UNIVERSITETET I AGDER

Matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet

En pilotstudie av hva instrumentet MMTsm avslører i forhold til norske matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet

MAGNHILD RUGLAND

VEILEDER
Simon Goodchild

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som en del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2017
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Ønsket om å bli lærer begynte å spire tidlig på ungdomsskolen, men det var først på videregående at det ble klart for meg at det var lektor i matematikk jeg ønsket å bli. I 2012 startet jeg på min femårige utdannelse ved Universitetet i Agder og nå er tiden endelig kommet for å avslutte studiene. Jeg gleder meg, og ser fram til å begynne å jobbe som lektor i den norske skolen.

Det siste semesteret har vært både krevende og lærerikt. Siden jeg startet med masterprosjektet seks måneder tidligere enn nødvendig, antok jeg at det siste semesteret ville bli rolig. Jeg tok skrekkelig feil, og opplevde det som veldig krevende å skrive masteroppgaven. Jeg har liten erfaring med å skrive oppgaver, og hadde begrenset kunnskap om matematisk 'meaning' fra før av. Jeg brukte derfor lang tid på å sette meg inn i, og forstå dette. I tillegg var analysen svært krevende. Når jeg nå ser tilbake på denne prosessen, ser jeg at forskningen absolutt er aktuell og viktig. Masteroppgaven har uten tvil gjort at jeg kommer til å være enda mer bevisst på hvordan jeg uttrykker meg i undervisningen.

Masterprosjektet er støttet av et masterstipend gitt av nasjonalt organ for kvalitet i utdanning (NOKUT) gjennom MatRIC, senter for forskning, innovasjon og koordinasjon av matematikkundervisning. Flere personer har hjulpet meg underveis i skriveprosessen og jeg ønsker å rette en takk til disse.

Først og fremst ønsker jeg å takke veilederen min, professor Simon Goodchild. Takk for nyttige innspill, god oppfølging og veiledning. Dine konstruktive tilbakemeldinger og oppmuntringer underveis har vært nyttige og motiverende for arbeidet med masteroppgaven.

Jeg ønsker å rette en takk til Patrick W. Thompson for at jeg fikk lov til å delta i prosjektet hans og ta i bruk instrumentet som han har utviklet. Jeg vil også takke for en informativ presentasjon i forbindelse med besøket i Norge.

I tillegg ønsker jeg å rette en stor takk til studentene ved Universitetet i Agder, Universitetet i Bergen og Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, som frivillig deltok i masterstudien. En takk må også rettes til førsteamanuensis Mette Susanne Andresen, førsteamanuensis Christoph Kirfel, professor Frode Rønning og førsteamanuensis Claire Marie Juliette Dominique Vaugelad Berg som har bidratt til at besøkene på de ulike universitetene var mulig. Også professor Olav Kristian Gunnarson Dovland og førsteamanuensis Inger Johanne Håland Knutson fortjener en stor takk for korrekturlesing og nyttige innspill i forbindelse med den norske versjonen av instrumentet.

Til slutt vil jeg takke Dag-Erik Tvedt og Asbjørg Rugland for korrekturlesning, støtte og oppmuntring underveis i skriveprosessen.

Magnhild Rugland
Kristiansand, mai 2017

Sammendrag

Temaet i denne masterstudien er lærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet. 'Meanings' er en framstilling av de kognitive skjemaene, som kan observeres gjennom atferden til personen, for eksempel gjennom besvarelser på oppgaver. Studien er gjort i tilknytning til Patrick W. Thompsons forskning om læreres matematiske 'meanings' om emner tilknyttet den videregående skolen. I studien er instrumentet *Mathematical Meanings for Teaching secondary mathematics* (MMTsm), utviklet av amerikanske forskere, tatt i bruk. I min studie er lærerstudenters 'meanings' om funksjonsbegrepet studert ved å analysere studentenes skriftlige besvarelser på oppgaver hentet fra instrumentet MMTsm. Studentenes skriftlige besvarelser er blitt analysert med formålet om å besvare følgende forskningsspørsmål: *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet?*

Studien er en kvalitativ inquiry pilotstudie, der den konstruktivistiske læringsteorien danner grunnlaget for det teoretiske rammeverket. Det er studentenes individuelle tankeprosesser og 'meanings' som er i fokus. Dessuten er MMTsm utviklet i henhold til det konstruktivistiske rammeverket. Kvalitative data er samlet inn ved hjelp av skriftlige besvarelser på utvalgte oppgaver fra instrumentet. Besvarelsene har blitt analysert ved hjelp av et analyseverktøy som er utviklet og basert på Thompson sitt tolkende verktøy som han utviklet til instrumentet.

Resultatene fra masterstudien viser at det uttrykkes et mangfold av ulike 'meanings' om funksjonsbegrepet, og at det er individuelt hvilke 'meanings' studentene uttrykker om sentrale begreper og ideer knyttet til funksjonsbegrepet. Masterstudien viser at flere av studentene ikke har fullt utviklet 'meanings' og at de dermed uttrykker seg uklart og utydelig. Med utgangspunkt i analysen av besvarelsene kan det argumenteres for at flere av de 'meanings' som blir uttrykt vil kunne skape forvirring for elevene i undervisningen.

Abstract

The theme for this master study is teacher students' mathematical meanings about the function concept. Meanings are representations of cognitive schemes, which can be observed through the behavior of the person, for example through answers on tasks. This study is part of a bigger research project connected to Patrick W. Thompsons' research about secondary mathematics teacher's meanings. The instrument *Mathematical Meanings for Teaching secondary mathematics* (MMTsm), developed by American researchers, is used in this study. In my study, students' meanings about the concept of functions have been studied by analyzing teacher students' written answers on tasks in the instrument MMTsm addressing the research question: *What does the instrument MMTsm reveal when used to explore in depth Norwegian mathematics teacher education students meanings about the concept of functions?*

This study is defined as a qualitative inquiry pilot study, where constructivist learning theory is used as the theoretical framework. The student's individual thinking and meanings are in focus. Moreover, the instrument is developed within the constructivist framework. Qualitative data were collected as written answers to selected tasks in the instrument. The answers have been analyzed using an analysis tool that is developed and based on the interpretation tool that Thompson developed alongside the instrument.

The findings from this master study reveal that the students expressed a diversity of different meanings about the concept of functions and that the kind of meanings expressed about concepts and ideas connected to the concept of function are highly individualistic. This master study shows that several students do not have fully developed meanings and that they therefore express themselves in an unclear and vague manner. From the analysis of the written answers, it can be argued that several of the meanings that have been expressed are likely to create confusion amongst the students they will teach in school.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Personlig motivasjon

Denne masterstudien handler om matematikklærerstudenters matematiske 'meaning'[1]. Jeg vil trekke fram noen personlige erfaringer som elev og student, som danner grunnlaget for interessen for dette emnet.

Som snart ferdig utdannet lektor har jeg flere tanker om hvordan jeg vil kunne bidra til å øke elevenes læringsutbytte i matematikk. Selv slet jeg med faget som elev i grunnskolen. Jeg er derfor særlig opptatt av hvordan jeg som lektor kan påvirke elevenes læring. En lærer jeg hadde var særlig opptatt av at elevene skulle utvikle god forståelse, og det var først da det begynte å løsne for meg. Ved lærerens bevissthet rundt tydelig og presis formidling i undervisningen utviklet jeg en bedre forståelse i matematikken.

Denne erfaringen har fått meg til å forstå hvor viktig det er at læreren legger til rette for, og er bevisst på hvordan formidlingsevnen kan påvirke hva elevene lærer. De 'meanings' som læreren formidler til elevene, vil være det elevene prøver å bygge sin forståelse rundt.

På bakgrunn av min egen forståelse av lærerens betydning for elevens læring og dannelse av 'meanings', ser jeg det som svært viktig og relevant å fokusere på og frambringe mer kunnskap om hvordan kommende læreres matematiske 'meaning' vil kunne påvirke elevenes forståelse. Studien kan forhåpentligvis frambringe mer bevissthet rundt hvor viktig det er at studenter og lærere fokuserer på å formidle matematikken korrekt og presist i undervisningen.

1.2 Bakgrunn for studien

Mathematical Meanings for Teaching secondary mathematics (MMTsm) er et diagnostisk forskningsinstrument, utviklet av amerikanske forskere ved Arizona State University. Instrumentet er designet for å brukes i profesjonsutvikling og har som formål å avdekke læreres 'meanings' om flere sentrale emner i videregående skole (Thompson, 2016b). Det er i tilknytning til dette instrumentet min masteroppgave er skrevet våren 2017[2].

Jeg hadde ingen kjennskap til prosjektet fra før av, men ble veldig interessert i prosjektet med en gang jeg hørte om det. En av fordelene med dette prosjektet er at det fokuserer på 'meanings', framfor kunnskap. 'Meanings' er personlige og det er disse som kommer til uttrykk i undervisningen og de kan derfor ha stor innvirkning på elevenes læring.

Nasjonale undersøkelser som PISA (Programme for International Student Assessment) og TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) undersøker elevers kompetanse i blant annet matematikk. Norske elevers prestasjoner i PISA har siden første gjennomføring i 2000 ligget relativt stabilt omkrig OECD-gjennomsnittet, med noen variasjoner fra syklus til syklus (OECD, u.å.). Fra PISA-undersøkelsen i 2012, som fokuserte på matematikk, gikk derimot elevenes prestasjoner ned i forhold til undersøkelsen som ble gjort i 2009 (OECD, 2010, 2014). OECD har pekt på at Norge må styrke lærerkompetansen slik at elevene kan lære mer (OECD, u.å.). De senere årene har det vært et sterkt fokus på etter- og videreutdanning av

[1] På grunn av vanskeligheter med å oversette betydningen av begrepet 'meaning' til norsk, vil det engelske ordet bli brukt gjennom hele oppgaven. Ordet blir brukt på en teknisk måte, og betydningen av begrepet blir presentert i kapittel 2.2.

[2] Det blir brukt eksempler fra instrumentet i teksten. Disse eksemplene er beskyttet av åndsverkloven og kan ikke brukes uten tillatelse.

lærere for å heve kompetansen, og i 2015 presterte norske elever for første gang over OECD-gjennomsnittet i matematikk (Kjærnsli & Jensen, 2016). Siden 2003 har også TIMSS kunnet vise til en positiv framgang i elevers prestasjoner i matematikk (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). Analyser som er gjort i forbindelse med undersøkelsene viser at læreres faglige kompetanse er nært knyttet til resultatene (Bergem et al., 2016).

I arbeidet med å heve kompetansen i matematikk ble pilotprosjektet «Nasjonale deleksamener», i oppdrag fra Kunnskapsdepartementet, innført i høyrere utdanning for å gi myndighetene nyttig informasjon om studenters kunnskapsnivå (NOKUT, 2017). På eksamenen i mai 2016 deltok 997 grunnskolelærerstudenter. I eksamenen ble de testet på undervisningskunnskap i brøk, desimaltall og prosentregning. Resultatene fra eksamenen er oppsiktsvekkende, da bare 0,6 prosent oppnådde toppkarakter, 37 prosent strøk på eksamenen og gjennomsnittskarakteren var E (NOKUT, 2016). Selv om eksamensresultatene kun er fra noen få emner, viser likevel dette at undervisningskunnskapene til lærerstudentene må heves.

For å heve nivået på undervisningen og elevenes læringsutbytte er det svært viktig at lærere og lærerstudenter har godt utviklede 'meanings'. Undersøkelsene fra grunnskolelærerutdanningen tyder på at undervisningskompetansen blant studentene ikke er god nok. Det finnes derimot lite forskning på undervisningskompetansen til kommende lærere på videregående, og det er heller ikke forsket på deres 'meanings'. Tidligere forskning viser at elevenes kompetanse og prestasjoner har sammenheng med lærerens kompetanse (Bergem et al., 2016; Hill, Rowan & Ball, 2005). Siden lærerens 'meanings' også vil påvirke elevens evne til forståelse, er det derfor svært sentralt og relevant å undersøke kommende lærere på videregående skole sine 'meanings'.

1.3 Formålet med studien

'Meanings' er individuelt og hvilke 'meanings' lærere har vil ha betydning for og påvirke undervisningen og elevenes læring (Thompson, 2016b). Masterstudien handler om lærerstudenters 'meanings' om funksjonsbegrepet og er en del av et større forskningsprosjektet i regi av Thompson, kalt Project Aspire. Intensjonen med masterprosjektet er å bidra med innsikt i hva instrumentet avslører i forhold til matematikklærerstudenters 'meanings' om funksjonsbegrepet. I kapittel 2.2 utdypes hva som menes med matematisk 'meaning'.

1.4 Avgrensning av studiens omfang

På bakgrunn av masteroppgavens begrensede omfang, vil jeg ikke kunne analysere alle emnene som blir vektlagt i det anvendte instrumentet. Jeg vil derfor begrense meg til å studere og analysere studentens 'meanings' av funksjonsbegrepet, og vil derfor bare ta for meg de elementene fra instrumentet som omhandler dette.

1.5 Forskningsspørsmål

I henhold til de personlige erfaringene, bakgrunnen og formålet med studien, vil denne studien ta sikte på å belyse følgende forskningsspørsmål:

> *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet?*

1.6 Oppgavens struktur

Masteroppgaven inneholder åtte kapitler. Etter innledningen presenteres sentrale trekk fra den konstruktivistiske læringsteorien, samt teori om matematisk 'meaning'. Deretter omtales funksjonsbegrepet kort, før den konstruktivistiske teorien kritiseres fra et sosiokulturelt perspektiv. Videre følger et kapittel om tidligere studier som presenterer viktige og relevante resultater fra forskning om forståelse av funksjonsbegrepet og matematisk 'meaning'. I kapittel 4 beskrives valg av metode og forskningsdesign, samt gjennomføringen av metoden. Avklaringer i forhold til valg av respondenter og beskrivelse av oversettelse- og scoringsprosessen redegjøres. Videre gis det et eksempel som illustrerer datainnsamlingsprosessen. Deretter redegjøres det for etiske hensyn, før studiens validitet og reliabilitet til slutt omtales. I kapittel 5, presenteres analyseverktøyet som jeg har designet, samt funn fra analysen av studentenes besvarelser. Deretter, i kapittel 6 drøftes analysen i lys av tidligere forskning og teori med sikte på å besvare forskningsspørsmålet. Videre, i kapittel 7 presenteres noen pedagogiske og forskningsmessige refleksjoner og implikasjoner om studien. Avslutningsvis, inneholder kapittel 8 referanselisten.

2. Teori

2.1 Det konstruktivistiske læringssynet

MMTsm er utviklet i henhold til det konstruktivistiske læringssynet (Thompson, 2016b). Det er derfor naturlig at også denne oppgaven baserer seg på samme læringssyn.

Konstruktivismen startet ikke i matematikkutdanningen, men ble først anerkjent som et felt innenfor matematikkutdanningen i USA på en konferanse på Universitetet i Georgia i 1974 (Thompson, 2013a). Etter hvert som Piagets verk har blitt oversatt til engelsk har konstruktivismen i økende grad hatt innvirkning på matematikkutdanningen (Thompson, 2013a). Konstruktivismen vektlegger menneskets individuelle tankeprosesser, altså dets kognitive prosesser, som betingelse for læring (Lyngsnes & Rismark, 2014). I følge Jean Piaget, som har dannet grunnlaget for konstruktivismen i moderne utdanningsteori, organiserer og strukturerer man tankeprosessene i skjemaer og man lærer gjennom en vekselprosess mellom assimilasjon og akkomodasjon (Nygaard, Hundeland & Pettersen, 1999). Piaget og Garcia (1991, s. 159) definerer skjema som følgende: *«A scheme is what can be repeated and generalized in an action*". Skjemaene er i kontinuerlig utvikling og blir mer avanserte og komplekse etter hvert som vi tilegner oss mer kunnskap. Ved assimilasjon prøver vi å forstå noe nytt ved å få den nye informasjonen til å passe inn i allerede eksisterende skjema. I situasjoner der skjemaene ikke er tilstrekkelige må man akkomodere, altså revidere egne oppfatninger. Dette innebærer at skjemaene må modifiseres og endres, slik at ny kunnskap erstatter eller utvider den tidligere forståelsen (Lyngsnes & Rismark, 2014). Læring er således et resultat av hvordan mennesker tolker og tilpasser seg ytre stimuleringskilder, og hvordan de konstruerer sin subjektive kunnskap (Imsen, 1998).

Vi lærer gjennom en individuell konstruksjon av kunnskap (Jaworski, 1994). Hvordan skjemaene endres og utvikles avhenger av flere faktorer. Blant annet avhenger det av samspillet mellom den viten en allerede har, og ny informasjon eller nye erfaringer (Lyngsnes & Rismark, 2014). Særlig viktig blir derfor lærerens rolle som formidler (Nygaard et al., 1999). Elevene må selv bygge kunnskapen, men lærerens formidlingsevne påvirker elevenes tolkning, og hvordan skjemaene blir utviklet og endret. Dette vil dermed også ha innvirkning på hvilken kunnskap elevene sitter igjen med. På den måten vil læreren som formidler stadig påvirke og bidra til elevenes akkomodasjon og assimilasjon.

2.2 'Meaning' versus kunnskap

'Meaning' og kunnskap er begreper som i det konstruktivistiske perspektivet er begrunnet i individets skjema (Thompson, 2016b). Grunnen til at fokuset i denne oppgaven retter seg mot 'meaning' handler i hovedsak om at det er lærerens 'meaning', og ikke kunnskap, som kommer til uttrykk i undervisningen. I Thompson (2013b, 2016b) påpekes det at for å forstå valgene som blir tatt av lærere i forbindelse med undervisning, både i planleggingsprosessen og underveis i undervisningen, vil det være nyttig med et fokus på matematiske 'meanings'. Gjennom undervisningen er læreren med på å påvirke elevenes dannelse av 'meanings'. Ved å utforske studenters 'meanings' av funksjonsbegrepet vil denne studien kunne drøfte om deres 'meanings' er i overenstemmelse med MMTsm sin bruk av funksjonsbegrepet. Dessuten kan studentenes 'meanings' gi indikasjoner på hva som kan være nyttig å jobbe videre med i forhold til undervisningspraksisen, i tillegg til at resultatene kan brukes til å veilede og hjelpe studentene til å utvikle 'meanings' som er mer produktive for elevenes læring.

Teorien om 'meaning' er rotfestet i Piagets teori om assimilasjon til skjema (Thompson, 2013b, 2016b), der skjemaene utgjør menneskets erfaring, tenkemåte og kunnskap (Lyngsnes

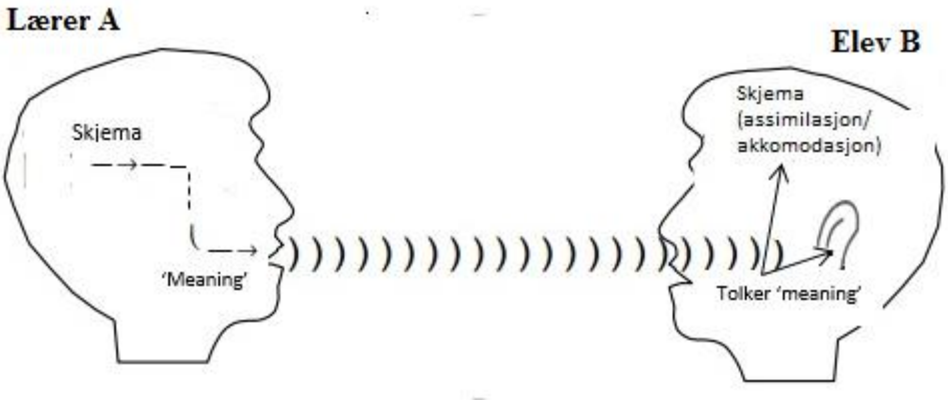
& Rismark, 2014). En person sine 'meanings' er en fremstilling av de kognitive strukturene, og disse kan observeres gjennom atferden til personen.

Forståelse er en kognitiv tilstand som er et resultat av assimilasjon til skjema, der skjemaet er 'meanings' til forståelsen (Yoon, Hatfield & Thompson, 2014). Hvert enkelt menneske konstruerer 'meanings' individuelt, og de blir organisert og strukturert basert på ens egne erfaringer. Å konstruere 'meanings' handler med andre ord om å konstruere skjema ved å resonnere gjentatte ganger, rekonstruere og organisere sine egne erfaringer. De mentale skjemaene kan ikke sees, men en persons 'meaning' vil bli synlig gjennom dens handling og oppførsel (Piaget & Garcia, 1991). Dermed kan 'meaning' bli sett på som en anvendelse av skjema, der individets 'meaning' blir synlig gjennom handlinger og oppførsel.

Alle lager modeller av verden, og det vil ikke være mulig å observere hvordan andre forstår verden og matematikken. Men det vil være mulig å observere hvordan noen bruker sin forståelse. Det er når man observerer hvordan forståelsen blir anvendt at man kan se de individuelles matematiske 'meanings'. Dette vil være et resultat av at ett eller flere konsepter, som sammen med det matematiske objektet blir sett på i en kontekst der 'meanings' blir uttrykt. Lærernes kunnskap eksisterer i deres matematiske 'meanings', og hvilke matematiske 'meanings' lærerne har vil være med på å påvirke og lede avgjørelsene og handlingene i undervisningen (Thompson, 2013b). Lærere uttrykker 'meanings' gjennom undervisningen, uavhengig av om læreren er klar over hvilke 'meanings' de uttrykker eller ikke. Lærerne burde ha som mål å bringe videre presise og korrekte 'meanings' til elevene, og undervisningen bør legge til rette for at elevene utvikler 'meanings' om matematikken som danner grunnlag for elevenes framtidige læring.

Både 'meaning' og kunnskap er begrunnet i individets skjema, og fra et konstruktivistisk perspektiv er de tilnærmet synonymer (Thompson, 2016b). Med et fokus på 'meaning' åpnes det opp for å stille en litt annen type spørsmål enn om fokuset hadde vært på kunnskap. Til forskjell fra å spørre studentene om hva de *vet* om funksjoner kan spørsmålene rettes mot hva de *mener* med en funksjon. Ved å fokusere på studentenes 'meanings', framfor deres matematiske kunnskap, vil deres besvarelser kunne fortelle noe om hvordan de ville ha handlet i ulike undervisningssituasjoner. Denne tilnærmingen kan derfor bidra til veiledning i utviklingen av lærernes utdannelse. En forståelse av hva folk *mener* gir mer innsyn i deres tankegang. Spørsmål med et fokus på 'meanings' kan derfor være mer fruktbart en spørsmål rettet mot kunnskap, da det er individenes 'meanings' som kommer til uttrykk gjennom valg og handlinger. Det må påpekes at studentenes respons på ett enkelt element ikke er tilstrekkelig for å avdekke og gi innsyn i den enkeltes 'meanings', og at det derfor er flere elementer i instrumentet som involverer ulike aspekter av 'meanings'.

Hvert enkelt individ har utviklet skjema og har sin egen forståelse av matematikken. I likhet med Skemp (1978), definerer Thompson (2013b, s. 444) forståelse som *«å assimilere til skjema»*. Man vil aldri kunne få tilgang til, eller forstå andres forståelse, for man vil aldri kunne se noens kognitive skjema. Den eneste måten man kan få tilgang til en persons skjema er gjennom å undersøke ulike situasjoner der det er naturlig å uttrykke sin matematiske 'meaning'. I undervisning vil en måtte utrykke egne 'meanings', i figur 2.1 illustreres hvordan lærer A uttrykker sine 'meanings', og hvordan elev B prøver å tolke og forstå hva læreren har sagt. Avhengig av bakgrunnen og forståelsen til eleven vil han eller hun kunne assimilere eller akkomodere tolkningen av lærerens 'meaning' til sine egne skjema. Figuren er med på å illustrere hvor viktig det er at læreren er bevisst på sine 'meanings' og hvordan de blir formidlet, slik at eleven har de beste forutsetninger for å tolke de 'meanings' som blir uttrykt.



Figur 2.1: Illustrasjon av lærer A som uttrykker sin 'meaning' til elev B. Tilpasset fra Skemp (1979, s. 150).

Valget om å ta i bruk begrepet 'meaning' er bevisst. Begrepet blir brukt for å markere og tydeliggjøre at det blir brukt på en teknisk måte, og at det ikke kan forstås på samme måte som det norske begrepet mening. Mening er synonymt med begrepet oppfatning. Hadde mening blitt brukt, framfor 'meaning', hadde det åpnet opp for tolkningen om at en persons matematiske mening er synonymt med dens oppfatning av ulike matematiske emner, og dette er ikke ønskelig. På grunnlag av dette tas derfor det engelske begrepet 'meaning' i bruk, og det brukes på måten som er beskrevet ovenfor.

2.3 Funksjonsbegrepet

Funksjonsbegrepet er svært viktig i matematikkfaget, og det har en sentral plass i læreverket både på grunnskolen og i videregående skole. I tillegg er det et viktig begrep innenfor vitenskapen matematikk (Blomhøj, 1997). Utviklingen av funksjonsbegrepet har vært en omfattende og tidkrevende prosess som har pågått over flere århundrer (Atkinson, 2002; Wheeler, 1981). Begrepet fikk sitt opphav i Eulers arbeid i det 18. århundre, og det er hans arbeid som har resultert i innføringen av notasjonen $f(x)$. På denne tiden var en formel som inneholdt x mer eller mindre synonymt med «funksjon». Dermed var veien mot mer presise og godtatte definisjoner fremdeles lang (Wheeler, 1981). I 1837 identifiserte Lejeune Dirichlet egenskapen om funksjoners entydighet, og arbeidet hans har bidratt til dybde og klarhet i forhold til funksjonsbegrepet. Selv om han ikke fikk produsert mye matematikk før sin død, har han likevel hatt en viktig betydning for den videre utviklingen av funksjonsbegrepet (Atkinson, 2002; Lindstrøm, 1995; Wheeler, 1981). I moderne lærebøker blir gjerne funksjoner definert som *«en funksjon $f : A \rightarrow B$ er en regel som til hver $a \in A$ tilordner et entydig $b \in B$»* (Nygaard, 2010, s. 1).

I denne oppgaven benyttes Thompson (2013c) sin illustrasjon av de ulike delene i funksjonsdefinisjonen. En forståelse for de ulike delene vil være svært viktig for kunne utvikle koherente 'meanings'. I henhold til figur 2.2 representerer venstresiden av funksjonsdefinisjonen 'output' til funksjonen V. Høyresiden representerer reglen for hvordan man produserer 'output'. Ved å sette inn en spesifikk input-verdi, for eksempel u, i regelen, vil tallet representere 'output'-verdien, som nedenfor er representert ved V(u). Man definerer en funksjon når man representerer forholdet mellom to størrelser ved å bruke en funksjonsdefinisjon. I figur 2.2 betyr ikke «=» det samme som, men «definert til å være», altså at V(*u*) er definert til å være *u*(13.76-2*u*)(16.42-2*u*) (Thompson, 2013c).

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{V}^{\textit{Name}}\ (\ \overbrace{u}^{\textit{Input}}\ )}^{\textit{Output}} = \overbrace{u(13.76-2u)(16.42-2u)}^{\textit{Rule for how to produce an output}}}^{\textit{Function definition}}$$

Figur 2.2: De ulike delene i funksjonsdefinisjonen (Thompson, 2013c)

2.4 Kritisk vurdering av den konstruktivistiske teorien fra et sosiokulturelt perspektiv

Det konstruktivistiske læringssynet danner grunnlaget for masterprosjektet, men i dette delkapittelet belyses dette valget kritisk, fra et sosiokulturelt perspektiv.

I det konstruktivistiske perspektivet er det enkelte individet i fokus og den individuelles konstruksjon av kunnskap vektlegges. I motsetning til konstruktivismen, vektlegger det sosiokulturelle perspektivet sosiale interaksjoner der læring er et resultat av samhandling og interaksjon mellom mennesker og gjenstander (Säljö, 2001). I det sosiokulturelle perspektivet er dermed kommunikasjon og samarbeid viktige faktorer for læring. Som lærer vil man ofte jobbe sammen i team med andre lærere, og man vil daglig samhandle og være i sosial interaksjon med elevene. De 'meanings' som læreren uttrykker i undervisningen blir derfor vanligvis uttrykt i en sosial setting, som for eksempel i klasserommet. Hvordan man i undervisningen uttrykker sine 'meanings' kan derfor bli påvirket av flere forskjellige faktorer, deriblant elevene i undervisningen, kollegaer, læreboken og læreplanen. For eksempel ligger det ofte mye planlegging bak hver undervisningstime, og de fleste lærere bruker mye tid på å planlegge hva de ønsker å formidle i undervisningen og hvordan de ønsker å legge det fram. Derimot går ikke alltid alt som planlagt og undervisningen kan ta en annen vending. Elevene kan blant annet stille uventede spørsmål til læreren og dette kan påvirke hvilke 'meanings' læreren legger fram. I andre situasjoner observerer lærere hverandre for deretter å diskutere den foregående timen. Også dette er faktorer som kan påvirke hvilke 'meanings' læreren formidler. Dette er bare noen eksempler på hvordan 'meanings' oppstår og utvikles gjennom sosiale interaksjoner. Ved å teste matematiske 'meanings' gjennom instrumentet som Thompson har utviklet, er det derfor bare mulig å gi et begrenset innblikk i lærernes 'meanings'. For å kunne gi et bedre innblikk burde lærerne vært observert i praksis, og intervjuer burde vært gjennomført.

3. Tidligere studier

I dette kapittelet refereres det til tidligere studier som på forskjellige måter har tilknytning til denne studien, der noen har lignende metodiske framgangsmåte. Studiens innhold kan sees i sammenheng med elevers forståelse av funksjonsbegrepet og studier som fokuserer på læreres matematiske 'meanings'.

Utviklingen av MMTsm har tatt flere år, og sammen med et team har Thompson utviklet scoringsrubrikker som skal fange opp og karakterisere ulike 'meanings' (Musgrave & Thompson, 2014; Thompson, 2016b). Totalt har 619 lærere fra USA og Sør-Korea deltatt i forskningen og gjennom en tidkrevende scorings- og analyseprosess har Thompson sammenfattet resultatene (Thompson, 2016a). Noen resultater fra utvalgte emner ble presentert i forbindelse med en konferanse i Norge i 2016 (Thompson, 2016a) og studiene (Musgrave & Thompson, 2014; Thompson, 2015; Yoon et al., 2014) bygger på MMTsm og tar for seg læreres matematiske 'meanings' om funksjonsnotasjon. Instrumentet som er brukt i studiene beskrives i kapittel 4.3 og scoringsprosessen beskrives i kapittel 4.5.2. Til tross for at disse studiene fokuserer på læreres matematiske 'meanings', og jeg studerer lærerstudenters matematiske 'meanings', vil studiene likevel være nært knyttet til hverandre da samme forskningsinstrument er brukt og den metodiske tilnærmingen er tilsvarende. Nedenfor trekkes noen av hovedfunnene fram, som er knyttet til funksjonsbegrepet og som har relevans til denne studien.

Idiomatisk tenkning

Idiomatisk tenkning er når funksjonsnotasjonen «$f(x)$» blir tolket på samme måte som en variabel bestående av en bokstav, slik som «y» i en likning, i motsetning til dens fulle betydning der «f», «x», og «$f(x)$», hver har betydning innenfor funksjonsdefinisjonen (Musgrave & Thompson, 2014; Thompson, 2013c).

Ved å utforske besvarelser som på ulike måter omhandler funksjonsnotasjon, avslører studien til Musgrave og Thompson (2014) at mange av lærerne har et idiomatisk syn på funksjonsnotasjon. Dette betyr at venstre side av likhetstegnet blir betraktet som et navn for det som står på høyre side av likhetstegnet, i stedet for dets fulle betydning.

Inkonsistent bruk av variabler

Ved inkonsistent bruk av variabler menes det at respondenten muligens ikke er konsekvent eller bevisst på at variabelen i argumentet må være den samme som variabelen i regelen. Dette omfatter også uregelmessig bruk av variabler generelt, altså at studentene bruker en annen variabel enn det som er naturlig i forhold til hva som er oppgitt i oppgaveteksten.

Flere av studiene avdekker at mange av lærerne ikke er bevisst på bruken av variabler og at de er inkonsekvente med bruken av variabel i argumentet og i regelen til funksjonen (Musgrave & Thompson, 2014; Yoon et al., 2014). I tillegg peker Yoon et al. (2014) på at det er spesielt de lærerne som blander regelen i funksjonsdefinisjonen med output, og lærerne som blander regelen sammen med funksjonsdefinisjonen, som har inkonsistent bruk av variabler. Ved en slik inkonsistent bruk av variabler, stiller Musgrave og Thompson (2014) spørsmål ved hvilke 'meanings' lærerne uttrykker til elevene i undervisningen og hvordan det i så tilfelle er med på å påvirke elevens 'meanings' av funksjonsnotasjon og bruk av variabler. I en tidligere studie av Wilson (1994) beskrives det hvordan en lærerstudent sin kunnskap og forståelse av et emne kan påvirke undervisningen. Studenten som beskrives i forskningen til Wilson ser på funksjoner som numeriske operasjoner, og i starten av forskningen har hun heller ingen forståelse for hvilken betydning og nytte funksjoner har i matematikken og i kontekster utenfor klasserommet. For henne handler verdien til funksjoner først og fremst om å bestemme om relasjoner er funksjoner eller ikke. Fokuset hennes er å lære nyttige prosedyrer, og dette vektlegger hun også når hun forklarer hvordan en som lærer skal undervise. Læreren må kunne vite hvordan og hvorfor prosedyrene fungerer, men elevene trenger først og fremst å vite hvordan de bruker disse på riktig måte. Hennes synspunkter på matematikk, og hennes forståelse av funksjoner, vil påvirke undervisningen og hvordan hun formidler kunnskapen sin om funksjoner. Lærerstudenten vil møte på flere utfordringer i undervisningen. Først og fremst utfordringer knyttet til den begrensede forståelsen av funksjoner som numeriske operasjoner, men også utfordringer med å motivere elevene til utforskning av matematikken, da hun innerst inne mener at matematikk handler om å anvende standardiserte prosedyrer. Forståelsen påvirker ikke bare hva som blir formidlet og sagt i undervisningen, men også hvordan man som lærer velger å legge opp undervisningen og hva som blir fokuset i undervisningen. Studien til Wilson har vært viktig for og har vært med på å opplyse Thompson i utviklingen av MMTsm-instrumentet (Musgrave & Thompson, 2014).

Fra resultatene som presenteres av Thompson (2016a) kommer det tydelig fram at mange av lærerne fra USA har inkonsistent bruk av variabler i funksjonsdefinisjonen. Videre tyder analysen på at mange av lærerne ser på funksjonsnotasjon som et navn og at de på grunn av dette ikke er bevisst på måten de bruker variabler. Thompson (2016a) peker på at hele 44% av de amerikanske lærerne som har deltatt i forskningen hadde inkonsistent bruk av variabler. Videre er det kun 6% av lærerne fra Sør-Korea som betrakter funksjonsnotasjon som et navn, og på grunn av dette har inkonsistent bruk av variabler.

‘Meanings’ om de ulike delene i funksjonsdefinisjonen

Et av elementene i MMTsm har som formål å teste om lærerne klarer å skille mellom funksjonens ‘input’ og ‘output’. For flertallet av lærerne var dette vanskelig, og resultatene viser at mange av lærerne har dårlig utviklede ‘meanings’ om de ulike delene i funksjonsdefinisjonen (Thompson, 2016a). Et annet element fokuserer på lærernes ‘meanings’ i forhold til funksjonens definisjonsområde, og om de er bevisste på at alle deler av regelen til funksjonen må være definert over hele rekkevidden til funksjonen. Flertallet av lærerne fra Sør-Korea (53%) viste at de hadde godt utviklede ‘meanings’ på dette området, men bare 9% av lærerne fra USA viste det samme (Thompson, 2016a).

‘Meanings’ om funksjonsnotasjon og bruk av funksjonsnotasjon til å representere varierende størrelser

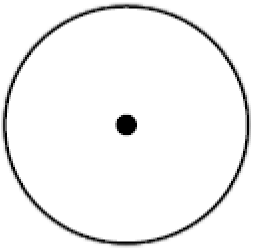
Funksjonsnotasjon kan brukes til å representere varierende størrelser, og flere av elementene i MMTsm undersøker om studentene er komfortable med å bruke funksjonsnotasjon til å representere størrelser som varierer.

Analysen til Yoon et al. (2014) tyder på at flere av lærerne som blander sammen regelen og ‘output’ i funksjonsdefinisjonen kun bruker funksjonsnotasjon til beregning. Videre tyder analysen på at flere av lærerne som blander sammen funksjonsregelen og ‘output’ fokuserer på å finne en regel når de blir bedt om å representere varierende størrelser.

Resultatene fra forskningen i USA og Sør-Korea viser at flere av lærerne ikke uttrykte en klar ‘meaning’ i forhold til funksjonsnotasjon, og at de i mange tilfeller gav responser som ikke gav mening i forhold til oppgaven. Dessuten framkommer det av resultatene og analysen at mange av lærerne ikke brukte funksjonsnotasjon på riktig måte (Thompson, 2016a).

Element 34 fra MMTsm (se figur 3.1) har som formål å undersøke om lærerne klarer bruke funksjonsnotasjon til å representere arealet innenfor sirkelen som en funksjon av tiden.

Hari dropped a rock into a pond creating a circular ripple that spread outward. The ripple`s radius increases at a non-constant speed with the number of seconds since Hari dropped the rock. Use function notation to express the area inside the ripple as a function of elapsed time.



Figur 3.1: Element 34 fra MMTsm. © Arizona Board of Regents

Flere av lærerne, både i USA og Sør-Korea, gav responser som ikke gav mening i forhold til oppgaven. Mange gav også responser som viste at de ikke var i stand til å bruke funksjonsnotasjon (Thompson, 2016a).

Studiene som det er blitt referert til er med på å gi verdifull informasjon om de ulike 'meanings' som lærerne har, og flere av studiene har sammenfallende resultater. Som resultatene impliserer, har mange av lærerne mindre utviklede 'meanings' om funksjonsbegrepet. Det kommer også tydelig fram fra resultatene at lærerne fra Sør-Korea har mer utviklede 'meanings' enn lærerne fra USA. Poenget er ikke å sammenligne lærerne opp mot hverandre, men å trekke fram at de 'meanings' som lærerne i Sør-Korea presenterer i undervisningen trolig vil være mer produktiv for elevenes læring (Thompson, 2016a).

Elevers forståelse av funksjonsbegrepet

Det finnes mye forskning på elevers forståelse av funksjonsbegrepet, og flere studier viser at funksjonsbegrepet er et område i matematikken som har vært problematisk for elever i mange år. I Sajka (2003) redegjøres det for én elev sin forståelse av funksjonsnotasjon. I studien avdekkes elevens begrensede forståelse, og utfordringer knyttet til læringen av funksjonsbegrepet. Vanskelighetene og utfordringene med å lære funksjonsbegrepet omtales også i andre studier (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Carlson, 1998; Saraiva & Teixeira, 2009; Vinner & Dreyfus, 1989).

I studien til Breidenbach et al. (1992) utforskes og tolkes studenters vanskeligheter med funksjonsbegrepet. Basert på hvilke områder som blir avdekket som vanskelige, ble det utviklet et undervisningsprogram som fokuserte på de områdene der studentene slet. Som et resultat av den tilpassede undervisningen om funksjoner viste forskningen tendenser til at studentenes begrepsforståelse av funksjoner ble utviklet og styrket.

I studien til Saraiva og Teixeira (2009) studeres videregående elevers forståelse av funksjoner. I starten av studien tydet analysen på at elevene bare memorerte funksjonsdefinisjonen, og at de på grunn av dette ikke klarte å knytte sammen det de skrev med grafiske representasjoner av funksjoner. Videre viser studien at en undersøkende og utforskende tilnærming til undervisningen og på oppgavene, sammen med en god interaksjon mellom elevene og lærerne, kan være en god måte å lære funksjoner på. Ved denne tilnærmingen opplevde de også at det ble lettere å identifisere hvilke områder elevene slet med.

Vinner og Dreyfus (1989) sammenlignet universitetsstudenter og lærere på videregående skole sine tanker om funksjonsbegrepet med definisjonene de gav av konseptet. Studien viste at mange av definisjonene som ble gitt var primitive, ved unntak av de definisjonene som ble gitt av de med matematikk som hovedfag og lærerne. Vinne og Dreyfus poengterer hvordan flere kognitive skjema, som også kan være i konflikt med hverandre, kan opptre i en og samme person i forskjellige situasjoner som er nært relatert til hverandre. De mener at kunnskap om disse kognitive skjemaene kan gjøre at læreren er mer sensitiv på studentenes reaksjoner, og på denne måten forbedrer kommunikasjonen.

Carlson (1998) undersøkte utviklingen av funksjonsbegrepet til studenter med toppkarakterer. En eksamen som målte studentens forståelse av ulike og viktige aspekter ved funksjonsbegrepet ble tatt i bruk. Analyser og intervjuer med studentene i etterkant av eksamenen avslørte at også de beste studentene hadde vanskeligheter med å forstå funksjonsbegrepet. Når de ble konfrontert med ukjente oppgaver slet de med å anvende informasjonen som de nylig hadde hatt undervisning om.

Oppmerksomheten i disse studiene er rettet mot elevers forståelse av funksjoner. Denne studien kan i liten grad sammenlignes med disse studiene, men kan likevel brukes til å argumentere for at det er et behov for å utforske og rette oppmerksomhet til lærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet, da de er framtidens lærere som vil være med å påvirke elevens læringsutbytte.

Oppsummering

De tidligere studiene til Thompson peker på at mange av lærerne som deltok i studien ikke har godt nok utviklede 'meanings', og at mange av de 'meanings' som trolig blir presentert i klasserommet ikke nødvendigvis er læringsfremmende for elevene. Den tidligere forskningen på elevers forståelse av funksjoner viser at dette er et område som svært mange elever sliter med og dermed er et område som det bør jobbes med. Denne studien har ikke som mål å avsløre mer om studenters forståelse av funksjonsbegrepet, men har som mål å rette fokuset mot viktigheten av at lærerstudenter har passende 'meanings' hvis de skal undervise. Studien handler med andre ord om å avsløre og undersøke noen utvalgte norske studenters 'meanings' og er ikke en utforsking av funksjoner.

4. Metode
I dette kapitelet presenteres hvilke framgangsmåter som er blitt brukt for å studere studentenes 'meanings'. Innsamlingen av data bør være hensiktsmessig i forhold til å kunne besvare forskningsspørsmålet. For å få meningsfulle resultater er det viktig at det er samsvar mellom metode og det teoretiske rammeverket (Goodchild, 2001; Lincoln & Guba, 1985). I metodekapittelet vil det først bli gitt en innføring i bakgrunnen for valg av metode (4.1) og valg av forskningsdesign (4.2). Deretter presenteres instrumentet som har blitt brukt i forskningen (4.3) før en redegjørelse gis for valg av respondenter og beskrivelse av metode (4.4) og oversettelse- og scoringsprosess (4.5). Etterfølgende presenteres det et eksempel som illustrerer metoden (4.6), før etiske hensyn betraktes (4.7). Videre betraktes masterstudiens reliabilitet og validitet (4.8). Utforming og anvendelse av analyseverktøyet vil bli presentert i kapittel 5.

4.1 Bakgrunn for valg av metode
Det ble tidlig avklart at datainnsamlingen til masterprosjektet skulle foregå ved hjelp av MMTsm. All data ble samlet inn ved hjelp av skriftlige besvarelser, som egner seg godt når man ønsker å undersøke den enkeltes aktivitet (Wellington, 2015). Dette er i tråd med den konstruktivistiske læringsteorien, der mennesket konstruerer sin egen kunnskap gjennom individuelle aktiviteter (Nygaard et al., 1999).

For å besvare studiens forskningsspørsmål ble det vurdert at skriftlige besvarelser var den mest hensiktsmessige måten å gjøre det på. Dette fordi masterprosjektet er en del av Project Aspire og ett av kravene for å få lov til å bruke MMTsm var at jeg måtte brukte samme innsamlingsmetode som Thompson har gjort. Ved å gjennomføre datainnsamlingen på samme måte vil reliabiliteten til forskningen lettere kunne vurderes. Datamaterialet i form av de skriftlige besvarelsene ble vurdert som tilstrekkelig for å kunne si noe om studentenes 'meanings' om funksjonsbegrepet.

All datainnsamling har blitt gjennomført i samarbeid med medstudent June Karina Eriksen Flatelid. Vi har derfor samme datagrunnlag. Selv om vi har samarbeidet om datainnsamlingen, er det viktig å poengtere at vi har valgt hvert vårt hovedemne basert på de forskjellige emnene fra instrumentet. Vi skriver derfor hver vår individuelle oppgave.

4.2 Forskningsdesign
Masterprosjektet defineres som en *kvalitativ inquiry pilotstudie.* Nedenfor begrunnes valget for dette forskningsdesignet.

I forskning skilles det ofte mellom kvalitativ og kvantitativ metode. Mens kvantitativ metode vektlegger et stort utvalg og talldata, vektlegger den kvalitative metoden utforskning og dybdeforståelse og heller et mindre utvalg (Krumsvik, 2014). Den kvalitative forskningsmetoden ble tatt i bruk i denne forskningen fordi det var ønskelig med rike og utfyllende besvarelser for å kunne besvare forskningsspørsmålet. Ved å bruke en kvalitativ tilnærming vil instrumentet og studentenes besvarelser være med på å åpne opp for å gå i dybden i deres besvarelser, resonnementer og begrunnelser.

Videre defineres studien som en *inquiry pilotstudie.* Dette fordi den utforsker hvordan forskningsinstrumentet kan brukes til å beskrive og si noe om studenters 'meanings'. Fordelen med en pilotstudie er at man kan teste ut og undersøke egne interesser og teorier. I tillegg kan pilotstudier i kvalitativ forskning være med på å bidra til at en utvikler en forståelse for ulike konsepter og teorier som respondentene holder (Maxwell, 2005).

I masteroppgaven prøves det oversatte instrumentet ut i en norsk kontekst. Studentenes besvarelser analyseres for å kunne gi noen indikasjoner på hvilke 'meanings' studentene har i forhold til instrumentet som er utviklet. Målet med studien er dermed å implementere instrumentet inn i en norsk kontekst, og utforske hvilke 'meanings' instrumentet avslører at studentene har. På grunnlag av dette defineres derfor studien som en *kvalitativ inquiry pilotstudie.*

4.3 Instrumentet

MMTsm består av 44 elementer. Utviklingen av instrumentet og de tilhørende scoringsrubrikkene tok tre år og blir beskrevet i Thompson (2016b, s. 455). Thompson har sammen med MMTsm-teamet[3], i løpet av disse årene laget flere utkast av alle elementene og ved å intervjue lærerne som har brukt de ulike utkastene, og ved å få matematikere og matematikklærere til å vurdere utkastene underveis, har det brukte instrumentet blitt utviklet. De ulike elementene i instrumentet fokuserer på forskjellige områder som er sentrale i den videregående skolen. Det er utviklet flere elementer til hvert emne slik at respondentene blir testet i å uttrykke sine 'meanings' i ulike settinger. Instrumentet belyser flere ulike områder, disse er listet opp under (Thompson, 2016b):

- Variasjon og samvariasjon
- Funksjonsegenskaper, modellering og notasjon
- Referansesystem (ved relativ bevegelse)
- Størrelser og målinger
- Proporsjonalitet
- Endringsrate
- Gjenkjenne/identifisere strukturer

Elementene varierer i utforming. Noen elementer er flervalgsoppgaver, noen er tekstoppgaver, mens andre er regneoppgaver. Siden det er studentenes 'meanings' som er sentral, må alle elementene løses uten hjelpemidler. På grunn av dette blir mindre aritmetiske feil ignorert i scoringsrubrikkene.

Instrumentet består av to deler, en animasjonsdel og en skriftlig del. Hver student får totalt to timer på seg til å gjennomføre instrumentet. Instrumentet starter med en 20 minutters animasjonsfilm. De fem første elementene er relatert til animasjonen og spørsmålene blir presentert både på animasjonen, ved at en kommentatorstemme leser oppgaveteksten, og skriftlig. Studentene har varierende tid på de ulike animasjonselementene. Hvor lang tid de har på hvert element blir presentert før spørsmålet stilles, og kommentatoren annonserer når det er ett minutt igjen og 30 sekunder igjen av hvert av elementene i animasjonen. Etter animasjonsdelen starter del to. I denne delen blir alle oppgaver og spørsmål presentert skriftlig. Studentene har 100 minutter på å besvare de resterende 39 elementene. Hvor lang tid de bruker på hvert element er nå opp til hver enkelt.

[3] Medlemmene av MMTsm-teamet er Stacy Musgrave, Ioanna Mamona, Cameron Byerley, Neil Hatfield, Hyunkyoung Yoon, Surani Joshua, Ben Whitmire, Mark Wilson, Karen Draney, Perman Gochyyev, Diah Wihardini, Dong Hoon Lee og JinHo Kim (Thompson, 2016b).

4.3.1 De utvalgte elementene
Som nevnt innledningsvis, omfatter masterstudien kun de elementene som tilhører emnene funksjonsegenskaper, modellering og notasjon. Dette utgjør totalt ti elementer. Elementene er vedlagt i vedlegg 1.

4.4 Valg av respondenter og beskrivelse av metode
Å velge ut respondenter er en sentral del av forskningen. Hvor mange respondenter som skal velges og på hvilken måte de velges ut er viktige beslutninger som må tas i forbindelse med forskningen (Christoffersen & Johannesen, 2012). Ettersom forskningsspørsmålet til både June og meg handler om lærerstudenters 'meanings', ble det satt et krav om at respondentene måtte ha minst 60 studiepoeng i matematikk. De måtte i tillegg gå på praktisk pedagogisk utdanning (PPU) eller på lektorutdanningen i realfag. Grunnen til dette er at minstekravet for å undervise på videregående skole i matematikk er 60 studiepoeng (Utdanningsdirektoratet, 2016b). De utvalgte respondentene burde derfor ha godt utviklede 'meanings' og være kvalifisert til å undervise i matematikk.

Totalt har 29 studenter gjennomført instrumentet, men på grunn av kravet om 60 studiepoeng i matematikk analyseres bare 27 av disse besvarelsene. To av studentene som meldte seg tilfredsstilte ikke dette kravet og blir derfor ikke tatt med i masterstudien. Respondentene er valgt ut ved hjelp av *kriteriebasert utvelgelse* (Christoffersen & Johannesen, 2012). For å rekruttere respondenter ble det tatt kontakt med forelesere fra lektorutdanningen og PPU ved de ulike universitetene. De ga tilgang til studenter fra deres klasser som oppfylte våre kriterier. Studentene meldte seg frivillig og June og jeg reiste sammen til de ulike universitetene i Norge for å samle inn data. Etter gjennomføring fikk alle som deltok en liten oppmerksomhet som takk for hjelpen.

Det ble samlet inn data fra ulike steder i Norge fordi datamateriale blir mer representativt. Det menes ikke at det kan generaliseres ut fra utvalget, men at det er mer representativt i den forstand at dataene ikke er sterkt ensidig ved at alle studentene har hatt all matematikkundervisning fra samme universitet. Det må poengteres at vi ikke ønsker å sammenligne de ulike utdanningsinstitusjonene.

Ved å reise til de ulike universitetene selv, sikret vi at gjennomføringen ble gjort på samme måte ved de ulike universitetene. Alle har derfor fått samme informasjon og likest mulig gjennomføring ble etterstrebet. Dette var viktig for å øke relabiliteten til datainnsamlingen. I forkant av innsamlingen ble alle godkjenninger og avtaler avklart med lærere og studenter. Respondentene ble på forhånd orientert om all relevant informasjon og de meldte seg frivillig som respondenter.

I instrumentet er det ti elementer som handler om studentens 'meanings' om funksjonsbegrepet og som har til formål å avdekke lærernes 'meanings' om funksjonsbegrepet. Elementene som er valgt ut refereres til ved hjelp av sidetall. Grunnen til dette er at det ønskes å bruke samme tall som i instrumentet, slik at det blir lettere å gjøre sammenligninger med studier som har brukt samme instrument. Element 40 for eksempel, vil derfor tilsvare oppgaven på side 40 i MMTsm.

4.5 Oversettelse- og scoringsprosess

4.5.1 Oversettelsesprosess

Ettersom MMTsm opprinnelig er fra USA, har en sentral del av metoden vært å oversette instrumentet fra engelsk til norsk. Dette startet i juni 2016. Det er flere utfordringer knyttet til oversettelsen av et instrumentet fra ett språk til et annet. Mosvold, Jakobsen og Melhus (2009) poengterer at oversettelsesprosessen og tilpasningen av et instrument kan være vanskelig. De peker på hvordan flere aspekter, slik som vanskelighetsgraden kan gå tapt i oversettelsen, da små endringer i ordlyden kan bidra til at elementene kan bli mer kompliserte eller lettere å forstå.

I oversettelsesprosessen er *back translation procedure* benyttet, som er en av de oversettelsesmetodene som er mest brukt ved oversettelse av internasjonale undersøkelser (OECD, 2005). Ved denne metoden blir oversettelsen oversatt tilbake til originalspråket for sikre overensstemmelse. I vår *back translation procedure* av MMTsm-instrumentet, oversatte June og jeg hver vår halvdel av instrumentet uavhengig av hverandre. Vi byttet deretter del og oversatte tilbake til engelsk. Vi hadde ikke sett hverandres del av instrumentet på forhånd. Dette for å forhindre at vi skulle bli påvirket av originalen når vi oversatte tilbake til engelsk. Sammen med veileder sammenlignet og diskuterte vi oversettelsene med originalversjonen, for å identifisere uoverensstemmelser og for å kvalitetssikre oversettelsen. I tillegg ble den engelske oversettelsen sendt til Thompson ved Arizona State University, slik at også han kunne hjelpe og bidra til at oversettelsen ble best mulig. Utover dette fikk vi hjelp av to professorer fra UiA til å korrekturlese og kvalitetssikre oversettelsen.

En fordel med å bruke *back translation procedure* er at den direkte sammenligningen mellom originalversjonen og den oversatte versjonen sørger for at en enklere kan vurdere kvaliteten på oversettelsen. På en annen side kan en ulempe være at når oversetterne vet at de skal oversette tilbake til originalspråket, så kan målspråket bli mer stivt og kunstig for å lette arbeidet med sammenligningen mellom de to engelske versjonene (Geisinger, 2003). Det ble tatt hensyn til denne ulempen. Sammen med veileder ble det jobbet med å forsikre at språket ble mest mulig korrekt i forhold til den norske konteksten, men også at oversettelsen var forenelig med originalversjonen.

I løpet av oversettelsesprosessen dukket det opp flere utfordringer. Nedenfor gis det eksempler på noen av dem.

For det første var det en utfordring å oversette fra engelsk til norsk slik at innholdet var i overenstemmelse med originalen. I tillegg var det vanskelig å oversette på en slik måte at innholdet passet inn i en norsk kontekst uten å endre for mye. Flere kulturelle forskjeller måtte tas hensyn til. Blant annet er det vanlig å henvende seg til lærere i USA ved hjelp av «mr.» og «mrs.» foran etternavn. I Norge henvender vi oss til lærere ved hjelp av fornavn. For at oppgaveteksten skulle passe bedre inn i den norske konteksten ble derfor «Mrs. Rosenthal» oversatt til Ida Rosenthal. På grunn av denne endringen blir studentene møtt med en tekst som er mer lik det de er vant til i den norske skolen. Også Mosvold et al. (2009) støtte på samme problem, og valgte å løse det på samme måte. En annen kulturell forskjell er bruken av høflighetsfraser i USA og Norge. Høflighetsfraser som for eksempel «please», blir ofte brukt på engelsk, men er sjeldnere brukt på norsk. Det ble valgt å beholde samme ordlyd i oversettelsen slik at forskjellen mellom den norske og den engelske versjonen ble så liten som mulig. Til gjengjeld ble amerikanske enheter endret til SI-enheter. For eksempel ble «miles per hour» endret til kilometer per time. Dette for at teksten skulle passe bedre inn i den norske konteksten.

For det andre er det viktig at innholdet i instrumentet blir bevart for å sikre at vanskelighetsgraden og innholdet samsvarer med originalen. Blant annet inneholder instrumentet flere flervalgsoppgaver. Flervalgsoppgaver blir brukt i nasjonale prøver, men er likevel ikke særlig utbredt i den norske skolen (Mosvold et al., 2009; Utdanningsdirektoratet, 2016a). Det ble likevel valgt å beholde originaloppsettet for å endre minst mulig i forhold til originalversjonen.

For det tredje var det flere utfordringer knyttet til oversettelsen av enkelte engelske ord. En utfordring var oversettelsen av ordet «output». Etter konsultasjon med flere professorer ble det valgt å beholde det engelske uttrykket, da dette er et ord som blir brukt i Norge og som burde være kjent for respondentene. Det ble også jobbet lenge med oversettelsen av ordet «meaning» når det ble brukt i elementene. På norsk kan dette ordet ha flere betydninger, blant annet mening, forståelse og oppfatning. Hvilket ord som ble valgt, var avhengig av konteksten og hva som ble mest naturlig i det norske språket. Underveis i datainnsamlingen ble vi gjort oppmerksomme på at oversettelsen av ordet «similar» kanskje ikke var helt ideell. Vi valgte å oversette det til «lignende», men flere forelesere mente at ordet «formlike» ville vært et bedre ord å bruke i den gitte konteksten. Siden datainnsamlingen allerede var godt i gang ble det bestemt at vi skulle beholde oversettelsen slik at instrumentet forble likt for alle respondentene. Om dette er en endring som burde gjøres ved en senere anledning må vurderes og diskuteres i forhold til om det vil endre vanskelighetsgraden.

4.5.2 Scoringsprosess

Patrick W. Thompson har sammen med flere kollegaer utviklet scoringsrubrikker tilhørende hvert element i instrumentet. Scoringsrubrikken har som formål å fange opp de forskjellige 'meanings' som kommer fram fra responsene (Musgrave & Thompson, 2014). Utviklingen av scoringsrubrikkene startet sommeren 2013, og er senere blitt videreutviklet og utbedret etter hvert som Thompson har vurdert flere besvarelser (Thompson, 2015).

Hvert element i instrumentet har hver sin scoringsrubrikk da det vil framkomme ulike 'meanings' fra elementene. Til tross for at scoringsrubrikkene er forskjellige, har de lik oppbygging. Hver rubrikk er delt inn i nivå symbolisert ved tall. Hvor mange nivå hver rubrikk har varierer, men felles er at alle har nivåene «0», «IDK» og «X». Disse symboliserer samme 'meaning' i alle rubrikkene. Hvis en besvarelse får score «0», betyr dette at den 'meaning' som ble uttrykt ikke passer til et høyere nivå, at det ikke er mulig å tolke besvarelsen, at det ikke er en tydelig besvarelse eller at besvarelsen ikke svarer på det elementet spør etter. At besvarelsen får score «IDK» betyr at studenten har ytret usikkerhet i forhold til hvordan elementet skal løses, og ikke noe mer. Besvarelser får scoren «X» dersom siden er blank og det ikke er gitt respons på elementet.

I alle scoringsrubrikkene symboliserer det høyeste nivået den ønskede 'meaning'. De resterende nivåene symboliserer ulike 'meanings' som ikke er like utviklet som den ønskede 'meaning'. Det poengteres at nivåene ikke brukes til å gi poeng eller en karakter på besvarelsen, og at tallkoden kun er symbol på forskjellige 'meanings', der en av dem er den ønskede 'meaning' og de andre er ulike 'meanings' som ikke er helt utviklet.

I forkant av datainnsamlingen fikk vi opplæring av Hyunkyoung Yoon, som er ph.d.-stipendiat for Patrick W. Thompson, i å score studentenes responser. Jeg deltok sammen med

June og veileder på et 16-times kurs fordelt over fire kvelder der vi fikk opplæring og ble testet i å score besvarelser. Ved å bli testet underveis forsikret vi oss selv og Yoon at vi var i stand til å score ulike besvarelser på en korrekt måte i henhold til rubrikkene.

Etter opplæring og innsamling av data startet vi med scoringen. Jeg scoret besvarelsene tilhørende mine og June sine utvalgte elementer. Også June og veileder scoret disse besvarelsene. Etter at vi var ferdige med scoringen av de utvalgte elementene sammenlignet June og jeg scoringene og diskuterte de elementene som vi ikke hadde scoret likt. Etter at vi hadde blitt enige om scoringene sammenlignet vi med veileders scoringer. Også denne gangen diskuterte vi uoverensstemmelser og forskjeller i scoringene. Ved å sammenligne og diskutere scoringene i flere omganger sikret vi oss at scorene ble så korrekte som mulig, samtidig som vi fikk diskutert nærgående hvorfor vi hadde valgt å score som vi hadde. Det var ikke alltid like lett å score besvarelsene, da de ikke alltid passet inn i rubrikkene. Ved å diskutere sammen med June og veileder fikk vi likevel plassert og forsikret oss om at scorene ble riktige. Scorene til hver enkelt student ble til slutt ført inn i et Excel-ark for å få bedre oversikt over hvilken score hver enkelt student hadde fått på de ulike elementene (se vedlegg 3).

Spørsmålene i instrumentet er designet for å oppdage 'meanings' som studenter eller lærere har. Ved å se på det høyeste nivået i scoringsrubrikkene vil jeg kunne se hvilke 'meanings' som er ønskelige. De lavere nivåene viser 'meanings' som bærer preg av misforståelser eller begreper som bare er delvis utviklet. Hvis lærerstudentene ikke kommuniserer korrekte og presise 'meanings', kan dette være med på å begrense elevenes muligheter til å utvikle en god forståelse.

4.6 Eksempel som illustrerer datainnsamlingen

Nedenfor følger et eksempel fra instrumentet der framgangsmåten fra metoden illustreres. Eksempelet viser prosessen fra oversettelsen av instrumentet til scoringen av besvarelsene. Eksemplet fokuserer på ett aspekt av studentenes 'meanings' av funksjonsnotasjon, i tillegg til studentenes forståelse av hvilken rolle hver del spiller i funksjonsdefinisjonen.

Nedenfor er et av elementene fra instrumentet avbildet. Figur 4.1 viser originalversjonen av element 40.

A function *f* over the real numbers is defined below. Circle what you would like your students to think represents the function's output.

$$f(x) = x(11-2x)(8.5-2x)$$

Here is a second function. Circle the function definition.

$$g(x) = x\sin e^{x}$$

Figur 4.1: Element 40 fra MMTsm (originalversjon på engelsk). © Arizona Board of Regents

En av utfordringene knyttet til oversettelsen av dette elementet, var oversettelsen av begrepet «output». I førsteutkastet av den norske oversettelsen ble begrepet derfor markert rødt, som vises i figur 4.2. Dette for å utheve at oversetteren ikke hadde funnet et passende norsk ord enda.

En funksjon, f, over reelle tall er definert under. Sett en ring rundt hva du ville ønsket at dine elever tenkte representerer funksjonens output.

f(x)=x(11-2x)(8.5-2x)

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen til funksjonen.

g(x) = x sin *e*^x

Figur 4.2: Førsteutkast til den norske oversettelsen av element 40.

Førsteutkastet av oversettelsen ble deretter sendt til oversetter nummer to for å bli oversatt tilbake til originalspråket. Det oppleves som vanskeligere å oversette fra engelsk til norsk enn motsatt vei. I figur 4.3 er den engelske oversettelsen avbildet.

A function, f, over any real number is defined under. Select the answer you would expect your students to think represents the functions output.

f(x)=x(11-2x)(8.5-2x)

Here is another function. Select the definition of the function.

g(x) = x sin *e*^x

Figur 4.3: Oversettelse fra norsk til engelsk.

Etter å ha oversatt tilbake til engelsk, startet prosessen med å sammenligne denne med originalversjonen. Det var vesentlig å kontrollere om vi hadde klart å fange opp poengene i de ulike elementene og om ordlyden var beholdt. Ved å sammenligne de to engelske versjonene blir det tydelig dersom det er forskjeller i ordlyden. Blant annet står det i den originale versjonen «circle», mens det i den oversatte versjonen står «select». Disse ordene har ulik betydning, men hvis man ser på den norske oversettelsen står det «sett ring rundt». Her kan man anta at mangel på engelsk-ferdigheter har påvirket ordvalget i den engelske oversettelsen. Hvis man sammenligner den norske og den engelske versjonen er disse veldig like i forhold til oppbygging og ordbruk. Dette viser at det i noen tilfeller skapte mer frustrasjon og jobb med å oversette tilbake til engelsk på grunn av manglende engelsk-ferdigheter og at dette i flere tilfeller var med på skape unødvendige diskusjoner uten at den norske versjonen egentlig var dårlig. Samtidig er en fordel med dette at vi fikk dobbeltsjekket oversettelsene og på denne måten ble helt sikre på oversettelsen ble så god som mulig. I tillegg, ved å sende den engelske versjonen til Thompson fikk vi gode og konstruktive tilbakemeldinger om hva han syntes om innholdet og hva som måtte endres og fikses på.

Som nevnt i kapittel 4.5 hadde vi utfordringer med å oversette «output» til norsk. Vi valgte som nevnt å beholde det engelske ordet i den norske oversettelsen. Vi valgte likevel å markere ordet med et anførselstegn, som vises i figur 4.4, for å markere at det er et engelsk ord som er brukt og fordi det bryter med skrivestilen.

En funksjon f, definert på de reelle tall, er gitt under. Sett en ring rundt hva du ønsker elevene dine tenker at representerer hva funksjonens 'output' er.

$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen av funksjonen.

$$g(x) = x \sin e^{x}$$

Figur 4.4: Endelig versjon av oversettelse av element 40. © Simon Goodchild

I etterkant av datainnsamlingen, gjensto scoringen av besvarelsene. Ved å benytte oss av scoringsrubrikkene til Thompson ble det forsikret at scoringene ble gjort på samme måte som tidligere. I tillegg til at fokuset på scoringene forble på studentenes 'meanings', og ikke rettet seg mot rett og galt svar. Scoringen er kvalitativ, men er kodet ved hjelp av tall. Nedenfor, i figur 4.5, er scoringsrubrikken til første spørsmål i element 40 avbildet. Som beskrevet i kapittel 4.5.2, er det høyeste nivået i rubrikken den ønskede 'meaning'. I dette tilfellet handler det om at studentenes 'meaning' tyder på at de vet hva som er en funksjons 'output'. Alle de andre nivåene er 'meanings' som er forskjellige fra Level A3. Alle scoringsrubrikkene er utformet på lignende måte som denne, men har litt forskjellige nivå utviklet i forhold til besvarelsene som Thompson har fått i tidligere forskning.

Level A3 Response:	The teacher circled the left-hand side of the definition, namely the output. $f(x) = x(11-2x)(8.5-2x)$
Level A2 Response:	The teacher circled the right-hand side and the left hand side separately. $f(x) = x(11-2x)(8.5-2x)$
Level A1 Response:	The teacher circled the right-hand side of the function`s definition (a.k.a. the rule). $f(x) = x(11-2x)(8.5-2x)$
Level A0 Response:	***Any*** of the following: - The response does not fit a higher level. - The scorer cannot interpret the response. - The response consist of scratch work with no clear indication of a final answer. - The response does not address the prompt; that is, the response is off-topic (see Purpose and Rationale). - The page contains no work, but does contain at least one mark to suggest that the teacher saw this item.
IDK Response:	The response consists only of "I don`t know", or something equivalent that suggests that the teacher is unsure of how to respond. If the teacher stated uncertainty and gave an additional response, score the response ignoring the uncertainty.
X Response:	The page is completely blank.

Figur 4.5: Scoringsrubrikk til del 1 av element 40. © Arizona Board of Regents

I noen tilfeller var det ‘meanings’ som ikke passet inn i noen av nivåene. Det ble valgt å følge scoringsinstruksene for å hindre fortolkninger. I figur 4.6 vises et eksempel på en besvarelse som ikke passer inn i et av de høyere nivåene og som dermed ble scoret «0». Dette betyr ikke at studenten ikke har en ‘meaning’ om funksjonens ‘output’, men at den ‘meaning’ som han eller hun uttrykte ikke passet inn i noen av de andre nivåene.

$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Figur 4.6: Eksempel på besvarelse som fikk score «0».

Nedenfor gis enda et eksempel på en besvarelse. Denne fikk score «1» i henhold til scoringsrubrikken. Dette elementet var relativt enkelt og greit å score. Flere elementer der besvarelsene besto av egne forklaringer var ofte vanskeligere å score. Ved at vi var tre stykker som først hver for oss scoret alle besvarelsene, for så å sammenligne, diskutere og begrunne hvorfor vi scoret som vi gjorde er jeg tilfreds med at scoringene er gjennomført på en tilfredsstillende måte.

$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Figur 4.7: Eksempel på besvarelse som fikk score «1».

4.7 Etiske hensyn

Når man gjennomfører et større forskningsprosjekt er det flere etiske hensyn å ta. Det er lovpålagt å beskytte den enkelte respondent og sørge for at den ikke blir krenket gjennom behandling av personopplysninger (Personopplysningsloven, 2000). Prosjektet benytter ingen elektroniske eller manuelle personregister som inneholder sensitive personopplysninger. Forskningen inneholder heller ingen former for *direkte personidentifiserende opplysninger* eller *indirekte personidentifiserende opplysninger* (Dalland, 2012). Alle respondentene har deltatt anonymt og med informert frivillig samtykke. Dermed inneholder ikke oppgaven sensitive personopplysninger.

Instrumentet brukes, som tidligere nevnt, ikke til å sammenligne individuelle eller institusjoner. Ingen av studentene skal kunne spores tilbake til verken institusjon eller identitet. Respondentene fikk likevel muligheten til å legge ved e-postadressen sin i et eget skriv hvis de ønsket å få en generell tilbakemelding på besvarelsene. Disse brukes ikke i forbindelse med studien, og respondentene kunne helt frivillig velge om de ønsket å motta en tilbakemelding eller ikke.

Oppgaven er beskyttet av opphavsretten (Åndsverkloven, 1961). Alle rettigheter er beskyttet og enhver bruk må derfor avtales med rettslig eier. Simon Goodchild er eier av det norske instrumentet og Patrick W. Thompson er eier av det engelske instrumentet og scoringsrubrikkene.

4.8 Validitet og reliabilitet

Validitet omhandler i hvilken grad studiens metode tar stilling til det den har tenkt å ta stilling til. En forskningsmetode kan være velbegrunnet, men man kan aldri være helt sikker på validiteten (Wellington, 2015, s. 41). Reliabilitet omhandler i hvilken grad metoden kan brukes på tvers av ulike settinger, og i hvilken grad resultatene fra studien kan bli gjentatt (Brymann, 2012). En metode har høy reliabilitet dersom forskningen kan gjennomføres i en annen setting med andre forskere, og oppnå de samme resultatene (Wellington, 2015, s. 43). For å styrke troverdigheten til masteroppgavens funn er det svært viktig å diskutere oppgavens validitet og reliabilitet.

Ekstern validitet handler om hvorvidt resultatene fra studien kan generaliseres utover sin egen kontekst (Bryman, 2012). Siden utvalget av studenter kommer fra forskjellige universiteter i Norge, anses utvalget som representativt fordi dataene ikke er sterkt påvirket av at alle studentene har tatt samme matematikkfag ved samme universitet. Derimot er utvalget for lite til at det er generaliserbart, men det vil likevel kunne indikere noe om studentenes 'meanings' om funksjonsbegrepet.

Begrepsvaliditet handler om hvorvidt man måler det man påstår (Mertens, 2015). Hele oversettelsesprosessen handlet om å styrke begrepsvaliditeten ved at innholdet i instrumentet ble bevart på en slik måte at det var god korrelasjon mellom det norske instrumentet og det godt etablerte instrumentet som er brukt i USA. På en annen side kan en svakhet med begrepsvaliditeten være at det ikke ble gjennomført intervjuer med respondentene. Grunnen til at dette ikke ble gjort er fordi studien rapporterer fra pilotstadiet. Til tross for dette er likevel pilotstudien med på å gi oppmerksomhet til instrumentet, og sier samtidig noe om studentenes 'meaning'. Beskrivelsene av studentenes 'meanings' som er analysert i masterstudien, kan bidra og være interessant i andre læringssituasjoner og kan i tillegg bidra i allerede eksisterende forskning i USA og Sør-Korea.

Et tiltak som ble gjort for å sikre validiteten er at June og jeg hele tiden har kvalitetssikret hverandres arbeid. I tillegg styrkes validiteten til forskningen gjennom en lang oversettelsesprosess. Ved å inkludere utvikleren av originalinstrumentet i oversettelsesprosessen styrkes validiteten.

Under innsamlingen av data ble det vektlagt at gjennomføringen skulle bli likest mulig på samtlige steder. I tillegg var det særlig viktig at det ble gjort på samme måte som det er blitt gjort i tidligere forskning. Dette er tiltak som ble gjort for å sikre reliabiliteten til studien.

Triangulering reduserer risikoen for ensidighet og fordomsfulle resultater ved at en studerer samme objekt fra ulike vinkler (Maxwell, 2005). På den ene siden, har det kun blitt tatt i bruk ett instrument med ett synspunkt. På den andre siden vil konseptene som belyses i instrumentet være til stede i flere av elementene. Derfor vil instrumentet belyse konseptene fra ulike vinkler, og skape en form for triangulering.

En del av datamaterialet består av analyser av besvarelsene. Dataanalysen er beskrevet i detalj, og det er gitt konkrete kriterier som ligger til grunn for analysen. I tillegg er det gitt eksempler ved hjelp av besvarelser. Dermed skulle det være mulig for andre å gjenta analysen. På grunnlag av dette bør det være mulig å etterprøve resultatene.

5. Analyse

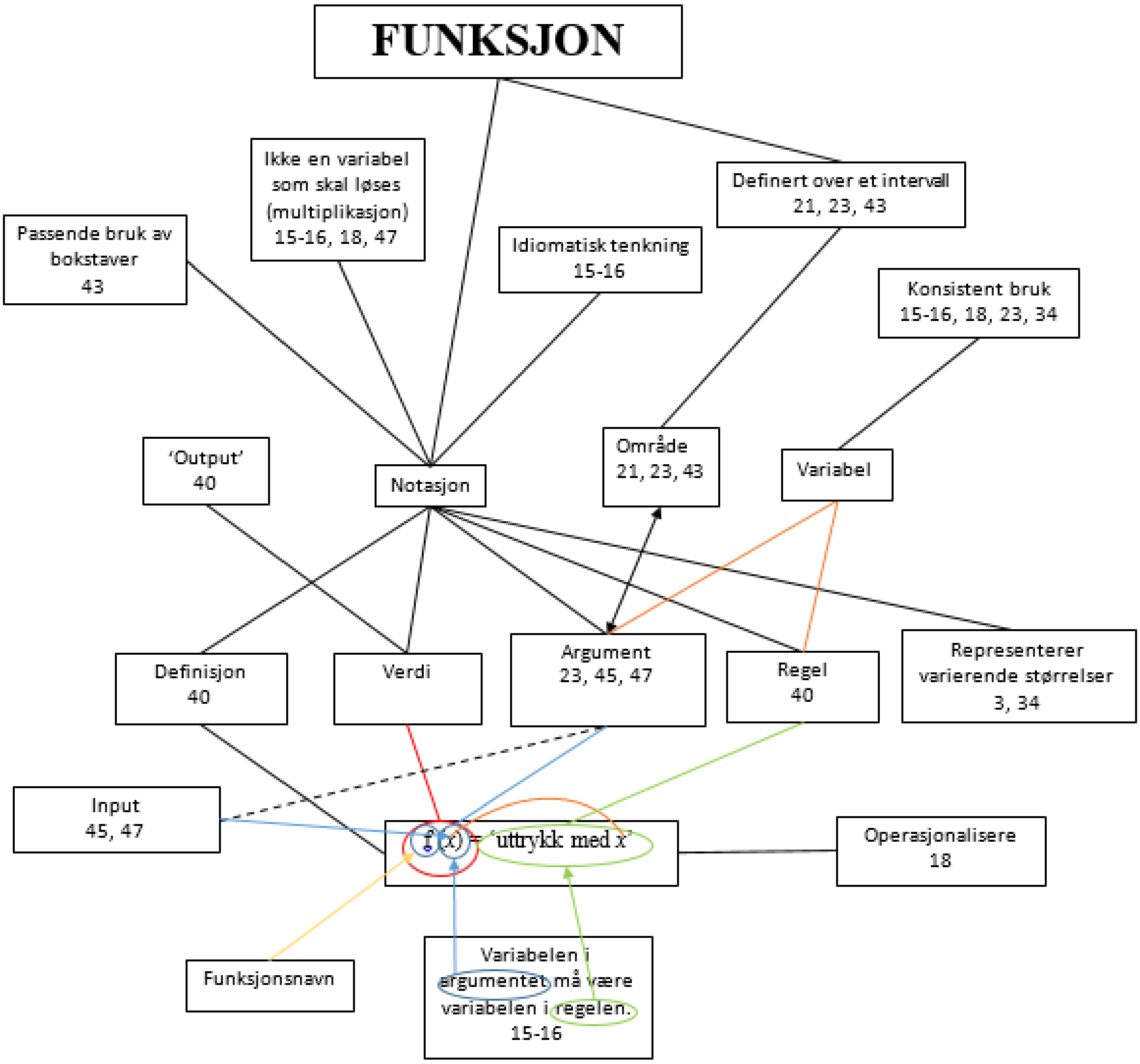
Som en del av masteroppgaven har det blitt utformet et analyseverktøy, som synliggjør studentenes individuelle 'meanings' om funksjonsbegrepet. Analyseverktøyet er basert på scoringsrubrikkene og elementene i instrumentet. Først presenteres hvordan analyseverktøyet ble utformet (5.1). Deretter presenteres utvalgte funn fra analysen av studentenes besvarelser (5.2-5.5), og til slutt beskrives begrepskartenes anvendelse (5.6).

5.1 Utforming av analyseverktøyet

Prosjektet som denne oppgaven er tilknyttet har som mål å undersøke studentene sine matematiske 'meanings'. Med dette som utgangspunkt har jeg utviklet et begrepskart som brukes til å analysere studentenes besvarelser i lys av forskningsspørsmålet, som ble presentert i kapittel 1.5.

Begrepskart ble i 1977 presentert i Novak (2010), da han så behovet for å vise hvordan nye begreper blir integrert i de kognitive strukturene. Etter den tid har utviklingen av begrepskartene fortsatt, og de varierer veldig i utforming. Fra hierarkisk kart, til nett som mer eller mindre binder sammen forholdet mellom de mentale representasjonene av den enkeltes kunnskap. Forskere har enda ikke kommet til enighet om hvilken struktur som egner seg best, men det er likevel enighet om at strukturen må passe til begrepkartets kontekst (Derbentseva, Safayeni & Cañas, 2004). Grevholm (2014) trekker fram hvor viktig begrepsforståelse er for utviklingen av matematisk kompetanse og for å klare å se kunnskapen i en større sammenheng. Begrepskart blir ofte brukt til å organisere og strukturere enkeltindividers kunnskap og kan være nyttig når en ønsker å illustrere hvordan begreper kan knyttes sammen (Williams, 1998). I dette tilfellet blir begrepskartet brukt til å utforske studentens matematiske 'meanings' og kartet er utformet som et skjema med ulike konsepter basert på elementene fra MMTsm som omhandler funksjonsbegrepet. Begrepskartene blir brukt til å synliggjøre studentenes individuelle 'meanings' om funksjonsbegrepet. I tillegg brukes det til å studere om det er fellestrekk blant studentenes 'meanings'. Kartet er utformet a posteriori og viser hvordan oppgavene er relatert til hverandre. Ved å studere de ulike elementene og scoringsmanualene er begrepene knyttet sammen, og alle begrepene knyttes til hovedbegrepet «funksjon» (se figur 5.1).

Ved å bruke begrepskartet til å analysere besvarelsene til hver enkelt student vil man kunne illustrere hvordan studentenes individuelle skjema om funksjoner ser ut, og hvordan de knytter sammen begrepene i henhold til deres 'meanings'. Begrepskart ble vurdert som et nyttig verktøy for å kunne å fange opp hvilke 'meanings' studentene har om de sentrale begrepene om funksjon fra instrumentet.



Figur 5.1: Begrepskartet som er anvendt i analysen.

Alle begrepene er knyttet sammen som i et spindelvevnett, med «funksjon» som hovedbegrep, der linjene binder sammen de ulike konseptene. Ved å finne nøkkelkonseptene tilhørende hvert element, for deretter å splitte dem opp i mer mindre og mer spesifikke konsepter, ble de ulike boksene til begrepskartet utviklet. Etter at begrepene hadde blitt knyttet sammen ved hjelp av enkle linjer, ble dobbeltpil, enkle piler, stiplet linje og farger benyttet for å markere forbindelsen mellom enkelte av begrepene.

Dobbelpilen mellom «argument» og «område» markerer den gjensidige forbindelsen mellom begrepene og er med på å tydeliggjøre at argumentet må være i funksjonens definisjonsområde. De blå enkeltpilene peker på argumentet og 'input'-verdien til funksjonen og den gule enkeltpilen peker på funksjonsnavnet. Den grønne enkeltpilen peker på regelen i funksjonsdefinisjonen. Forskjellige farger ble brukt for å markere de ulike delene som funksjonsdefinisjonen består av, for enklere å kunne skille dem. De oransje linjene mellom variabel, argument og regel er med på å markere og illustrere forbindelsen mellom variabelen i argumentet og variabelen i regelen. Den stiplete linjen markerer forbindelsen og forskjellen mellom 'input' og argument. Tallene som står under begrepene i hver boks viser til hvilke elementer fra MMTsm hvert av begrepene er knyttet til. På denne måten blir det tydeligere hvilke oppgaver som er knyttet til hverandre. Flere elementer fra MMTsm omhandler funksjonsnotasjon. De mer spesifikke begrepene som er forbundet med «notasjon» har blitt markert med tall. Begrepet «variabel» er ikke direkte knyttet til en oppgave, men er et begrep som studentene må ha kjennskap til for å kunne bruke det på en riktig og konsistent måte. Det samme gjelder «funksjonsnavn» og «verdi». Begrepene er likevel med i kartet på grunn av sin tilknytning til funksjonsbegrepet.

Ved å markere på begrepskartet hvilke begrep hver enkelt student uttrykker uklart, vil man få illustrert hvilke 'meanings' som ikke blir uttrykt tydelig nok, og hvilke deler av skjemaet som må utvikles mer.

5.2 Presentasjon og analyse av datamaterialet

Etter å ha utviklet og studert alle studentenes begrepskart virket det mest hensiktsmessig å strukturere analysen i forhold til de enkelte begrepene fra begrepskartet. Dette fordi jeg da på en ryddig måte kan fange opp og presentere hvilke 'meanings' som ble uttrykt i forhold til de ulike begrepene. Etter å ha studert alle begrepskartene, ble det valgt å fokusere på tre overordnede kategorier av funksjoner:

1) Begrepsoppfatning
2) Symbolsk bruk
3) Anvendelse

Alle studentenes besvarelser og begrepskart er analysert, men i analysen trekkes det fram de besvarelsene som best kan belyse de ulike kategoriene med sikte på å besvare forskningsspørsmålet. For å gjøre analysen mest mulig oversiktlig er hver kategori delt inn i overskrifter. Disse overskriftene gir en indikasjon på hva de eksemplifiserer, og gir en mer oversiktlig analyse. I tillegg vil det være enklere å henvise til disse overskriftene i den etterfølgende diskusjonen. Hver student sitt begrepskart kan bli sett i vedlegg 2. Elementene som det refereres til, er vedlagt i vedlegg 1.

5.3 Begrepsoppfatning

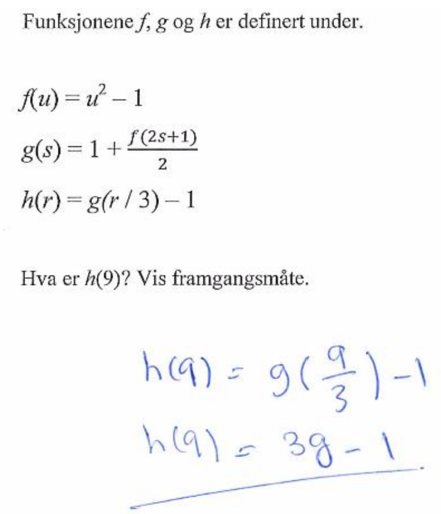
I de fire etterfølgende delkapitlene blir variasjonen av 'meanings' uttrykt av studentene i forhold til sentrale begreper knyttet til funksjoner, illustrert ved hjelp av eksempler fra studentenes besvarelser. Hvordan studentene oppfatter de ulike begrepene vil være nært knyttet til hvilke 'meanings' de uttrykker. I denne seksjonen blir det derfor rettet oppmerksomhet mot noen sentrale begreper knyttet til funksjoner.

5.3.1 Funksjonsnotasjon

Av de utvalgte oppgavene omhandler 60,0% funksjonsnotasjon. Analysen av besvarelsene viser at 21 av 27 studenter (77,8%), i ulike tilfeller uttrykker uklare 'meanings' om funksjonsnotasjon. I dette delkapittelet trekkes det fram besvarelser som viser at studentene ser på funksjonsnotasjon som multiplikasjon, eller at de ser idiomatisk på funksjonsnotasjon. Flere begreper som har tilknytning til hvilke 'meanings' de uttrykker om funksjonsnotasjon, analyseres under egne overskrifter.

Funksjonsnotasjon som multiplikasjon

De neste eksemplene som er valgt ut, viser hvordan noen studenter angivelig ser på funksjonsnotasjon som multiplikasjon. 3 av 27 studenter (11,1%) viste tegn til dette. Disse eksemplene er trukket fram fordi de viser variasjonen av ‘meanings’ om funksjonsnotasjon, og illustrerer hvordan funksjonsnotasjon kan bli sett på som multiplikasjon. Nedenfor, i figur 5.2 er element 18, sammen med besvarelsen til en student avbildet.



Funksjonene f, g og h er definert under.

$$f(u) = u^2 - 1$$

$$g(s) = 1 + \frac{f(2s+1)}{2}$$

$$h(r) = g(r / 3) - 1$$

Hva er $h(9)$? Vis framgangsmåte.

$$h(9) = g\left(\frac{9}{3}\right) - 1$$

$$h(9) = 3g - 1$$

Figur 5.2: Student 23 sin besvarelse på element 18 fra MMTsm.

Av denne besvarelsen kan det observeres at studenten bruker *g* både som funksjonsnavn og som variabel. Besvarelsen er i overenstemmelse med at studenten ser på funksjonsnotasjon som multiplikasjon når studenten skriver «*g*(9/3)» som «3*g*». Student 23 viser derimot ikke tegn til å se på funksjonsnotasjon som multiplikasjon i flere tilfeller og var den eneste studenten som viste tegn til dette i element 18.

Ved å analysere flere av besvarelsene, kommer det fram at også to andre studenter ser på funksjonsnotasjon som multiplikasjon. Nedenfor er element 47 sammen med en av studentenes besvarelser avbildet.

h er en strengt voksende funksjon definert for alle *reelle* tall. $h(b-5) = 9$ for noen tall b. Hvilken av de følgende, $(b, 9)$ eller $(b - 5, 9)$, finnes på grafen $y = h(x-5)$ når den tegnes på en kalkulator? Forklar.

Velg det beste svaret og den beste forklaringen.

a. $(b, 9)$ er på grafen fordi b er 'input' som gir 'output' 9

b. $(b, 9)$ er på grafen fordi $b-5$ er 'input' til h og funksjonen er strengt voksende.

c. $(b, 9)$ er på grafen fordi når vi løser den for h får vi $h = \frac{9}{b-5}$, som gir $y = \left(\frac{9}{b-5}\right)(x-5)$. Her vil $x =$ gi 9.

d. $(b-5, 9)$ er på grafen fordi $b-5$ er i x-posisjonen og 9 er i y-posisjonen.

e. $(b-5, 9)$ er på grafen fordi $b-5$ er 'input' som gir 'output' 9.

f. Jeg vet ikke.

Figur 5.3: Student 14 sin besvarelse på element 47 fra MMTsm.

Denne besvarelsen viser at studenten ikke ser på *h* som funksjonsnavnet, men heller som en variabel som skal løses. 2 av 27 studenter (7,41%) gav denne besvarelsen.

Slik det framgår fra figur 5.2 og figur 5.3 eksemplifiseres noen av studentenes 'meanings', og viser hvordan studentene i forskjellige situasjoner uttrykker forskjellige 'meanings' om funksjonsnotasjon.

Idiomatisk tenkning

De neste eksemplene som er valgt ut, viser hvordan noen av studentene uttrykte idiomatisk tenkning. Eksemplene viser hvordan studentene kommuniserer funksjonsnotasjon som ett symbol med fire tegn, som for eksempel at $s(t)$ er ett symbol som ikke kan skilles. Fra besvarelsene kommer det fram at 9 av 27 studenter (33,3%) har gitt besvarelser som indikerer et idiomatisk syn på funksjonsnotasjon. I tillegg til å avsløre studentenes bruk av variabler, som behandles nærmere i kapittel 5.4.1, viser analysen av besvarelsene fra element 15-16 at mange av studentene uttrykte et idiomatisk syn på funksjonsnotasjon. Nedenfor, i figur 5.4 og 5.5 er element 15-16 avbildet.

Her er to funksjonsdefinisjoner.

$w(t) = \sin(t-1)$ hvis $t \geq 1$

$q(s) = \sqrt{s^2 - s^3}$ hvis $0 \leq s < 1$

Her er en tredje funksjon c, definert i to deler, der definisjonene refererer til w og q. Plasser den riktige bokstaven i de åpne feltene under, slik at funksjonen c blir riktig definert.

$$c(v) = \begin{cases} q(\_\_\_\_) \text{ hvis } 0 \leq \_\_\_\_ < 1 \\ w(\_\_\_\_) \text{ hvis } \_\_\_\_ \geq 1 \end{cases}$$

Figur 5.4: Del 1 av element 15-16 fra MMTsm.

Pål, en elev i en R2 klasse, definerte en funksjon f for å modellere en situasjon som involverer antall mulige unike håndtrykk i en gruppe bestående av n personer. Han definerte f som:

$$f(x) = \frac{n(n-1)}{2}$$

I følge Pål sin definisjon, hva er $f(10)$?

Figur 5.5: Del 2 av element 15-16 fra MMTsm.

Ingen av studentene begrunnet sine besvarelser, men ved hjelp av scoringsmanualene og analyseverktøyet kan man se tegn til idiomatisk tenkning. Nedenfor, i figur 5.6 og 5.7 trekkes det fram to eksempler som illustrerer dette.

$$c(v) = \begin{cases} q(\underline{\ s\ }) \text{ hvis } 0 \leq \underline{\ v\ } < 1 \\ w(\underline{\ t\ }) \text{ hvis } \underline{\ v\ } \geq 1 \end{cases}$$

Figur 5.6: Student 6 sin besvarelse på del 1 av oppgave 15-16 fra MMTsm.

$$f(x) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$f(10) = \frac{10(10-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = \frac{90}{2} = \underline{\underline{45}}$$

Figur 5.7: Student 24 sin besvarelse på del 2 av element 15-16 fra MMTsm.

Samtlige besvarelser som viste tegn til idiomatisk tenking ble gjort på samme måte. Besvarelsen fra figur 5.6 samsvarer med å se på funksjonsnotasjon som et symbol med fire tegn ved at «$q(s)$» angivelig blir sett på som ett symbol som ikke kan skilles, og «$w(t)$» er et annet. Besvarelsen fra figur 5.7 er også i samsvar med å se funksjonsnotasjon som ett tegn med fire symbol, da $f(10)$ angivelig blir brukt som en merkelapp til å markere 'output' til funksjonen. Begge besvarelsene som er illustrert er derfor i overenstemmelse med å se idiomatisk på funksjonsnotasjon.

De ni studentene har i noen tilfeller et idiomatisk syn på funksjonsnotasjon. Kun to studenter viste tegn til idiomatisk tenkning i både del 1 og del 2 av element 15-16. De resterende studentene viste bare tegn til dette i ett av tilfellene. Basert på dette kan det virke som om studentene ikke har helt klare 'meanings' om funksjonsnotasjon, og hvilke 'meanings' de uttrykker avhenger av spørsmålene som stilles.

5.3.2 Argument og 'input'

I element 45 var oppgaveteksten som følger:

Gitt: $f(x + 1) = 3(x+1)^2 + 4(x + 2) + 3$

Hva er $f(2)$?

Velg svaret ditt fra denne listen.

a) 46

b) 23

c) 31

d) 27

e) 71

f) Ingen av de over. Svaret mitt er ________

g) Jeg vet ikke.

Figur 5.8: Element 45 fra MMTsm.

Hensikten med denne oppgaven er å se hva studentene uttrykker om 'input' kontra argument, og om studentene klarer å oppdage at 'input'-verdien 2 er verdien til argumentet til *f*, og ikke verdien til *x*. De ulike svaralternativene oppnås på følgende måter:

a - Studenten erstattet *x* med 2 i begge parentesene.
b - Studenten erstattet hele parentesuttrykkene med 2. Altså at *x* erstattes med 1 i den første parentesen og med 0 i den andre parentesen.
c - Studenten erstattet *x* med 1 i den første parentesen og med 2 i den andre parentesen.
d - Studenten erstattet *x* med 1 i begge parentesene.
e - Studenten erstattet *x* med å sette inn (2+1) for *x* i begge parentesene.

Samtlige studenter som responderte på oppgaven, med unntak av to, uttrykte at de klarte å skille mellom 'input' og argument. Figur 5.9 og 5.10 under viser hvordan to av studentene kommer fram til hva *f*(2) er.

Velg svaret ditt fra denne listen.

a) 46

b) 23

c) 31

d) 27

e) 71

f) Ingen av de over. Svaret mitt er 51

g) Jeg vet ikke.

$$f(2+1) = f(3) = 3(3+1)^2 + 4(3+2) + 3$$
$$= 3\cdot 4^2 + 4\cdot 5 + 3$$
$$= 3\cdot 16 + 20 + 3 =$$
$$= 28 + 23 =$$

Figur 5.9: Besvarelse fra student 24.

Velg svaret ditt fra denne listen.

a) 46

b) 23

c) 31

d) 27

e) 71

f) Ingen av de over. Svaret mitt er ________

g) Jeg vet ikke.

Figur 5.10: Besvarelse fra student 3.

Besvarelsen i figur 5.9, viser hvordan studenten begrunnet svaret sitt med å vise utregninger. Utregningene viser hvordan studenten blander sammen 'input' og argumentet, og ikke skiller mellom disse. Besvarelsen samsvarer med svaralternativ e, ved unntak av studentens aritmetiske feil. Besvarelsen i figur 5.10, viser at studenten ikke begrunner hvorfor *f*(2) er 31. Fra begge besvarelsene framgår det at 'input' og argument blandes sammen.

I likhet med element 45, er formålet med element 47 å se om studentene klarte å skille mellom funksjonenes 'input' og funksjonens argument. Derimot viser analysen av besvarelsene fra denne oppgaven at mange av studentene ikke klarte å skille mellom 'input' og argument og at de uttrykte uklare 'meanings'. I element 47 var ordlyden som følgende:

h er en strengt voksende funksjon definert for alle *reelle* tall. $h(b - 5) = 9$ for noen tall b. Hvilken av de følgende, $(b, 9)$ eller $(b - 5, 9)$, finnes på grafen $y = h(x - 5)$ når den tegnes på en kalkulator? Forklar.

Velg det beste svaret og den beste forklaringen.

a. $(b, 9)$ er på grafen fordi b er 'input' som gir 'output' 9

b. $(b, 9)$ er på grafen fordi $b - 5$ er 'input' til h og funksjonen er strengt voksende.

c. $(b, 9)$ er på grafen fordi når vi løser den for h får vi $h = \frac{9}{b-5}$, som gir $y = \left(\frac{9}{b-5}\right)(x - 5)$. Her vil $x =$ gi 9.

d. $(b - 5, 9)$ er på grafen fordi $b - 5$ er i x-posisjonen og 9 er i y-posisjonen.

e. $(b - 5, 9)$ er på grafen fordi $b - 5$ er 'input' som gir 'output' 9.

f. Jeg vet ikke.

Figur 5.11: Element 47 fra MMTsm.

I denne oppgaven ønsker man at studentene skal uttrykke 'meaning' a, der *b* er 'input' og *h*(*b*-5) er forbundet med 'output' på grafen *y*=*h*(*x*-5). De resterende alternativene er ulike 'meanings' som ikke er tydelige og klare nok i undervisningssammenheng, fordi de på ulike måter ikke tydelig nok skiller mellom funksjonens 'input' og argument. De ulike svaralternativene oppnås på følgende måte:

a – *b* blir sett på som 'input' og *h*(*b*-5) som det korresponderende output på grafen til *y*=*h*(*x*-5).
b – Det som er på innsiden av parentesen i funksjonsnotasjonen blir sett på som 'input', men ordnet par på grafen *y*=*h*(*x*-5) som har formen (*x*,*y*) blir gjenkjent.
c – Funksjonsnotasjon blir sett på som multiplikasjon.
d – Det som er på innsiden av parentesen i funksjonsnotasjonen blir sett på som *x*, og ordnede par blir tenkt på som (*x*,*y*) på grafer.
e - Det som er på innsiden av parentesen i funksjonsnotasjonen blir sett på som 'input', og ordnende par blir tenkt på som (input, output) på grafer.

Med andre ord er ikke besvarelsene, ved unntak av a, tydelige nok på at en funksjons 'input' er den verdien til *x* som blir satt inn i funksjonen og at funksjonens argument er en representasjon av den verdien som funksjonen evaluerer. I element 47 er *b* funksjonens ‘input’ og *b*-5 er funksjonens argument. Argument og ‘input’ er sentrale og viktige begrep som studentene burde ha klare og tydelige ‘meanings’ om. Tabellen under viser fordelingen av de ulike ‘meanings’ som studentene uttrykte i forbindelse med element 47.

Tabell 1: Fordelingen av besvarelsene på element 47 i MMTsm.

	a	b	c	d	e	f	X
Antall studenter (Prosent)	3 11,1%	3 11,1%	2 7,41%	2 7,41%	1 3,70%	4 14,8%	12 44,4%

Først og fremst er det mange av studentene som ikke har besvart denne oppgaven. Det kan være flere grunner til det, og dette diskuteres nærmere i diskusjonskapittelet. Fra tabellen framkommer det at flere av studentene har utfordringer i forhold til begrepene ‘input’ og argument. Flere av besvarelsene peker på at de ikke har utviklet en god forståelse for disse begrepene og at det i tillegg er stor variasjon og spredning i hva studentene uttrykker. De to studentene som valgte svaralternativ c, ser trolig på funksjonsnotasjon som multiplikasjon. Basert på tidligere analyse av andre oppgaver og tidligere forskning, har dette blitt observert også i andre tilfeller.

Hensikten med disse oppgavene er som nevnt å gi innsikt i hvilke ‘meanings’ studentene har om de aktuelle begrepene. Analysen viser at det er langt flere studenter som har problemer med å uttrykke seg tydelig i element 47 enn i element 45. Eksemplene viser at studentene i noen tilfeller skiller mellom de to begrepene og i andre tilfeller ikke. Med andre ord så eksemplifiserer dette at hvilke ‘meanings’ de uttrykker avhenger av konteksten og situasjonen.

5.3.3 De ulike delene i funksjonsdefinisjonen

Hvilket forhold studentene har til de ulike delene i funksjonsdefinisjonen vil påvirke hvilke ‘meanings’ de uttrykker om funksjoner. Analysen av besvarelsene viser at flere av studentene blander sammen de ulike delene. Eksemplene nedenfor gir innsikt i studentenes ‘meanings’ om de ulike delene i funksjonsdefinisjonen. I tillegg eksemplifiseres og illustreres variasjonene i studentenes ‘meanings’. Element 40 (se figur 5.12) har som mål å identifisere og avsløre studentenes forståelse av de ulike delene i funksjonsdefinisjonen. Nedenfor følger eksempler på noen av studentenes besvarelser (se figur 5.13-5.16).

En funksjon f, definert på de reelle tall, er gitt under. Sett en ring rundt hva du ønsker elevene dine tenker at representerer hva funksjonens ‘output’ er.

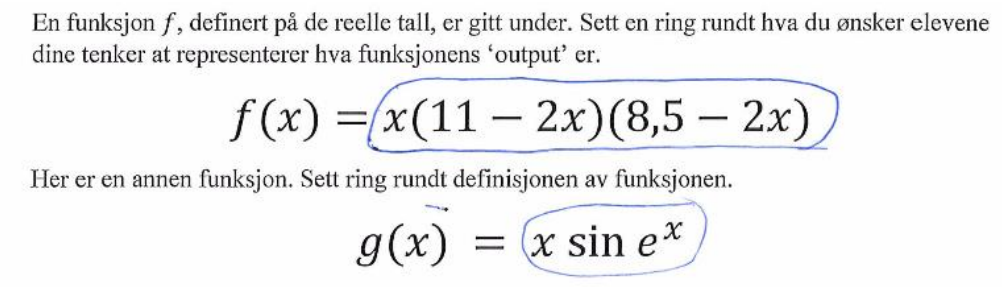
$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen av funksjonen.

$$g(x) \;=\; x \sin e^{x}$$

Figur 5.12: Element 40 fra MMTsm.

Det er særlig viktig at studentene forstår at funksjonens 'output' i oppgavens første del representeres med «*f*(x)». Dette er viktig da det kan være avgjørende for hvordan studentene bruker funksjoner og funksjonsnotasjon som representant for ukjente variabler.



En funksjon f, definert på de reelle tall, er gitt under. Sett en ring rundt hva du ønsker elevene dine tenker at representerer hva funksjonens 'output' er.

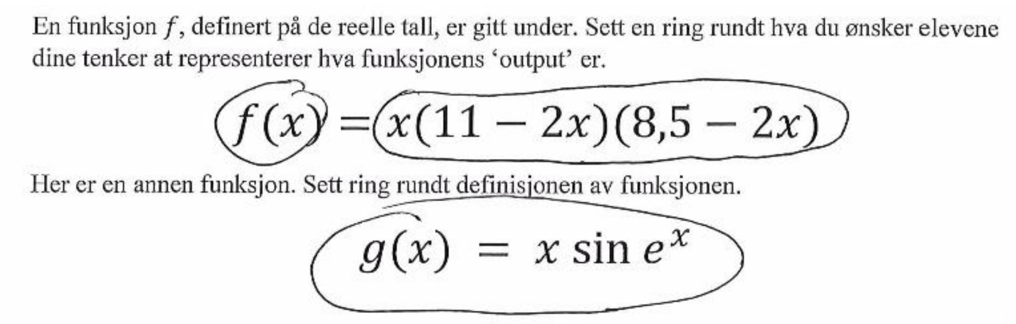
$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen av funksjonen.

$$g(x) = x \sin e^{x}$$

Figur 5.13: Student 6 sin besvarelse på element 40 fra MMTsm.

Student 6 identifiserer verken funksjonens 'output' eller funksjonens definisjon. Fra besvarelsen ser man at studenten blander sammen funksjonens 'output' med funksjonsregelen. Dette er tilfellet for ytterligere tre andre studenter. I tillegg til å vise uklar 'meaning' om 'output' uttrykte studenten at funksjonens definisjon også er regelen til funksjonen. Med andre ord uttrykte studenten at funksjonens 'output' og definisjon er det samme. Situasjonen viser hvordan mangelfull forståelse kan resultere i uheldige ytringer.



En funksjon f, definert på de reelle tall, er gitt under. Sett en ring rundt hva du ønsker elevene dine tenker at representerer hva funksjonens 'output' er.

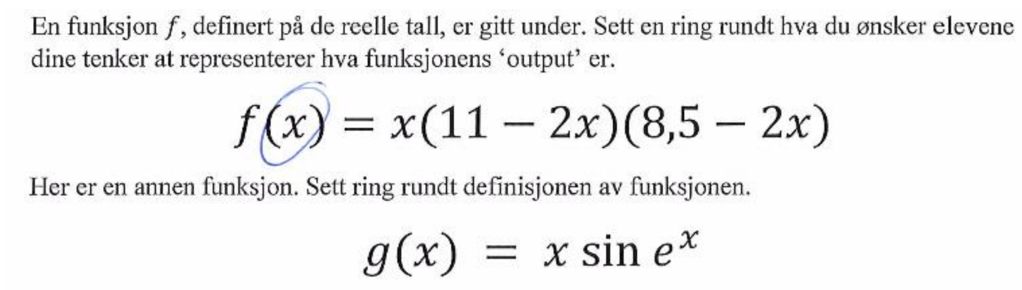
$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen av funksjonen.

$$g(x) = x \sin e^{x}$$

Figur 5.14: Student 8 sin besvarelse på element 40 fra MMTsm

Student 8 har satt ring rundt funksjonens 'output' og regel separat, og uttrykker dermed ikke tydelig nok hva som er funksjonens 'output'. Studenten har derimot satt ring rundt funksjonsdefinisjonen. Denne besvarelsen synliggjør hvordan studentene kan ha forståelse for enkelte deler av funksjonsdefinisjonen, men ikke nødvendigvis alle.



En funksjon f, definert på de reelle tall, er gitt under. Sett en ring rundt hva du ønsker elevene dine tenker at representerer hva funksjonens 'output' er.

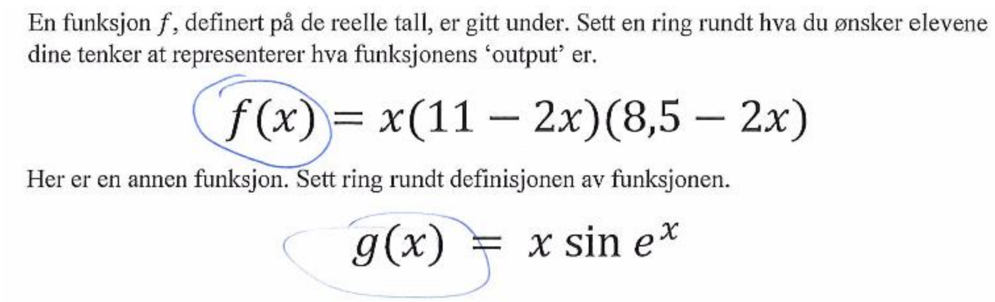
$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen av funksjonen.

$$g(x) = x \sin e^{x}$$

Figur 5.15: Student 25 sin besvarelse på element 40 fra MMTsm.

Student 25 har markert ‘input’-verdien *x*, som funksjonens ‘output’. Studenten har heller ikke respondert på hva som er funksjonens definisjon. Besvarelsen viser at rollene til hver del av funksjonsdefinisjonen ikke er tydelige for den aktuelle studenten. De resterende besvarelsene viser at 17 av 27 studenter (63,0%) uttrykte koherente ‘meanings’ om funksjonens ‘output’, men at bare 4 av 27 studenter (14,8%) har uttrykt tydelige ‘meanings’ om hva som er funksjonens definisjon.


En funksjon f, definert på de reelle tall, er gitt under. Sett en ring rundt hva du ønsker elevene dine tenker at representerer hva funksjonens ‘output’ er.

$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen av funksjonen.

$$g(x) = x \sin e^x$$

Figur 5.16: Besvarelsen til student 19 på element 40 fra MMTsm.

Besvarelsen i figur 5.16 viser hvordan en av studentene først uttrykte hva som er funksjonens ‘output’, men at han eller hun deretter setter en ring rundt ‘output’ for å markere funksjonens definisjon. Med andre ord uttrykte studenten at ‘output’ og definisjon er det samme.

Mange studenter viser manglende og ufullstendige ‘meanings’ om de ulike delene i funksjonsdefinisjonen, samtidig som over halvparten av studentene uttrykte at de vet hva funksjonens ‘output’ er. Kun 2 av 27 studenter (7,41%) har markert riktig i både del 1 og del 2 av element 40. Dette viser at mange av studentene viser usikkerhet i forhold til rollene til hver del i funksjonsdefinisjonen.

5.3.4 Funksjonsområde

Funksjonsområdet til en funksjon er settet av alle mulige ‘input’ der funksjonen er definert. Noen av elementene fra instrumentet er designet med tanke på å utforske i hvilken grad studentene tar hensyn til funksjonsområdet. I dette delkapittelet vil jeg eksemplifisere hvilke ‘meanings’ som kommer til uttrykk i forhold til funksjonsområde.

Analysen av besvarelsene som omhandler funksjonsområde, viser at mange av studentene uttrykte uklare ‘meanings’, og at mange av studentene uttrykte seg på en slik måte at det ikke passer inn i noen av de høyere nivåene, eller at responsen ikke gav noen indikasjon på et endelig svar. I figur 5.17 er del 2 av element 21 avbildet. I denne oppgaven er det sentralt at ved å ignorere «0 hvis $t < 0$», så vil Bjarte sin definisjon være udefinert for negative argumenter. Derfor vil $w(x\text{-}20)$, og også $w(x) + w(x\text{-}10) + w(x\text{-}20)$ være udefinert for x-verdier mindre enn 20. På grunn av dette vil ikke grafen synes for x-verdier mindre enn 20.

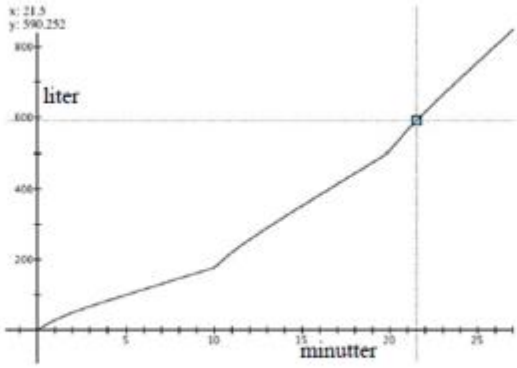
Flere maskiner pumper vann inn i et basseng. Maskinene opererer uavhengig av hverandre og blir mindre effektive over tid. Antall liter hver maskin pumper etter å ha vært i gang i t minutter er gitt av $w(t)$, der

$$w(t) = \begin{cases} (30 - 15e^{-2/t})t \text{ hvis } t > 0 \\ 0 \text{ hvis } t \leq 0 \end{cases}$$

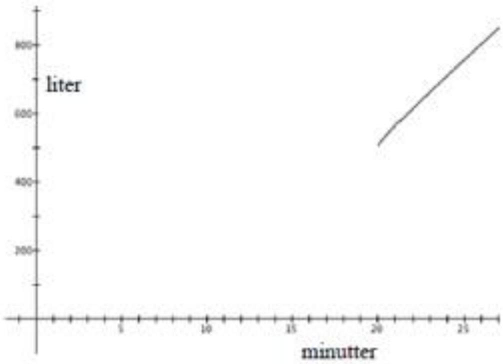
Grafen som viser

$$y = w(x) + w(x - 10) + w(x - 20), x \geq 0$$

er gitt her til høyre. Den viser antall liter i et opprinnelig tomt basseng som ble fylt med tre pumper som startet med ti minutters mellomrom.



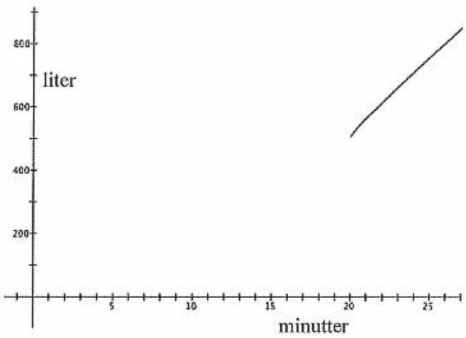
B. Bjarte definerte w slik at
$w(t) = (30 - 15e^{-2/t})t$ hvis $t > 0$,
han ignorerer «0 hvis $t \leq 0$». Grafen til
$y = w(x) + w(x - 10) + w(x - 20), x > 0$,
der Bjartes definisjon av w er brukt, er gitt til høyre. Hvorfor mangler det noen biter?



Figur 5.17: Del 2 av element 21 fra MMTsm.

De neste eksemplene (figur 5.18-5.21) viser hvilke 'meanings' studentene uttrykte om funksjonsområdet i forhold til element 21.

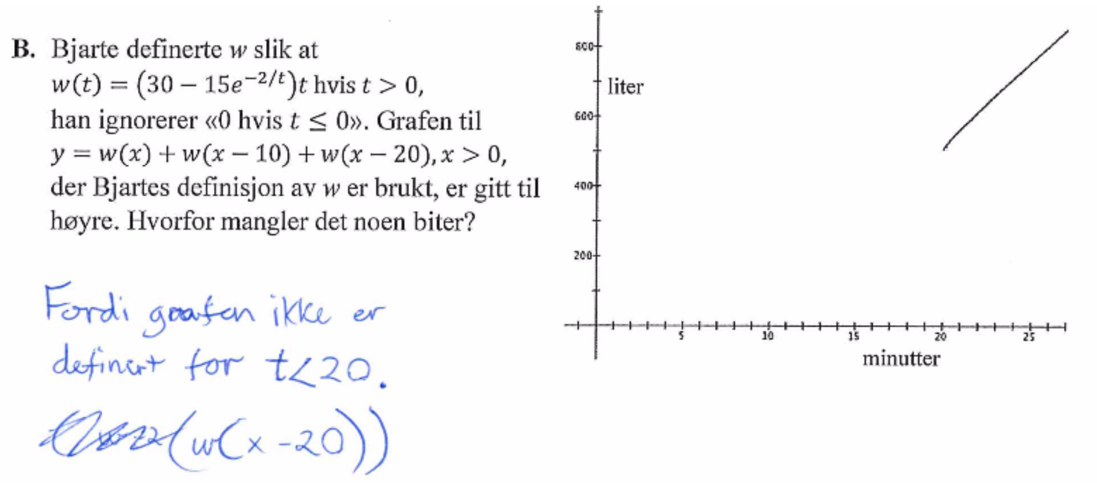
B. Bjarte definerte w slik at
$w(t) = (30 - 15e^{-2/t})t$ hvis $t > 0$,
han ignorerer «0 hvis $t \leq 0$». Grafen til
$y = w(x) + w(x - 10) + w(x - 20), x > 0$,
der Bjartes definisjon av w er brukt, er gitt til høyre. Hvorfor mangler det noen biter?



Han har regnet med x-10 og x-20 før $(x-10)>0$, og $(x-20)>0$

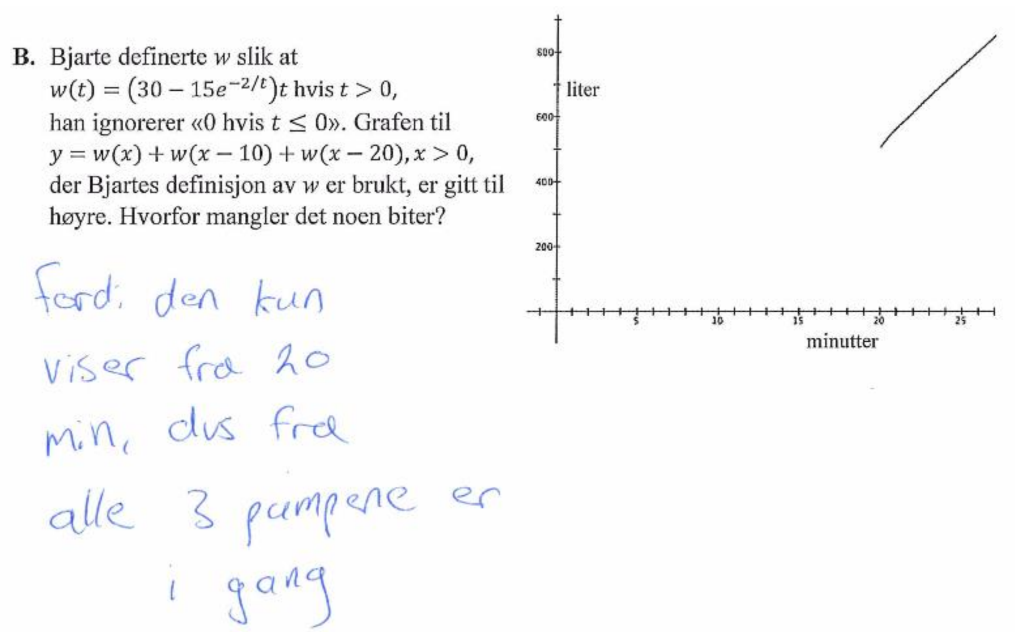
Figur 5.18: Student 3 sin besvarelse på del 2 av element 21.

Fra besvarelsen i figur 5.18, kan man se at studenten ikke har svart tydelig på spørsmålet, og på denne måten ikke uttrykker tydelig at han eller hun forstår hvorfor biter av grafen mangler. Den 'meaning' som studenten uttrykte er vanskelig for en mottaker å forstå. Totalt gav 16 studenter (59,3%) besvarelser av denne typen.



Figur 5.19: Student 6 sin besvarelse på del 2 av element 21 fra MMTsm.

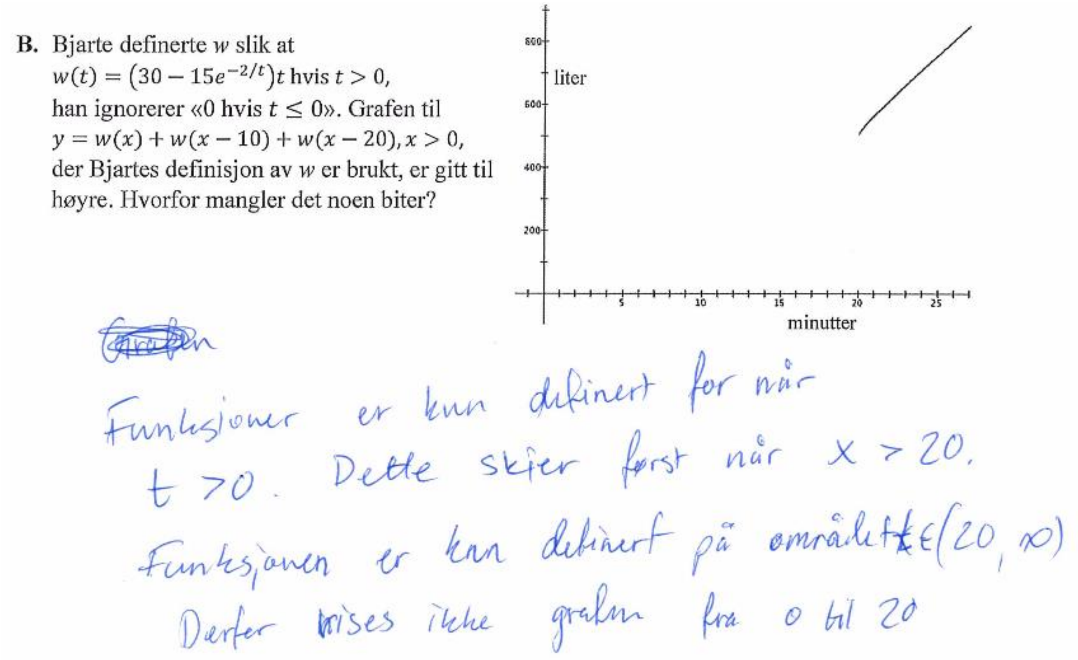
Student 6 uttrykte at grafen ikke er definert for *t* mindre enn 20. Studenten gir ikke videre forklaring, og bruker feil variabel. En annen student gav lignende besvarelse.



Figur 5.20: Student 28 sin besvarelse på del 2 av element 21 fra MMTsm.

I figur 5.20 forklarer studenten de manglene bitene av grafen kun i forhold til de tre pumpene og nevner ikke noe om hvilke områder funksjonen er definert for.

Resultatene og analysen viser at mange av studentene ikke legger vekt på funksjonsområdet til funksjonen. De tre foregående eksemplene viser besvarelser som er sammenfallende med flertallet av studentene. Mange av studentene uttrykte med andre ord mangelfulle og ufullstendige 'meanings' om funksjonsområde. Dessuten viser resultatene at bare fem av studentene (18,5%) uttrykte tydelige og klare 'meanings' om hvorfor biter av grafen mangler. Nedenfor, i figur 5.21 er besvarelsen til en student avbildet. Studenten har gitt en god forklaring på hvorfor noen biter av grafen mangler, og besvarelsen samsvarer med den 'meaning' som er ønskelig at studentene skal ha.



Figur 5.21: Student 1 sin besvarelse på del 2 av element 21 fra MMTsm.

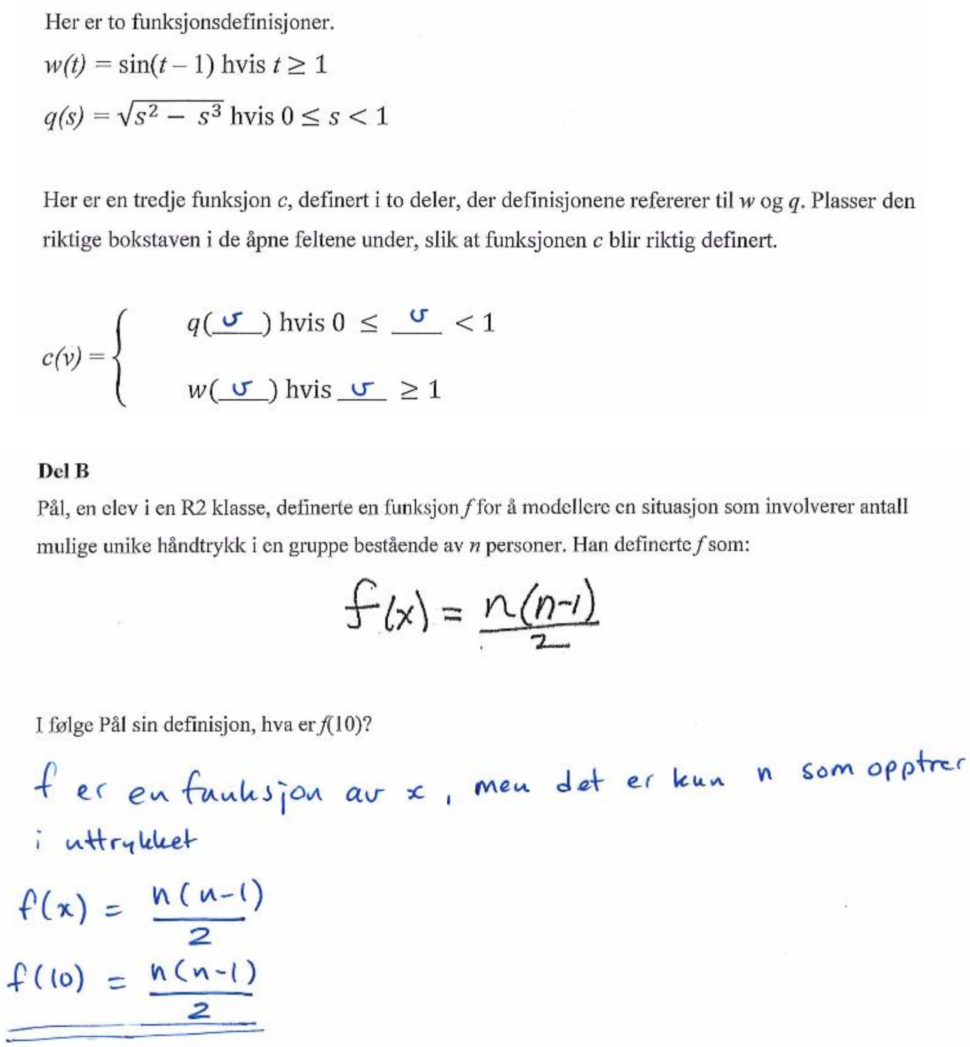
5.4 Symbolsk bruk

Under kategorien *symbolsk bruk* rettes det oppmerksomhet mot bruken av symboler i funksjoner. Fra tidligere forskning og analysen av studentenes besvarelser, kommer det fram at mange ikke er konsekvent i bruken av variabler og bokstaver. Nedenfor trekkes det derfor fram eksempler som belyser studentenes bruk av symboler.

5.4.1 Bruk av variabler og bokstaver

I flere av oppgavene fra MMTsm er riktig bruk av variabler sentralt for at den uttrykte 'meaning' skal bli presis nok. I flere av elementene fra MMTsm er bruken av variabler særlig viktig for at besvarelsene skal gi mening og være korrekt. I element 43 gis det i scoringsmanualen en egen score dersom studenten har brukt riktig variabel til å beskrive intervallet. I dette underkapittelet vil derfor studentenes besvarelser bli analysert, med fokus på hvordan studentene brukte variabler og deres bevissthet rundt riktig bruk av variabler.

I element 15-16 (se figur 5.4 og 5.5) viser det seg at mange av studentene har vanskeligheter med å sette inn passende variabler i funksjonsdefinisjonen. Likevel er flertallet av studentene bevisst på forskjellen mellom variablene som er brukt i definisjonen i figur 5.5. 8 av 27 studenter (29,6%) brukte riktig variabel i del 1 av oppgaven, og alle disse studentene, med unntak av én, uttrykte også tydelig forskjellene mellom variablene som er brukt i definisjonen i del 2 av oppgaven. Derimot brukte 19 av 27 studenter (70,4%) feil variabler i funksjonsdefinisjonen i del 1, og 11 av 27 studenter (40,7%) uttrykte uklart at variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. Dermed viser besvarelsene at flere av studentene klarte å legge merke til at variablene ikke samsvarer i funksjonsdefinisjonen, men at mange studenter sliter med å selv plassere riktige variabler i funksjonsdefinisjonen. Nedenfor, i figur 5.22 og 5.23 gis det to eksempler på besvarelser.


Her er to funksjonsdefinisjoner.

$w(t) = \sin(t-1)$ hvis $t \geq 1$

$q(s) = \sqrt{s^2 - s^3}$ hvis $0 \leq s < 1$

Her er en tredje funksjon c, definert i to deler, der definisjonene refererer til w og q. Plasser den riktige bokstaven i de åpne feltene under, slik at funksjonen c blir riktig definert.

$$c(v) = \begin{cases} q(\underline{v}) \text{ hvis } 0 \leq \underline{v} < 1 \\ w(\underline{v}) \text{ hvis } \underline{v} \geq 1 \end{cases}$$

Del B

Pål, en elev i en R2 klasse, definerte en funksjon f for å modellere en situasjon som involverer antall mulige unike håndtrykk i en gruppe bestående av n personer. Han definerte f som:

$$f(x) = \frac{n(n-1)}{2}$$

I følge Pål sin definisjon, hva er $f(10)$?

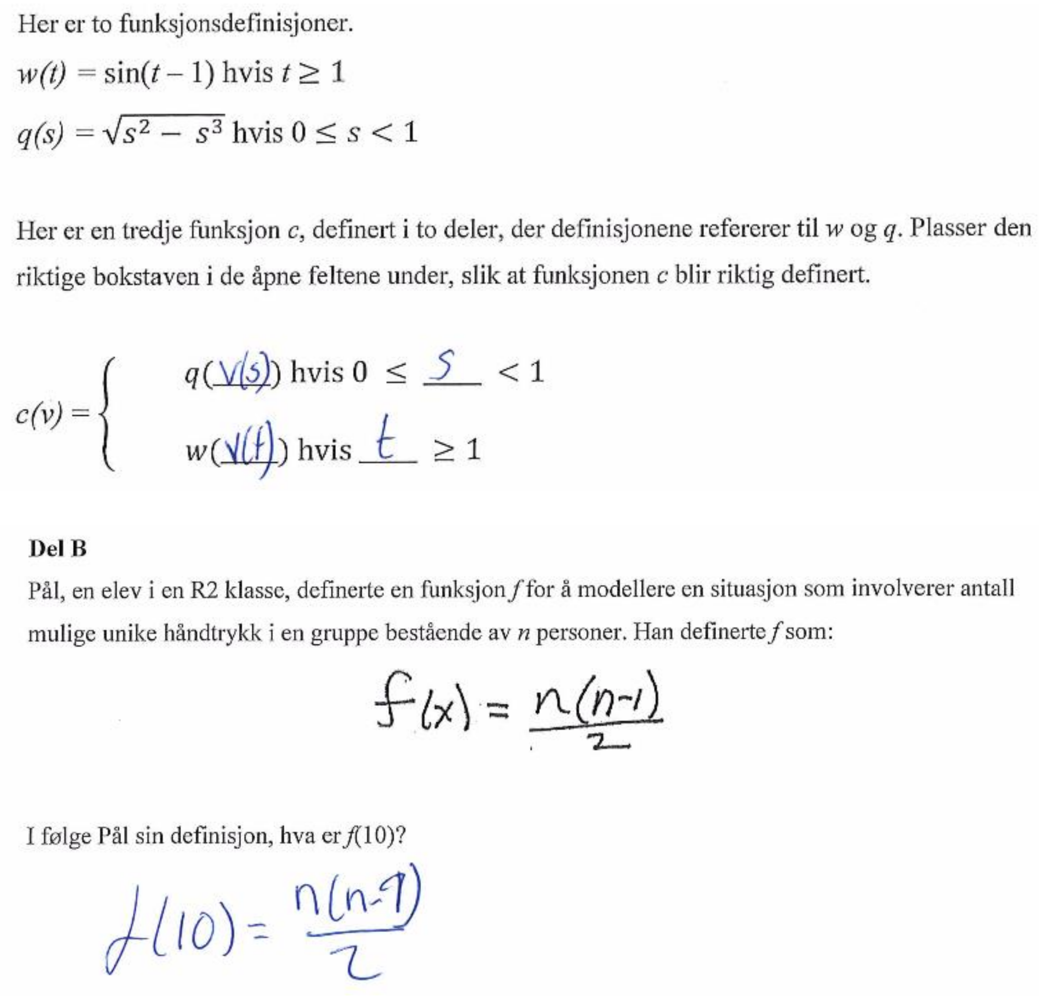
f er en funksjon av x, men det er kun n som opptrer i uttrykket

$$f(x) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$f(10) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Figur 5.22: Student 5 sin besvarelse på element 15-16 fra MMTsm.

Student 5 brukte riktig variabel i funksjonsdefinisjonen i del 1 og oppdager uoverensstemmelsen i bruken av variabler i del 2. Besvarelsen viser studentens bevissthet rundt at variabelen i en funksjon må være i overenstemmelse med bokstaven som blir brukt i regelen til funksjonen.



Her er to funksjonsdefinisjoner.

$w(t) = \sin(t-1)$ hvis $t \geq 1$

$q(s) = \sqrt{s^2 - s^3}$ hvis $0 \leq s < 1$

Her er en tredje funksjon c, definert i to deler, der definisjonene refererer til w og q. Plasser den riktige bokstaven i de åpne feltene under, slik at funksjonen c blir riktig definert.

$$c(v) = \begin{cases} q(v(s)) \text{ hvis } 0 \leq s < 1 \\ w(v(t)) \text{ hvis } t \geq 1 \end{cases}$$

Del B

Pål, en elev i en R2 klasse, definerte en funksjon f for å modellere en situasjon som involverer antall mulige unike håndtrykk i en gruppe bestående av n personer. Han definerte f som:

$$f(x) = \frac{n(n-1)}{2}$$

I følge Pål sin definisjon, hva er $f(10)$?

$$f(10) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Figur 5.23: Student 4 sin besvarelse på element 15-16 fra MMTsm.

Besvarelsen i figur 5.23 viser at studenten uttrykte seg uklart i forhold til bruken av variabler, og responsen som er gitt i del 1 er vanskelig å forstå. Studenten brukte ikke passende bokstaver til å fullføre funksjonsdefinisjonen og studentens 'meaning' blir derfor vanskelig å tolke. Responsen i del 2 er ikke tydelig nok på grunn av at studenten ikke trekker fram den inkonsistente bruken av variabler i definisjonen. Studenten sin respons vitner om at han eller hun ikke har full forståelse for bruk av variabler i funksjonsdefinisjon, og at dette dermed preger hvilke 'meanings' som blir uttrykt.

Formålet med element 18 er å undersøke hvordan lærere operasjonaliserer funksjonsnotasjon (se figur 5.29). Bruken av riktige variabler er derfor svært viktig for å klare å redefinere funksjonen. Resultatet viser at samtlige studenter brukte riktige variabler når de prøvde å operasjonalisere funksjonsnotasjon.

Element 23 (se figur 5.24) er designet for å utforske studentenes evne til å koordinere ideen om funksjonsområde og ideen om argument.

Anta at f er definert på intervallet x=0 til x=5

Ta for deg funksjonen g, der $g(t) = f(t-5)$

På hvilket intervall er g definert?

Figur 5.24: Element 23 fra MMTsm.

Funksjonen *g* er definert med hensyn på *t*, og ikke *x*. For rett svar må derfor variabelen *t* brukes. Bruk av alle andre variabler vil være feil og indikerer ubevissthet om bruken av variabler. Besvarelsene viser at bare to av studentene (7,41%) refererer til en annen variabel enn *t*. Nedenfor i figur 5.25, er besvarelsen til en student avbildet. Begge studentene gav identisk besvarelse.

Anta at f er definert på intervallet x=0 til x=5

Ta for deg funksjonen g, der $g(t) = f(t-5)$

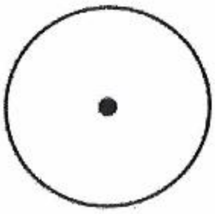
På hvilket intervall er g definert?

fra X=5 til X=10

Figur 5.25: Student 28 sin besvarelse på element 23 fra MMTsm.

I element 34 skal studentene representere varierende størrelser ved hjelp av funksjonsnotasjon. I tillegg til å bruke funksjonsnotasjon på riktig måte, må studentene bruke riktige variabler. Nedenfor er element 34, sammen med en students besvarelse avbildet (se figur 5.26). Den ønskede 'meaning' er at studenten skal bruke funksjonsnotasjon på begge sider av funksjonsdefinisjonen til å representere varierende størrelser. En god besvarelse vil for eksempel være «$A(t) = \pi r(t)^2$», da studenten bruker funksjonsnotasjon til å representere areal og radius som funksjoner av tid. Resultatene viser at alle studenter som brukte funksjonsnotasjon til å besvare elementet, 19 av 27 studenter, med unntak av en student, bruker riktige variabler. Hvordan studentene brukte funksjonsnotasjon til å representere varierende størrelser, presenteres nærmere i kapittel 5.5.1. Analysen av besvarelsen i figur 5.26, viser at han eller hun bruker funksjonsnotasjon, men at variablene *t* og *r* blir brukt inkonsistent.

Kari slapp en stein i en vannpytt slik at det oppsto sirkulære ringer som spredde seg utover. Ringens radius øker med en ikke-konstant hastighet i tiden etter at Kari slapp steinen. Bruk funksjonsnotasjon til å uttrykke arealet innenfor sirkelen som en funksjon av tiden fra steinen traff vannet?



$A_{sirkel} = \pi r^2$

$f(t, r) = \pi [r(t)]^2$, $t \geq 0$.

$r(t)$ = radius avh. av tiden t.

Figur 5.26: Student 16 sin besvarelse på oppgave 34 fra MMTsm.

Nedenfor, i figur 5.27 er element 43 avbildet.

Her er fire linjer med tekst skrevet inn i et grafprogram.

$u(p) = \frac{3}{p-1}$ hvis $3 < p < 12$ $w(r) = 2r + 10$ hvis $0 < r < 7{,}5$	Disse linjene definerer funksjonene u og w og begrenser deres input.
$A(v) = u(v) \cdot w(v)$	Denne linjen definerer funksjonen A som et produkt av u og w.
$y = A(x),\ 5 < x < 12$	Denne linjen forteller at programmet skal tegne grafen A i intervallet $5 < x < 12$.

I hvilket intervall på x-aksen vil grafen vises?

Figur 5.27: Element 43 fra MMTsm.

Det er viktig å bruke riktige variabler når grafens intervall skal beskrives. I dette tilfellet vil riktig variabel være *x*. Hvis studentene ikke har referert til en variabel når de har beskrevet hvilket intervall grafen vil dukke opp på, blir det antatt at variabelen er *x*. I tabell 2 nedenfor, vises fordelingen av studentenes bruk av variabler.

Tabell 2: Fordelingen av studentenes bruk av bokstaver i element 43 fra MMTsm.

Riktig bruk av bokstaver?	Antall studenter (Prosent)
Studenten skrev intervallet ved å bruke en annen variabel enn «*x*»	1 (3,7%)
Studenten skrev intervallet ved å bruke «*x*» som variabel	16 (59,3%)
Studenten besvarte oppgaven ved å skrive «vet ikke» eller noe lignende	1 (3,7%)
Ingen respons på oppgaven	9 (33,3%)

Fra tabell 2 kommer det fram at av studentene som besvarte oppgaven, er det bare en student som har brukt feil variabel. Flertallet av studentene uttrykte koherent 'meaning' om bruk av variabler når de presenterer intervallet hvor grafen vil vise.

Resultatene og analysen viser at flertallet av studentene, med unntak av i element 15-16, klarte å bruke variabler på en konsistent måte som er i overenstemmelse med de variablene som blir brukt i elementene.

5.5 Anvendelse

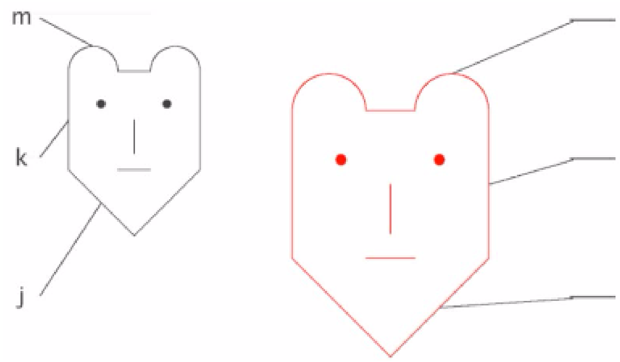
I de to etterfølgende delkapitlene presenteres resultatene og analysen av studentenes besvarelser om hvordan de anvender funksjonsnotasjon til å representere varierende størrelser og operasjonaliserer funksjonsnotasjon.

5.5.1 Uttrykke variasjon ved å bruke funksjonsnotasjon

Flere av elementene tester studentenes 'meaning' om funksjonsnotasjon. I tillegg har to av elementene som formål å undersøke hvordan studentene klarer å anvende funksjonsnotasjon til å representere varierende størrelser.

I figur 5.28 er element 3 fra animasjonsdelen avbildet. I animasjonen presenteres studentene for to formlike figurer, der den ene figuren varierer med tiden. I denne oppgaven undersøkes det om studentene velger å bruke funksjonsnotasjon til å representere lengdenes variasjon med hensyn til antall sekunder som er forløpt.

Representer lengden til hver del i figuren til høyre for å vise at de varierer med antall sekunder siden animasjonen begynte.

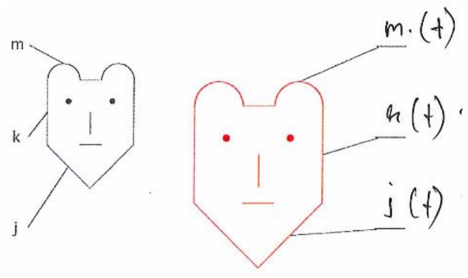
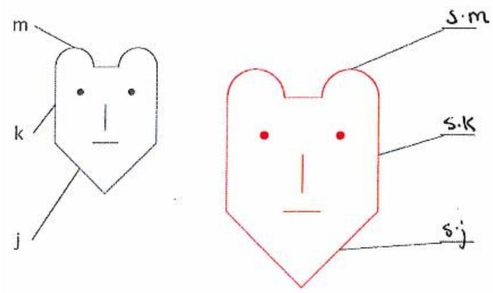
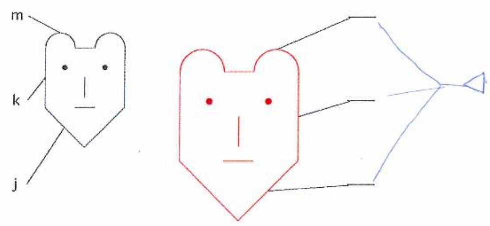
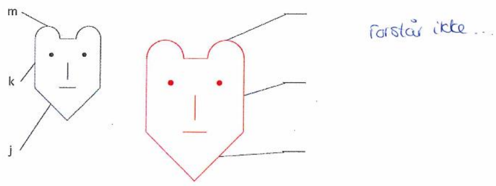
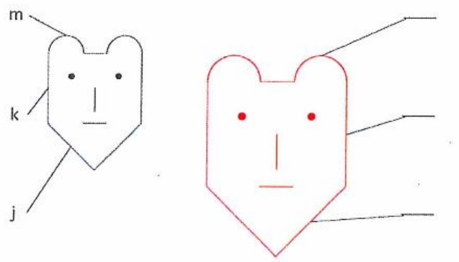


Representer lengden til kinnet i figuren til høyre i forhold til lengdene av de andre delene.

Figur 5.28: Element 3 fra MMTsm.

I tabell 3 presenteres det hvilke ‘meanings’ som ble uttrykt av studentene, sammen med fordelingen av besvarelsene, illustrert ved hjelp av eksempler. Det er ønskelig at studentene skal bruke funksjonsnotasjon til å representere sidelengdene som en funksjon av forløpt tid. 8 av 27 studenter (29,6%) har gjort dette.

Tabell 3: Fordelingen av studentenes besvarelser med tilhørende eksempler.

De ulike 'meanings' som ble presentert av studentene:	**Antall studenter** **(Prosent)**	**Eksempel på besvarelse:**
Studentene brukte funksjonsnotasjon til å representere sidelengdene som en funksjon av forløpt tid.	8 (29,6%)	
Studentene prøvde å modellere sidelengdene i forhold til tiden som er gått.	9 (33,3%)	
Responsen gir ikke mening eller gir ikke noe klart svar.	3 (11,1%)	
Besvarelsen består av «jeg vet ikke».	2 (7,4%)	
Studentene har ikke besvart spørsmålet og besvarelsen er helt blank.	5 (18,5%)	

Ifølge resultatene som ble presentert i tabell 3, er det mange av studentene som ikke bruker funksjonsnotasjon til å representere sidelengdene til figuren. Eksemplene er med på å vise mangfoldet blant studentenes besvarelser, og viser hvordan bruken av funksjonsnotasjon blir utelatt av flertallet.

Også i element 34 (figur 5.26) undersøkes det om studentene velger å bruke funksjonsnotasjon på begge sider av likhetstegnet til å representere varierende størrelser. 13 av 27 studenter (48,1%), brukte funksjonsnotasjon på begge sider av likhetstegnet til å representere areal og radius som funksjoner av tid. En student (3,70%) brukte funksjonsnotasjon til å representere radius som funksjon av tid og fire studenter (14,8%) brukte funksjonsnotasjon til å representere arealet som en funksjon av tid. Fire studenter (14,8%) besvarte ikke på oppgaven. De resterende besvarelsene (18,5%) gav ikke mening, eller gav ingen indikasjon på at studentene hadde utviklet forståelse for hvordan funksjonsnotasjon kan brukes til å representere varierende størrelser, og uttrykte dermed uklare 'meanings'.

5.5.2 Operasjonalisere funksjonsnotasjon

Flere av elementene det er referert til, utforsker studentenes 'meanings' om funksjonsnotasjon. I element 18 (se figur 5.29) undersøkes studentenes metode for å evaluere funksjoner som bruker funksjonsnotasjon i regelen.

Funksjonene *f*, *g* og *h* er definert under.

$$f(u) = u^2 - 1$$

$$g(s) = 1 + \frac{f(2s+1)}{2}$$

$$h(r) = g(r / 3) - 1$$

Hva er $h(9)$? Vis framgangsmåte.

Figur 5.29: Element 18 fra MMTsm.

I oppgaven gis det tre funksjoner, der to er definert ved andre funksjoner. Poenget med dette er å se hvordan studentene klarer å operasjonalisere funksjonsnotasjon. For å klare å dette må studentene evaluere hver funksjon ved å gi passende 'input'-verdier til funksjonenes definisjon, og bruke funksjonens 'output' til å finne verdien til $h(9)$. Alle studentene, med unntak av to studenter, klarte å operasjonalisere funksjonsdefinisjon på måten beskrevet ovenfor. En student uttrykte 'meanings' som ikke gav noen klar indikasjon på et endelig svar, mens en annen student uttrykte 'meanings' som indikerte at funksjonsnotasjon ble sett på som multiplikasjon. Alt i alt, viser resultatene og analysen av besvarelsene, at studentene i stor grad klarer å operasjonalisere funksjonsnotasjon.

5.6 Anvendelse av analyseverktøyet

Begrepskartene gir en oversikt over studentenes individuelle 'meanings' om funksjonsbegrepet, og ble utviklet etter å ha scoret besvarelsene i tråd med scoringsrubrikkene (se vedlegg 2). For å markere studentenes 'meanings' på begrepskartet, blir det brukt fargekoder. Tabell 4 gir en oversikt over de ulike fargekodene.

Tabell 4: Oversikt over anvendte fargekoder i begrepskartet, med tilhørende betydning.

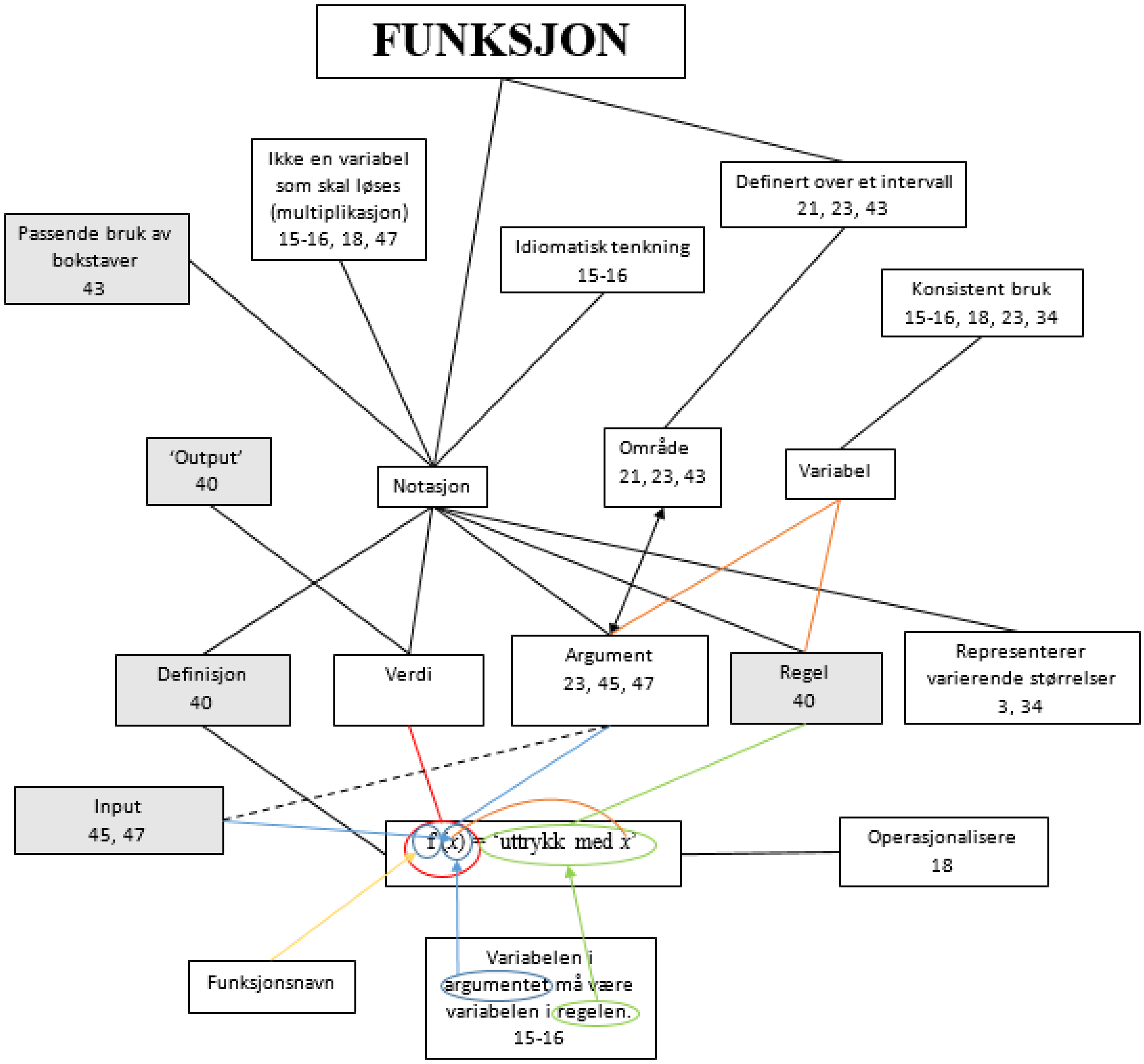
Fargekode:	Betydning:
	Hvis ett eller flere av konseptene er markert med rødt, betyr dette at studenten har uttrykt en uklar eller upresis 'meaning'.
	Hvis ett eller flere av konseptene er markert med oransje, betyr dette at studenten har uttrykt ambivalente 'meanings', altså at studenten har uttrykt både klare og uklare 'meanings' om det samme konseptet.
	Hvis ett eller flere av konseptene ikke er markert med farge, betyr dette at studenten har uttrykt en tydelig, presis og klar 'meaning' om det aktuelle konseptet.
	Hvis ett eller flere av konseptene er markert med lysegrått indikerer dette at studenten ikke har uttrykt noen 'meaning' om det aktuelle konseptet.

Det er laget ett begrepskart til hver student, og samtlige begrepskart er nummerert med et nummer for å skille dem. Ved å henvise til de enkelte studentene ved nummer fra 1-29 (student 20 og 22 oppfylte ikke kravet om 60 studiepoeng), oppnås det en tydelig referering til de enkelte studentene.

Begrepet blir markert lysegrått kun hvis studenten ikke har uttrykt noen 'meanings' om det aktuelle konseptet. Dersom flere elementer omhandler samme konsept, og studenten har besvart en av disse, men har utelatt andre, blir fargen på konseptet basert på det eller de elementene som er besvart.

Nedenfor følger tre eksempler som illustrerer tre studenter sine 'meanings' om funksjonsbegrepet. De utvalgte begrepskartene er valgt ut for å illustrere at det er store individuelle forskjeller blant studentenes 'meanings', og for å demonstrere hvordan begrepskartene er brukt.

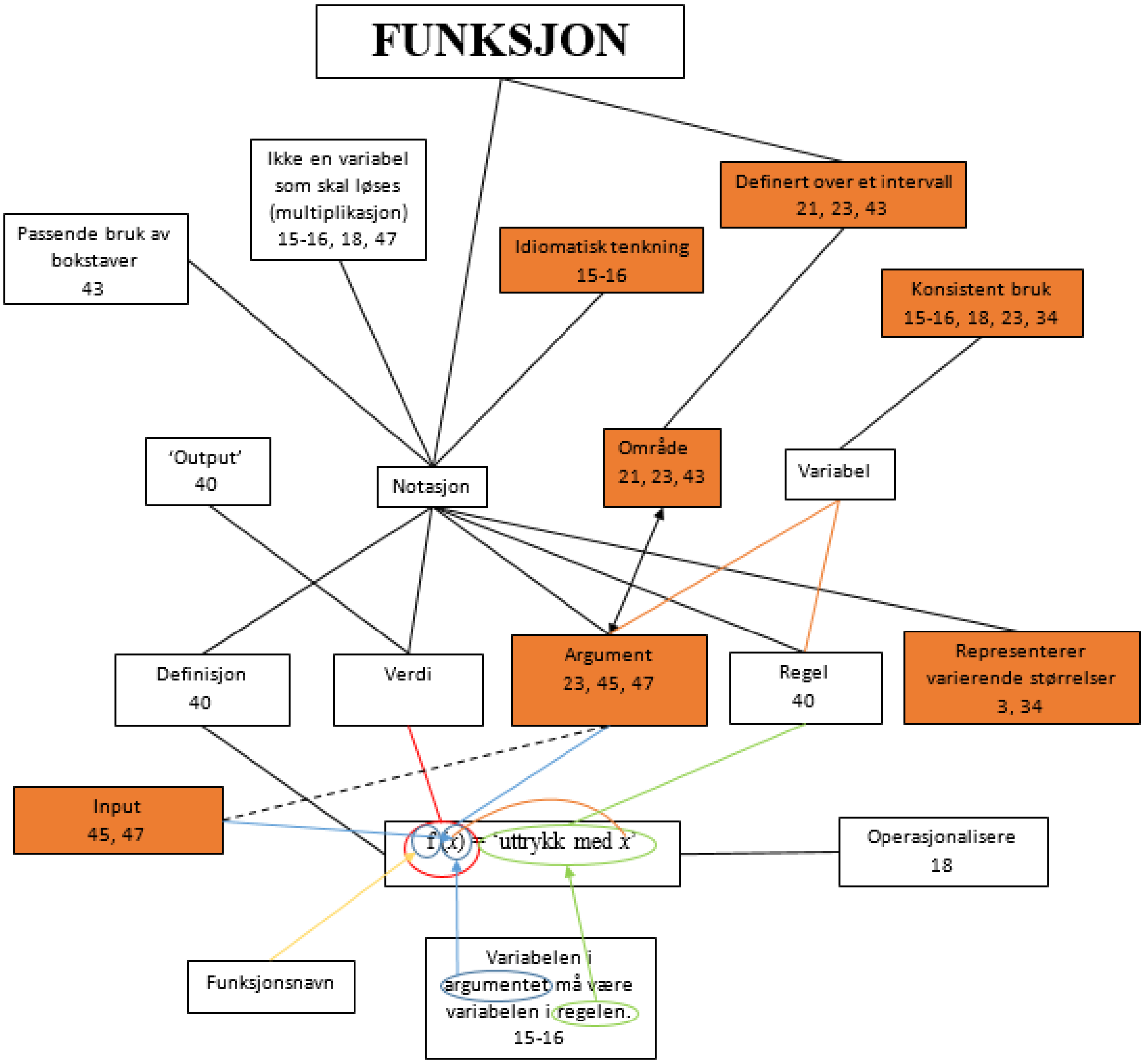
Eksempel 1 – student 5:



Figur 5.30: Begrepskartet til student 5.

Begrepskartet til studenten i figur 5.30, viser at studenten har uttrykt 'meanings' som er i tråd med instrumentet. I besvarelsen har studenten uttrykt seg tydelig, og forklart konseptene og ideene på en god og klar måte. Studenten har ikke besvart fire av elementene, det vil derfor ikke være mulig å kommentere eller vurdere studentens 'meanings' om disse konseptene. På grunn av dette, vil man ikke kunne være sikker på hvordan begrepskartet ville ha sett ut om studenten hadde besvart alle elementene. På den annen side er det nærliggende å tro at studenten også på de ubesvare elementene ville ha uttrykt seg tydelig og klart, siden studenten har uttrykt gode 'meanings' om de andre konseptene og ideene. Dessuten fokuserer flere av de ubesvarte elementene på nærliggende konsepter og ideer som noen av de besvarte elementene. På bakgrunn av begrepskartet er det mulig å konkludere med at denne studenten vil være i stand til å undervise funksjonsbegrepet på en kyndig måte. Denne studenten var den eneste som uttrykte seg tydelig om alle begrepene som ble svart på. En annen student uttrykte seg uklart i ett enkelttilfelle, men uttrykte seg ellers tydelig om samtlige begreper.

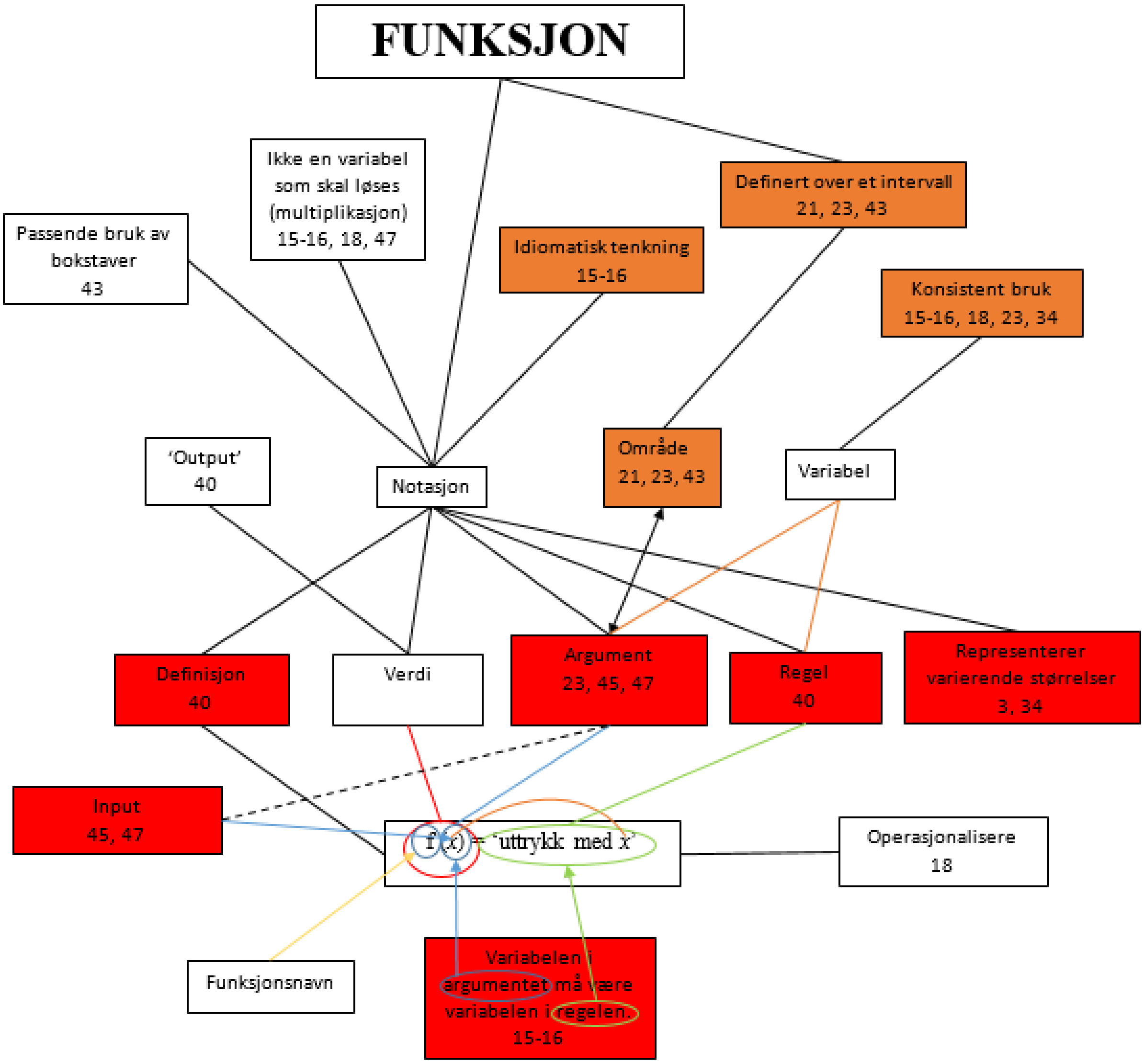
Eksempel 2 – student 12:



Figur 5.31: Begrepskart til student 12.

Student 12 uttrykte koherente 'meanings' om flere av ideene og konseptene fra instrumentet, men uttrykte seg samtidig uklart om flere av begrepene. Begrepskartet viser hvordan studentens skjema om funksjonsbegrepet ikke er helt utviklet, og at studenten uttrykte ambivalente 'meanings' om flere av konseptene. Jeg stiller spørsmål til hvorfor flere av studentene, deriblant studenten fra eksempelet, kun i noen tilfeller uttrykker inkonsistente 'meanings' om ett og samme begrep.

Eksempel 3 – student 24:



Figur 5.32: Begrepskart til student 24

Begrepskartet i figur 5.32, illustrerer at studenten ikke har fullstendig utviklet 'meanings' om funksjonsbegrepet. Studenten har uttrykt seg uklart om flere av konseptene. Begrepskartet er med på å synliggjøre hvilke konsepter studenten har uttrykt tydelige 'meanings' om. De oransje boksene viser at studenten har uttrykt ambivalente 'meanings' om noen av konseptene. Det er dermed rimelig å anta at studenten har kjennskap til disse begrepene, men at studenten kanskje ikke har forstått dem helt, og dermed uttrykker seg utydelig i noen tilfeller.

Flere av begrepene som er markert røde, er tilknyttet funksjonsnotasjon. Disse begrepene krever at studenten henter fram kunnskap, og tilhørende karakteristiske egenskaper om funksjonsnotasjon, når han eller hun uttrykker seg. Begrepskartet til studenten, viser at studenten har flere 'meanings' som ikke er fullt utviklet. Også flere av de andre studentenes begrepskart indikerte at mange 'meanings' ikke var fullstendig utviklet, og som dermed potensielt vil kunne hemme framtidige elevers læring.

Kommentarer til analyseverktøyet
Analyseverktøyet belyser hver enkelt students sine matematiske ‘meanings’ om funksjonsbegrepet ved å knytte sammen de sentrale begrepene i de ulike elementene. Begrepskartet gir et bilde av studentenes ‘meanings’ og tydeliggjør hvor svakhetene i studentenes skjema ligger. Et viktig argument for å benytte dette analyseverktøyet er at det belyser og knytter de ulike momentene i de enkelte elementene sammen. I tillegg kan studentenes ‘meanings’ lettere diskuteres i forhold til ‘meanings’ som er uttrykt om de andre begrepene. På denne måten kan man kanskje få et bedre bilde av studentenes individuelle skjema, og jeg kan på en ryddig måte presentere hvilke ‘meanings’ instrumentet avslører. Hvilke ‘meanings’ som blir uttrykt kan ha betydning for undervisningen og elevenes læring. Hvordan begrepskartene ser ut, og hvilke ‘meanings’ studentene uttrykker, kan være med på å gi implikasjoner om undervisning. Begrepskartene og studentenes ‘meanings’ blir diskutert nærmere i kapittel 6.4.

6. Diskusjon

Temaet i denne forskningsstudien er lærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet. I den forbindelse stilte jeg følgende forskningsspørsmål: *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet?* Gjennom analyse av studentenes besvarelser på elementene om funksjonsbegrepet fra MMTsm, har jeg undersøkt studentenes matematiske 'meanings'. I forrige kapittel ble analyser og funn fra besvarelsene presentert med utgangspunkt i analyseverktøyet som er utviklet. I dette kapittelet vil jeg drøfte masteroppgavenes funn i lys av teori og tidligere studier fra kapittel 2 og 3.

Diskusjonen presenteres med utgangspunkt i de tre kategoriene fra analysen, begrepsoppfatning, symbolbruk og anvendelse. Til slutt vil jeg helt kort diskutere begrepskartene og studentenes individuelle 'meanings'.

6.1 Begrepsoppfatning

Hvilke begrepsoppfatninger og hvilke 'meanings' uttrykte studentene om sentrale begreper knyttet til funksjoner? Analysen av besvarelsene har avdekket at studentene uttrykte ulike 'meanings' om de forskjellige begrepene, og at flere av studentene i mange tilfeller uttrykte seg både tydelig og utydelig om ett og samme begrep. Tidligere forskning belyser ikke dette som en utfordring blant lærerne. Ut fra måten oppgavene er designet på, ved å belyse de ulike begrepene på ulike måter, gis det likevel inntrykk av at dette er noe Thompson er opptatt av. De ulike elementene er designet for å avdekke om respondentene klarer å uttrykke tydelige 'meanings' i ulike situasjoner, og ikke bare i noen spesifikke tilfeller.

Fra studiene til Musgrave og Thompson (2014) og Thompson (2016a) blir det rapportert at flere av lærerne i USA og Sør-Korea har ufullstendige 'meanings' om funksjonsnotasjon. På bakgrunn av analysen, som viste at 77,8% av studentene uttrykte seg uklart om funksjonsnotasjon, vil jeg argumentere for at dette også er tilfellet i denne studien. Besvarelsene gir indikasjoner på at flere av studentene ikke har utviklet en god nok forståelse for funksjonsnotasjon, og at de kognitive skjemaene ikke er helt utviklet. På bakgrunn av dette vil jeg argumentere for at framtidens lærere kanskje kan hemme elevenes læring om funksjonsbegrepet, fordi de i flere tilfeller ikke uttrykker seg presist og klart. Flere av lærerstudentene uttrykte seg klart i noen tilfeller. Dette er ikke tilstrekkelig, da de gangene studentene uttrykker seg uklart om sentrale begreper, potensielt vil kunne føre til forvirring blant elevene. Mange av besvarelsene impliserer at flere av de framtidige lærerne ikke uttrykker seg klart og presist nok for å fremme elevenes læring.

Analysen viste av 3 av 27 studenter (11,1%) så på funksjonsnotasjon som multiplikasjon (jf. figur 5.2 og 5.3). Selv om dette antallet kan virke lite, vil det likevel kunne ha en negativ effekt på undervisningen og framtidens elever, fordi disse lærerstudentene vil kunne være ansvarlig for å undervise funksjonsnotasjon som multiplikasjon til et stort antall elever. På grunn av dette blir denne 'meaning' om funksjonsnotasjon trukket fram som en 'meaning' som vil kunne ha negativ innvirkning for svært mange elever.

I alle tilfellene der funksjonsnotasjon ble sett på som multiplikasjon, ble funksjonsnavnet sett på som funksjonsnavn og variabel. Jeg anser dette som en alvorlig misoppfatning, og som en misoppfatning som potensielt kan skape uheldige situasjoner i undervisning. Derimot er det viktig å trekke fram at studentene bare viste tegn til å se funksjonsnotasjon som multiplikasjon i én oppgave hver. Jeg vil argumentere for at den 'meaning' de uttrykte i de aktuelle oppgavene ikke nødvendigvis er representativt for deres generelle forståelse av funksjonsnotasjon, siden de ikke uttrykte den samme 'meaning' gjentatte ganger. På den annen side kan studentene ha utviklet flere kognitive skjema som er i konflikt med hverandre, slik som studien til Vinner og Dreyfus (1989) belyser, og at de på grunn av dette uttrykte ulike 'meanings' om funksjonsnotasjon i de forskjellige situasjonene.

Fra analysen av element 15-16 (jf. figur 5.4 og figur 5.5) observeres det at flere av studentene trolig ser idiomatisk på funksjonsnotasjon. Dette medfører at studentene ikke uttrykte funksjonsnotasjonens fulle betydning og at deres fokus rettes mot funksjonsnotasjon som ett tegn som ikke kan skilles. For eksempel ved at *q*(t) og *w*(t) blir sett på som ett symbol (jf. figur 5.4). Ved å ta i bruk analyseverktøyet, kommer det fram at alle studentene som uttrykte idiomatisk tenkning, med unntak av to studenter, uttrykte det i sammenheng med en av de to deloppgavene. Studentene som uttrykte idiomatisk tenkning i del 1 av element 15-16, fylte inn tomrommene med *t* og *s*. Det er nærliggende å tro at studentene gjorde dette fordi funksjonene det henvises til i oppgaven leses «*w* av *t*» og «*q* av *s*». I del 2, hvor studentene skal oppdage uoverensstemmelsen mellom variablene i funksjonsdefinisjonen, vil jeg trekke fram at på grunn av dårlig tid, tror jeg at noen av studentene kan ha oversett variablene og derfor bare løste *f*(9)=45, og på grunn av dette viste tegn til idiomatisk tenkning. Derimot, vil de studentene som har et idiomatisk syn ikke ta hensyn til uoverensstemmelsen mellom variablene. Uten å ha en samtale med studentene vil jeg ikke kunne utdype hva som forårsaket studentenes besvarelser, og om de faktisk har et idiomatisk syn på funksjonsnotasjon eller ikke.

Selv om majoriteten av studentene ikke uttrykte idiomatisk tenkning i mange tilfeller, er jeg likevel bekymret for hvilke 'meanings' som kan bli uttrykt i undervisningssituasjoner. I tråd med Musgrave og Thompson (2014) har jeg en mistanke om at resultat av denne type tenkning, kan være at studentene i noen tilfeller ser på det som står på høyre side av likhetstegnet som en formel, og at for eksempel *f*(*x*) bare blir sett på som et navn og som en merkelapp på formelen. Hvis man tenker på denne måten vil man trolig fokusere på å prøve å finne regler når man skal beskrive modeller. Da vil man trolig også ha vanskeligheter med å utforske funksjonsnotasjon til å representere en varierende mengde.

To andre begreper som er viktige å trekke fram i denne sammenheng, er begrepene argument og 'input'. Fra analysen av hvilke 'meanings' studentene uttrykte om disse begrepene kommer det fram variasjoner mellom oppgavene. Analysen av besvarelsene på element 45 (jf. figur 5.8) og element 47 (jf. figur 5.11) indikerte at 2 av 27 studenter (7,40%) blandet sammen 'input' og argument i element 45, og at 8 av 27 studenter (29,6%) blandet sammen 'input' og argument i element 47. Det som er interessant, og som må bemerkes i denne sammenhengen, er at studentene uttrykte veldig forskjellige 'meanings' om argument og 'input', og at analysen viser at de som har ufullstendige 'meanings' har svært ulike framgangsmåter når de besvarer elementene. I tillegg er det viktig å bemerke seg at flere av studentene ikke besvarte elementene. Grunnene til dette kan være mange. Min antakelse er at mange av studentene ikke har rukket å komme til slutten av MMTsm, og at de derfor ikke har besvart disse elementene. Mange av studentene uttrykte i etterkant av gjennomføringen at de hadde dårlig tid. En annen grunn kan være at på grunn av dårlig tid, har ikke studentene fått tid til å lese oppgavene skikkelig, og derfor uttrykt seg utydelig. På en annen side, er variasjonene av besvarelsene studentene har gitt i overenstemmelse med variasjonen av besvarelser som Thompson fant i sin forskning. Derfor er det nærliggende å tro at mange av studentene ikke er helt bevisst på forskjellen mellom de to begrepene.

Et annet moment jeg vil trekke fram som trolig kan ha påvirket studentenes besvarelser, er at det virker som flere av elementene muligens oppleves som uvanlige og annerledes. Dette kan kanskje ha påvirket studentenes besvarelser, og kan være med på å forklare hvorfor studentene uttrykte forskjellige 'meanings'. På den annen side, som lærer vil man ofte bli stilt uvanlige og annerledes spørsmål. Derfor trenger lærere klare og konsistente 'meanings' for å kunne respondere tydelig og riktig på spørsmålene som blir stilt.

Et annet viktig punkt å trekke fram i denne sammenhengen, er at resultatene viste at 6 av 27 studenter (22,2%) uttrykte uklare 'meanings' om funksjonens 'output', og 19 av 27 studenter (70,4%) uttrykte uklare 'meanings' om funksjonsdefinisjonen. Disse resultatene viser at flere av studentene ikke er bevisst på betydningen av de ulike delene av funksjonsdefinisjonen. På den annen side kan det være at studentene ikke er vant med språket og terminologien som blir brukt. Jeg er usikker på om studentene vil være kompetente til å bruke funksjonsbegrepet og notasjon, uten å være klar over og bevisst på navnene som blir gitt til de forskjellige delene. Forskningen til Thompson (2016a) viser at mange av lærerne har ufullstendige 'meanings' om 'input' og argument, og om de ulike delene i funksjonsdefinisjonen. Dette samsvarer med funnene fra denne studien.

Med utgangspunkt i det konstruktivistiske perspektivet vil jeg hevde at hvilken kunnskap studentene har om funksjoner fra tidligere, og hvordan de tolker de ulike oppgavene, vil ha betydning for hvilke 'meanings' de utrykker. I konstruktivismen vektlegges individets konstruksjon av kunnskap og de kognitive prosessene som betingelse for læring, der de kognitive prosessene struktureres i skjemaer (Jaworski, 1994; Lyngsnes & Rismark, 2014). En persons 'meanings' er en framstilling av de kognitive skjemaene og blir synlig gjennom atferden til personen (Piaget & Garcia, 1991). Studentenes forkunnskap om funksjoner vil dermed påvirke hvordan oppgavetekstene tolkes. I tillegg vil studentenes respons på elementene påvirkes av de kognitive skjemaene. Hver enkelt student har utviklet sine egne skjema gjennom assimilasjon og akkomodasjon. Ved å ta i bruk skjemaene blir studentenes 'meanings' synlige. Derfor vil de skjemaene som studentene har utviklet, være utgangspunktet for hvordan de tolker oppgavene. Hvilken kunnskap de har om funksjoner fra før av, vil derfor påvirke hvilke 'meanings' de uttrykker. Dette tror jeg kan være en av flere grunner til at det er store variasjoner i hvilke 'meanings' studentene uttrykker om de ulike begrepene.

6.2 Symbolsk bruk

Når det gjelder kategorien om symbolsk bruk, har denne gjort seg gjeldene i flere av de utvalgte elementene fra MMTsm. Variabler og bruken av variabler i funksjonsdefinisjonen er sentralt for å kunne uttrykke seg koherent om funksjoner. Oppgavedesigneren har bevisst laget oppgaver som retter seg mot bruken av variabler i funksjonsdefinisjonen når funksjonsområdet og intervallet til en funksjon skal beskrives, for å avdekke hvordan lærerne forholder seg til dette.

Studiene til Musgrave og Thompson (2014), Thompson (2016a) og Yoon et al. (2014) avdekket at mange av lærerne ikke var bevisst på bruken av variabler. Analysen av studentenes besvarelser, viste at 19 av 27 studenter (70,4%) brukte feil variabler i element 15-16, på bakgrunn av dette vil jeg argumentere for at svært mange av studentene heller ikke i denne studien viser at de har fullstendig utvikede 'meanings' om variabler. Yoon et al. (2014) hevder at lærerne som blander sammen regelen med 'output', eller regelen med definisjonen, har inkonsistent bruk av variabler. Jeg vil også hevde at dette kan være tilfellet i min studie, da resultatene viser at 13 av 19 studenter (68,4%) som brukte feil variabler blandet sammen regelen med 'output', eller regelen med definisjonen. Derimot viser analysen av de andre elementene som omhandler bruken av variabler noe annet. Flertallet av studentene har i disse oppgavene riktig bruk av variabler. 100% av studentene brukte riktige variabler i element 18, bare 2 av 27 studenter (7,4%) brukte feil variabel i element 23, og 1 av 27 studenter (3,7%) brukte feil variabel i element 34. Også i element 43 brukte bare 1 av 27 studenter (3,7%) feil variabel.

På den ene siden, tyder resultatene og analysen på at mange av studentene har problemer med å plassere og bruke variabler på riktig måte. På den annen side, ser det ut til at mange av studentene har kontroll på bruken av variabler. Det vil dermed være vanskelig å si noe om studentens forhold til variabler. Jeg vil imidlertid argumentere for at studentene ikke har god nok forståelse av variablenes funksjon når de i besvarelsene sine gir ulike uttalelser om bruken av variabler. Jeg tror imidlertid hvilke svar studentene avgir avhenger av hvordan de tolker og forstår de ulike oppgavene, og på samme måte som i Carlson (1998) sin studie, sliter studentene med å uttrykke gode og klare 'meanings' og ta i bruk kjent kunnskap når de blir møtt med ukjente oppgaver. At flere av studentene har inkonsistent bruk av funksjonsnotasjon, samsvarer med resultatene fra Thompson (2016a).

6.3 Anvendelse

Analysen av elementene som omhandler hvordan studentene anvender funksjonsnotasjon til å representere varierende størrelser, indikerer at majoriteten av studentene utelater å ta i bruk funksjonsnotasjon. Dette kan tyde på at mange av studentene ikke er komfortable med å bruke funksjonsnotasjon til å representere varierende størrelser.

I noen tilfeller ble studentene bedt om å bruke funksjonsnotasjon, i andre tilfeller ble denne informasjonen utelatt. Studentene måtte selv gjenkjenne og forstå at det i element 3 ville være fornuftig å bruke funksjonsnotasjon. Siden studentene ikke ble bedt eksplisitt om å ta i bruk funksjonsnotasjon, tror jeg at mange av studentene ikke anså dette som en mulighet (jf. tabell 3). Dersom studentene skulle besvart tilsvarende oppgaver der de ble bedt om å ta i bruk funksjonsnotasjon kan det hende at flere hadde tatt i bruk dette. På den annen side, ville man kanskje ikke ha oppdaget at flere av studentene ikke er komfortable med å benytte seg av funksjonsnotasjon. Dessuten blir studentene bedt om å bruke funksjonsnotasjon i element 34 (jf. figur 5.26). Selv om flere av studentene bruker funksjonsnotasjon, slik som de blir bedt om i oppgaven, viser besvarelsene likevel at majoriteten ikke bruker funksjonsnotasjon på begge sider av likhetstegnet når de skal representerer areal og radius som en funksjon av tid. Lignende resultater underbygges også av forskningen til Thompson (2016a), som sier at lærerne fra både USA og Sør-Korea gav responser som ikke gav mening, eller som viste at de ikke var i stand til å bruke funksjonsnotasjon på riktig måte.

I analysen betraktet jeg også studentenes besvarelser på element 18 (jf. figur 5.29), der de skulle anvende og operasjonalisere funksjonsnotasjon. Hvordan studentene evaluerer hver funksjon får konsekvenser for hvordan de uttrykker seg. Fra analysen framkommer det at 25 av 27 studenter (92,6%) klarte å operasjonalisere funksjonsnotasjon ved at de evaluerte hver funksjon ved å gi passende 'input'-verdier i funksjonsdefinisjonene, og bruker 'output' til å finne funksjonsverdien. Dermed eksemplifiserer analysen av denne oppgaven hvordan studentene klarte å anvende og uttrykke sammenhengen mellom funksjoner som er uttrykt med en annen funksjon.

6.4 Begrepskartene og studentenes individuelle 'meanings'

I kapittel 5.6 ble anvendelsen av begrepskartene beskrevet, i tillegg til at det ble gitt tre eksempler som illustrerer mangfoldet av 'meanings' blant studentene. Nedenfor diskuteres funnene fra begrepskartene nærmere.

Variasjonen i hvordan studentenes individuelle begrepskart ser ut, er med på å synliggjøre at kognitive skjemaer utvikles og konstrueres individuelt (jf.figur 5.30-5.32). Begrepskartene er med på å gi oss en idé, og synliggjør de individuelles 'meanings' om de ulike konseptene.

Begrepskartene (se vedlegg 2) viser at bare 1 av 27 studenter (3,70%) uttrykte koherente 'meanings' om alle konseptene som ble besvart, og som er i overenstemmelse med instrumentets 'meanings' (jf. figur 5.30). I følge Thompson (2013b) vil denne studenten kunne bidra positivt til elevenes læring om funksjonsbegrepet grunnet konsistente 'meanings'.

Som figur 5.31 og 5.32 er med på illustrere, var det ikke uvanlig at studentene i flere tilfeller uttrykte ambivalente eller uklare 'meanings' om ett eller flere av konseptene fra begrepskartet. Jeg tror det kan være flere grunner til dette. For det første tror jeg at mange ikke uttrykte koherente 'meanings' fordi flere av elementene var ukjente og fordi flere har vanskeligheter med å forstå hva elementene spør om. For det andre tror jeg at mange av studentene ikke har utviklet en god nok forståelse for de ulike konseptene, og at det derfor er situasjonsbestemt om de 'meanings' som uttrykkes er koherente eller ikke. I disse tilfellene kreves det at studentenes skjema revideres eller endres gjennom akkomodasjon og assimilasjon.

Utviklingen av funksjonsbegrepet har vært en omfattende og tidkrevende prosess som pågikk over flere århundrer (Atkinson, 2002; Wheeler, 1981). Jeg lurer på om dette kanskje også gjenspeiler seg i studentenes utvikling av forståelsen av funksjoner. Alle respondentene har gått mange år på skole, og funksjonsbegrepet er sentralt i store deler av skolegangen. Til tross for dette viser begrepskartene og analysen av besvarelsene, at flere av studentene ikke uttrykte seg koherent. På en annen side kan en annen grunn til dette være at de 'meanings' som har blitt presentert i undervisningen heller ikke har vært koherente. Studentene kan da ha prøvd å tolke lærernes utydelige 'meanings', og på grunn av dette har de ikke fått maksimalt læringsutbytte, og lærernes uklare 'meanings' har blitt videreført til studentene.

Alt i alt observerer jeg ved hjelp av begrepskartene og analysen at flertallet av studentene uttrykte uklare 'meanings' om funksjonsbegrepet. Jeg kan ikke si noe generelt om opphavet til hvorfor studentene uttrykte seg uklart om funksjonsbegrepet, da jeg ikke har funnet noe mønster som er gjennomgående i begrepskartene. Problemene med å uttrykke seg koherent om funksjonsbegrepet kan skyldes at studentene ikke har en god nok forståelse av funksjonsbegrepet, eller det kan skyldes et mer overflatisk problem med å tolke og forstå formuleringene i oppgavene. Ut fra besvarelsene til studentene tolker jeg det som at problemene ligger et sted mellom disse to ytterpunktene. Flere av studentene uttrykte 'meanings' som kan begrunnes i at de ikke har en god nok forståelse for nøkkelbegreper som er knyttet til funksjoner. Men flere av studentene uttrykte ambivalente 'meanings', som enten kan indikere at de ikke har en god nok forståelse eller at de har vanskeligheter med å tolke elementene. Slik det framgår fra besvarelsene har flertallet av studentene ufullstendige 'meanings' om funksjonsbegrepet og disse kan potensielt sett skape forvirring for elevene i undervisningen.

7. Refleksjoner og implikasjoner

I dette kapittelet vil jeg først presentere noen refleksjoner rundt instrumentet som er brukt i forskningen, før jeg gjør noen refleksjoner rundt studien min. Deretter vil jeg oppsummere resultater og diskusjon, med intensjon om å besvare forskningsspørsmålet mitt. Jeg vil i tillegg gi noen antydninger om hvilke implikasjoner funnene mine bør føre til i matematikkundervisningen. Siden betraktes områder for videre forskning, før jeg til slutt presenterer refleksjoner over eget arbeid.

7.1 Instrumentet og studien

Hvordan elementene og instrumentet er utformet, kan ha betydning for hvilke 'meanings' som blir uttrykt. I dette delkapittelet vil jeg reflektere rundt instrumentets svakheter og styrker.

MMTsm er i utgangspunktet ment å brukes på ferdig utdannede lærere. Jeg har derimot valgt å bruke instrumentet på studenter som snart er ferdig utdannet. Dette får noen konsekvenser for studien. Blant annet har studentene trolig lite erfaring med å forklare ulike matematiske konsepter for andre. Alle studentene har vært i praksis, men hvor mye erfaring studentene har med undervisning utenom praksis, varierer trolig veldig. På grunn av dette vil jeg argumentere for at mangelfull erfaring kan være en faktor som har hatt innvirkning på resultatene, og på hvilke 'meanings' studentene har uttrykt. Lærerne som Thompson har studert, har jobbet i mange år og har dermed lang erfaring med å uttrykke sine 'meanings' for andre. De vil derfor trolig være mer vant til å måtte forklare og uttrykke seg om de matematiske konseptene.

Instrumentet er designet for å utforske læreres matematiske 'meanings'. Som lærer vil man ha tid til planlegging og de aller fleste lærere vil trolig forberede seg godt før en undervisningstime. Før gjennomføringen av instrumentet hadde ikke studentene, eller lærerne, noen form for forberedelsestid. Studentene har derfor ikke fått tid til å forberede og repetere det aktuelle pensumet, og de 'meanings' som ble uttrykt er derfor basert på hva studentene husker fra tidligere. På den annen side vil man i undervisningssituasjoner møte på spørsmål og situasjoner som man ikke har hatt mulighet til å forberede seg på. Da må man svare ut fra det man kan fra før, på samme måte som i instrumentet. Dessuten kan det diskuteres hvor effektive studentene og lærerne ville være på å forberede seg til undervisningen hvis de ikke på forhånd har godt utviklede 'meanings'.

Et annet viktig moment som må trekkes fram, er hvorvidt de ulike oppgavene er meningsfulle for studentene eller ikke. For oppgavedesigneren og for forskerne som står bak instrumentet er alle oppgavene meningsfulle. Studentene kan muligens ha en god forståelse for de ulike emnene som instrumentet belyser, men på grunn av at elementene ikke gir mening for studentene, kan besvarelsene bli utydelige og de 'meanings' som uttrykkes kan oppfattes som uklare.

På grunn av at elementene er laget for å utforske studentenes 'meanings', er mange av spørsmålene stilt på en slik måte at man kanskje ikke direkte forstår hva som er meningen med elementet. For eksempel i element 3 (jf. Figur 5.28) er målet å se om studentene klarer å bruke funksjonsnotasjon. I oppgaveteksten blir det ikke skrevet direkte at man skal bruke funksjonsnotasjon, men at man skal representere lengdene i figuren som varierer med tiden. En ulempe med at flere av spørsmålene stilles på denne måten, er at man vil få et stort mangfold av responser, og mange av responsene vil ikke ta i bruk funksjonsnotasjon. På den annen side er det bra at spørsmålene stilles på denne måten, fordi man da vil kunne skille mellom hvem som er komfortable med å bruke funksjonsnotasjon og ikke.

Instrumentet har flere styrker. Blant annet vil jeg trekke fram instrumentets validitet. Utviklingen av det amerikanske instrumentet har ikke bare vært en kostbar og ressurskrevende prosess, men også tidkrevende. Instrumentet har blitt pilotert og testet ut flere ganger, og ved hjelp av intervjuer med lærere og tilbakemeldinger fra respondentene har instrumentet blitt videreutviklet. I tillegg er instrumentet også blitt brukt i Sør-Korea, og det er derfor godt innarbeidet siden det er blitt utprøvd i flere ulike settinger. Dette er fordelaktig når instrumentet skal brukes i forskning. Jeg mener at det norske instrumentet har høy validitet. Selv om prosessen med utviklingen av det norske instrumentet ikke har vært like tidkrevende og kostbar som i USA, har det likevel blitt investert mye tid og penger. I tillegg har flere engasjerte professorer frivillig lagt ned mye tid, for å hjelpe til med utviklingen av instrumentet.

Masterstudien er en pilotstudie. En negativ følge av dette er at studentens 'meanings' ikke blir studert i dybden. For å kunne si noe mer inngående om studentenes 'meanings', måtte jeg ha intervjuet studentene, og på grunn av studiens omfang var ikke det mulig. En annen ulempe med studien er at det ikke er en representativ studie av norske lærerstudenters 'meanings'. På grunn av for lite datautvalg kan ikke resultatene av studien generaliseres. Derimot er en av studiens stryker at instrumentet som er tatt i bruk ikke er noe som jeg selv har utviklet, men det er et instrument som er en del av et større prosjekt som utforsker matematiske 'meanings'.

7.2 Konklusjon

I denne studien har jeg studert studenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet. Forskningsspørsmålet mitt var som følgende: *Hva avslører instrumentet MMTsm når det blir brukt til å utforske norske matematikklærerstudenters matematiske 'meanings' om funksjonsbegrepet?*

Basert på masteroppgaven i sin helhet, har jeg funnet ut at instrumentet avslører et stort mangfold av ulike 'meanings' om funksjonsbegrepet. Det er ikke blitt funnet et mønster i studentenes svakheter og styrker knyttet til hvilke 'meanings' de uttrykker om funksjonsbegrepet. En student kan kommunisere og uttrykke klare og tydelige 'meanings' på ett område, og en annen kan gjøre det samme på et annet område. Instrumentet avslører derimot at flere av studentene ikke har fullt utviklet 'meanings' om funksjonsbegrepet og at de i mange tilfeller uttrykker seg uklart. På bakgrunn av dette vil jeg i likhet med Musgrave og Thompson (2014) og Thompson (2013b) foreslå at det må fokuseres mer på 'meanings' i matematikkutdanningen slik at de 'meanings' som blir uttrykt i undervisningen, kan fremme elevenes læring.

7.3 Implikasjoner for matematikkundervisningen

Innledningsvis omtalte jeg norske lærerstudenters svake undervisningskompetanse i brøk, desimaltall og prosentregning, og i teorien omtalte jeg hvordan Thompson (2013b, 2016b) påpeker at man trenger mer kunnskap om studenters 'meanings', for å kunne påvirke undervisningen slik at den blir mer effektiv for elevenes læring. På bakgrunn av masteroppgavens funn og tidligere teori, kommer det fram at flere av lærerstudentene ikke har fullstendig utviklete 'meanings' om funksjonsbegrepet. Selv om jeg ikke kan argumentere for at disse resultatene er representative for norske studenter, viser likevel funnene at flere studenter viser mangelfulle 'meanings' om funksjonsbegrepet. Hvilke implikasjoner gir dette for undervisningen av matematikk? Dette vil jeg reflektere over i avsnittene nedenfor.

I masterstudien er det blitt observert at flere av studentene har ufullstendige ‘meanings’ om flere elementære begreper og ideer som er knyttet til funksjonsbegrepet. Dette impliserer at lærere og professorer på universitetsnivå ikke kan ta disse elementære begrepene og ideene for gitt. Mange av begrepene blir trolig repetert i førsteårskurs, men forventes at forstås i senere kurs. Derimot viser studentenes ‘meanings’ at de fremdeles ikke har forstått begrepene tilstrekkelig, og at de uttrykker seg uklart. På grunn av dette burde de elementære begrepene bli repetert oftere, slik at studentene får tid til å utvikle god forståelse og koherente ‘meanings’.

Forskerne bak MMTsm hevder at mer kunnskap om ‘meanings’ vil kunne øke fokuset på viktigheten og betydningen av lærernes undervisning, spesielt i forhold til å oppdage hvilke ‘meanings’ som ikke er helt utviklet. Enda mer kunnskap om ‘meanings’ vil kanskje kunne bidra til en økt bevissthet rundt hvilken betydning ulike ‘meanings’ kan ha for elevenes læring.

I samsvar med den konstruktivistiske teorien tyder funnene i studien på at det vil være nyttig at lærerne er bevisste på sine ‘meanings’, slik at den enkelte kan utvikle og revidere eksisterende kunnskap. På denne måten kan økt bevissthet rundt sine egne ‘meanings’ bidra til at kvaliteten på undervisningen blir bedre. Jeg tror at mange lærere og studenter ikke er bevisst på hvilke ‘meanings’ de har, og dermed ikke tenker over hva de faktisk formidler gjennom undervisningen. Ved at lærerne og studentene blir mer bevisste på hvilke ‘meanings’ de har, vil de lettere kunne planlegge og gjennomføre undervisningen på en læringsfremmende måte.

7.4 Videre forskning

Siden masteroppgaven er en pilotstudie er det flere områder som burde utforskes mer. Først og fremst ville det ha vært interessant å undersøke studentenes ‘meanings’ om de resterende emnene fra instrumentet. Dette ville trolig kunne gitt et større bilde av hvilke ‘meanings’ de kommende lærere har.

Det ville i tillegg har vært interessant å intervjue studentene slik at de fikk begrunnet sine besvarelser, i tillegg til å observere studentene i aksjon i klasserommet. Omfanget av denne oppgaven var ikke stort nok, men ved å intervjue og observere ville man ha fått en dypere innsikt i studentenes ‘meanings’. Dessuten ville jeg trolig ha fått et innblikk i hvordan studentenes holdninger og tanker om de ulike emnene påvirker hvilke valg som blir tatt i undervisningen.

Videre ville det ha vært interessant å undersøke et større utvalg av studenter sine ‘meanings’, slik at det i større grad ville vært mulig å generalisere funnene. Det ville også ha vært interessant å studere ferdig utdannede lærere som har vært i jobb i flere år, for å se hvilke ‘meanings’ de uttrykker i undervisningen. Da ville det muligens vært lettere å sammenligne med Thompsons tidligere studier, siden respondentene ville ha hatt en likere bakgrunn, i tillegg til at samtlige respondenter ville ha hatt lang erfaring med å kommunisere og uttrykke seg i undervisning.

7.5 Refleksjoner over eget arbeid

Innledningsvis presenterte jeg hvordan jeg selv har erfart betydningen av at lærerne uttrykker seg tydelig og koherent i matematikkundervisningen. I forbindelse med masteroppgaven har jeg fått lest enda mer litteratur på området og har fått et større innblikk i hvilke 'meanings' som blir presentert av noen studenter om funksjonsbegrepet. Det har vært en lærerik og spennende prosess, til tross for at det til tider har vært veldig vanskelig.

Når jeg nå ser tilbake på tiden som har gått siden jeg startet med masteroppgaven, ser jeg tilbake på prosessen med stolthet. Jeg har lært enormt mye, ikke bare om matematiske 'meanings', men også om hvordan det er å delta i et større forskningsprosjekt. Jeg føler meg heldig som har fått lov til å delta i Thompson sitt forskningsprosjekt, og på grunn av dette har fått et innblikk i hvordan matematikkdidaktikere kan gå fram i forskningen.

Mitt hovedmål med masteroppgaven var å få et innblikk i hvilke matematiske 'meanings' instrumentet avslørte om funksjonsbegrepet. Dette har jeg fått, og etter en lang prosess med oppgaven, sitter jeg nå igjen med flere tanker om hvordan jeg som lærer kan være med på å påvirke elevenes læring ved å uttrykke klare og tydelige 'meanings'. Jeg tror at masteroppgaven har hjulpet meg til å bli enda mer bevisst på hvordan jeg ønsker å uttrykke meg om funksjonsbegrepet. I tillegg har den også hatt innvirkning på, og kommer til å ha følger for min bevissthet rundt formidling i undervisningen. Jeg har hele tiden vært klar over at lærerens måte å formidle forskjellige matematiske ideene og begreper har betydning for elevene, men denne studien har gjort at jeg har blitt enda mer bevisst på mine egne 'meanings'. Dette er erfaringer som vil være verdifulle å ta med seg inn i jobben som lærer. Nå som jeg skal begynne i jobb til høsten, ser jeg fram til å ta i bruk erfaringene jeg har gjort meg med masteroppgaven, og jeg ser fram til å undervise matematikk, der målet mitt er at elevene skal utvikle en god forståelse for faget.

8. Referanseliste

Atkinson, L. (2002). Where do functions come from? *The College Mathematics Journal, 33*(2), 107-112.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

Blomhøj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9.klasse elevers begrebsforståelse. *Nordic Studies in Mathematics Education, 5*(1), 7-29.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 247-285. doi: 10.1007/BF02309532

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods*. New York: Oxford University Press Inc.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. I A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky & J. Kaput (red.), *Research in collegiate mathematics education III: CBMS issues in mathematics education* (s. 114-162). Providence, RI: American Mathematical Society.

Christoffersen, L. & Johannesen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag AS.

Dalland, O. (2012). *Metode og oppgaveskriving*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Derbentseva, N., Safayeni, F. & Cañas, A. J. (2004). *Experiments on the effect of map structure and concept quantification during concept map construction.* Paper presentert på Concept maps: Theory, methodology, technology, proceedings of the first international conference on concept mapping. Pamplona, Spain: Universidad Pública de Navarra.

Geisinger, K. F. (2003). Testing and Assessment in Cross-Cultural Psychology. I J. R. Graham, J. A. Naglieri & I. B. Weiner (red.), *Handbook of Psychology* (s. 106-108). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Goodchild, S. (2001). *Students' goals: A study of activity in a mathematics classroom*. Bergen: Caspar forlag.

Grevholm, B. (2014). Begrepp i kartor eller bubblor? *Nämnaren* (2), 11-16. Lastet ned 12.04.17 fra http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1116_14_2.pdf

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406. doi:10.3102/00028312042002371

Imsen, G. (1998). *Elevenes verden: Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Tano Aschehoug.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. London: RoutledgeFalmer

Kjærnsli, M. & Jensen, F. (2016). *Stø kurs : norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

Krumsvik, R. J. (2014). *Forskningsdesign og kvalitativ metode - ei innføring*. Bergen: Fagbokforlaget.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, CA: Sage Publications

Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus*. Oslo: Universitetsforlaget.

Lyngsnes, K. & Rismark, M. (2014). *Didaktisk arbeid*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative research design - An interactive approach*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Mertens, D. M. (2015). *Research and evaluation in education and psychology*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications

Mosvold, R., Jakobsen, A. & Melhus, K. (2009). Translating test items into Norwegian – without getting lost in translation? *Nordic Studies in Mathematics Education, 14*(4), 9-31.
Musgrave, S. & Thompson, P. W. (2014). *Function notation as an idiom*. Paper presentert på Proceedings of the 38th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
NOKUT. (2016). Høy strykprosent på nasjonal deleksamen i matematikk. Lastet ned 19.03.17 fra http://www.nokut.no/no/Nyheter/Nyheter-2016/Hoy-strykprosent-pa-nasjonal-deleksamen-i-matematikk/#.WMBKe982vIU
NOKUT. (2017). Nasjonal deleksamen Hentet 19.03.17 fra http://www.nokut.no/no/Universitet-og-hoyskoler/Kvalitetssikring-og--utvikling/Nasjonal-deleksamen/
Novak, J. D. (2010). Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations. *Journal of E-Learning and Knowledge Society, 6*(3), 21-30.
Nygaard, O. (2010). *Begreper i analyse*. Hentet 20.03.17 fra http://home.uia.no/olavn/analysebegr.pdf
Nygaard, O., Hundeland, P. S. & Pettersen, P. (1999). *Aha - matematikk og matematikkdidaktikk*. Kristiansand: Høgskoleforlaget AS.
OECD (2005). *PISA 2003 Technical Report*. Lastet ned 16.02.17 fra https://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/35188570.pdf
OECD. (2010). *PISA 2009 Results: Executive Summary*. Lastet ned 05.03.17 fra https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46619703.pdf
OECD. (2014). *PISA 2012 Results in Focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. Lastet ned 05.03.17 fra https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf
OECD. (u.å.). *NORWAY – Country Note –Results from PISA 2012*. Lastet ned 05.03.17 fra https://www.oecd.org/norway/PISA-2012-results-norway.pdf
Personopplysningsloven. (2000). *Lov om behandling av personopplysninger*. Lastet ned 05.02.17 fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2000-04-14-31#KAPITTEL_1
Piaget, J. & Garcia, R. (1991). *Toward a logic of meanings*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function - A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 229-254. doi: 10.1023/a:1026033415747
Saraiva, M. J. & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento n 4 al n, 19*, 74-83.
Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.
Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning, and action : a foundation for theory and practice in education*. Chichester: Wiley.
Säljö, R. (2001). *Læring i praksis : et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk.
Thompson, P. W. (2013a). Constructivism in Mathematics Education. I S. Lerman (red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 96-102). London: Springer Reference.
Thompson, P. W. (2013b). In the Absence of Meaning…. I K. R. Leatham (red.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (s. 57-93). New York, NY: Springer New York.
Thompson, P. W. (2013c). Why use f(x) when all we really mean is y? *OnCore, The Online Journal of the AAMT*, 18-27.

Thompson, P. W. (2015). *Mathematical Meanings of Korean and USA Mathematics Teachers for Mathematical Ideas They Teach*. Paper presentert på International Conference on Mathematics Education, Seoul National University.
Thompson, P. W. (2016a). *Assessing Secondary Teachers' Mathematical Meanings for Teaching Secondary Mathematics.* Paper presentert på Workshop med Pat Thompson, Kristiansand.
Thompson, P. W. (2016b). Researching mathematical meanings for teaching. I L. D. English & D. Kirshner (red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (s. 435-461). London: Taylor and Francis.
Utdanningsdirektoratet. (2016a). Hva er nasjonale prøver? Lastet ned 10.02.17 fra https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/om-nasjonale-prover/
Utdanningsdirektoratet. (2016b). *Krav om relevant kompetanse for å undervise i fag*. (rundskriv 3). Lastet ned 10.05.17 fra https://www.udir.no/regelverk-og-tilsyn/finn-regelverk/etter-tema/Ovrige-tema/krav-om-relevant-kompetanse-for-a-undervise-i-fag-udir-3-2015/4.-kompetansekrav-for-a-undervise-i-den-videregaende-skolen/
Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366. doi: 10.2307/749441
Wellington, J. (2015). *Educational Research*. London: Bloomsbury Academic.
Wheeler, R. F. (1981). *Rethinking mathematical concepts*. Chichester: Ellis Horwood.
Williams, C. G. (1998). Using Concept Maps to Assess Conceptual Knowledge of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 414-421. doi: 10.2307/749858
Wilson, M. R. (1994). One Preservice Secondary Teacher's Understanding of Function: The Impact of a Course Integrating Mathematical Content and Pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(4), 346-370. doi: 10.2307/749238
Yoon, H., Hatfield, N. & Thompson, P. W. (2014). Teachers' meanings for function notation. Lastet ned 10.02.17 fra http://hub.mspnet.org/media/data/4_Yoon.pdf?media_000000008266.pdf
Åndsverkloven. (1961). *Lov om opphavsrett til åndsverk m.v*. Lastet ned 10.02.17 fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1961-05-12-2

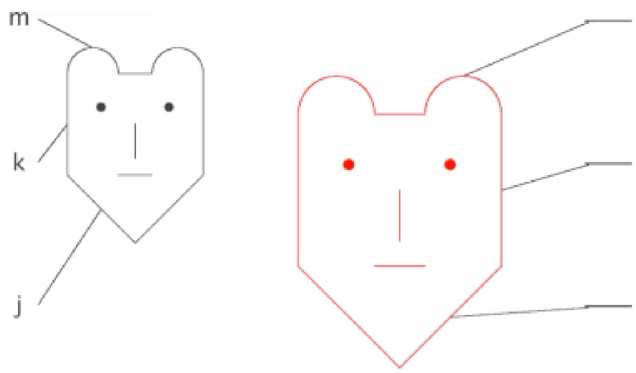
Vedlegg

Vedlegg 1: De aktuelle elementene fra MMTsm

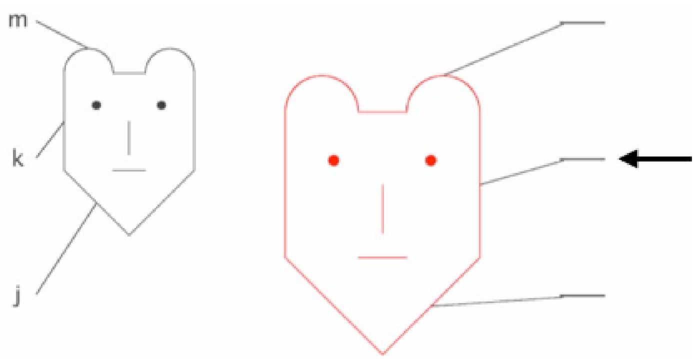
Lignende figurer Animations, side 3

Del 3:

Representer lengden til hver del i figuren til høyre for å vise at de varierer med antall sekunder siden animasjonen begynte.



Representer lengden til kinnet i figuren til høyre i forhold til lengdene av de andre delene.



Her er to funksjonsdefinisjoner.

$w(t) = \sin(t-1)$ hvis $t \geq 1$

$q(s) = \sqrt{s^2 - s^3}$ hvis $0 \leq s < 1$

Her er en tredje funksjon c, definert i to deler, der definisjonene refererer til w og q. Plasser den riktige bokstaven i de åpne feltene under, slik at funksjonen c blir riktig definert.

$$c(v) = \begin{cases} q(\_\_\_\_\_) \text{ hvis } 0 \leq \_\_\_\_\_ < 1 \\ w(\_\_\_\_\_) \text{ hvis } \_\_\_\_\_ \geq 1 \end{cases}$$

Del B

Pål, en elev i en R2 klasse, definerte en funksjon *f* for å modellere en situasjon som involverer antall mulige unike håndtrykk i en gruppe bestående av *n* personer. Han definerte *f* som:

$$f(x) = \frac{n(n-1)}{2}$$

I følge Pål sin definisjon, hva er $f(10)$?

Funksjonene *f*, *g* og *h* er definert under.

$$f(u) = u^2 - 1$$

$$g(s) = 1 + \frac{f(2s+1)}{2}$$

$$h(r) = g(r / 3) - 1$$

Hva er $h(9)$? Vis framgangsmåte.

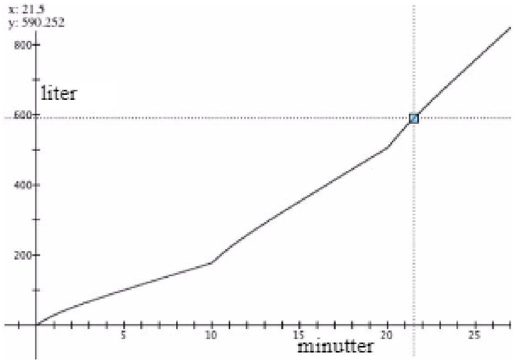
Flere maskiner pumper vann inn i et basseng. Maskinene opererer uavhengig av hverandre og blir mindre effektive over tid. Antall liter hver maskin pumper etter å ha vært i gang i t minutter er gitt av $w(t)$, der

$$w(t) = \begin{cases} \left(30 - 15e^{-2/t}\right)t \text{ hvis } t > 0 \\ 0 \text{ hvis } t \leq 0 \end{cases}$$

Grafen som viser

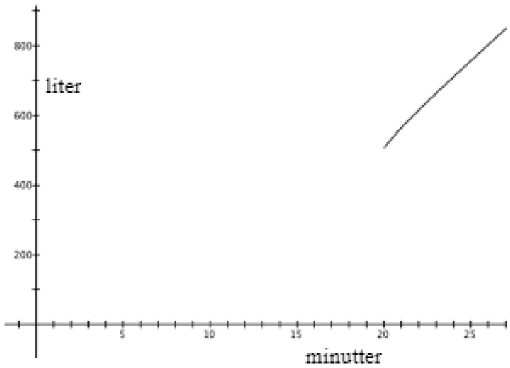
$$y = w(x) + w(x-10) + w(x-20), x \geq 0$$

er gitt her til høyre. Den viser antall liter i et opprinnelig tomt basseng som ble fylt med tre pumper som startet med ti minutters mellomrom.



A. Punktet (21.5, 590.252) er merket på grafen. Hva representerer dette punktet i denne situasjonen?

B. Bjarte definerte w slik at
$w(t) = \left(30 - 15e^{-2/t}\right)t$ hvis $t > 0$,
han ignorerer «0 hvis $t \leq 0$». Grafen til
$y = w(x) + w(x-10) + w(x-20), x > 0$,
der Bjartes definisjon av w er brukt, er gitt til høyre. Hvorfor mangler det noen biter?

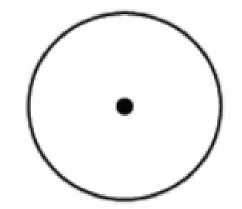


Anta at f er definert på intervallet x=0 til x=5

Ta for deg funksjonen g, der $g(t) = f(t - 5)$

På hvilket intervall er g definert?

Kari slapp en stein i en vannpytt slik at det oppsto sirkulære ringer som spredde seg utover. Ringens radius øker med en ikke-konstant hastighet i tiden etter at Kari slapp steinen. Bruk funksjonsnotasjon til å uttrykke arealet innenfor sirkelen som en funksjon av tiden fra steinen traff vannet?



En funksjon f, definert på de reelle tall, er gitt under. Sett en ring rundt hva du ønsker elevene dine tenker at representerer hva funksjonens ‘output’ er.

$$f(x) = x(11 - 2x)(8{,}5 - 2x)$$

Her er en annen funksjon. Sett ring rundt definisjonen av funksjonen.

$$g(x) \ = \ x \sin e^{x}$$

Her er fire linjer med tekst skrevet inn i et grafprogram.

$u(p) = \frac{3}{p-1}$ hvis $3 < p < 12$
$w(r) = 2r + 10$ hvis $0 < \mathrm{r} < 7{,}5$ } Disse linjene definerer funksjonene u og w og begrenser deres input.

$A\,(v) = u(v) \cdot w(v)$ } Denne linjen definerer funksjonen A som et produkt av u og w.

$y = A(x),\ 5 < x < 12$ } Denne linjen forteller at programmet skal tegne grafen A i intervallet $5 < x < 12$.

I hvilket intervall på x-aksen vil grafen vises?

Gitt: $f(x + 1) = 3(x+1)^2 + 4(x + 2) + 3$

Hva er $f(2)$?

Velg svaret ditt fra denne listen.

a) 46

b) 23

c) 31

d) 27

e) 71

f) Ingen av de over. Svaret mitt er ________

g) Jeg vet ikke.

h er en strengt voksende funksjon definert for alle *reelle* tall. $h(b - 5) = 9$ for noen tall b. Hvilken av de følgende, $(b, 9)$ eller $(b - 5, 9)$, finnes på grafen $y = h(x - 5)$ når den tegnes på en kalkulator? Forklar.

Velg det beste svaret og den beste forklaringen.

a. $(b, 9)$ er på grafen fordi b er 'input' som gir 'output' 9

b. $(b, 9)$ er på grafen fordi $b - 5$ er 'input' til h og funksjonen er strengt voksende.

c. $(b, 9)$ er på grafen fordi når vi løser den for h får vi $h = \frac{9}{b-5}$, som gir $y = \left(\frac{9}{b-5}\right)(x - 5)$. Her vil $x =$ gi 9.

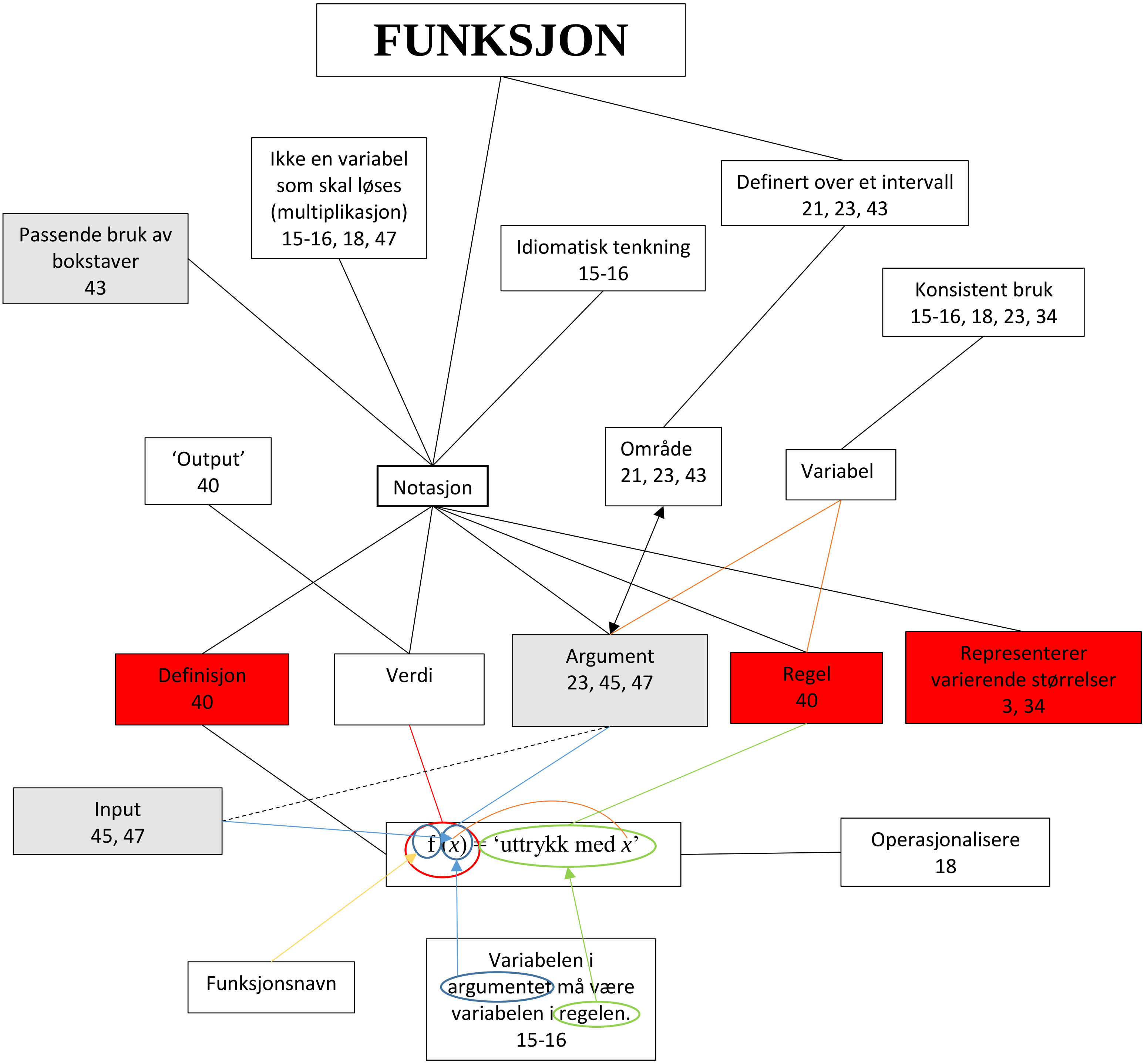
d. $(b - 5, 9)$ er på grafen fordi $b - 5$ er i x-posisjonen og 9 er i y-posisjonen.

e. $(b - 5, 9)$ er på grafen fordi $b - 5$ er 'input' som gir 'output' 9.

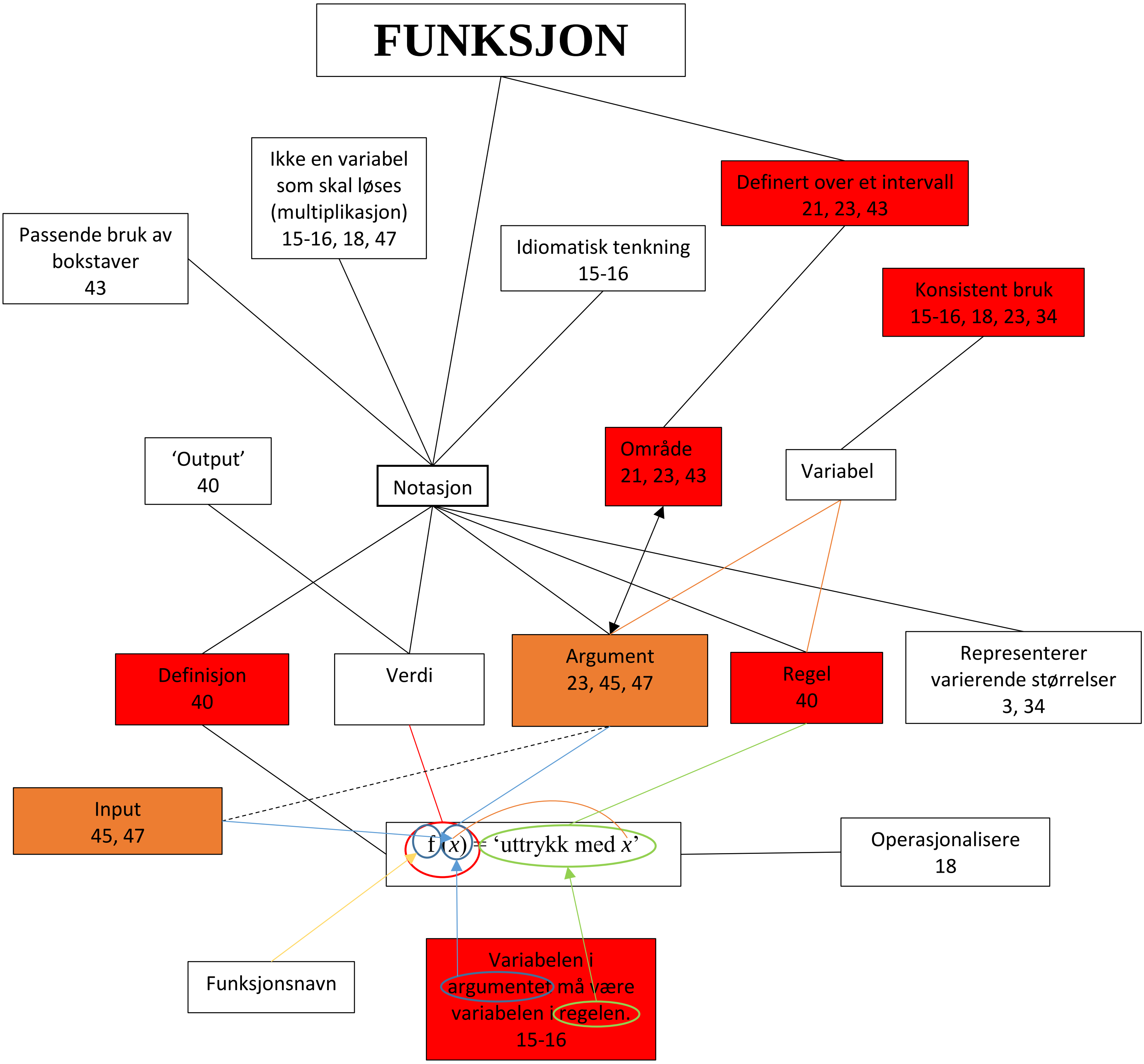
f. Jeg vet ikke.

Vedlegg 2: Studentenes begrepskart

Student 1:

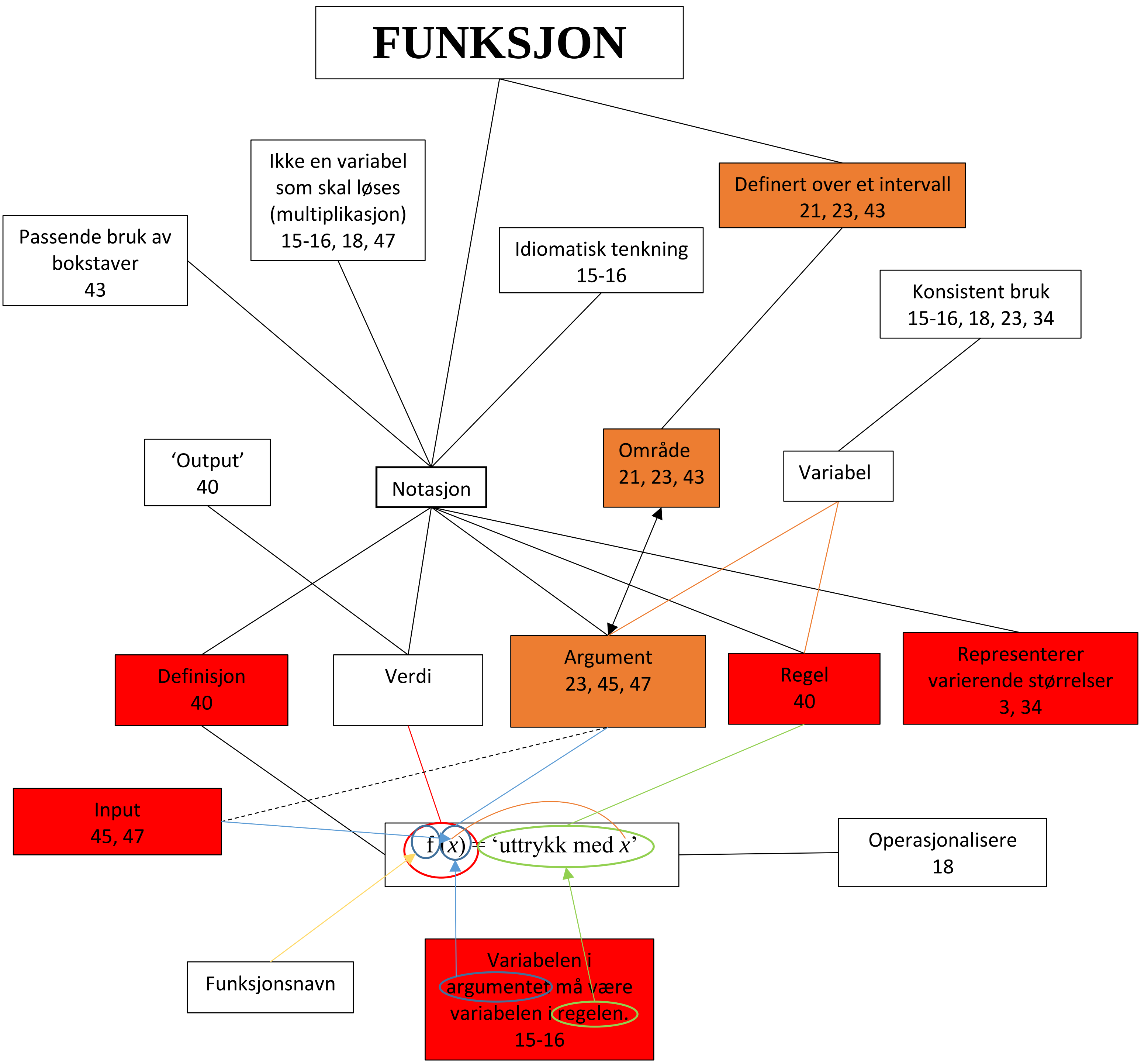


Student 2:

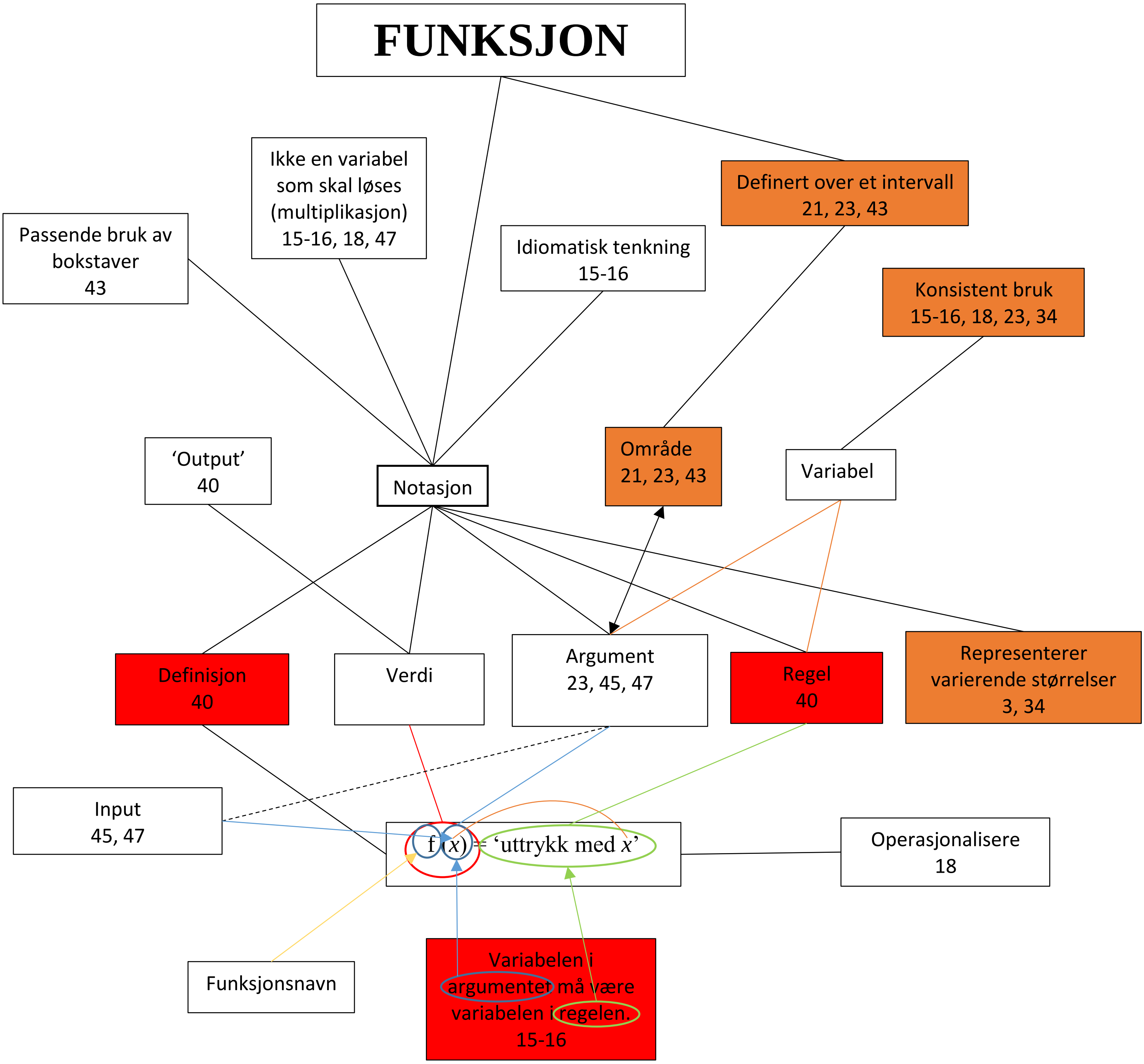


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

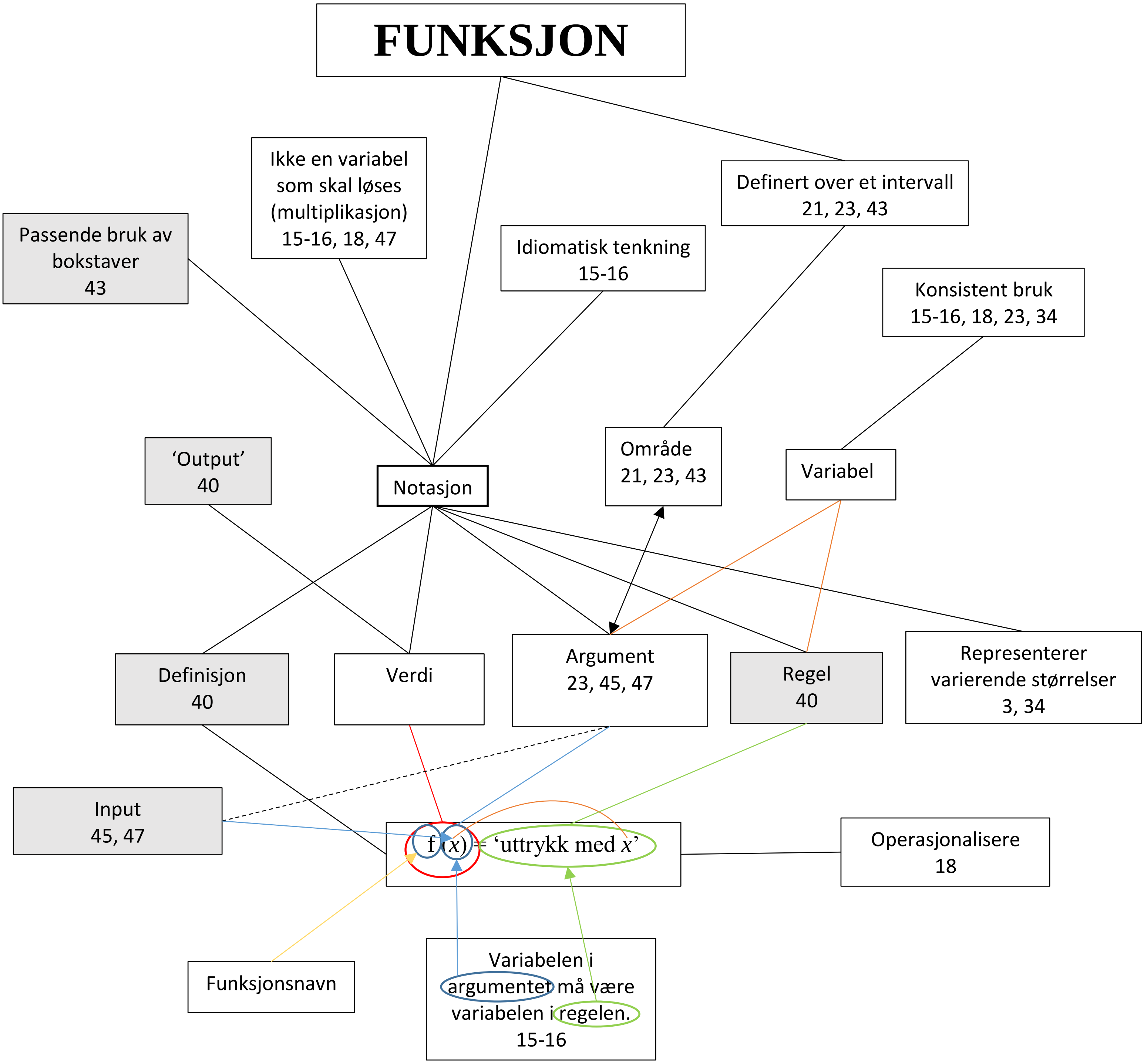
Student 3:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

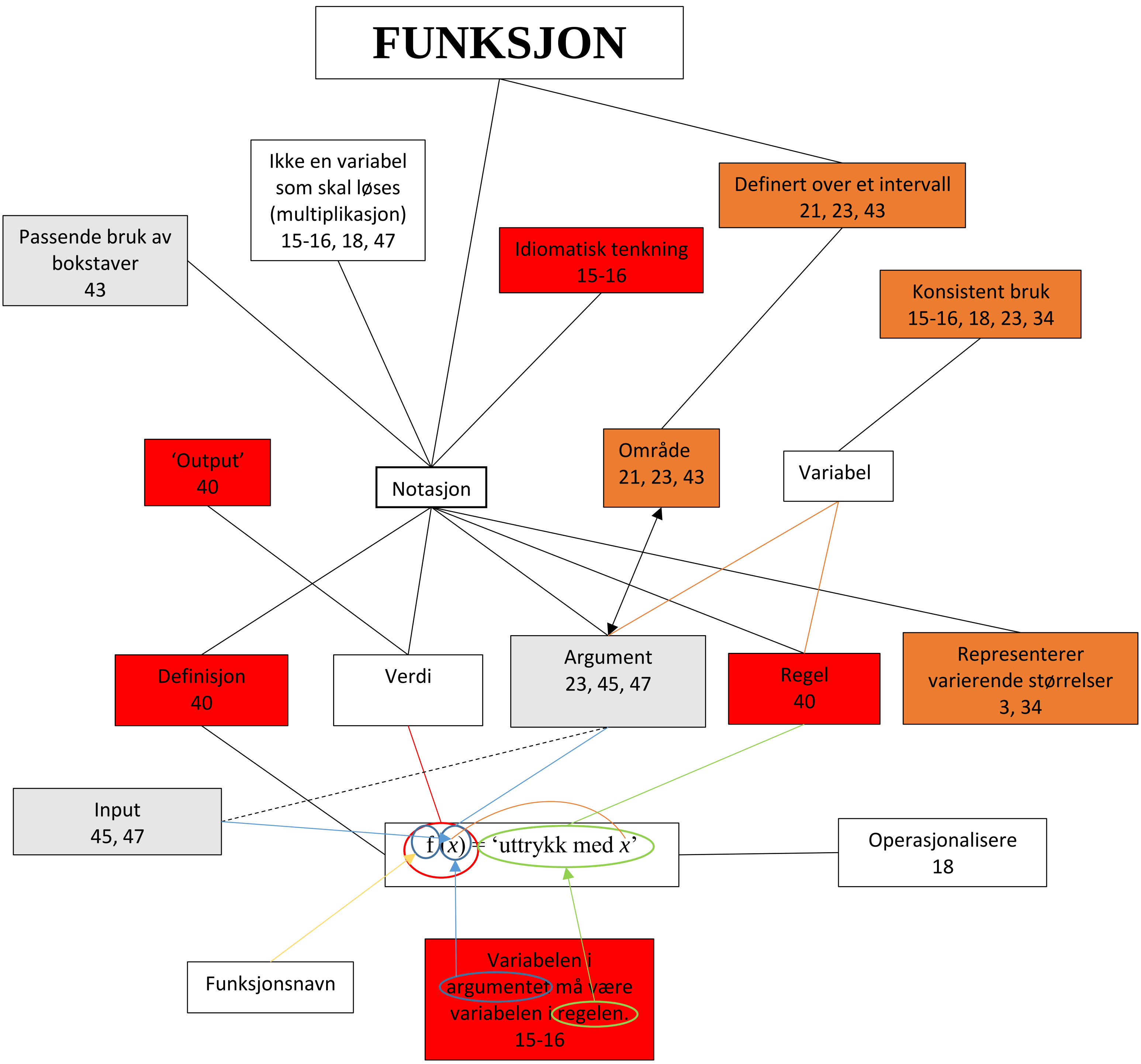
Student 4:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 5:

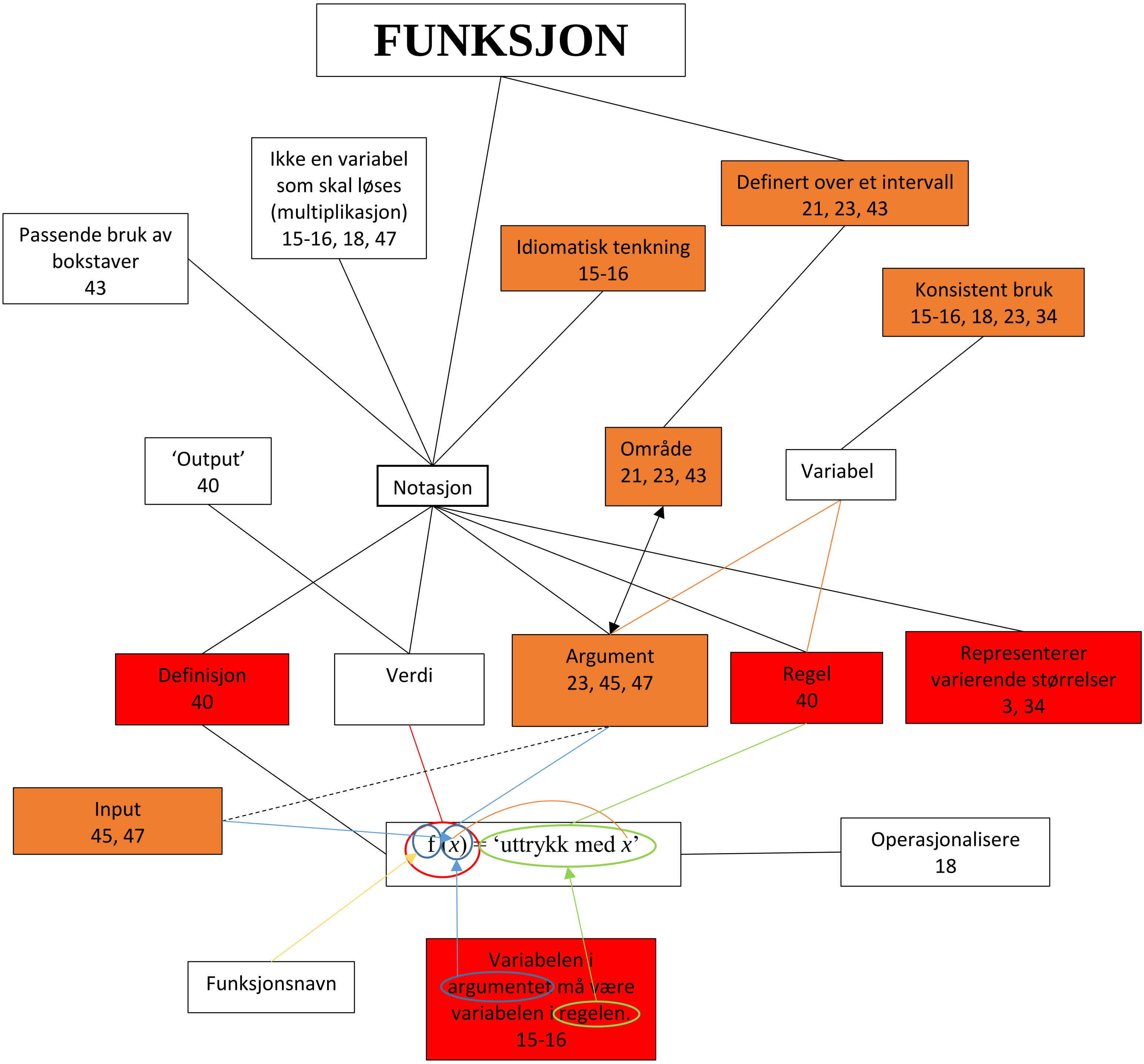

FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 6:

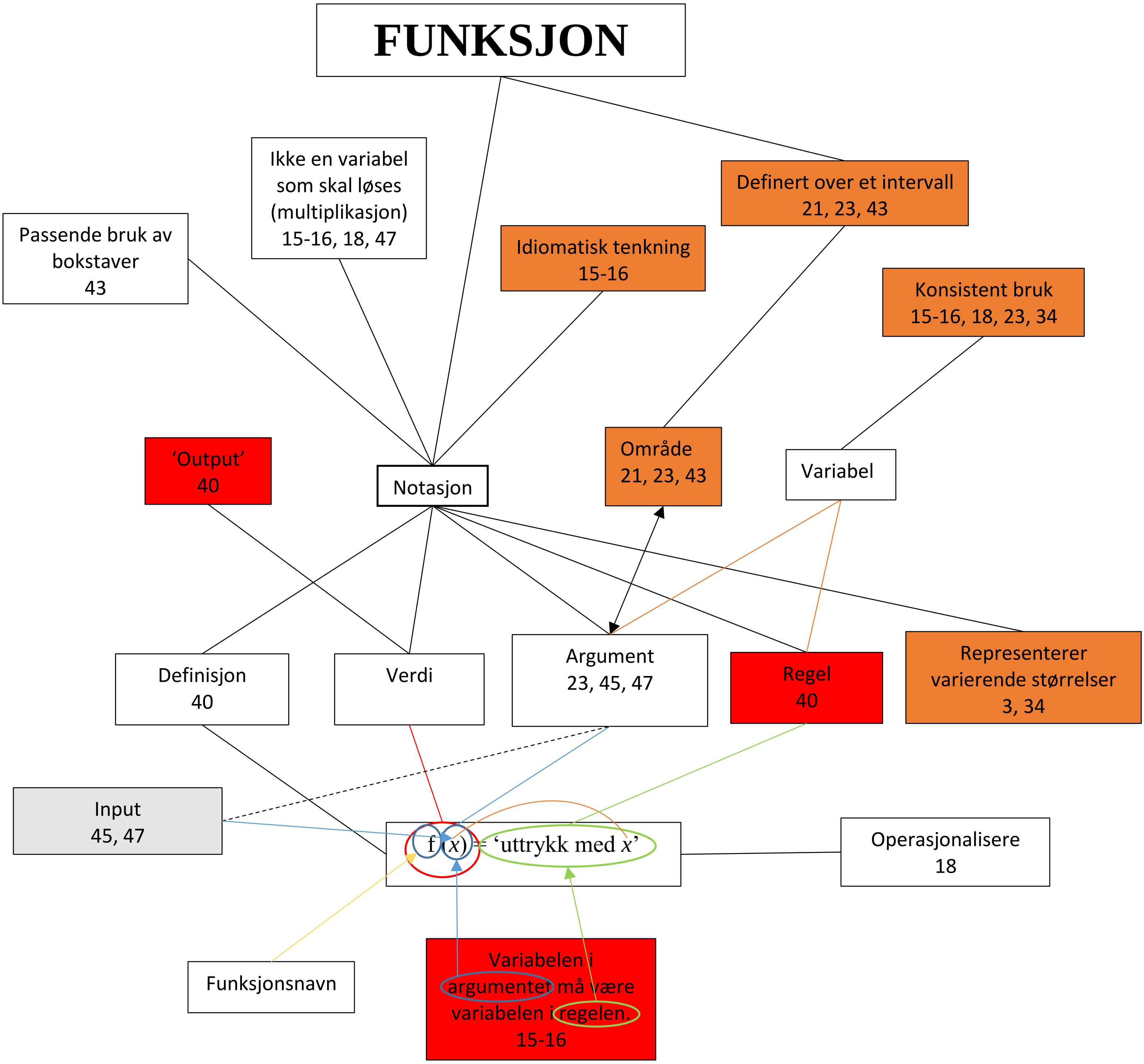


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

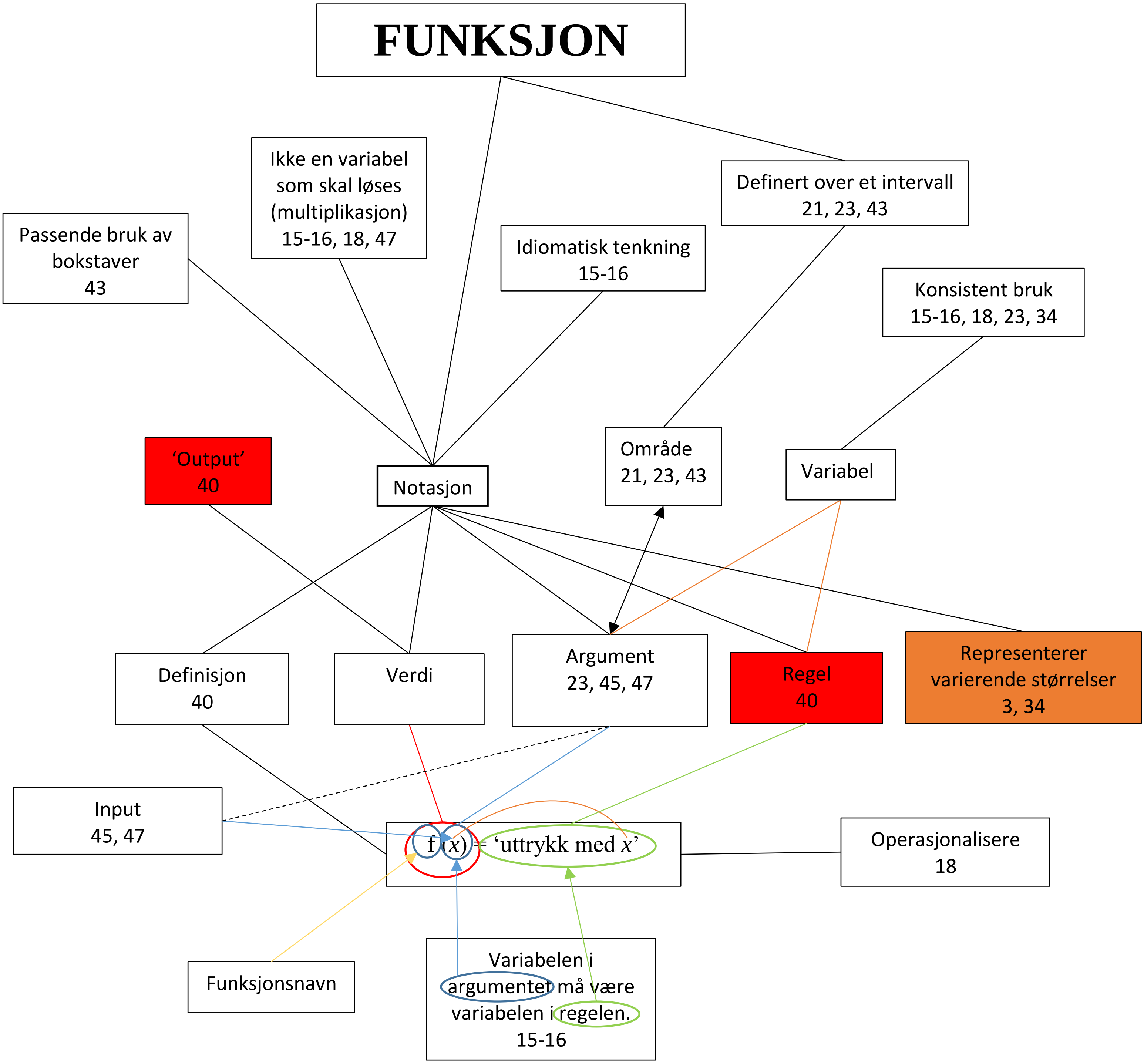
Student 7:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

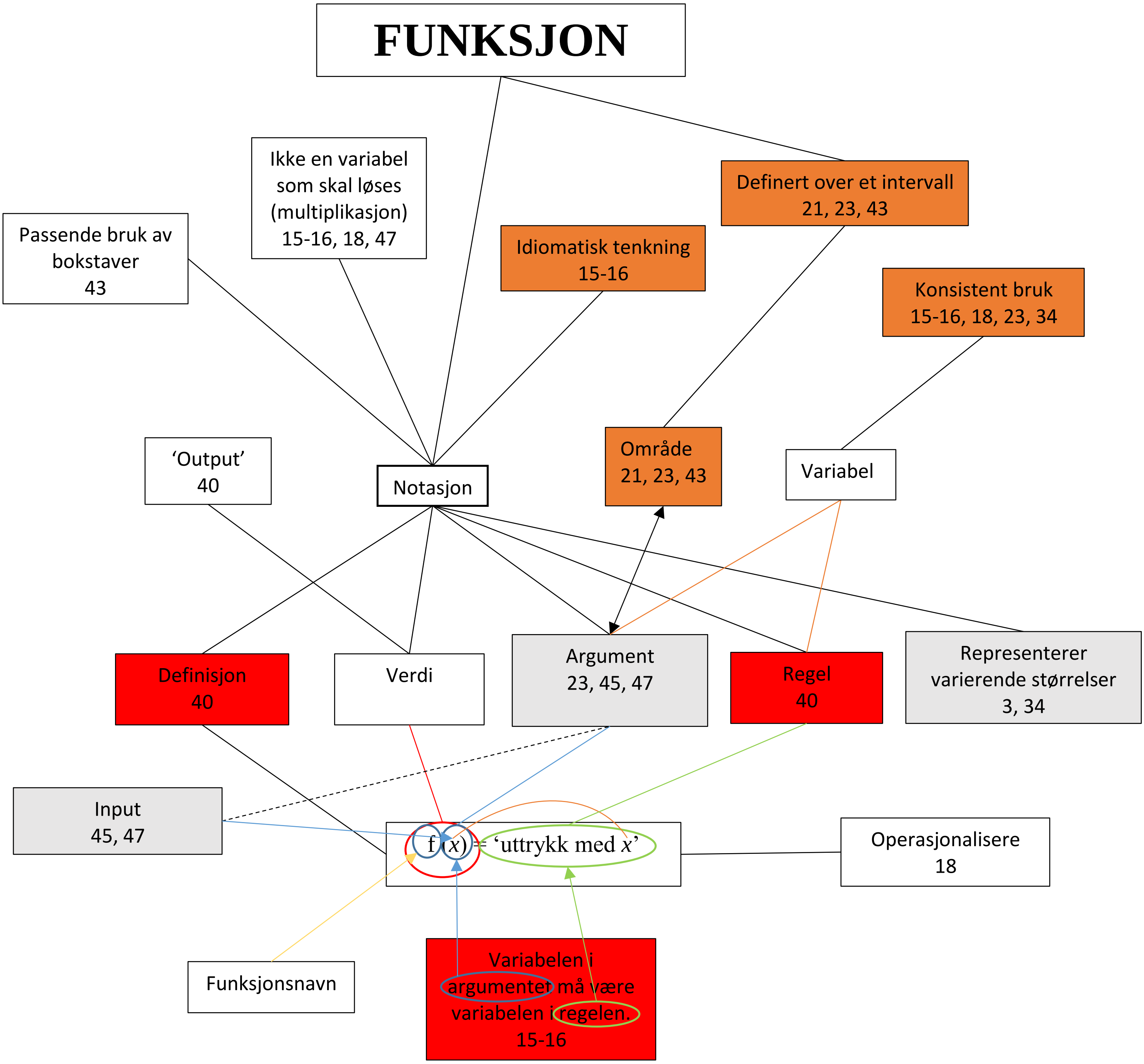
Student 8:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

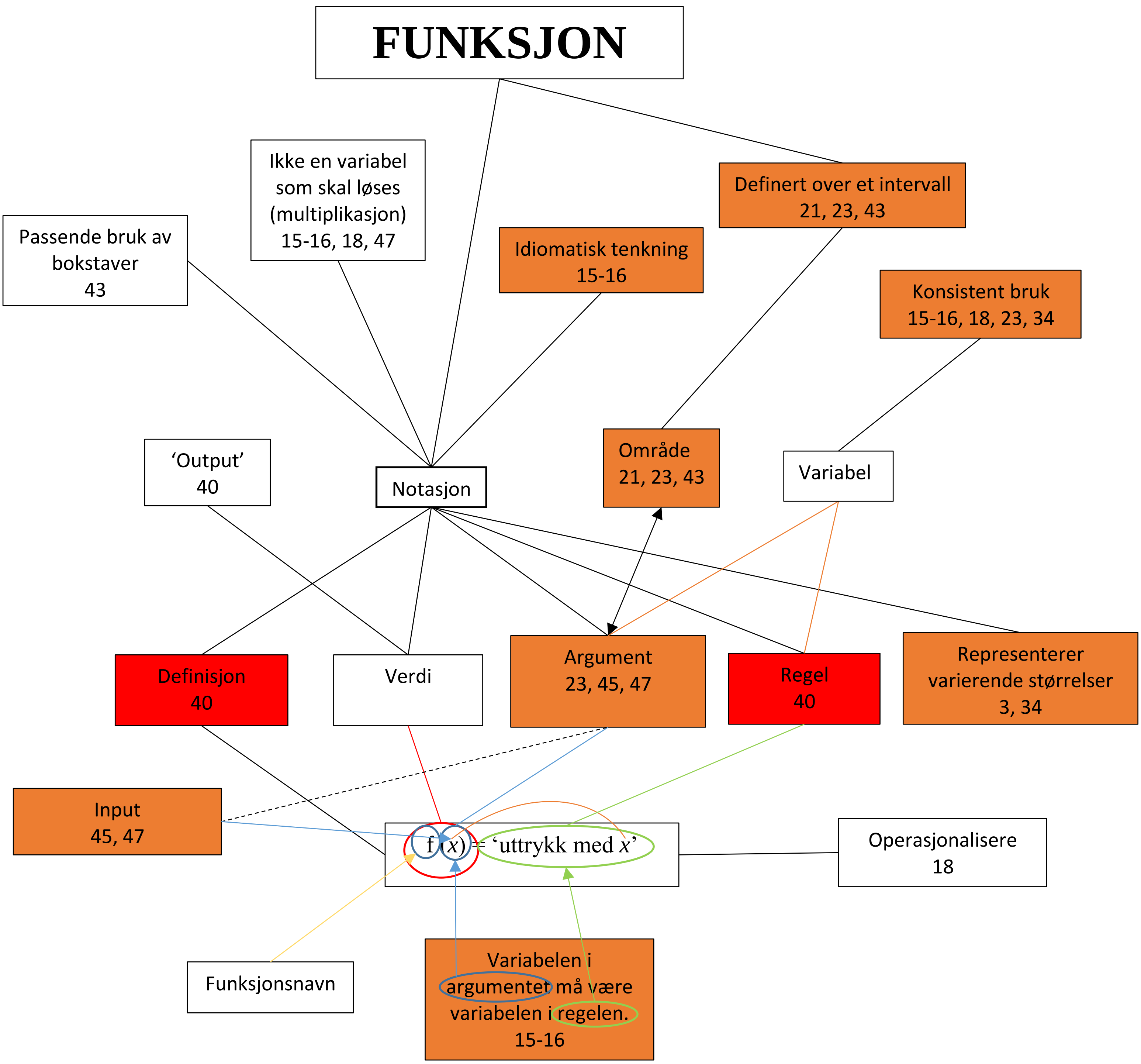
Student 9:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

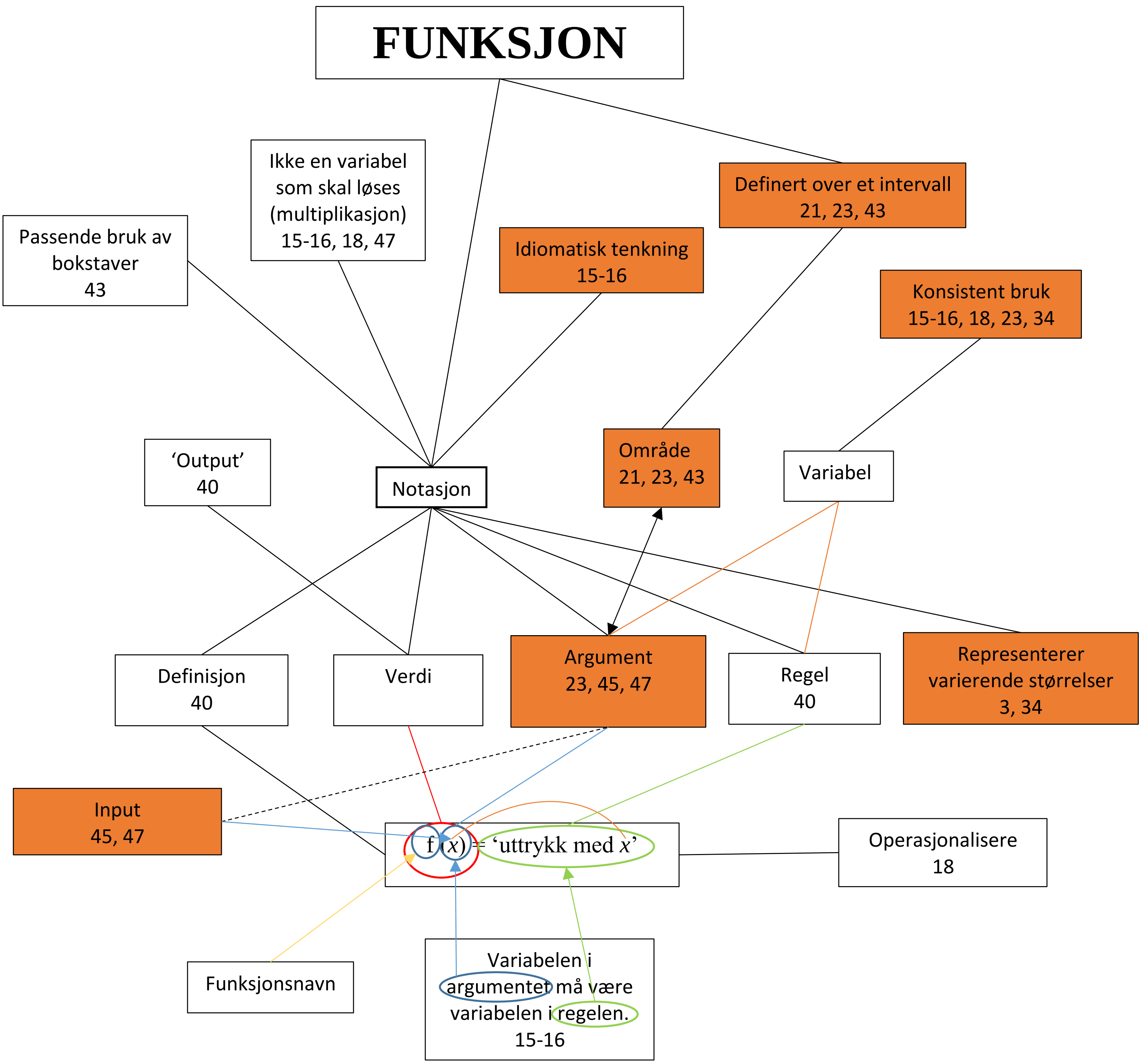
Student 10:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 11:

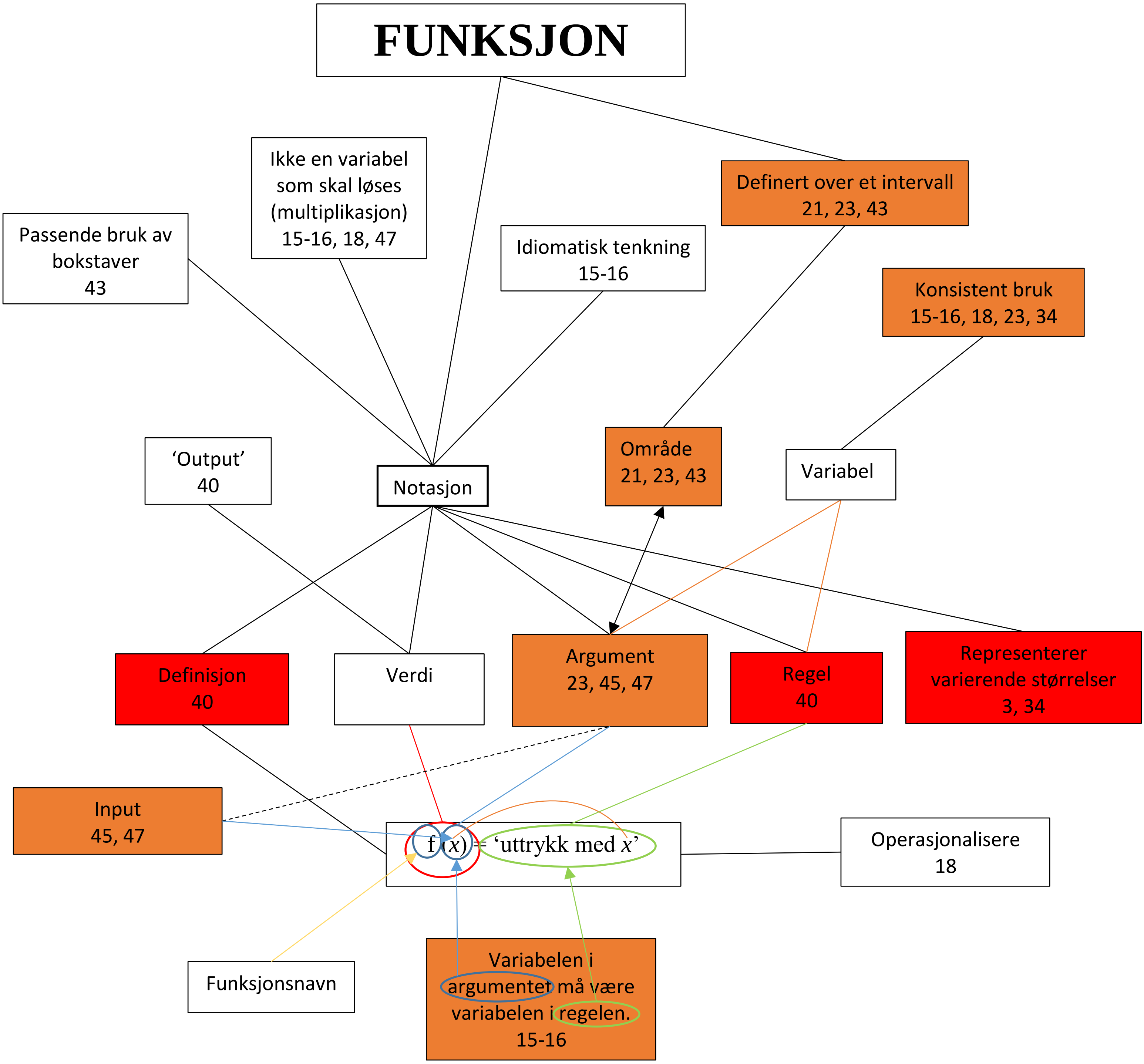

FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Definert over et intervall 21, 23, 43
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 12:

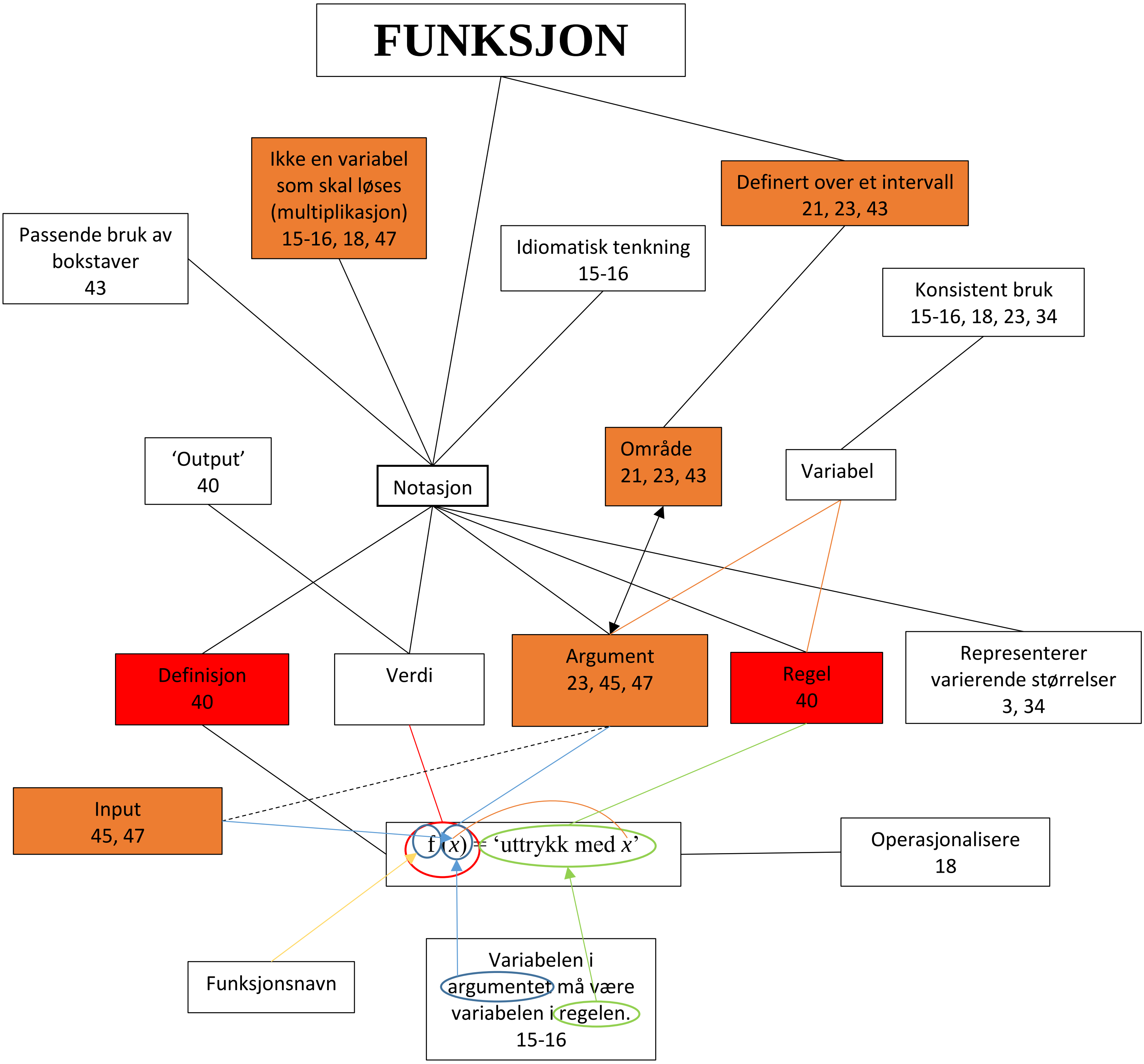


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

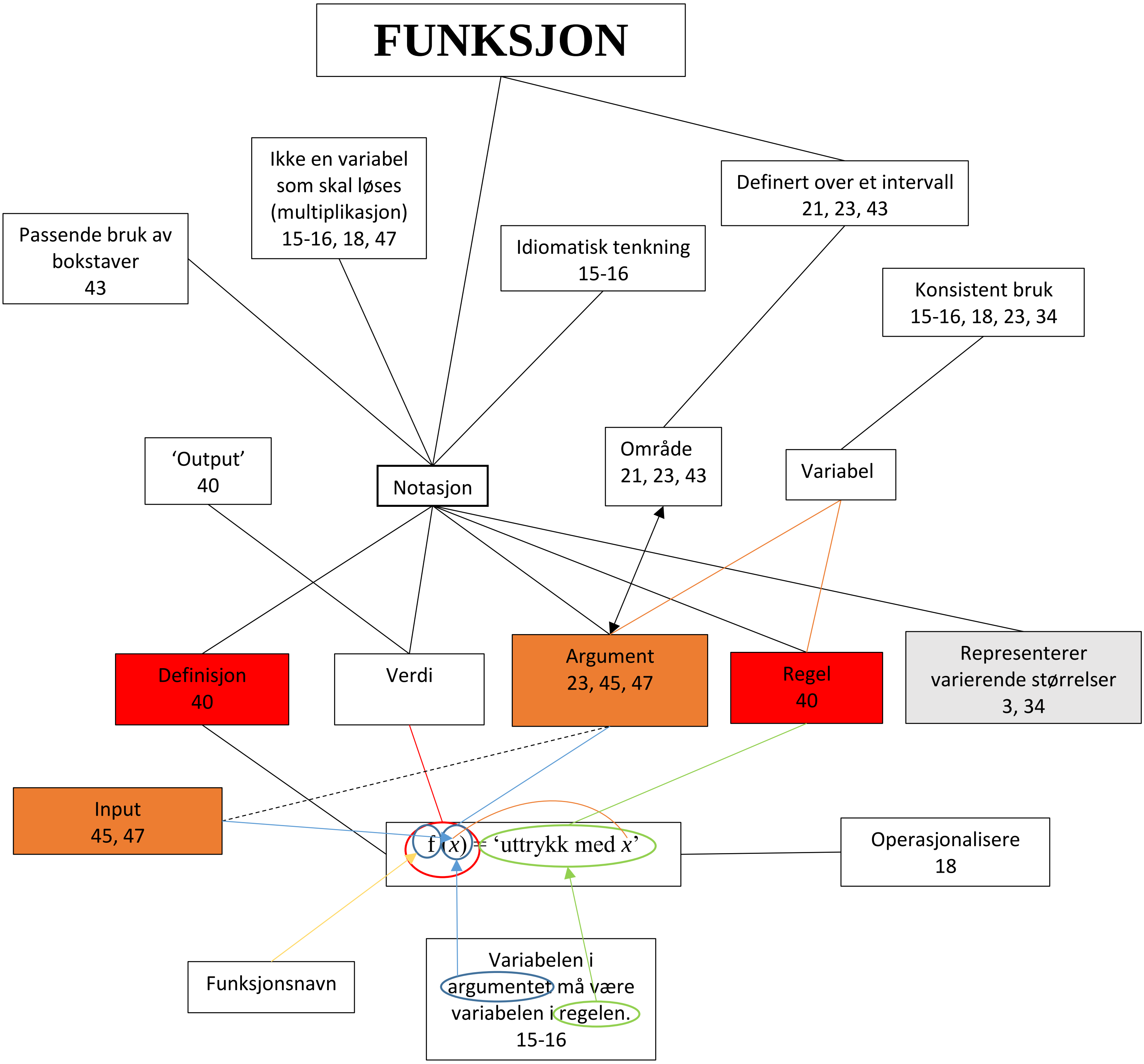
Student 13:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

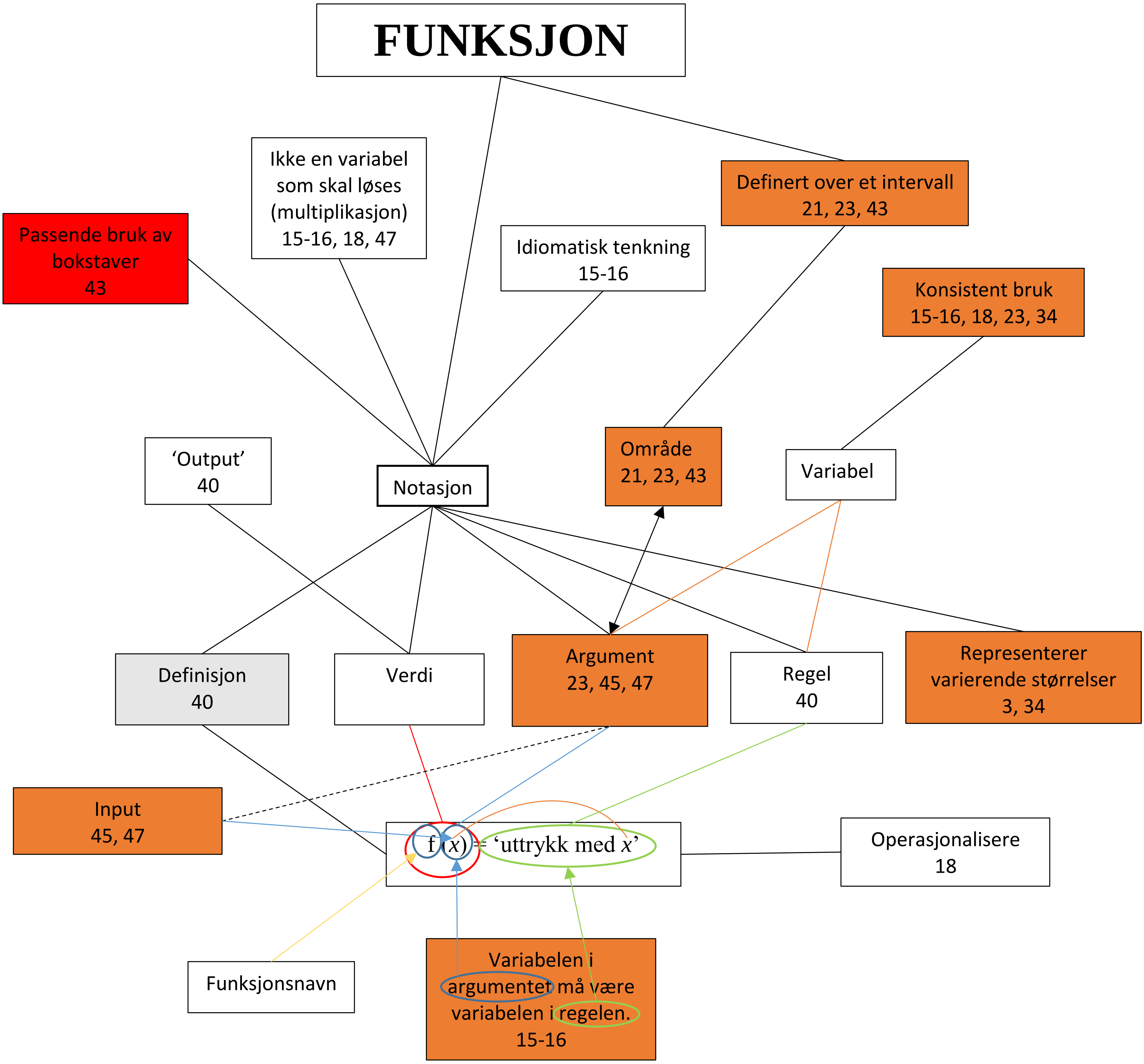
Student 14:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

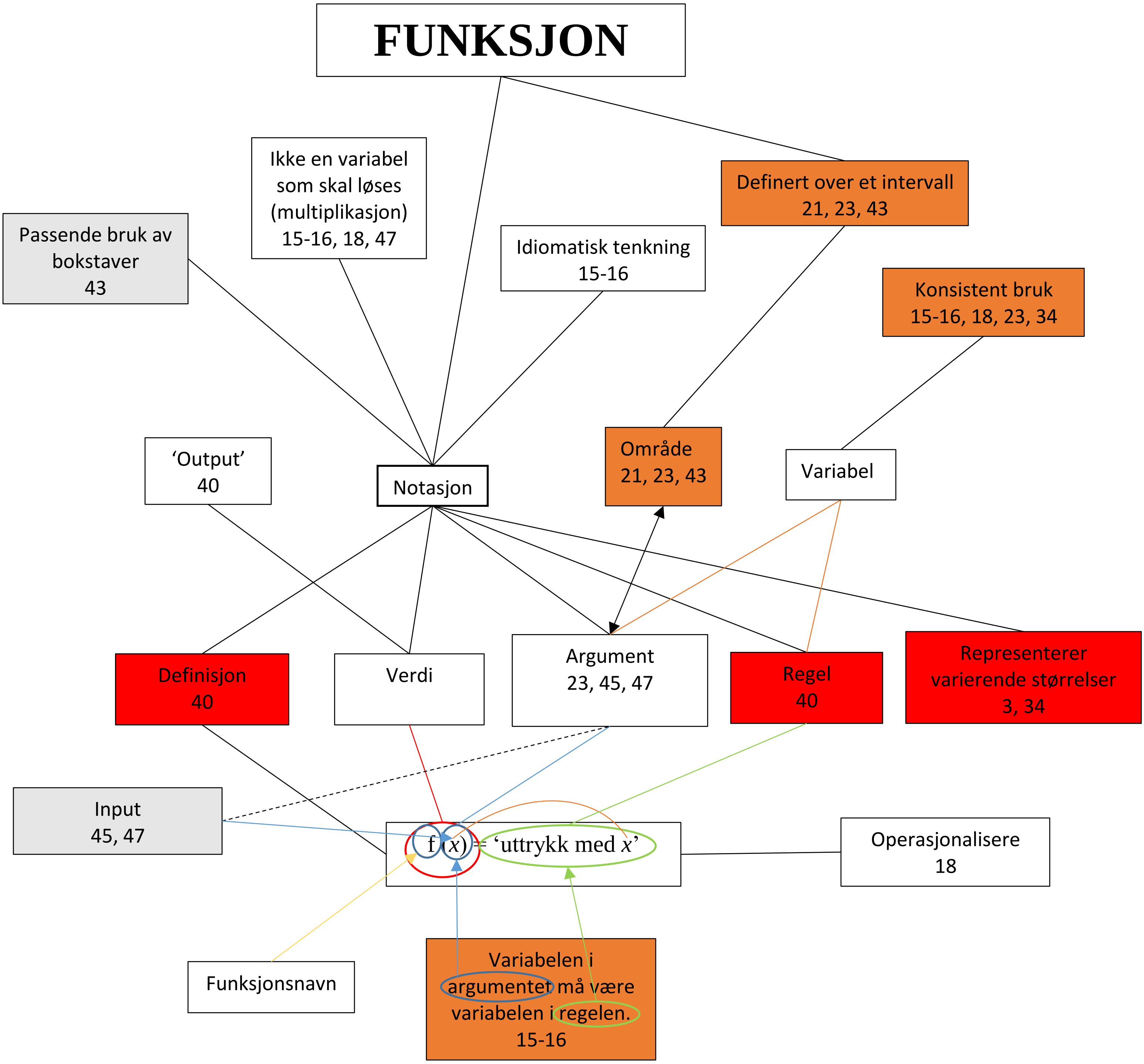
Student 15:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

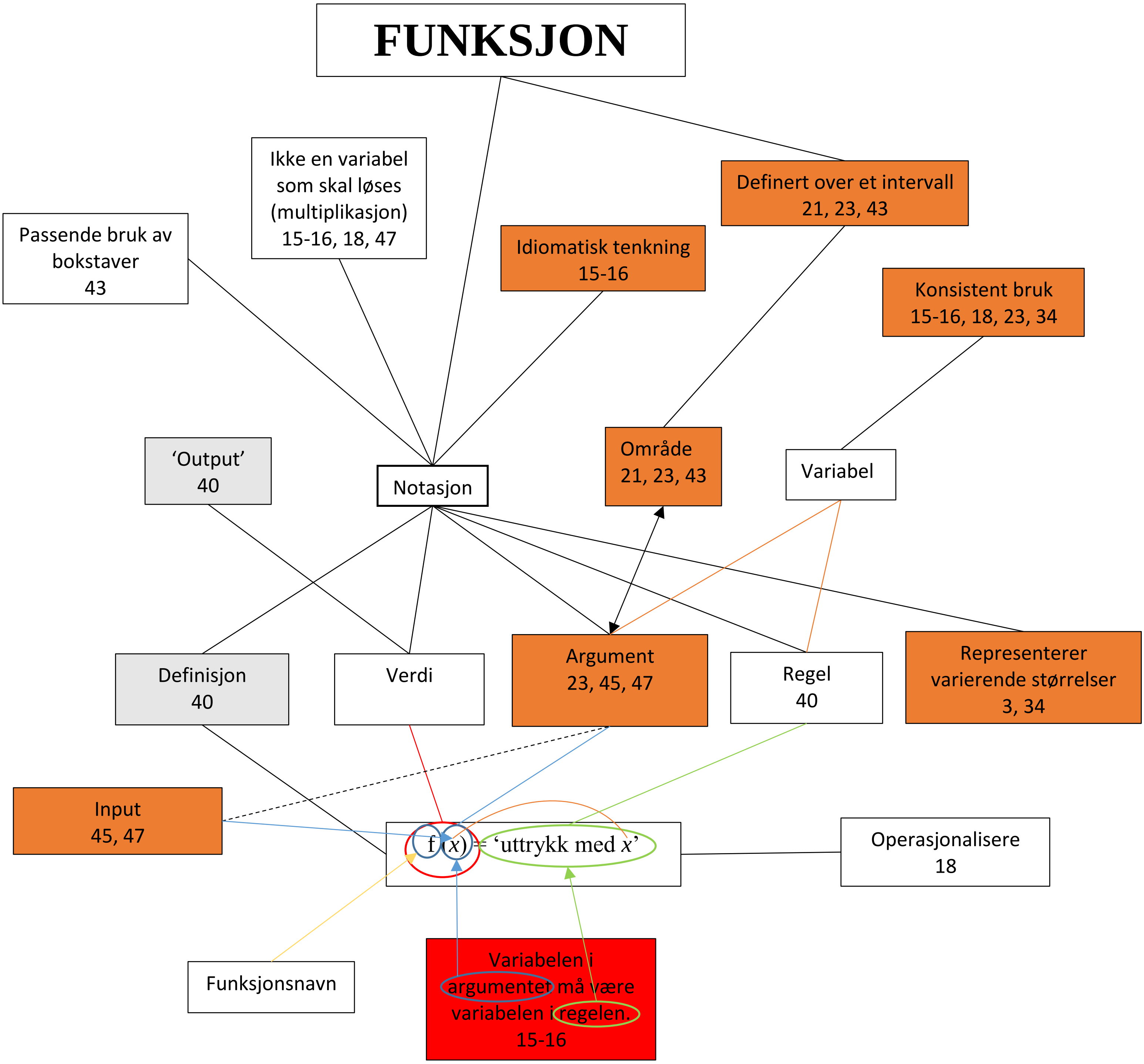
Student 16:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

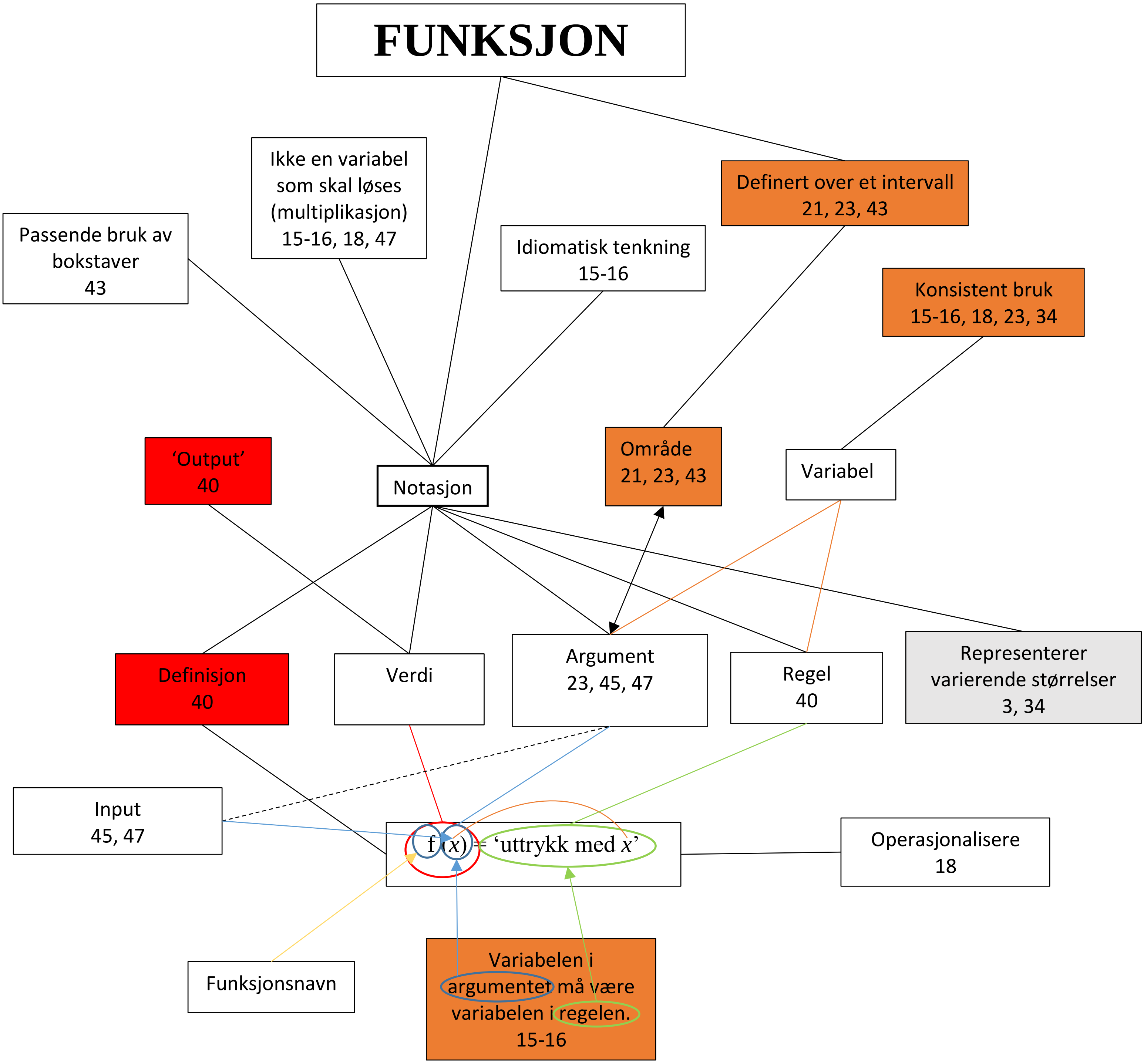
Student 17:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 18:

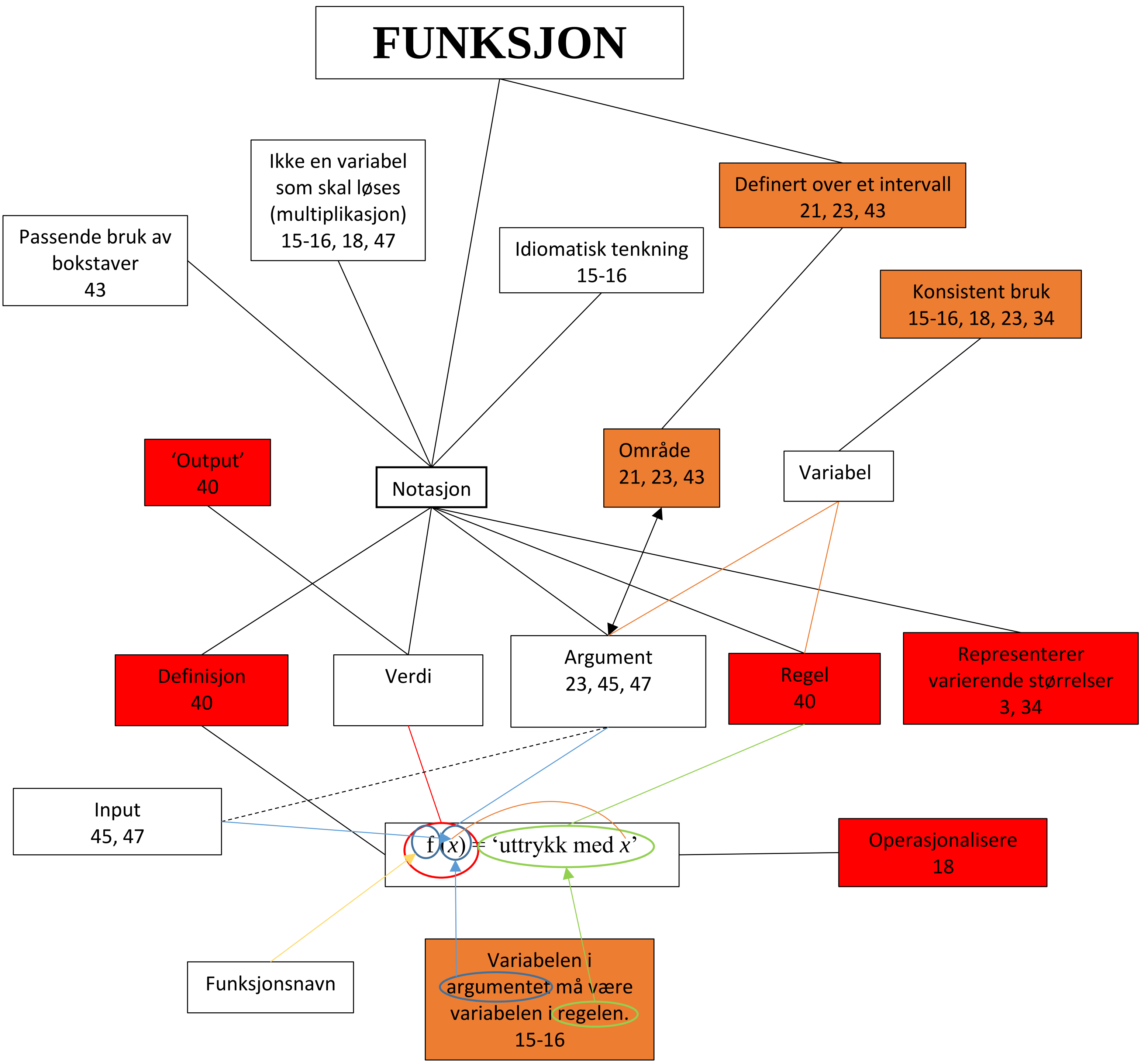

FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Passende bruk av bokstaver 43
Definert over et intervall 21, 23, 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 19:

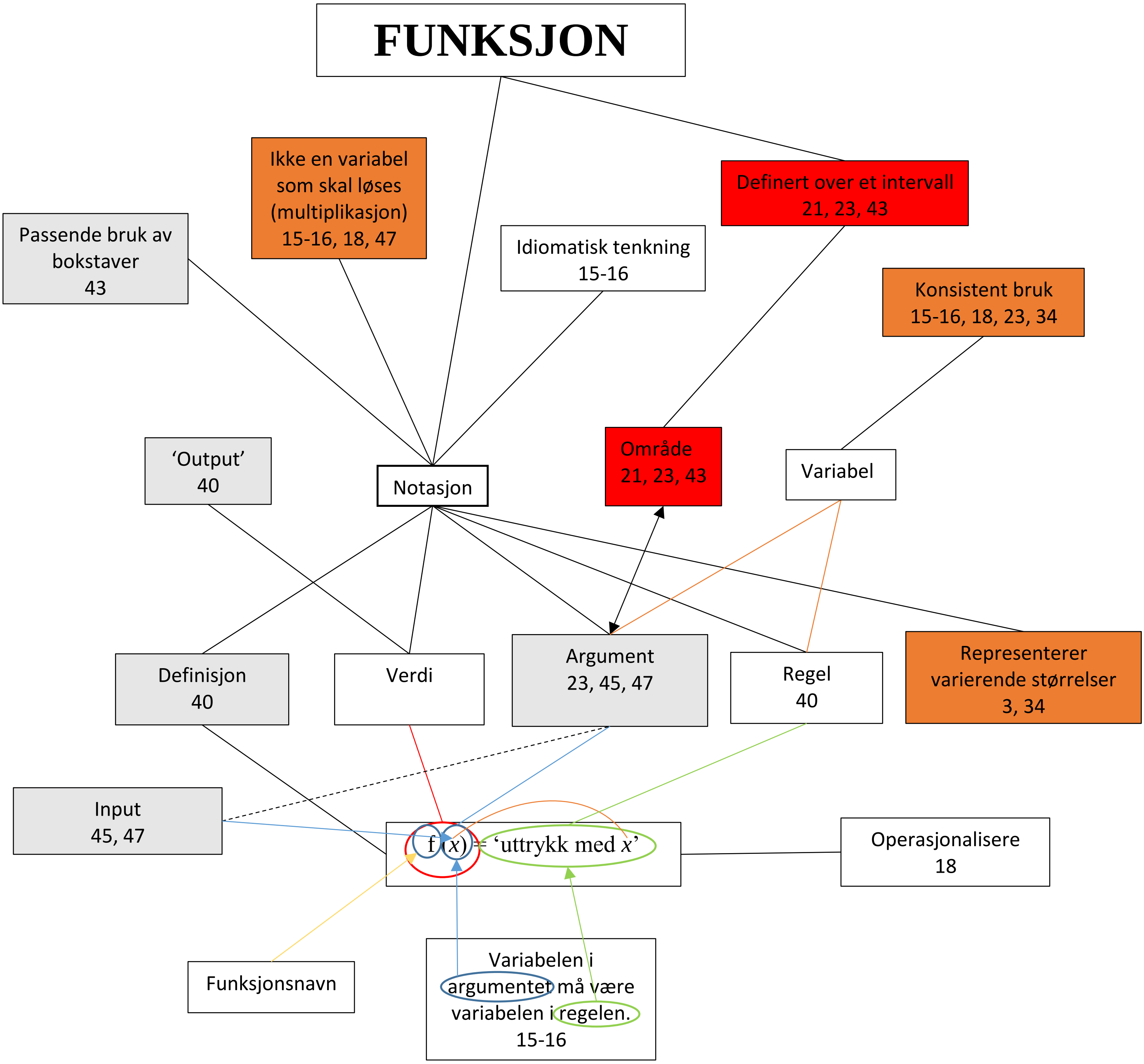


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Definert over et intervall 21, 23, 43
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f(x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

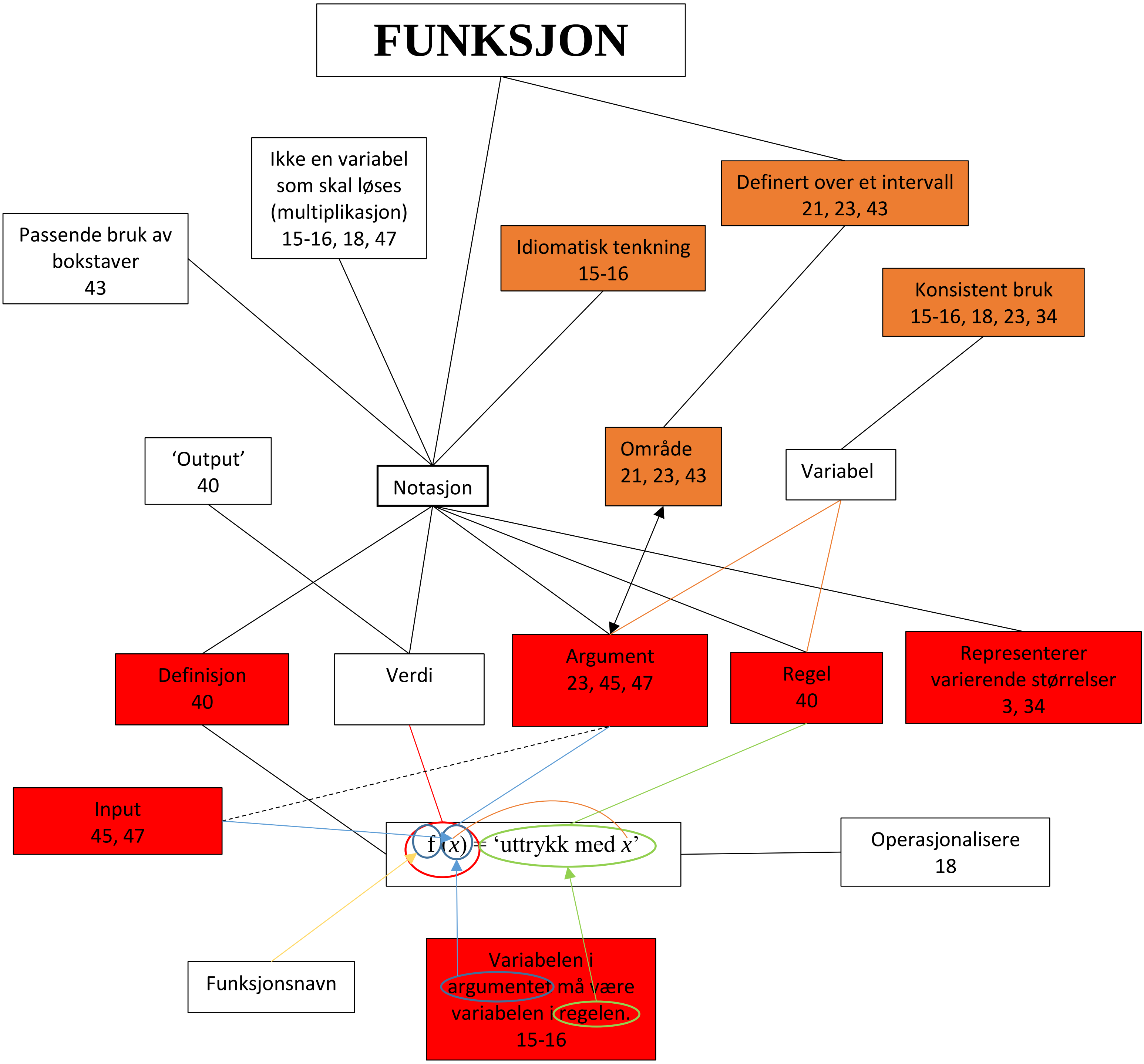
Student 21:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f(x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 23:

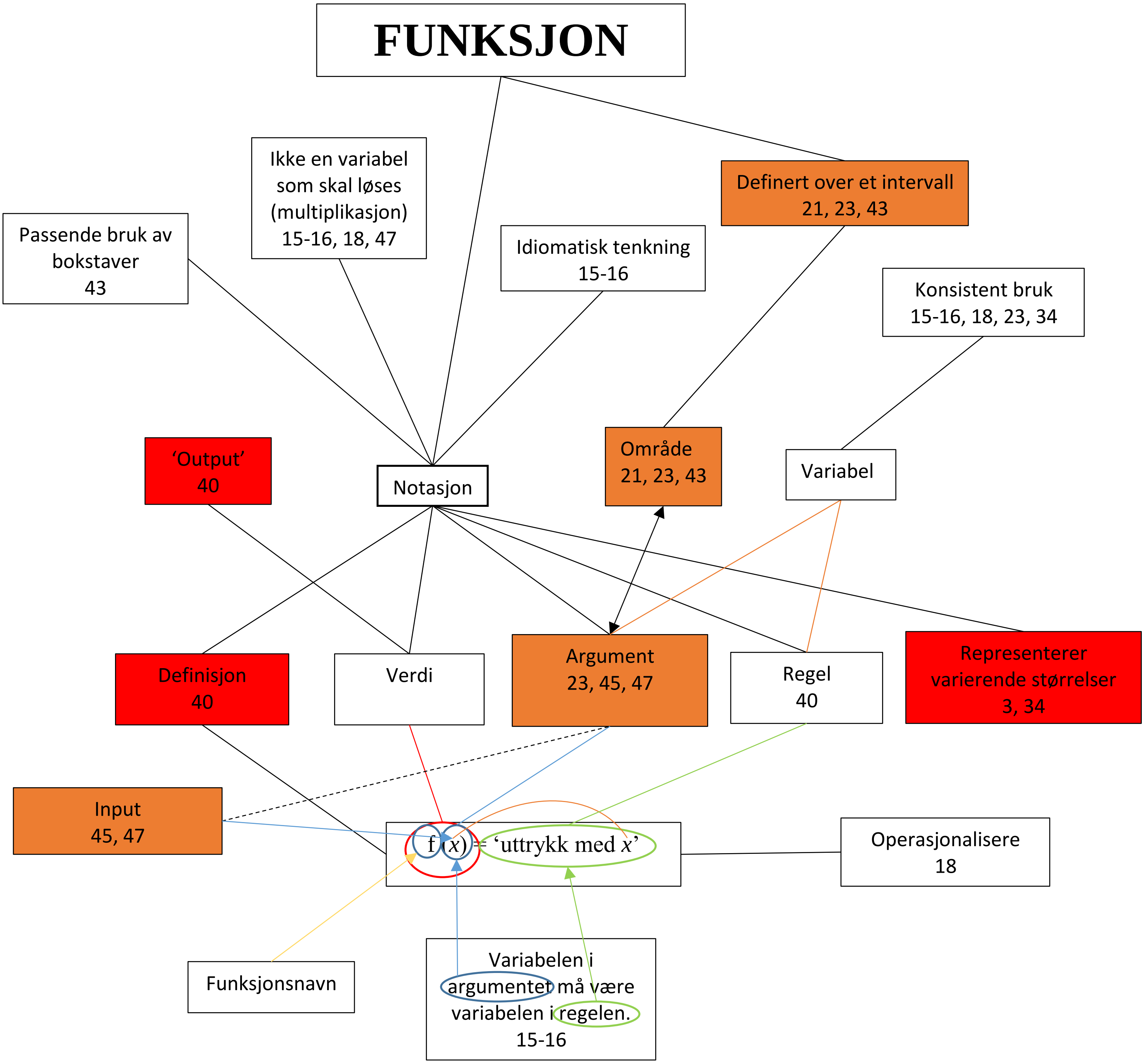

FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 24:



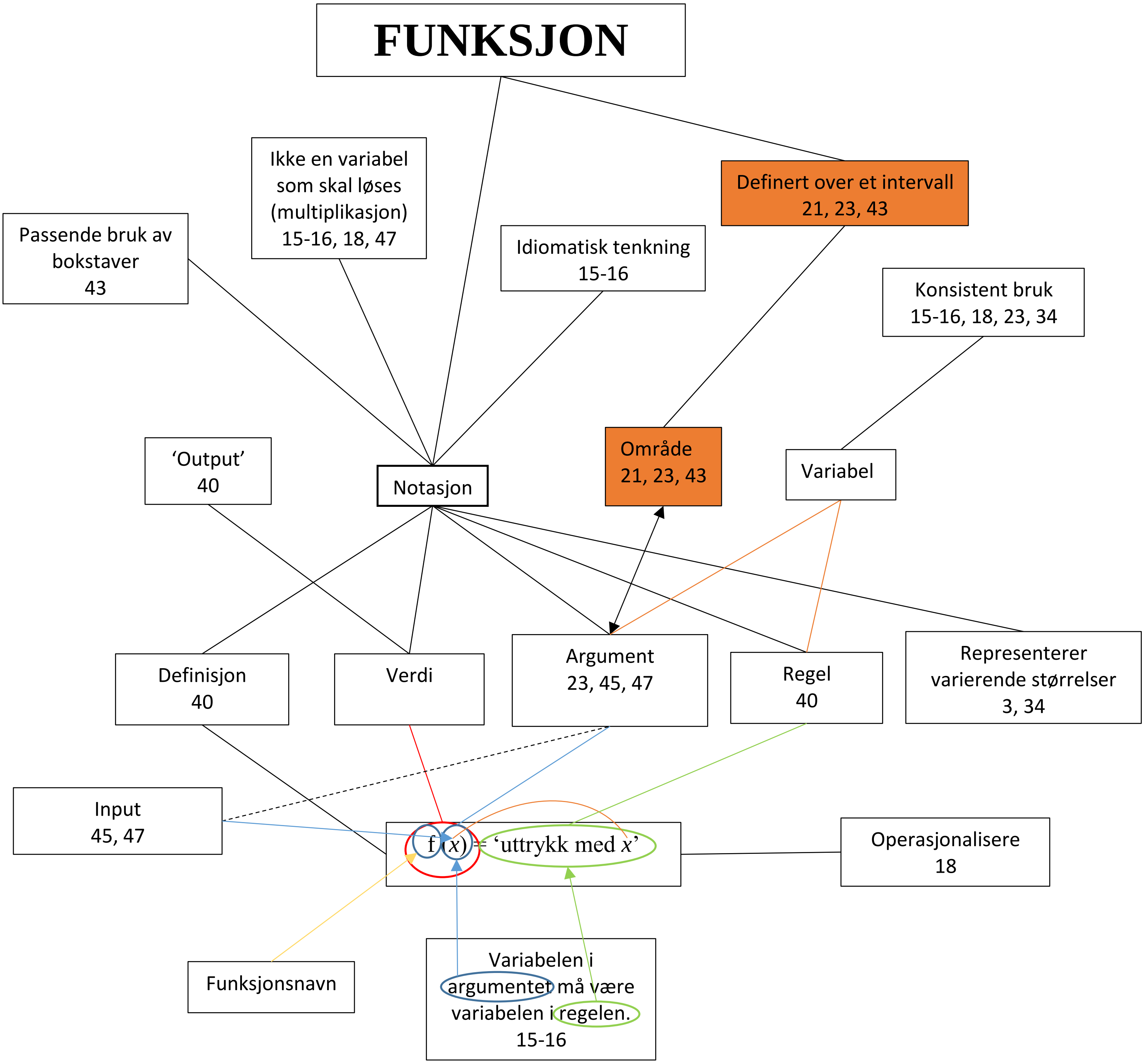
FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 25:

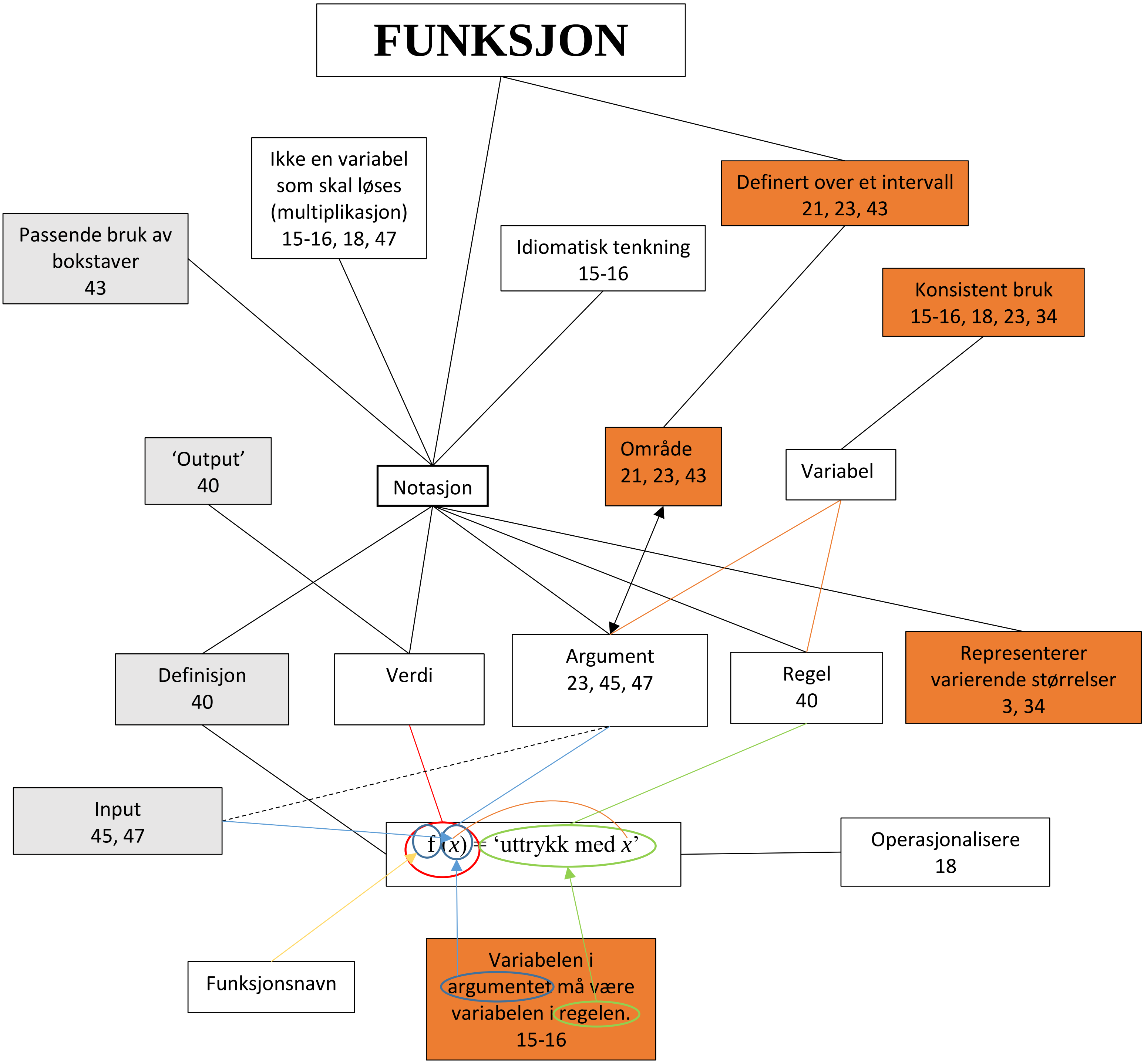


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f(x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 26:

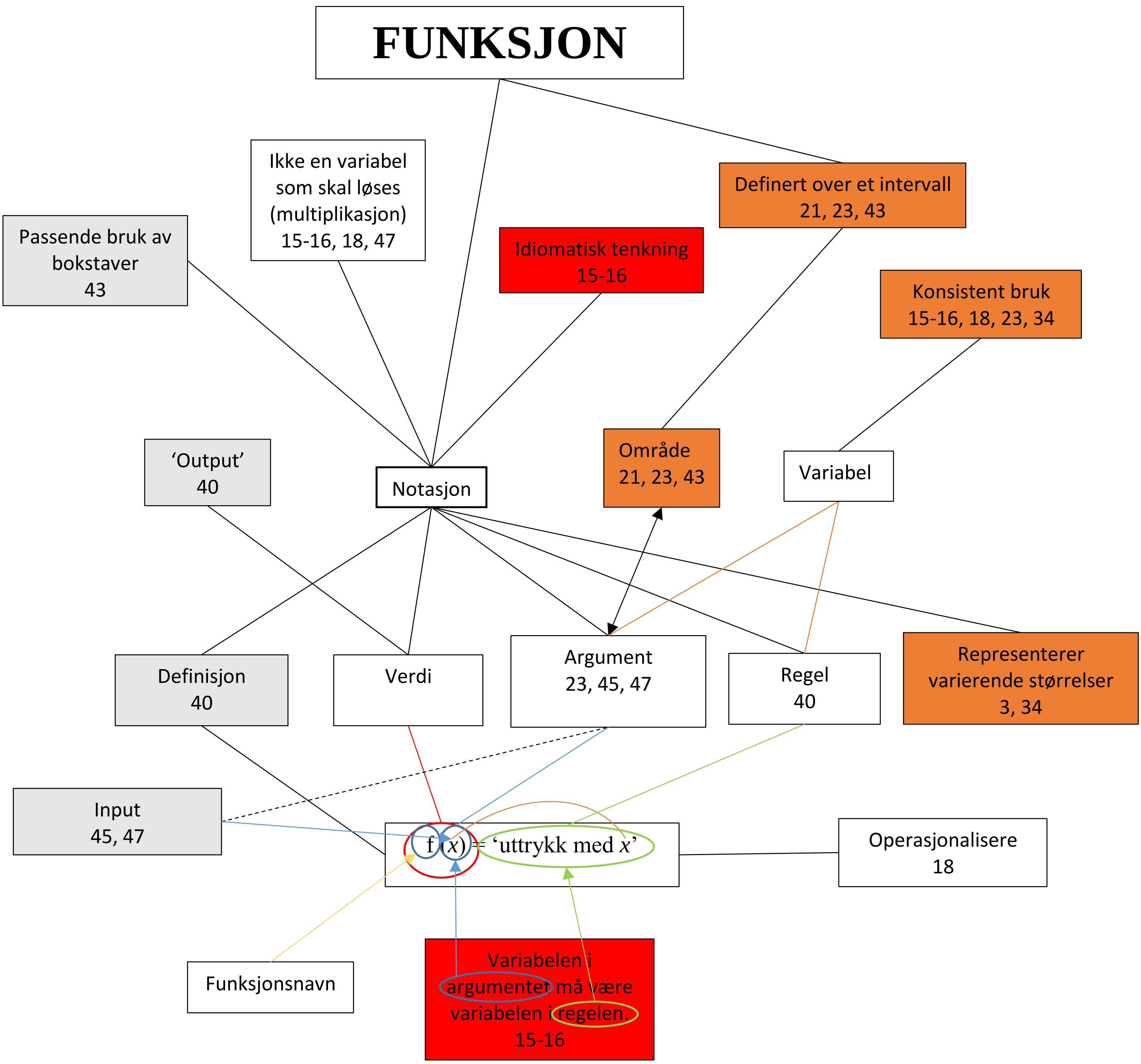

FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 27:

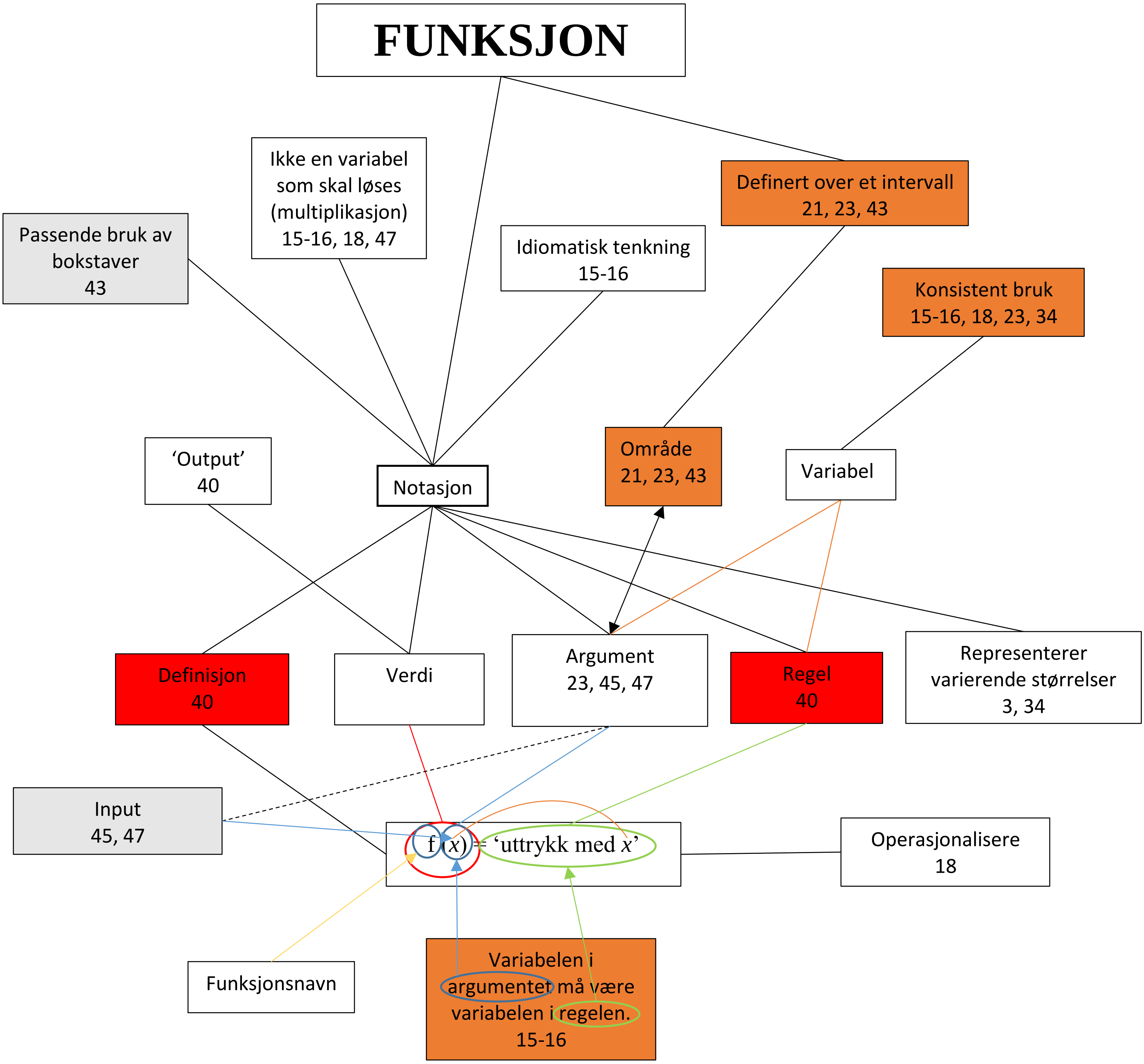


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 28:


FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Definert over et intervall 21, 23, 43
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Student 29:



FUNKSJON
Ikke en variabel som skal løses (multiplikasjon) 15-16, 18, 47
Passende bruk av bokstaver 43
Idiomatisk tenkning 15-16
Definert over et intervall 21, 23, 43
Konsistent bruk 15-16, 18, 23, 34
'Output' 40
Notasjon
Område 21, 23, 43
Variabel
Definisjon 40
Verdi
Argument 23, 45, 47
Regel 40
Representerer varierende størrelser 3, 34
Input 45, 47
f (x) = 'uttrykk med x'
Operasjonalisere 18
Funksjonsnavn
Variabelen i argumentet må være variabelen i regelen. 15-16

Vedlegg 3: Oversikt over studentenes scoring

	Item 3:	Item 15-16:		Item 18:	Item 21:		Item 23:	Item 34	Item 40:		Item 43:		Item 45:	Item 47:
	3, 2, 1, 0, IDK, X	3, 2, 1, 0, IDK, X	4, 3, 2, 1, 0, IDK, X	3, 2, 1a, 1b, 0, IDK, X	3, 2, 1, 0, IDK, X	4, 3a, 3b, 2a, 2b, 1, 0, IDK, X	4, 3, 2, 1, 0, IDK, X	4, 3, 2, 1, 0, IDK, X	3, 2, 1, 0, IDK, X	3, 2, 1, 0, IDK, X	3, 2, 1, 0, IDK, X	y, n, IDK, X	a, b, c, d, e, f, g, 0, X	a, b, c, d, e, f, X, 0
ID kode:	Score A:	Score A:	Score B:	Score A:	Score A:	Score B:	Score A:	Score A:	Score A:	Score B:	Score A:	Bokstav:	Score A:	Score A:
1	X	3	4	3	3	4	4	2	3	2	X	X	X	X
2	3	1	3	3	3	0	3	4	3	2	1	n	d	d
3	2	1	3	3	3	0	4	3	3	2	3	n	c	b
4	3	0	3	3	3	0	4	4	3	2	3	n	d	X
5	3	3	4	3	3	4	4	4	X	X	X	X	X	X
6	2	2	2	3	0	2b	4	4	1	2	X	X	X	X
7	2	1	2	3	3	0	4	2	3	2	3	n	d	b
8	2	2	3	3	3	0	4	4	2	3	1	n	X	X
9	IDK	X	4	3	3	4	4	4	1	3	3	n	d	a
10	IDK	2	3	3	3	0	4	IDK	3	2	0	n	X	X
11	2	2	4	3	3	4	4	4	3	2	2	n	d	d
12	2	1	2	3	3	0	4	4	3	3	2	n	d	e
13	X	1	4	3	IDK	0	4	2	3	2	IDK	IDK	d	f
14	3	3	4	3	3	2a	4	4	3	2	3	n	d	c
15	X	3	4	3	0	4	4	X	3	2	X	X	d	f
16	3	1	4	3	1	2b	0	0	3	IDK	3	y	d	b
17	2	1	4	3	0	0	4	0	3	2	X	X	X	X
18	3	1	2	3	0	0	0	2	IDK	IDK	3	n	d	f
19	X	1	4	3	3	0	4	X	3	1	1	n	d	a
21	X	1	4	0	3	0	2	0	1	2	3	n	d	X
23	0	3	4	1b	X	X	1	4	X	X	X	X	X	X
24	0	1	2	3	3	0	2	X	3	2	1	n	f	c
25	2	3	4	3	0	0	4	X	0	0	0	n	d	f
26	3	3	4	d	0*	0*	4	4	3	3	3	n	d	a
27	0	3	3	3	3	0	4	4	X	X	X	X	X	X
28	2	2	2	3	3	1	3	0	X	X	X	X	X	X
29	3	1	4	3	3	1	4	4	3	2	X	X	X	X