene som har deltatt i denne studien, og gjennomført instrumentet går på studier som gjør at de kan undervise på videregående skole. Derfor har jeg tidligere i denne oppgaven gått inn på hvordan endringsrate kommer til uttrykk i læreplanen, og jeg vil også diskutere det litt nå. Som tidligere nevnt så er endringsrate en del av læreplanen for de fleste matematikk fag som kan velges på videregående skole, men i noe ulik grad. Jeg så også på at viktige konsepter i forhold til endringsrate kommer til uttrykk i læreplanen til 1P og 1P-Y som er de eneste matematikkfagene på videregående der endringsrate, i form av vekstfart eller derivasjon, ikke nevnes eksplisitt. I tillegg så jeg på at noen andre viktige konsepter, som for eksempel hastighet (fart), er en del av læreplanmål helt nede på læreplanen etter 7. årstrinn.

For eksempel inneholder læreplanmål fra læreplanen til 1P og 1P-Y at elevene skal kunne regne med forhold, og også vite hva proporsjonale størrelser er og kunne bruke dette i praktiske sammenhenger. Dette er begreper som vi kan se igjen i konseptkartet jeg utviklet, og er konsepter som flere av studentene som deltok i denne studien hadde problemer med. Jeg vil litt senere i dette kapittelet komme mer tilbake til dette, og diskutere nærmere funnene mine fra instrumentet. I kapittel 2.3.2 trakk jeg også frem at alle matematikkfagene som kan velges på videregående skole, utenom P-matte har læreplanmål som sier at elevene skal kunne bruke vekstfart eller derivasjon i praktiske sammenhenger. Mange av oppgavene i instrumentet vil passe inn under her, da de fleste oppgavene er formulert på en slik måte at det er satt inn i praktiske sammenhenger. For eksempel så handler oppgave 11-12 om en bil som kjører, og man må bruke sin 'meaning' om endringsrate, spesifikt gjennomsnittlig hastighet, for å svare på oppgaven. Alle oppgavene som er knyttet til endringsrate er i noen grad knyttet til praktiske situasjoner, eller i alle fall inn i en kontekst.

Generelt så kommer det nokså tydelig frem gjennom læreplanen at for lærere som skal undervise på videregående skole, så er endringsrate et nokså viktig emne. I tillegg så ble det sett på at noen konsepter, som hastighet (fart), undervises det allerede om på grunnskolen. Selv om dette ikke direkte kan knyttes til endringsrate, så er det som sagt viktige konsepter å inneha en god 'meaning' om når man senere skal lære om endringsrate. Ut ifra resultater presentert i analysen i kapittel 5 så kan det se ut som flere av studentene i denne studien hadde problemer med konseptet hastighet.

Som nevnt tidligere i kapittel 2.2, så er hvordan en lærer formidler, eller kommuniserer, sin 'meaning' til elevene sine viktig. I følge Thompson (2015) så vil en lærer alltid kommunisere sine 'meanings' til elevene, uansett om læreren er klar over hvilke 'meanings' de selv har eller ikke, og uansett hvor gode lærerens 'meanings' er. Derfor er det viktig at lærere innehar en velutviklet og produktiv 'meaning' om emnene de underviser, i tillegg til at det er viktig at de klarer å kommunisere sine 'meanings' på en klar og presis måte. I følge Yoon, Byerley og Thompson (2015) så vil elevene i en klasse vil kunne konstruere sine 'meanings' ut ifra flere ting, som for eksempel medelevene eller oppgavene de gjør. Likevel, så mistenker de at læreren er en av de viktigste kildene til hvordan elevene konstruerer sin 'meaning'. Ut ifra dette så kan vi se at en læreres evne til å kommunisere sine 'meanings' er essensielt for elevenes læring.

Det er flere utfordringer knyttet til å skulle klare å kommunisere sine 'meanings' på en så presis og god måte som en lærer burde. Det kan være noen få ord som endrer hvordan elevene oppfatter noe, enten ved å si noe på en litt annerledes måte, eller for eksempel ved å utelate å si noe. Et eksempel på dette var det jeg trakk frem i teorikapittelet, der en lærer formidlet at «- -x = x», uten å være tydelig på at dette ikke betyr at «hvis det står mer enn et minus tegn, så skal det skrives uten noen minus tegn» (Thompson, 2016). Her har læreren ikke vært presis og klar nok på hva han prøver å kommunisere til sine elever. Et annet eksempel på at valg av ord man bruker er viktig er Student 13 sin besvarelse på oppgave 37 (se Figur 5.31). Denne studenten ga svaret «Fordi prosent er et mål på forhold, det er enkelt å forstå». Med å si «det er enkelt å forstå» så kan dette, av elevene, oppfattes som at læreren mener at dette burde de kunne og at han ikke «gidder» å svare på dette. I verste fall kan elever som ikke forstår dette oppfatte det som at læreren kommuniserer til dem at de er dumme, og det kan føre til at elevene ikke tør å stille spørsmål hvis de ikke skjønner noe. Hvilke ord en lærer velger å bruke for å kommunisere sin 'meaning' til elevene sine er altså veldig viktig.

Når man som lærer skal formidle noe til sine elever, kan det i tillegg være utfordrende å passe på at alle har den bakgrunnskunnskapen som trengs. Med det mener jeg at i flere tilfeller kan det være vanskelig å legge seg på *nivå* med elevene, og ikke ende opp med å for eksempel forklare noe for komplisert og vanskelig. I tillegg når det kommer til kommunikasjon, så er det noe som *går to veier*. I undervisningssammenheng så er det ikke kun elevene som må forstå hva læreren prøver å formidle, men det er også viktig at læreren forstår hva elevene prøver å kommunisere hvis de for eksempel har et spørsmål om noe. I kapittel 5.3.4 så jeg på Student 26 sin besvarelse på oppgave 37 (se Figur 5.32). Her trakk jeg frem at denne besvarelsen ikke nødvendigvis er feil i forhold til oppgaven, men det er også samme tid ikke et godt svar. Oppgavelyden til oppgave 37 er «Forklar til klassen hvorfor det er relevant at 21,77 er 78 % av 27,80 for å løse oppgaven». Det Student 26 har gjort er å løse oppgaven som blir presentert, men ikke forklart hvorfor det er relevant at 21,77 er 78% av 27,80. Her kan man tenke seg at studenten ikke helt har fått med seg hva oppgaven spør om, enten ved å lese oppgaven for fort eller har misforstått den noe. Det er også mulig at studenten velger å gi denne forklaringen som for flere nok kan være litt komplisert. Det kan her trekkes paralleller til klasserommet, og det er mulig at denne studenten vil ha utfordringer med disse tingene når det kommer til kommunikasjon av sin 'meaning'.

Jeg ønsker å diskutere i hvilken grad studentene har uttrykt deres 'meaning' nøyaktig, klart og konsekvent når de svarte på oppgavene i instrumentet. Dette vil være med på å kunne si noe om hvor god og produktiv 'meaning' studentene innehar. Generelt, ut ifra Tabell 5.2, så var det en del av studentene som slet med flere av konseptene, og uttrykte relativt dårlige utviklet 'meanings'. Det var en stor andel av konseptene der de fleste av deltakerne hadde uttrykt en 'meaning' som ble fargekodet med oransje eller rød. Det var kun noen få konsepter der de fleste uttrykte en god 'meaning', blant annet «Matematisk språk 'over'» og «Aritmetisk tall». Konseptet «Matematisk språk 'over'», som er knyttet til oppgave 46, er det eneste konseptet som fokuserer på matematisk språk og betydningen av dette. Det er vanskelig å si noe på bakgrunn av kun oppgave, og på bakgrunn av kun et 'matematisk ord', men mange av deltakerne uttrykker en klar og god 'meaning' i forhold til konseptet. Dette tyder på at akkurat dette ordet er ikke noe disse studentene har et problem med å forstå i en matematisk sammenheng, og noe av grunnen til dette kan være at det er et uttrykk som blir mye brukt.

Det er litt interessant å se på at såpass få av deltakerne tenker på endringsrate som et aritmetisk tall, og forsøkte å regne ut gjennomsnittlig hastighet ved å finne aritmetisk gjennomsnitt. 23 av de 27 deltakerne tenkte ikke på endringsrate som et aritmetisk tall, og uttrykte en klar og god ‘meaning’ i forhold til dette. Dette konseptet er knyttet til to oppgaver, oppgave 1 (se Figur 5.21 og 5.22) og oppgave 11-12 (se Figur 5.20). På oppgave 1 er det en deltaker som har uttrykt slik ‘meaning’ og på oppgave 11-12 er det tre deltakere som har uttrykt en ‘meaning’ der de forsøkte å finne aritmetisk gjennomsnitt. I kapittel 3 skrev jeg om oppgave 11-12 i forhold til pilotstudien gjort i USA og Sør-Korea. Selv om det var en del flere deltakere i de to pilotstudiene så kan det være interessant å sammenlikne resultatene. Resultatene fra pilotstudien i USA viser at 31 av 96, nesten en tredjedel, av deltakerne løste oppgaven ved å finne aritmetisk gjennomsnitt. Mens i Sør-Korea var det kun 2 av 66 koreanske lærere som uttrykte en slik ‘meaning’. Ut ifra dette kan vi se at dette er et større problem i USA enn det er i Sør-Korea og i Norge, altså at lærere løser oppgaver om gjennomsnittlig hastighet ved å ta aritmetisk gjennomsnitt. Yoon, Byerley og Thompson (2015) mistenker at grunnen til at koreanske lærere gjør det bedre enn amerikanske lærere er at de koreanske lærerne utvikler sterkere og bedre ‘meanings’ når de selv er elever, enn det de amerikanske lærerne gjør. Vi ser at resultatene fra den norske gjennomføringen av instrumentet er mer like resultatene fra Sør-Korea, enn USA, selv om det var over dobbelt så mange i studien i Sør-Korea enn i denne norske pilotstudien.

Jeg ønsker å se nærmere på dette med multiplikativ og additiv tenking. Som nevnt tidligere i dette kapittelet så hadde en stor andel av deltakerne i denne studien problemer med dette og tenkte altså additiv om endringsrate. Dette er et konsept som er knyttet til to oppgaver som begge handler om konstant hastighet, oppgave 17 (se Figur 5.5) og oppgave 37 (se Figur 5.11). Som nevnt i kapittel 5.3.1 var det ingen av deltakerne som uttrykte additiv tenking om prosent på oppgave 37, men som sagt var det mange som ga svar som ikke tydet på hverken multiplikativ eller additiv tenking. Det er ikke mulig å anta at disse deltakerne hverken tenker på den ene eller andre måten kun basert på denne oppgaven. Så selv om en del ikke har fått til oppgaven så kan jeg ikke anta at disse deltakerne tenker additivt om endringsrate. Det kan kun tyde på at disse deltakerne har problem med konstant hastighet. Derfor vil jeg nå hovedsakelig fokusere på oppgave 17, der 19 av deltakerne ga svar som tyder på additiv tenking. Dette kan igjen bety at disse deltakerne ikke har en klar og nøyaktig ‘meaning’ om endringsrate, og mer spesifikt konstant hastighet. Byerley og Thompson (2014) presenterer resultater på denne oppgaven fra den første pilotstudien utført i USA i 2012. Resultatene fra den studien viser at 70 % av deltakerne ikke reflekterte multiplikativt når de løste oppgaven, og ca. 2/3 av disse valgte svaralternativ (a). Dette er resultater som stemmer godt overens med resultatene jeg har fått i denne studien. Det var også her omtrent 70 % som reflekterte additivt, men i denne studien valgte nesten alle disse alternativ (a). Det kan se ut som det å tenke additivt når det kommer til endringsrate er et problem både her i Norge og i USA. Flere av deltakerne som valgte alternativ (a) tegnet linjer for å symbolisere distansene. Det er en mulighet for at det er denne første ideen om å tegne som har gjort at for de studentene som gjorde dette ble det logisk å velge svaralternativ (a). Det er utfordrende å si noe om hvorfor det er slik, men det kan se ut som det er en sammenheng mellom denne måten å tegne det på og en ‘meaning’ som tilsvarer å velge alternativ (a).

Det er også interessant å se litt nærmere på de ‘meanings’ som deltakerne uttrykte i forhold til konseptene hastighet, distanse og tid. For seg selv er dette er konsepter som blir introdusert relativt tidlig i grunnskolen, og som det er viktig å inneha en god ‘meaning’ om i forhold til endringsrate. Jeg vil likevel presisere at oppgavene i instrumentet fokuserer på enten gjennomsnittlig hastighet eller konstanthastighet, og ikke distanse og tid hver for seg, men forholdet mellom distanse og tid. Dette er litt mer komplisert enn å kunne regne med fart og kunne beregne lengde og tid. Uansett er dette nokså elementære konsepter som introduseres tidlig. Ingen av studentene som deltok i denne studien har klart å uttrykke en god og produktiv 'meaning' på alle oppgavene som er knyttet til hastighet. Veldig mange har fått til noen av oppgavene, men ikke alle. De uttrykker altså ikke en konsistent 'meaning'. I forhold til gjennomsnittlig hastighet, som er knyttet til blant annet oppgave 1 og 11-12, er det mange av deltakerne som ikke uttrykker en konsistent 'meaning'. 12 av studentene uttrykker en klar og produktiv 'meaning' om gjennomsnittlig hastighet på oppgave 11-12, men kun 2 studenter på oppgave 1. I tillegg har kun en av studentene uttrykt en nøyaktig, god og produktiv 'meaning' om gjennomsnittlig hastighet på begge oppgavene. Hva som er grunnen til dette kan være utfordrende å svare på, og man vil ikke kunne si noe sikkert uten å intervjue deltakerne. Likevel kan noe av grunnen være at i oppgave 1 må deltakerne forklare hva de ønsker at elevene sine skal mene med gjennomsnittlig hastighet, mens de i oppgave 11-12 må regne for å finne gjennomsnittlig hastighet. Det er dermed en mulighet at flere syns det er enklere å regne ut gjennomsnittlig hastighet enn å forklare gjennomsnittlig hastighet. Dette kan knyttes til kommunikasjon av 'meanings', at hovedproblemer er ikke de 'meanings' som studentene innehar, men formidlingen av dem. En annen mulighet er at selv om noen av studentene innehar ulik 'meaning' om gjennomsnittlig hastighet så klarte de å komme frem til samme svar når de fikk i oppgave å regne ut gjennomsnittsfart.

Den samme tendensen kan ses ut ifra oppgave 17 og 37, som er knyttet til konstant hastighet. Som vi har sett i Tabell 5.3 og Tabell 5.4 i kapittel 5.3.1, så var det mange av studentene som ikke uttrykt en god 'meaning' om konstant hastighet. Noe av det som er interessant er at ingen av studentene har klart å uttrykke en god, produktiv 'meaning' på begge disse oppgavene. Altså de som har uttrykt en god 'meaning' på oppgave 17 har ikke gjort det på oppgave 37, og motsatt. Dette kan være med å tyde på at flere av disse studentene ikke har en klar og konsistent 'meaning' om konstant hastighet.
Ut ifra dette så kan de se ut som at flere av studentene har en viss utviklet 'meaning' om disse konseptene. Likevel er de 'meanings' som de innehar ikke klare og produktive nok til å klare å gi gode svar på flere av oppgavene presentert i dette instrumentet. Det kan selvfølgelig diskuteres om det kan være instrumentet som skaper problemer for studentene, og ikke svakheter i deres 'meanings'. Selv om det er mulig at dette er tilfelle, så er instrumentet blitt nøye utviklet og testet i USA. Det var, som nevnt tidligere, en prosess over tre år, som besto av både pilotstudier og intervjuer. Dette er med på å styrke påliteligheten til instrumentet, og er med på å minske mistanken om at det er instrumentet som skaper problemer. Likevel så er dette første gang den norske versjonen av instrumentet er brukt i Norge, og det er viktig å være åpne for muligheten at den norske oversettelsen av instrumentet kan skape noen problemer.

Ut ifra resultatene jeg har fått fra besvarelsene på instrumentet i denne studien så ønsker jeg å reflektere litt rundt hvor klare lærerstudentene som deltok i studien er for å ta på seg oppgaven som lærer, og da undervise om endringsrate. Som vi har sett er det mange av studentene som har uttrykt uklare, upresise og lite produktive 'meanings' på oppgavene i instrumentet som er knyttet til endringsrate. Er dette godt nok? Vil disse lærerstudentene klare å formidle gode og klare 'meanings' om endringsrate til sine elever? Thompson (2015) antyder at lærere som har lite produktive 'meanings' lett kan formidle dem til elever ubevisst. Det vil si at elver av lærere som ikke har velutviklet og produktive 'meanings' står i fare for å konstruere samme 'meanings'. Dette er noe som ikke er ønskelig. Om vi tar utgangspunkt i dette så trenger flere av studentene som deltok i denne studien å utvikle en mer produktiv 'meaning' om endringsrate.

Det er vanskelig å si noe om hvorfor så mange av disse lærerstudentene sliter med det matematiske emne endringsrate. Det er mulig at noe av grunnen er at de ikke utvikler en god og klar 'meaning' når de selv er elever og blir introdusert for dette emnet. Yoon, Byerley og Thompson (2015) diskuterte at dette kunne være en av grunnene til at koreanske lærere hadde bedre 'meanings' om endringsrate enn lærere i USA. Altså at koreanske lærere utviklet bedre 'meanings' når de var elever enn det amerikanske lærere gjorde. Det kan muligens være tilfelle i Norge, at norske matematikklærerstudenter ikke utviklet en god og produktiv 'meaning' om endringsrate når de selv var elever og skulle lære om dette på videregående skole. I tillegg kan det i Norge være utfordrende at det på videregående blir brukt begrepet vekstfart, mens når studentene kommer på universitetet så blir endringsrate brukt. Hvis de da ikke innehar en god 'meaning' fra tidligere, når de lærer om vekstfart på videregående, så er det mulig dette er med på å gjøre det enda mer utfordrende på universitetet.

7. Avslutning

I dette kapittelet vil jeg kort oppsummere resultatene og diskusjonen presentert, og prøve å besvare forskningsspørsmålet mitt. Jeg vil deretter gi noen kritiske bemerkninger til oppgaven, og deretter presentere noen mulige pedagogiske implikasjoner. Videre vil jeg gi noen forslag for videre forskning, før jeg avslutter med noen refleksjoner over eget arbeid med denne masteroppgaven.

7.1 Konklusjon

Jeg har i denne masteroppgaven undersøkt hva et amerikansk instrument utviklet for å undersøke læreres matematiske 'meanings', avslører om norske matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate. Jeg vil i dette kapittelet forsøke å besvare studiens forskningsspørsmål, som er som følger:

- *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate?*

Når jeg nå skal prøve å svare på dette forskningsspørsmålet er det viktig å trekke frem at jeg kun baserer svaret på de skriftlige besvarelsene til de 27 studentene som deltok i studien. Dette er en veldig liten gruppe, som gjør at det ikke er mulig å si noe generelt om norske matematikklærerstudenters 'meaning' om endringsrate. Likevel så kan jeg prøve å si noe om hva instrumentet avslører om disse 27 fremtidige lærernes matematiske 'meaning' om endringsrate.

Instrumentet avslører at flere av de matematikklærerstudentene som deltok i studien ikke uttrykte en god og produktiv 'meaning' om viktige konsepter knyttet til endringsrate når de svarte på oppgavene i instrumentet. Dette kan tyde på at flere av dem innehar en relativt dårlig utviklet og ikke så produktiv 'meaning' om endringsrate. Dette kan begrunnes ut ifra konseptkartene som ble laget for hver av studentene, der det kommer tydelig frem at flere sliter med flere av konseptene knyttet til endringsrate. Flere av konseptene ble fargekodet rødt, altså at de ikke uttrykte en god og produktiv 'meaning' i forhold til de konseptene. Dette kan ses i Tabell 5.2 på side 36, som er en oversikt over hvor mange konseptkart der konseptene har blitt fargekodet med de ulike fargene. Noen av konseptene som mange av studentene ikke uttrykte en god 'meaning' om var dem jeg trakk frem i kapittel 5, «Multiplikativ vs. additiv tenking», «Forholdet mellom distanse og tid», «Hastighet», «Gjennomsnittlig» og «Konstant». Som det kommer frem av analysen så var det flere som slet med oppgavene knyttet til disse konseptene, og ikke klarte å uttrykke en produktiv 'meaning'.

I tillegg har jeg også sett på i hvor stor grad studentene klarer å kommunisere sin matematiske 'meaning'. I analysen trakk jeg frem flere eksempler som viser at flere ikke kommuniserte sin 'meaning' på en nøyaktig og tydelig måte. I tillegg ble det trukket frem at det ikke nødvendigvis måtte være mangelen på en produktiv og god 'meaning' som var problemet. Ut ifra presentert teori så er hvordan en lærer formidler sine 'meanings' viktig for elevenes egen konstruksjon av 'meanings'. Det er viktig at lærere innehar en god, produktiv 'meaning' for at elevene også skal kunne konstruere en god 'meaning', men det er ikke nok. En lærer må også kunne kommunisere sine 'meanings' på en god måte. Jeg vil også her presisere at jeg kun kan si noe om hvordan disse matematikklærerstudentene kommuniserte skriftlig, og det i undervisningssammenhenger som regel blir kommunisert mest muntlig.

7.2 Kritiske bemerkninger

Det er flere ting jeg ønsker å trekke frem her, først og fremst at når studentene svarer på oppgavene i instrumentet så får de kun mulighet til å uttrykke sin 'meaning' i en bestemt kontekst. Konteksten her blir å svare skriftlig på oppgaver under tidspress, som de fleste vil forbinde med en testsituasjon. Dette kan i noen grad påvirke deltakerne, da de for eksempel kan bli stresset på grunn av begrenset tid. Flere av deltakerne rakk ikke bli ferdig med oppgavene, noe som kan tyde på at flere kunne trengt lenger tid. Det er kanskje en mulighet for at flere hadde klart å uttrykke en bedre 'meaning' om de hadde hatt lenger tid.

Jeg ønsker også å trekke frem at deltakerne ikke hadde forberedt seg på noen måte før de gjennomførte instrumentet. De visste heller ikke hvilke matematiske emner det ville være spørsmål om. Dette er jo noe som ikke vil være tilfelle når man skal undervise, fordi da forbereder man seg og vet selvfølgelig hvilket emne som det skal fokuseres på. Det er en mulighet for at selv om flere av studentene ikke uttrykte en god 'meaning' på oppgavene i instrumentet, likevel vil gjøre det i en undervisningssammenheng.

Det er mange oppgaver i instrumentet som til sammen dekker flere matematiske emner, som vil si at det er begrenset for hvor mange oppgaver som er knyttet til hvert av dem. For det matematiske emnet endringsrate er det som sagt 8 oppgaver knyttet til, men disse handler igjen om ulike konsepter nært knyttet til endringsrate. Hver av oppgavene gir altså ikke studentene mulighet til å uttrykke deres 'meaning' om alle konseptene som til sammen blir endringsrate. Noen av oppgavene er kun knyttet til et konsept, mens noen er knyttet til mange. Dette gjør at hvis en av deltakerne ikke helt forstår den eneste oppgaven som er knyttet til et konsept, så vil det se ut som denne deltakeren ikke innehar en god 'meaning' om dette konseptet. Jeg har derfor prøvd å trekke frem konsept som er knyttet til i alle fall 2 av oppgavene, for å bedre kunne si noe om deltakernes 'meanings'.

Som nevnt i diskusjonskapittelet, så kan det også diskuteres om det er instrumentet som skaper problemer for studentene, og ikke svakheter i deres 'meanings'. Jeg vil da trekke frem at instrumentet er utviklet i USA gjennom en prosess på 3 år. Der det ble gjennomført både pilotstudier, og også intervjuer med lærere om oppgavene og deres 'meanings'. Det at instrumentet har gått gjennom en lang utviklingsprosess, samt flere pilotstudier gjør at påliteligheten til instrumentet styrkes. I tillegg er instrumentet oversatt til koreansk, og også brukt i Sør-Korea. Likevel så er dette første gang den norske versjonen av instrumentet er blitt brukt, og det er viktig å være åpne for muligheten at den norske versjonen kan muligens skape noen problemer for deltakerne. Dette er noe som i større grad kan undersøkes ved å gjennomføre en studie der deltakere intervjues, som er noe jeg vil ta opp senere da jeg gir tips til videre forskning.

7.3 Pedagogiske implikasjoner

Instrumentet som har blitt benyttet i denne masteroppgaven har som hensikt å avsløre matematikklæreres matematiske 'meanings' om ulike matematiske emner. I denne oppgaven har jeg prøvd å svare på hva instrumentet avslører om 27 matematikklærerstudenters matematiske 'meaning' om endringsrate. Det er ikke mulig å si noe om norske matematikklæreres matematiske 'meaning' om endringsrate generelt, men denne studien kan tyde på at flere matematikklærerstudenter ikke har en god og produktiv 'meaning' om endringsrate.

Likevel så kan resultatene av denne studien som sagt tyde på at man burde være oppmerksomme på dette *problemet*. Det er en mulighet for at matematikklærerstudenter gjennom sine år på lærerutdanningen ikke utvikler en produktiv 'meaning' for endringsrate, men det er også mulig at problemet er å uttrykke/formidle dem. Hvis dette er tilfelle, så kan det være lurt å være klar over dette og se om det er noe som er mulig å gjøre for å forbedre dette. Er lærerstudentene klare for å undervise i alle de matematiske emnene på videregående skole? Kan man gjøre noen endringer i forhold til lærerstudiene?

Det er viktig at lærere, og fremtidige lærere, blir klar over sine egne 'meanings', og spesielt hvordan de uttrykker og kommuniserer dem til sine elever. Da dette, som presisert flere ganger, er utrolig viktig for elevenes egen utvikling av 'meanings'.

7.4 Videre forskning

I denne studien har jeg benyttet et diagnostisk instrument utviklet i USA med tanke på å avsløre læreres matematiske 'meanings'. Det kan være interessant å gjennomføre en lignende studie der det fokuseres på et av de andre matematiske emnene som instrumentet omhandler. Magnhild sin masteroppgave er gjennomført veldig likt som min og handler om funksjoner, men det er fremdeles 5 andre emner som instrumentet tar for seg.

I tillegg kan det være interessant å gjennomføre en til pilotstudie som fokuserer på endringsrate, men gå mer i dybden på færre deltakere. Da gjerne intervjue deltakerne om oppgavene, og se hva det avslører om deres matematiske 'meaning' om endringsrate. Dette kan gi mer innsikt i om en persons skriftlige besvarelse på instrumentet avslører samme 'meanings' som intervjuet gjør. Det vil kunne gi mer innsikt i om den norske oversettelsen av instrumentet er et godt instrument for å avsløre norske matematikklæreres 'meanings'.

Etter hvert, når den norske versjonen av instrumentet er utprøvd litt i Norge, så kan det også være interessant å gjennomføre en større studie, slik som det er blitt gjort i USA og Sør-Korea. Da kan man muligens se litt mer generelt på læreres matematiske 'meanings'.

7.5 Refleksjon over eget arbeid

Under arbeidet med masteroppgaven har jeg lært mye om forskning, og hvor krevende det er. Det har vært mer utfordrende enn jeg hadde trodd, men også veldig spennende. Det å få muligheten til å være med i et større forskningsprosjekt har vært lærerikt. Jeg har, blant annet gjennom å ha lest Pat Thompson sine artikler om instrumentet, også lært om hvor utfordrende og tidkrevende det kan være å utarbeide gode matematiske oppgaver, og til slutt et diagnostisk instrument. I tillegg ble det også utformet scoringsmanualer, som vi også brukte flere timer på kurs for å lære om og for å kunne bruke de best mulig. Magnhild og meg oversatte også instrumentet til norsk, og opplevde flere utfordringer med det. Alt i alt, gjennom hele denne prosessen, føler jeg at jeg har opplevd flere interessante aspekter med forskning. Det å få være en del av et større internasjonalt prosjekt gjør også at man føler at man er med og bidrar til noe større.

Jeg tror jeg har lært en del av denne masteroppgaven som kan påvirke meg når jeg nå skal gå videre i livet og arbeide som lærer. Selv om det ikke er en studie som spesifikt har sett på lærerrollen i en klasse, så har den fokusert på viktige aspekter med det å være lærer. Jeg har blitt mer bevisst på mine egne matematiske 'meanings', og jeg tar med meg viktigheten av å faktisk være bevisst på disse. Fordi det er de 'meanings' som jeg vil formidle til mine elever når jeg skal arbeide som lærer. Selv om det ikke er noe nytt at man som lærer må formidle lærestoffet på en nøyaktig og god måte, så har jeg likevel blitt mer bevisst på hvor viktig det er at denne kommunikasjonen er nøyaktig og inneholder en produktiv 'meaning.

8. Referanseliste

Braut, G. S. (2014, 10.06). Pilotstudie *Store norske leksikon.* Hentet fra https://snl.no/pilotstudie

Byerley, C., & Thompson, P. W. (2014). Secondary teachers' relative size schemes. In P. Liljedahl & C. C. Nicol (Eds.), *Proceedings of the 38th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, s. 217-224). Vancouver, BC: PME.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene* Oslo: Abstrakt forlag AS.

Davis, G., E. & Tall, D. (2002). What is a scheme? I D. Tall & M. Thomas (red.), *Intelligence, learning and understanding - A tribute to Richard Skemp*: Post Pressed.

Denvir, B. & Brown, M. (1986a). Understanding of number concepts in low attaining 7-9 year olds: Part I. Development of descriptive framework and diagnostic instrument. *Educational Studies in Mathematics, 17*(1), 15-36.

Denvir, B. & Brown, M. (1986b). Understanding of number concepts in low attaining 7-9 year olds: Part II. The teaching studies. *Educational Studies in Mathematics 17*(2), 143-164.

Downing, D. (2009). *Dictionary of Mathematics Terms* (3 utg.). New York: Barron's Educational Series, Inc.

Ernest, P. (2006). Reflections on Theories of Learning. *ZDM*, *38*(1), 3-7.

Goodchild, S. (2001). *Students' goals : a case study of activity in a mathematics classroom*. Bergen: Caspar forl.

Hervik, S. (2017, 23.01). Derivasjon - matematikk. *Store norske leksikon.* Hentet fra https://snl.no/derivasjon_-_matematikk

Hofstad, K. (2015, 02.07). Mile: lengdemål. *Store norske leksikon.* Hentet fra https://snl.no/mile_-_lengdem%C3%A5l

Holmen, H. (2014, 06.01). Kunnskap. *Store norske leksikon* Hentet fra https://snl.no/kunnskap

Hundeide, K. (1973). *Piaget i skolen*. Oslo: Cappelen.

Imsen, G. (1998). *Elevens verden : innføring i pedagogisk psykologi* (3. utg. utg.). Oslo: Tano Aschehoug.

James, G. & James, R. C. (1976). *Mathematics dictionary* (4 utg.). New York: Van Nostrand Reinhold.

Krumsvik, R. J. & Säljö, R. (red.). (2013). *Praktisk-pedagogisk utdanning : en antologi*. Bergen: Fagbokforl.

Kunnskapsdepartementet. (2006a). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01).* Lastet ned fra http://data.udir.no/kl06/MAT3-01.pdf.

Kunnskapsdepartementet. (2006b). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering* Lastet ned fra http://data.udir.no/kl06/MAT4-01.pdf.

Kunnskapsdepartementet. (2013a). *Læreplan i matematikk 2P (MAT5-03).* Lastet ned fra http://data.udir.no/kl06/MAT5-03.pdf.

Kunnskapsdepartementet. (2013b). *Læreplan i matematikk fellesfag 2P-Y, Vg3 påbygging til generell studiekompetanse (MAT6-03)*. Lastet ned fra http://data.udir.no/kl06/MAT6-03.pdf.

Kunnskapsdepartementet. (2013c). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Lastet ned fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf.

Lyngsnes, K. M. & Rismark, M. (2014). *Didaktisk arbeid* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Malt, U. (2015, 04.09). Kvalitativ. *Store norske leksikon.* Hentet fra https://snl.no/kvalitativ

Matematikk.Org. (2014, 23.09.2014). Introduksjon til derivason - gjennomsnittlig og momentan vekstfart Hentet fra https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=187059&within_tid=154780

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative research design : an interactive approach* (2 utg.). California: Sage Publications, Inc.

Meyer, J. H. F. & Land, R. (red.). (2006). *Overcoming barriers to student understanding: Threshold concepts and troublesome knowledge*. London: Routledge.

Mosvold, R. & Fauskanger, J. (2010). Undervisningskunnskap i matematikk: Tilpasning av en amerikansk undersøkelse til norsk, og lærernes opplevelse av undersøkelsen. *Norsk pedagogisk tidsskrift, 94*(02), 112-123.

Mosvold, R., Fauskanger, J., Jakobsen, A. & Melhus, K. (2009). Translating test items into Norwegian - without getting lost in translation? *Nordic Studies in Mathematics Education, 14*(4), 9-31.

Nasjonal Digital Læringsarena. (2009a, 19.07.2016). Vekstfart 4.4.2 Hentet fra http://ndla.no/nb/node/13770?fag=54

Nasjonal Digital Læringsarena. (2009b, 19.07.2016). Vekstfart 4.4.5 Hentet fra http://ndla.no/nb/node/13775?fag=57934

Nasjonal Digital Læringsarena. (2010, 05.08.2016). Gjennomsnittlig vekstfart Hentet fra http://ndla.no/nb/node/13774?fag=54

Oxford Living Dictionary. (u.å.). Knowledge Hentet fra https://en.oxforddictionaries.com/definition/knowledge

Piaget, J. & Garcia, R. (1991). *Toward a logic of meanings*. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth: Penguin.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning... I K. Leatham (red.), *Vital directions for research in mathematics education* (s. 57-93). New York, NY: Springer.

Thompson, P. W. (2016). MatRIC teacher education research workshop, 24 November Kristiansand

Thompson, P. W. (2015). Researching mathematical meanings for teaching. I L. English & D. Kirshner (red.), *Third Handbook of International Research in Mathematics Education* (s. 435-461). London: Taylor and Francis.

Universitetet I Oslo. (2017, 17.01.2017). Om TIMSS Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/om-timss/

Utdanningsdirektoratet. (2016, 30.03.2016). Kva er nasjonale prøver? Hentet fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/om-nasjonale-prover/

Varsity Tutors. (u.å.). Rate of change Hentet fra https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/topics/rate-of-change

Wellington, J. (2015). *Educational Research: contemporary issues and practical approaches* (2 utg.). London: Bloomsbury Academic.

Yoon, H., Byerley, C. & Thompson, P. W. (2015) Teachers' meanings for average rate of change in U.S.A. and Korea. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education*, pp. 335-348. Pittsburgh, PA: RUME

Vedlegg 1: Informasjonsark deltakerne måtte fylle ut

Hvilket studieprogram går du? ____

Hvilke matematikkfag tok du på videregående (P1, R1, S2 etc):

____

Hvor mange studiepoeng har du i matematikk? ________

Hvilke matematiske fag har du tatt på universitetet? List dem opp under.

HVIS du ønsker tilbakemelding på besvarelsen din kan du skrive mailen din på linjen under. Dette er helt valgfritt. Du vil ikke få noen karakter eller poeng, men en liten kommentar på hvordan du gjorde det på de overordnede temaene i undersøkelsen. Uansett så vil alle som deltar motta en tilbakemelding basert på alle svarene vi får. Legg merke til at det kan ta flere uker før dette er klart.

____.

Vedlegg 2: Liste over konsepter

Oppgave 1:

- Hastighet er en endringsrate
- Endringsrate er ikke et aritmetisk tall
- Forholdet mellom konstant hastighet og gjennomsnittshastighet
- Forholdet (ratio) mellom intervall med ulike lengder
- Klarer studenten å kommunisere sin matematiske 'meaning'?

Oppgave 6:

- Forholdet mellom konstant hastighet og gjennomsnittshastighet
- Hastighet er en endringsrate

Oppgave 9:

- Sammenhengen mellom endring i en funksjons verdi og dens gjennomsnittlige endringsrate over intervallet
- Gjennomsnittlig endringsrate sier noe om hvor mange ganger større endringen i y er i forhold til endringen i x over et intervall
- To-dimensjonal tenkning vs. en-dimensjonal tenkning
- Gjennomsnittlig hastighet er å dele et tall med et annet

Oppgave 11-12:

- Hastighet er en endringsrate
- Endringsrate er ikke et aritmetisk tall
- Den gjennomsnittlige hastigheten til et objekt over et gitt tidsintervall er kvotienten av distansen over tidsintervallet, og lengden av tidsintervallet.
- Klarer studenten å kommunisere sin matematiske 'meaning'?

Oppgave 17:

- Hvis et objekt beveger seg med konstant hastighet, er tiden som har gått proporsjonal med den tilhørende endringen i distanse.
- Hastighet er en endringsrate
- Multiplikativ tenkning vs. additiv tenkning
- Gjennomsnittlig hastighet er å dele et tall med et annet

Oppgave 27-28:

- Endringsrate i motsetning til faktisk endring

Oppgave 37:

- Et objekt som beveger seg med konstant hastighet vil alltid dekke en gitt lik andel av den totale distansen og den totale tiden
- Hastighet er en endringsrate
- Multiplikativ tenkning vs. additiv tenkning
- Klarer studenten å kommunisere sin matematiske 'meaning'?

Oppgave 46:

- Matematiske betydningen av 'over' vs. hverdagsbetydningen av 'over'
- Blander endring i masse med masse, eller endring i tid med tid
- Klarer studenten å kommunisere sin matematiske 'meaning'?

a) Hastighet er en endringsrate
   - Oppgave: 1, 6, 11-12, 17, 37

b) Endringsrate er ikke et aritmetisk tall
   - Oppgave: 1, 11-12

c) Forholdet mellom konstant hastighet og gjennomsnittshastighet
   - Oppgave: 1, 6

d) Forholdet (ratio) mellom intervall med ulike lengder
   - Oppgave: 1

e) Sammenhengen mellom endring i en funksjons verdi og dens gjennomsnittlige endringsrate over intervallet
   - Oppgave: 9

f) Gjennomsnittlig endringsrate sier noe om hvor mange ganger større endringen i y er i forhold til endringen i x over et intervall
   - Oppgave: 9

g) To-dimensjonal tenkning vs. en-dimensjonal tenkning
   - Oppgave 9

h) Gjennomsnittlig hastighet er å dele et tall med et annet
   - Oppgave 9, 17

i) Den gjennomsnittlige hastigheten til et objekt over et gitt tidsintervall er kvotienten av distansen over tidsintervallet, og lengden av tidsintervallet.
   - Oppgave: 11-12

j) Hvis et objekt beveger seg med konstant hastighet, er tiden som har gått proporsjonal med den tilhørende endringen i distanse.
   - Oppgave: 17

k) Multiplikativ tenkning vs. additiv tenkning
   - Oppgave: 17, 37

l) Endringsrate i motsetning til faktisk endring
   - Oppgave: 27-28

m) Et objekt som beveger seg med konstant hastighet vil alltid dekke en gitt lik andel av den totale distansen og den totale tiden.
   - Oppgave: 37

n) Matematiske betydningen av ‘over vs. hverdagsbetydningen av ‘over’
   - Oppgave 46

o) Blander endring i masse med masse, eller endring i tid med tid
   - Oppgave 46

p) Klarer studenten å kommunisere sin matematiske ‘meaning’?
   - Oppgave 1, 37

Tabell som viser hvilke konsepter som er knyttet til hvilke oppgaver

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	K	l	m	n	o	p
1	X	X	X	X												X
6	X		X													
9					X	X	X	X								
11-12	X	X							X							X
17	X							X		X	X					
27-28												X				
37	X										X		X			X
46														X	X	X

Vedlegg 3: Informasjonen i begynnelsen av instrumentet

Kjære matematikklærer:

Tusen takk for at du deltar i dette matematikkfaglige utviklingsprosjektet der vi forsøker å lage et diagnostisk instrument for ungdomsskolen og videregående skole. Målet vårt er å identifisere meninger og måter å tenke på som kan hjelpe til med å lære matematikk med forståelse.

Vårt fokus på personlige matematiske oppfatninger har gjort at vi spør spørsmål som kanskje virker uvanlige for deg. Vi er interessert i dine tenkemåter. Vi har liten interesse av hvorvidt du klarer å gi de riktige svarene. I mange av oppgavene finnes det ikke ett riktig svar. Derfor ønsker vi at du skal skrive på en måte som formidler din måte å tenke på.

Din pakke inneholder 44 elementer. Du har 2 timer til å svare. Skriv med penn (dokumenter skrevet med blyant er vanskelig å skanne). Hvis du skriver noe som du ønsker å endre, vennligst stryk over med en strek. Ikke skjul det du har skrevet – selv dine første tanker kan gi oss nyttig informasjon om hvordan et element kan bli forbedret.

Sesjonen starter med en c.18 minutters bolk hvor vi presenterer visualiseringer som du må ta i betraktning når du svarer på spørsmål om dem.

Det er viktig at du prøver å svare på hvert element. Hvis du ikke forstår et spørsmål, eller ikke vet hvordan du kan svare på det, så kan du skrive en *kort* begrunnelse på hvorfor du er forvirret.

Igjen, tusen takk for at du deltar!

Råd angående svarene dine

Alle funksjoner er definert for reelle tall hvis ikke annet er oppgitt.

Du har begrenset tid på å besvare spørsmålene, og vi ønsker at du skal svare på så mange som mulig. Det er derfor viktig at du bruker tiden fornuftig. Her er noen forslag:

- Ikke bruk tid på å fullføre utregningene, skriv heller uttrykkene uten å regne de ut:
    - Skriv $\sqrt{1.35^8 - 2.75^2}$ i stedet for 1.86277
    - Skriv 3^{12} i stedet for 531 441.
    - Skriv (x-4)(2x+3) i stedet for å utvide det til $2x^2 - 5x - 12$.

- Ikke skriv lange tekster med forklaringer. Skriv kort og konsist. En lengre forklaring etter at du har kommet til poenget vil potensielt gjøre svaret ditt uklart.

Kort oppsummert, bruk tiden fornuftig.

Stans her og vent på videre instruksjoner

Vedlegg 4: Oppgavene i instrumentet som er knyttet til endringsrate

På de neste sidene vil oppgave 1, 6, 9, 11-12, 17, 27-28, 37 og 46 presenteres på hver sin side, slik som de fremstår i instrumentet.

Del 1: Uttrykk den oppfatningen du ønsker elevene skal ha.

Del 2: Er den uttrykte oppfatningen som du har skrevet i del 1 relatert til animasjonen? Forklar.

Sett en ring rundt alternativet som burde brukes for å fullføre setningen.

Den gjennomsnittlige farten til Ball 1 når den faller _________ den gjennomsnittlige farten til Ball 2 når den faller.

(a) er mindre enn

(b) er lik

(c) er større enn

(d) kan ikke sammenlignes med

(e) Jeg vet ikke

Vennligst forklar valget ditt

Se for deg en ikke-lineær funksjon som er definert på intervallet 7,3 til 7,6. Funksjonens gennomsnittlige endringsrate er 4 på dette intervallet. Hva er forskjellen mellom verdien til funksjonen når x=7,6 og verdien av funksjonen når x=7,3?

Velg det beste svaret.

a. 0,3 · 4
b. 4
c. 0,3 / 4
d. 4 / 0,3
e. 7,6 – 7,3
f. Ikke nok informasjon
g. Jeg vet ikke

En bil kjørte fra Kristiansand til Tvedestrand, distansen er 90 kilometer, og farten er 40 kilometer i timen. Hvor raskt må bilen kjøre på vei tilbake til Kristiansand hvis gjennomsnittsfarten på hele turen skal være 60 kilometer i timen?

Del B. En kjøretur på 180 kilometer, der gjennomsnittsfarten er 60 kilometer i timen, vil ta 3 timer. Er svaret ditt på den forrige siden i samsvar med dette?

- ☐ Ja ☐ Nei ☐ Vet ikke

Del C. Hvis du krysset av på «Nei» eller «Vet ikke», vennligst prøv å løse problemet på nytt nedenfor. **Ikke** kryss ut det du gjorde på den forrige siden.

Hvert sekund sykler Julie j meter og Stian går s meter, der $j > s$. I et hvilken som helst gitt tidspunkt, hvordan vil avstanden dekket av Julie være sammenliknet med avstanden dekket av Stian?

a. Julie vil ha reist $j - s$ meter mer enn Stian

b. Julie vil ha reist $j \cdot s$ meter mer enn Stian

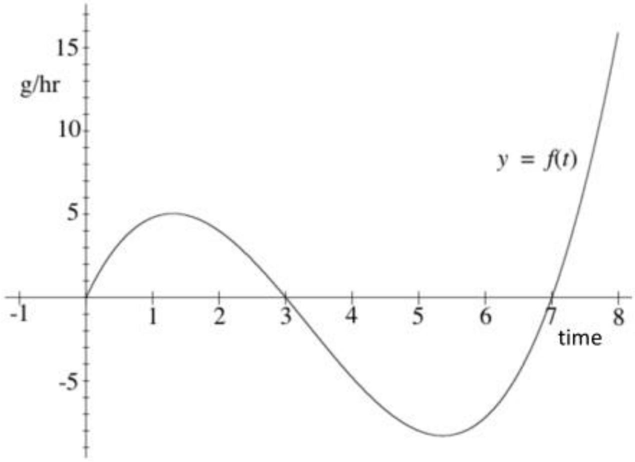
c. Julie vil ha reist j/s meter mer enn Stian

d. Julie vil ha reist $j \cdot s$ ganger så mange meter som Stian

e. Julie vil ha reist j/s ganger så mange meter som Stian

f. Jeg vet ikke

Verdiene til funksjonen *f* gir endringsraten (i gram/time) til en bakteriekulturs masse *t* timer etter at målingene startet.



I hvilke(t) intervall innen de 8 første timene øker bakteriekulturens masse? Forklar.

a) $0 < t \leq 1{,}4$ og $5{,}5 < t \leq 8$

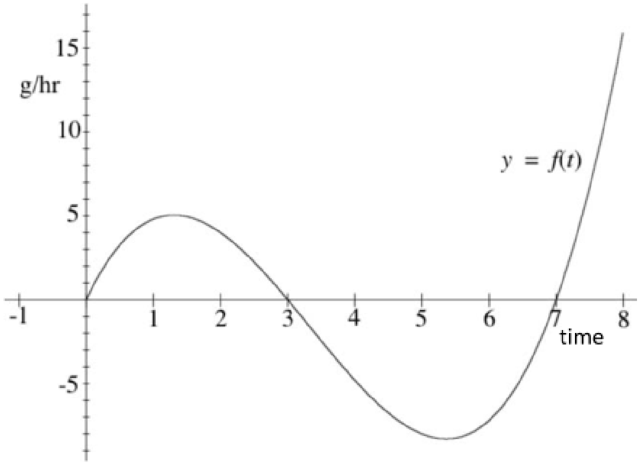
b) $0 < t < 8$

c) $0 < t < 3$ og $7 < t \leq 8$

d) Ingen av alternativene. Mitt svar er ______________________________

e) Jeg vet ikke.

Del B. Grafen fra forrige side er repetert nedenfor. Merk punktet (2.5, 2.25) på grafen til *f*. Hva representerer dette punktet?



Del C.

Ønsker du å endre svaret i forhold til hva du svarte på forrige side? Velg det passende alternativet.

a) $0 < t \leq 1{,}4$ og $5{,}5 < t \leq 8$

b) $0 < t < 8$

c) $0 < t < 3$ og $7 < t \leq 8$

d) Ingen av alternativene. Mitt svar er ____

e) Jeg vet ikke.

f) Jeg ønsker ikke å endre svaret mitt.

Lisa Hansen gav dette problemet til elevene sine.

Inger Miller løp 200 meter sprint i 1999 på tiden 21,77 sekunder. Alice Cast løp 200 meter sprint i 1922 på tiden 27,80 sekunder. Anta at de kappløp. Omtrent hvor mange meter ville det vært mellom dem når Inger Miller krysset mållinjen?

Tore forklarte sitt resonnement på denne måten:

> Anta at de løp med konstant fart. 21,77 er omtrent 78% av 27,80. Så Alice ville ha vært cirka 44 meter bak Inger.

Forklar til klassen hvorfor det er relevant at 21,77 er 78% av 27,80 for å løse oppgaven.

En vitenskapelig lærebok inneholder denne uttalelsen om en funksjon f som gir en bakteriekulturs masse til enhver tid.

Forandringen i kulturens masse over tidsperioden Δx er 4 gram

Del A. Hva betyr ordet «over» i denne uttalelsen?

Del B. Uttrykk lærebokens uttalelse symbolsk.

Vedlegg 5: Bilde av animasjonene til oppgave 1 og 6

Bilde av animasjonen til oppgave 1:

Racerbiler

Del 1, 2 minutter: En bil reiste fra Kristiansand til Arendal. Bilens gjennomsnittlige fart var 92 km/t. Hva ønsker du at elevene skal mene med setningen: «bilens gjennomsnittlige fart var 92km/t»?

Del 2, 2,5 minutt: I animasjonen under, beveger Bil 1 seg med konstant fart. Bil 2 akselererer, og begynner å bevege seg i det øyeblikket Bil 1 når startlinjen.

Er meningen som du konstaterte i del 1 om gjennomsnittlig fart relatert til denne animasjonen? Forklar.

Bilde av animasjonen til oppgave 6:

En del: 1,5 minutt

Fallende baller

I animasjonen nedenfor faller Ball 1 i konstant fart. Ball 2 faller i henhold til tyngdekraften. Ball 2 begynner å falle i det øyeblikket Ball 1 sitt midtpunkt krysser den grønne linjen.

Sett en ring rundt alternativet som burde brukes for å fullføre setningen

Den gjennomsnittlige farten til Ball 1 når den faller _________ den gjennomsnittlige farten til Ball 2 når den faller.

(a) Er mindre enn
(b) Er lik
(c) Er større enn
(d) Kan ikke sammenlignes med