UNIVERSITETET I AGDER

Tidlig algebra

En studie av tidlig algebra med elever på 6. trinn

Ronny Stenberg

Veileder
Pauline Vos

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2016
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Denne masteroppgaven markerer avslutningen på mitt fireårige studie i matematikkdidaktikk. I fire år har jeg studert ved siden av å jobbe som lærer i barneskolen. Det har vært fire tøffe, krevende og utfordrende år. Samtidig sitter jeg etter arbeidet med denne oppgaven igjen med mye lærdom og erfaring jeg kommer til å ta med meg videre, både i livet og i jobbsammenheng.

Det er mange som fortjener en takk for å ha vært gode støttespillere for meg underveis i prosessen med å skrive oppgaven. Spesielt vil jeg takke min gode veileder Pauline Vos. Hun har hele tiden veiledet meg i riktig retning, og sett til at jeg til slutt fikk oppgaven i mål. Uten din hjelp hadde jeg nok ikke blitt ferdig. Det har vært både motiverende, inspirerende og lærerikt å få motta veiledning fra deg. Tusen takk!

Jeg vil også takke Kine og Maria for hjelp, tips og støtte i arbeidet med oppgaven. En god prosess sammen med dere i starten av arbeidet dannet et godt grunnlag for den videre jobben med å gjennomføre og bli ferdig med oppgaven.

Uten datamateriale fra elevene som spilte spillet med meg på hadde det ikke blitt noen oppgave. Takk til læreren som åpnet klasserommet for meg og takk til flotte elever som både ville spille og som velvillig stilte til intervju med meg etterpå.

Jeg må også få takke Frans van Galen ved Freudenthal Institute for uvurderlig hjelp med å få oversatt spillet fra engelsk til norsk. Jeg setter veldig pris på denne hjelpen, og håper dere kan bruke arbeidet med denne oppgaven til noe.

Takk til lillebror Ole Kristen for tips og hjelp de aller siste dagene. Det var veldig nyttig å få noen kritiske innspill til det jeg hadde skrevet.

Helt til slutt vil jeg takke min gode og ikke minst tålmodige familie. Takk til Henriette for at du ordner og fikser alt. Takk til Linea og Max for at dere er der. Dere har hatt en pappa som har vært altfor mye borte i altfor mange år. Nå er det endelig over og ”den dumme masteren” er levert!

Kristiansand, mai 2016

Ronny Stenberg

Sammendrag

Hovedtemaet for forskningen som er beskrevet i denne oppgaven er *tidlig algebra*. Tidlig algebra er en fase som kan fylle gapet mellom aritmetikk og algebra. Tidlig algebra handler om resonnering, som å analysere forhold mellom størrelser, legge merke til struktur, studere endring, eller generalisering, uten behov for symboler. I mitt teoretiske rammeverk definerer jeg begrepene tidlig algebra, algebraisk tenkning og generalisering; Jeg forklarer forskjellen mellom tidlig algebra og pre-algebra, og skriver om forholdet mellom aritmetikk og algebra.

For å få innsikt i tidlig algebra har jeg studert hvordan elever i 6. klasse (omtrent 12 år gamle) resonnerer og hvordan de generaliserer når de spiller et tallspill på PC, kalt *Perler på en snor*. Spillet er om en rad av perler i forskjellige farger (raden inneholder 4-10 perler), og elevene må forutsi posisjonen til en perle når raden er repetert et visst antall ganger. Analysert algebraisk finner en fire variabler i dette spillet, og det består av ti oppgaver.

Forskningsspørsmålet mitt var:

- Hvordan resonnerer elever i 6. klasse når de spiller *Perler på en snor,* og hvordan generaliserer de?

I studien har jeg brukt en kvalitativ metode i form av klasseromsobservasjon, der elevene jobbet sammen i grupper på to eller tre med et spill på PC. Det var tilsammen syv grupper og elevene var fra en skole i en kommune like utenfor Kristiansand.

Jeg brukte et skjermopptaksprogram og tok opp både det elevene gjorde på skjermen og det de snakket om underveis. Jeg var tilstede i klasserommet i to skoletimer og gjennomførte i etterkant et intervju med gruppene.
I etterkant gjennomførte jeg en datareduksjon ved først å gå gjennom alt datamaterialet og lage en oversikt over strategiene elevene brukte. Deretter valgte jeg ut noen episoder til transkripsjon og analyse. Jeg valgte disse episodene med mål om å analysere variasjonen i løsningsstrategiene elevene brukte.
Resultatene fra studien viste at det var stor variasjon i hvordan elevene resonnerte når de løste oppgavene, og det var stort mangfold i løsningsstrategiene de brukte. Noen strategier var mer naive, mens andre strategier viste klar algebraisk tenkning. Jeg observerte generalisering over alle fire variablene jeg hadde identifisert i spillet. Spillet var tilgjengelig for alle elever, både de som i følge læreren var på et lavt nivå og de som var på et høyt nivå innenfor matematikk. Det var bemerkelsesverdig hvordan noen av de elevene på lavt nivå løste oppgavene effektivt gjennom kreative strategier som viste deres evner til å generalisere.

Oppgaven peker på at det er nødvendig med en vid forståelse av hva som er algebraisk tenkning. Med stadig mer bruk av PC og spill i matematikkundervisningen kan vi finne nye måter å få elever til å tenke algebraisk. Min studie viser at algebraisk resonnering kan motivere dem til det, og ikke minst hva slags generaliseringer de kan gjøre.

Summary

The main theme for the research described in this thesis is *early algebra*. Early algebra is a phase that could fit the gap between arithmetic and algebra. Early algebra includes algebraic reasoning, such as analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, or generalizing, without a need to use symbols. In my Theoretical Frame, I define the terms early algebra, algebraic thinking, and generalization; I explain the differences between early algebra and pre-algebra, and I go into the relationships between arithmetic and algebra.

To gain insight into early algebra, I have studied how pupils in 6th grade (approx. 12 years old) reason and how they generalize when they play a number game on the computer, called *Beads on a String*. This game is about a row of colorful beads (the row contains 4 – 10 beads), and the pupils must predict the position of the beads when this row is repeated many times. When analyzed algebraically, there are four variables in this game. The game consists of ten tasks.

My research question was:

- How do pupils in the 6th grade reason when they play *Beads in a Chain,* and how do they generalize?

In this study I used a qualitative research approach in the form of classroom observation, where pupils worked together in groups of two or three with the game on a computer. There were seven groups. The pupils were from a school in a small town near Kristiansand.

I used a screen capturing-program that produces a video of what the pupils did on the screen together with what they communicated about while they worked. I was present in the classroom for two lessons hours and afterwards I conducted an interview with each of the groups.
I performed a data reduction by first going through all video materials and making an overview of the strategies the pupils used. Thereafter, I selected episodes for transcription and detailed analysis. I selected the episodes aiming at analyzing the variation in the solution strategies the pupils used.
The results showed a great variation in how the pupils reasoned when they solved the tasks and that there was great diversity in the solution strategies they used. Some strategies were more naïve, while other strategies showed clearly algebraic thinking. I observed generalizations across all four variables that I had identified in the game. The game was accessible to all pupils, whether perceived as lower or higher achievers by their teacher, and it was remarkable that some of the lower achieving pupils solved the tasks efficiently through creative strategies that showed their generalizing abilities.

My study points out that it is necessary to have a broad understanding of what algebraic thinking is. With an increasing use of PCs and games in the teaching of mathematics, we can find new ways to enable pupils to reason algebraically. My study revealed that algebraic reasoning can motivate them and not least what kind of generalizations they can make.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Denne oppgaven har tidlig algebra som hovedtema. Tidlig algebra handler om at elever utvikler evnen til å tenke logisk, til å resonnere, til å finne mønstre, sammenhenger og strukturer i og mellom tall og figurer, samt å generalisere og lage "regler" for det som skjer. I denne oppgaven ønsker jeg å se på hvordan elevene resonnerer, og hvordan de generaliserer når de jobber med et dataspill innenfor tidlig algebra. Dette vil jeg belyse med forskning og teori rundt *tidlig algebra*, *algebraisk tenkning*, *forholdet mellom aritmetikk og algebra* og *generalisering*.

1.1 Studier og erfaringer

Jeg har alltid hatt en interesse for matematikk, og har helt fra jeg var liten "surfet" gjennom faget uten å møte på de store vanskelighetene. Den største utfordringen jeg kan huske fra grunnskole og videregående er motivasjonen, noe som gjorde at jeg gikk lei matematikk mot slutten av videregående. Etter noen år i jobb og studier fant jeg tilbake til både interessen og motivasjonen for matematikkfaget ved lærerutdanningen på UiA, og gjennomførte der et årsstudium i matematikk som ledd i den fireårige lærerutdanningen. Dette var et positivt år, og allerede da syslet jeg med tanken om å ta en mastergrad i matematikkdidaktikk. Da jeg begynte å jobbe i barneskolen i 2009 fant jeg fort ut at matematikk var mitt fag. Det var her jeg trivdes best i klasserommet og det var her jeg merket at jeg hadde mest å tilføre elevene. Etter å ha jobbet tre år i skolen begynte jeg på mastergraden ved siden av jobb i 2012. Målet mitt var å lære mer om matematikk og matematikkdidaktikk. Jeg ville finne ut mer om hva som er den beste måten å undervise på i matematikk.

Utenom det nevnte sisteåret på videregående har jeg alltid like matematikk. Det er spesielt to hendelser som har brent seg fast hos meg, og er med på å gjøre meg til den læreren jeg er i dag. Den første hendelsen var på ungdomsskolen hvor vi fikk i lekse å løse en oppgave i matematikk. Jeg husker ikke hva oppgaven var, men jeg husker læreren sa til meg: *"De andre kommer til å gjøre det sånn, se om du klarer å finne en annen måte."* Den andre hendelsen er fra lærerutdanningen da vi lærte om figurtall i matematikkundervisningen. Den enorme mestringsfølelsen av å kjapt forstå strukturen og sammenhengen i et slikt mønster, og være i stand til å beskrive det generelt har satt spor hos meg. Begge disse episodene handler om algebra. Det handler også om motivasjon, og å tilrettelegge til hver enkelt elev. Dette har blitt mer og mer viktig for meg når jeg underviser.

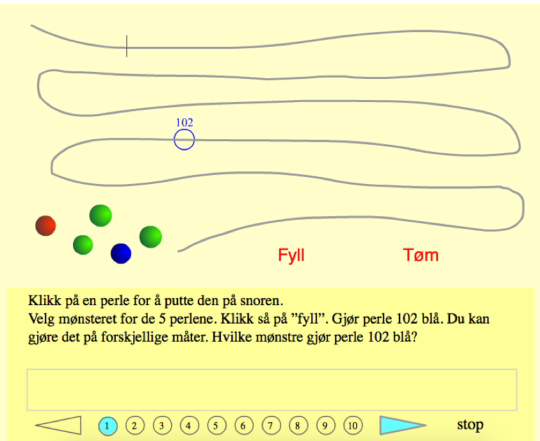
1.2 Bakgrunn for valg av oppgave

Algebra blir stadig trukket frem som et av områdene som er aller vanskeligst i matematikken. Grønmo et al., (2012) skriver i rapporten etter TIMSS 2011 at de er spesielt bekymret over de svake prestasjonene i algebra, og mener det er den største utfordringen Norge står ovenfor i matematikk. Naalsund (2012) skriver i sin doktorgradsavhandling at mange opplever det som en "...meningsløs manipulasjon av symboler." Dette stemmer med min erfaring. Jeg har hatt tidligere elever som, når de går på ungdomsskolen, kommer til meg og sier at algebra er kjedelig, at det er vanskelig, og at de *"ikke forstår hvilken regel de skal bruke."* Dette synes jeg er veldig synd. Jeg har selv alltid likt algebra, men har nok i større grad vært interessert i mønsteret og strukturen som ligger bak, og ikke hva ”regelen er” for det en gjør. Hvorfor har alltid vært viktigere enn hva, og jeg har hatt lærere som ikke har brukt regelbok i matematikk. Forståelsen har alltid fått stått i sentrum.

På bakgrunn av dette synes jeg det er interessant å se nærmere på hvordan elevene tenker, og hva slags oppgaver det passer å gi til elevene i barneskolen når det gjelder algebra. Hvordan resonnerer de når de blir bedt om å finne mønstre og strukturer i en oppgave? Hvilke mønstre er de i stand til å finne? Er de i stand til å tenke algebraisk på et tidlig stadie, eller blir det for vanskelig? Er det prøv-og-feil-metoden som dominerer, eller kan en se spor etter tidlig algebraisk tenkning? Hva er det som forsterker eller forstyrrer tenkningen? Dette er spørsmål jeg synes er viktige og interessante å jobbe med. Ett av målene med denne forskningen er at både jeg og andre lærere i Norge skal kunne gi elevene på dette alderstrinnet enda bedre og mer tilrettelagt undervisning i tidlig algebra.

1.3 Problemstilling og foreløpige forskningsspørsmål

Gjennom min studie innenfor tidlig algebra vil jeg ha fokus på hvordan elevene tenker, resonnerer og hvilke mønstre de er i stand til å finne. Temaet er tidlig algebra og via veileder kom jeg inn på tanken om å bruke et spill med elever, der jeg enten spilte med de eller observerte det de gjorde mens de spilte. Denne tanken falt jeg for, og det samme gjorde jeg for dataspillet *Beads on a Chain* fra Freudenthal Institue. Spillet går ut på å perle et mønster langs en snor, og gjennom mønsteret finne svaret på tilsammen 10 oppgaver.



Bilde 1: Oppgave 1

Valg av dataspill som en del av metoden er heller ikke helt tilfeldig. Jeg har alltid vært en stor tilhenger av bruk av IKT i undervisning. Samtidig har jeg sett mange begrensinger, og har hatt en oppfattelse av at det er mange programmer og spill som ikke er matematisk gode. Det er for mange drillprogrammer og spill der en øver på aritmetisk regning, eller spill som kun er laget for at elevene skal ha det gøy. Det er ingenting feil med å ha det gøy, men med dette spillet så jeg litt andre muligheter jeg ville utforske. I dette spillet kan elevene tenke, resonnere, prøve ut, justere, snakke og lete etter sammenhenger sammen mens de jobber. Dette er for meg hva tidlig algebra dreier seg om.

Jeg endte tidlig i prosessen opp med disse to foreløpige forskningsspørsmålene:

1. Hvordan resonnerer elever i 10-12 årsalderen når de jobber med et tallspill, hvilke mønstre er de i stand til å finne og hvordan generaliserer de?
2. Hvilke utfordringer innenfor tidlig algebra kan gis til elever i 10-12 årsalderen for å hjelpe de i å utvikle sin algebraiske tankemåte?

1.4 Disposisjon

I oppgaven introduserer jeg først den teoretiske perspektivet for studien. Jeg viser til forskning innenfor algebra, med størst fokus på tidlig algebra. I tillegg viser jeg hva litteraturen sier om hva algebraisk tenkning er, hvordan forholdet mellom aritmetikk og algebra er og hva som kjennetegner generalisering. Teoridelen avsluttes med å presentere mitt endelige forskningsspørsmål.

I kapittel tre beskriver jeg metoden jeg har brukt og hvilke valg jeg har tatt. Det er også en nøye presentasjon av spillet som ble brukt i studien. Jeg har brukt en kvalitativ metode, der jeg observerte elever som i grupper spilte spillet på PC. Jeg brukte et skjermopptaksprogram og tok opp skjermen og det de sa underveis, og gjennomførte et intervju med hver gruppe i etterkant. Videre har jeg gått gjennom alle opptakene, sett på løsningsstrategiene til gruppene og valgt ut noen spesielle episoder til transkripsjon og analyse.

Kapittel fire er en beskrivelse og analyse av resultatene jeg har funnet. Denne delen er todelt, først en oversikt over løsningsstrategier og så noen eksempler på hvordan elevene resonnerte. I kapittel fem vil jeg gjennom en diskusjon prøve å komme til en konklusjon og svare på forskningsspørsmålet mitt. Siste kapittel er en avslutningsdel. Her vil jeg si noe om de pedagogiske implikasjonene oppgaven har, vurdere hva jeg ville gjort annerledes og si noe om videre forskning og undervisning i lys av resultatene. Til slutt sier jeg noe om hva jeg har lært etter arbeidet med denne oppgaven.

2 Teoretisk bakgrunn

I dette kapittelet vil jeg presentere den teoretiske bakgrunnen for studien min. Temaet for oppgaven er tidlig algebra. Aller først vil jeg presentere teori om algebra, og skille mellom tidlig algebra og pre-algebra. Videre vil jeg se på forholdet mellom aritmetikk og algebra, og si noe om hva som kjennetegner algebraisk tenkning. Jeg vil presentere en modell for algebraisk aktivitet, og helt til slutt presentere teori om generalisering i forbindelse med algebra.

2.1 Algebra

I følge Kieran (2004) har algebra, helt fra Al-Khowarizis tid for rundt 1200 år siden, vært sett på som vitenskapen om likningsløsning. Dette synet har ikke forandret seg opp gjennom årene, men det har tidspunktet for når elever blir presentert for algebra. Det vanlige har vært at elevene først har fokus på aritmetikk i barneskolen, og deretter møter på algebra i ungdomsskolen. Tanken om at en først må lære seg aritmetikk før en kan lære seg algebra har vært den ledende tankegangen i mange år. Det ble gjort undersøkelser på 1970-tallet som pekte på forskjellige vanskeligheter elever hadde med algebra, og en begynte å tenke på muligheten for å introdusere algebra tidligere enn det som hadde vært vanlig. Målet var å gjøre algebraen tilgjengelig for en større gruppe elever (Kieran, 2004).

Kieran (2007) skriver at algebra har blitt behandlet som et verktøy for å manipulere symboler og løse problemer. De siste tiårene har det vært gjort mye forskning på algebrafeltet. Både når elever bør introduseres for algebra, og hva som skal inkluderes i introduksjonen har vært undersøkt. I tillegg er det kommet mange forskjellige definisjoner på hva algebra er, og innholdet i algebra har blitt større og mer komplekst opp gjennom årene. Bell (1996) beskrev algebra som et middel til å utrykke generaliseringer, relasjoner og formuleringer, løse problemer, betegne ukjente og løse likninger. Kaput (1995) trakk frem fem aspekter med algebra; generalisering og formalisering, syntaktisk guidet manipulering, studien av struktur, studien av funksjoner, relasjoner og variasjon og et modelleringsspråk. I tillegg har flere andre kommet med sine syn på hva algebra er. For å vise hvor komplekst algebra er, og hvor vanskelig det er å komme med en klar definisjon viser Kieran (2007) til et internasjonalt kollokvium for algebra der både matematikere, lærere, studenter og forskere var tilstede. De ble stilt spørsmålet: ”Hva er algebra?” Tilsammen syv tema kom opp; et skolefag, generalisert aritmetikk, et verktøy, et språk, en kultur, en måte å tenke på og en aktivitet (Kieran, 2007).

Mason (1996) skriver at algebra er språket som brukes for å uttrykke og manipulere generaliteter. Han påstår at algebra er å regne som et ”dødt emne” i skolen, og at faget kan sidestilles med f.eks. å huske de forskjellige delene på en blomst. I følge Mason skyldes det mangel på aktiviteter som fremmer generalisering hos elevene. Han mener generalisering er kjernen i all matematikkundervisning, og drar det så langt som å si at en time som ikke er preget av generaliseringsaktiviteter ikke er en ordentlig matematikktime (Mason, 1996).

Guri A. Nortvedt er sitert på følgende måte i bladet ”Bedre skole”, når hun blir spurt om tenkningen som har vært rundt algebra i norsk skole:

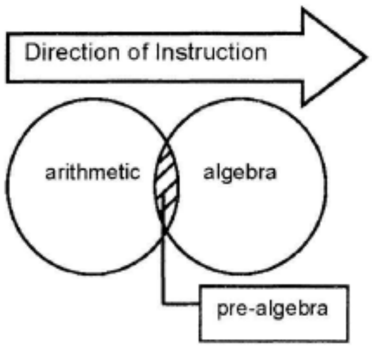
> ”*I dag har vi en tendens til å heller prøve å reparere på det som er gått galt: vi tilfører algebra i ungdomstrinnet for at elever ikke skal ryke ut i videregående. Men så ser vi at de ikke kan nok algebra når de kommer til ungdomstrinnet, så da må vi ha mer på mellomtrinnet. Hvis vi hadde tilført tilstrekkelig med ressurser på de første trinnene, så ville vi unngå denne formen for reparasjonsvirksomhet”* (Brøyn, 2013 s. 25).

For at elevene skal få bedre tid til overgangen fra aritmetikk til algebra har mange tenkt at det er lurt å flytte pensum nedover på trinnene. Nortvedt kaller det for reparasjonsvirksomhet. Carraher, Schliemann og Schwartz (2007) skriver det vil være en katastrofe å ta algebraundervisningen som den er i dag og flytte den nedover på barneskolen. De stiller spørsmålet: Hvorfor i all dager skal noe som virker meningsløst for mange voksne, kunne virke meningsfullt flere år før? (Carraher, Schliemann og Schwartz, 2007) .

Cai og Knuth (2011) sier at tradisjonelt har aritmetikk vært i fokus på barneskolen, mens algebra har vært i fokus på ungdomsskolen. De viser til Kieran (2007), og sier det nå er en voksende enighet om at elevene kan lære algebra tidligere, og at de bør bli eksponert for algebraiske ideer samtidig som de utvikler sine aritmetiske ferdigheter. De sier også at det er enighet om at måten å utvikle slike algebraiske ideer ikke er å dytte ungdomsskolepensum ned i barneskolen. I følge dem krever utvikling av algebraiske ideer en fundamental endring i hvordan aritmetikk ses på og undervises. En må utvikle en bedre forståelse omkring de faktorene som er med på å gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra så vanskelig for elevene (Cai og Knuth, 2011).

To syn på algebra

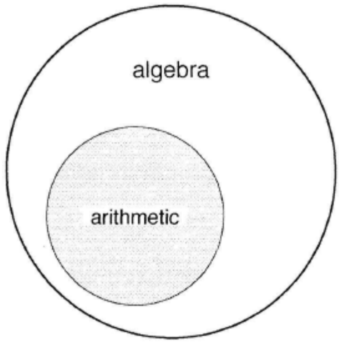
Carraher, Schliemann og Brizuela (2007) skriver i boka *”Bringing out the algebraic character of Arithmetic”* at det er to ulike syn på algebra som blir diskutert. Det ene er det tradisjonelle synet, der algebra er noe som kommer etter aritmetikken. Det er mange som stiller seg spørsmålet om unge elever virkelig kan, og trenger å lære algebra (Carraher, Schliemann og Brizuela, 2007). Tilhengerne av en slik måte å tenke på snakker derfor om at det må bygges en bro mellom disse grenene.



Figur 1: En bro mellom aritmetikk og algebra (Schliemann et al., 2007 s. xi).

Fundamentet for denne broen er det lille skraverte feltet som overlapper både aritmetikken og algebraen. En slik brobygging vil finne sted mot slutten av perioden av aritmetikkundervisning og i starten av algebraundervisningen (Schliemann et al., 2007).

Tanken om sammenhengen mellom aritmetikk og algebra som er beskrevet ovenfor har vært den ledende i mange år, til tross for at det har vært kjent at den generelle algebraforståelsen hos barn ikke har vært god. Det har ført til at det har vokst frem en alternativ måte å se dette på, hvor grunntanken er at en introduserer algebraen mye tidligere i skolegangen. Aritmetikk ses på som en del av algebraen.



Figur 2: Aritmetikken som en del av algebraen (Schliemann et al., 2007 s. xii).

Det er her tidlig algebra kommer inn i bildet. Meningen er ikke at det skal være algebra som er innført tidligere, og en skal ikke ha fokus på algebraisk notasjon. I stedet er fokuset på å finne eller kjenne igjen mønstre, og å generalisere aritmetikken (Schliemann et al., 2007). Det handler ikke om **når** algebraen skal innføres, men om **hva**, **hvor** og **hvordan** den skal innføres.

Et av argumentene som brukes for tidlig algebra er at når elever gjentatte ganger i løpet av aritmetikkundervisningen er blitt introdusert for én måte å se likhetstegnet på, blir det vanskeligere når disse elevene møter algebraen. De må da bli kjent med en annen og ny måte å se likhetstegnet på. Schliemann, Carraher og Brizuela skriver at elevene godtar at $2 + 7 = 9$, men $4 + 5 = 3 + 6$, eller $x + 3 = 2 + 5$, er noe de har problemer med å godta. Elevene må ofte omstille seg og endre forståelsen de har hatt av likhetstegnet når de begynner med algebra. Dette gjør introduksjonen av algebra vanskeligere enn det som er nødvendig. I undervisning drevet fra et tidlig algebra-perspektiv vil likhetstegnet settes i flere forskjellige sammenhenger helt fra starten av; som tegn på ekvivalens, forhold, symmetri og omforming. Alle aritmetiske ideer, konsepter eller teknikker er ikke algebraiske, men de har et algebraisk potensiale (Schliemann et al., 2007).

2.2 Algebra på de tidlige trinn

Når en snakker om det som skjer før skolealgebraen introduseres har det vært to tilnærminger de siste årene: pre-algebra og tidlig algebra.

Booth (1988) viser til studier som hevder at mange av de vanskelighetene elevene har med å lære seg algebra stammer fra dårlige kunnskaper innenfor aritmetikken. *"Vanskelighetene elever opplever med algebra er ikke så myw vanskeligheter i algebra, som vanskeligheter i aritmetikk som ikke blir rettet på"* (Booth, 1988 s. 29). For å mestre algebra må en ha dyp innsikt i aritmetikken og hvordan den er bygd opp.

Herscovics og Linchevski (1994) mener det eksisterer et kognitivt gap mellom algebra og aritmetikk, og at det er nødvendig med en tettere sammenheng mellom dem for å gjøre overgangen lettere for elevene. De foreslår pre-algebra som hjelp (Herscovics og Linchevski, 1994).

2.2.1 Pre-algebra

Carraher og Schliemann (2007) skriver at pre-algebra er en tilnærming som fokuserer på overgangen fra aritmetikk til algebra, som tradisjonelt sett har vært vanskelig for elever. En ønsker gjennom denne tilnærmingen å utvide eller redefinere forståelsen for en rekke matematiske symboler, som +, -, •, / og =, som er viktige symboler i algebra. Tanken er at en forsiktig tilnærming til disse symbolene før en begynner med algebraen vil gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra lettere for elevene.

Bak tilnærmingen ligger en antakelse om at unge elever ikke er egnet til å lære seg algebra. Forskningen som ble utført på 1980-tallet hadde derfor hovedsakelig fokus på likninger, og det ble ikke stilt spørsmål med om en skulle begynne med algebra tidligere. Carraher og Schliemann sier det er interessant å legge merke til at mange av de forskerne som utviklet modeller for å lette overgangen fra aritmetikk til algebra selv sier at mange av problemene elevene har stammer fra elevenes tidligere erfaringer med aritmetikk. Det ble likevel ikke stilt spørsmål med at aritmetikk skulle komme før algebra (Carraher og Schliemann, 2007).

2.2.2 Tidlig algebra

Tidlig algebra har de siste 10-15 årene skilt seg ut fra algebra, og vokst frem som et eget emne innenfor matematikkfaget. Det er et forholdsvis nytt emne, og det aller meste av litteraturen om tidlig algebra er skrevet de siste 10-15 årene.

Carraher og Schliemann (2007) har stått i bresjen for teorien om tidlig algebra, som er en tilnærming for undervisning og læring i matematikk. Innenfor tidlig algebra skapes en tilnærming til algebra innenfor de emnene som allerede eksisterer i matematikkfaget på barneskolen. En introduserer algebraiske ideer tidligere enn det som har vært gjort før. Hovedideen er at algebra er en del av aritmetikken og at aritmetikken inneholder mange algebraiske elementer, bare uten bruk av algebraisk notasjon. Gapet mellom aritmetikk og algebra trenger derfor ikke å eksistere. De ser algebra som generalisering, som eksisterer i alle matematiske emner. Algebraen skal derfor ikke introduseres som et eget emne, men den skal gjennomsyre aritmetikken og andre matematiske emner allerede fra den første opplæringen i matematikk begynner (Carraher og Schliemann, 2007).

Lens og Kaput (2004) beskriver to ulike forståelser av tidlig algebra. Den første forståelsen er vanlige forståelsen mange har hatt om tidlig algebra, som refererer til det første møtet elevene har med algebra. Den andre, og nyere forståelsen, er at en forstår tidlig algebra som det møtet elevene får med algebraisk tenkemåte på langt yngre trinn. Denne siste forståelsen har fått anerkjennelse de siste årene fordi man etter hvert har begynt å innse at små barn er kapable til å få til langt mer enn det man tidligere tenkte (Lens og Kaput, 2004)

Lins og Kaput (2004) deler utviklingen som skjedde før den nyere forståelsen av tidlig algebra inn i tre perioder:

1. Den gamle forståelsen av algebra gjaldt, og man mente at aritmetikk skulle komme før algebra. Det var tradisjonen som styrte, og den var ledende kun fordi den var en tradisjon. Dette ble begrunnet utfra erfaring.
2. En begynte å forske mer på temaet, og blant annet begynte man å undersøke om den måten en alltid har gjort det på med aritmetikk før algebra likevel var den beste.
3. Den vanlige oppfattelsen av at aritmetikk skulle komme foran algebra ble satt på prøve.

Fra tid til annen har det vært diskutert om det er lurt å introdusere algebra tidligere. Det har blant annet vært argumentert for at en bør arbeide med algebra gjennom hele barneskolen. I følge Carraher og Schliemann (2007) vil en slik måte å arbeide med algebra på kunne gi bedre sammenheng, dybde og kraft til matematikken. Talspersoner for tidlig algebra mener at det nåværende innholdet i matematikkfaget ikke er veldig forskjellig fra algebra, og hevder at den algebraiske metoden er mer effektiv enn den aritmetiske metoden når det kommer til å løse problemer (Carraher og Schliemann, 2007).

Carraher og Schliemann (2007) mener at debatten om tidlig algebra har ført til nye spørsmål om hele matematikkopplæringen, om fagets struktur, om lærerens rolle og om gjennomførbarheten av "algebra for alle". De trekker frem fem problemområder som har oppstått i kjølvannet av denne debatten:

Problemområde 1: Forholdet mellom aritmetikk og algebra.
Tidlig algebra utfordrer det rådende synet om at algebra kommer etter aritmetikken og at det bare er for en utvalgt gruppe elver som har de nødvendige ferdighetene. Skal algebra behandles som et adskilt område med egne metoder, hensikter og perspektiver eller skal det utvikles fra, og overføres på aritmetikken?

Problemområde 2: Prosess satt opp mot objekt.
Forskjellige forfattere har stilt opp matematikk som en motsetning mellom operasjon/prosess/utregning/prosedyre/algoritme og objekt/struktur/relasjon. Noen mener at prosedyremessige arbeidsmåter er mer primitive og at de bør erstattes av objektorientering, mens andre sier at selv om de prosedyremessige arbeidsmåtene er avvikende har de en plass i matematikken, og til og med er ønskelige selv i svært avansert matematisk tenkning.

Problemområde 3: Algebraens referensielle rolle.
For noen kommer algebraisk forståelse fra å forsøke å representere ekstra-matematiske situasjoner gjennom modellering, men andre ser på algebraens referensielle rolle som en kilde til forstyrrelse og interferens. Denne spenningen kommer blant annet til syne når en diskuterer hvilken rolle studering av mønstre skal ha i undervisningen om tidlig algebra.

Problemområde 4: Den symbolske representasjonen, snevert definert.
Det er flere forskjellige meninger i forhold til hvor viktig den konvensjonelle algebraiske notasjonen er, tidspunktet den bør innføres på og hensikten den har. Noen mener at den bør ha en fremtredende plass, mens andre mener at den bør utsettes. Begrunnelsen for å utsette er at den er hemmende utviklingsmessig, og kan føre til at elevene driver med meningsløs symbolmanipulasjon. Selv de som er tilhengere av tidlig algebra kan være uenige i helt grunnleggende spørsmål som:

1. Hvilke oppgaver og hva slags tankemåter er algebraiske?
2. Hvilke typer bevis trengs for å evaluere hva slags algebraisk tenkning en finner hos elevene?
3. Hvilke pedagogiske tilnærminger, hva slags lærerutdanning og hvilke politiske retningslinjer bør det oppmuntres til?

Problemområde 5: Den symbolske representasjonen, bredt definert.
Et av de viktigste bidragene til forskning på matematikkopplæring har vært å trekke frem rollen til andre symbolikksystemer. Spesielt gjelder det tabeller, grafikk og naturlig språk. Det er uenighet om viktigheten av slike symbolske systemer. Noen ser dem bare som en port for innlæring av algebra, mens andre mener at de er viktige selv etter at en har en sikker mestring av algebraisk tankemåte.

En innføring av algebra der en ikke har fokus på algebraisk notasjon, men på algebraisk tenkning, kan hjelpe elevene til å forstå sammenhengen mellom algebra og aritmetikk bedre. De vil bli kjent med algebraiske egenskaper og ideer tidligere og på en enklere måte.

Stacey og McGregor (1999) fant i sin forskning ut at når elever løste algebraoppgaver endret de løsningsstrategien sin og gikk bort fra den algebraiske tenkemåten. Istedenfor å tenke algebraisk brukte de måter å tenke på de hadde fra aritmetikken. Dersom denne tenkemåten allerede er bygd på algebra, f.eks. gjennom undervisning i tidlig algebra, vil elevene kunne bruke den til å gjøre sammenhengen mellom aritmetikk og algebra sterkere og mer solid.

2.3 Aritmetikk vs. algebra

Carraher og Schliemann (2007) sier at aritmetikk er vitenskapen om tall, mengder og størrelser. Det inkluderer regneoperasjonene; addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, samt faktorisering og utvinning av røtter. Elevene sin forståelse for tall utvikler seg over flere år, noe som betyr at aritmetikken er et mål i konstant bevegelse (Carraher og Schliemann, 2007).

Lins og Kaput (2004) skriver at sammenhengen mellom algebra og aritmetikk i de aller fleste land er at algebra er generalisert aritmetikk, og tradisjonen er at aritmetikk kommer før algebra. De trekker også frem studier som bidro til at antakelsen om at det var best å vente med algebra var ledende. Disse studiene prøvde i stor grad å produsere nivåer i algebrautdanningen som skulle være normgivende. I tillegg var mange forskere opptatt av å lage oversikter over hva elevene synes var vanskelig med algebra og hva grunnen for det var. De oppsummerer med å si at forskningen var altfor opptatt av å finne ut hva elevene ikke kunne gjøre, istedenfor å ha fokus på hva elevene kunne få til og hvilke muligheter de hadde (Lins og Kaput, 2004).

Kieran (2004) trekker frem fem punkter hun mener kan hjelpe elever å komme fra aritmetisk til algebraisk tenkning. Dette er punkter man jobber med helt fra de tidlige trinn:

1. En må ha fokus på relasjoner, og ikke bare på utregning av et svar.
2. En må ha fokus på operasjonene og deres inverser, og på den tilhørende ideen om å gjøre noe og gjøre om på noe.
3. En må ha fokus på både å representere **og** å løse et problem. Ikke bare på å løse det.
4. En må ha fokus på tall **og** bokstaver, og ikke bare på tall. Dette inkluderer:
    a. Arbeide med bokstaver som både ukjente, variabler og parametere
    b. En må akseptere at et bokstavuttrykk kan være en ferdig løsning
    c. Sammenligne uttrykk for likeverdighet basert på egenskaper istedenfor numerisk evaluering
5. En må ha et refokus på betydningen av likhetstegnet.

Cai og Knuth (2011) skriver at algebraisk tenkning på de tidlige trinn bør ha fokus på den underliggende strukturen i matematikk, og se forbi mestring av aritmetikk og regneferdigheter. Skal en utvikle algebraisk tenkning krever det spesielle måter å tenke på, tankemåter som inkluderer: analysere forholdet mellom størrelser, legge merke til struktur, studere forandring, generalisere, problemløsing, anta, bevise og forutsi. Cai og Knuth skriver at tidlig algebra ikke bare skal utvikle nye måter å forstå matematiske relasjoner, men også nye "habits of mind" (Cai og Knuth, 2011). Det handler om å utvikle nye måter å tenke på innenfor matematikken.

Radford (2014) mener det er viktig at vi har et bevisst forhold til om det er aritmetikk eller algebra vi holder på med. Dersom vi har som mål å jobbe med elevenes algebraiske tenkning, er det viktig at det er nettopp det vi gjør, og ikke holder på med aritmetikk. Aritmetikk og algebra er forskjellige, så det må finnes noen forskjeller mellom dem.

> *"Fra et utdanningsperspektiv vil jeg påstå at det er viktig å finne disse forskjellene. Ellers kan det være vi underviser aritmetikk når vi tror vi underviser algebra. Ved å gjøre det unnlater vi å fremme ekte algebraisk tenkning hos elevene"* (Radford, 2014, s. 258, min oversettelse)

Brekke (2000) skriver at elever trenger en forståelse som bygger på solide kunnskaper i tallregning. En slik forståelse vil være fundamentet for de algebraiske prosedyrene og begrepsdannelsen. Han viser til elever med isolerte kunnskaper, som har vanskeligheter med å overføre disse kunnskapene til nye sammenhenger. Det er i følge han fordi de ikke har hatt mulighet til å utvikle noen begrepsstruktur. Elevene husker derfor bare noen ytre trekk ved prosedyren: " *...flesteparten av elevane bruker mykje av den tida dei arbeider med algebra, til å flytte tomme symbol meiningslaust rundt på eit papir"* Brekke et al., (2000, s. 42).

Radford hevder at elever kan tenke algebraisk selv om de er små, men det er utradisjonelle former for algebraisk tenkning, og tenkning som ikke nødvendigvis er basert på det alfanumeriske nummersystem (Radford, 2014).

En konsekvens av forskjellen mellom algebra og aritmetikk er at på grunn av algebraens analytiske natur er formler i algebra dedusert. Klarer en ikke å se denne sentrale analytiske karakteristikken av algebra kan det føre til at en ser på all produksjon av formler i forbindelse med mønstre som en form for algebraisk tenkning. Howe (2005) sier at en formel rett og slett kan komme fra prøving og feiling, og det er ingenting algebraisk ved det. Slike strategier er utelukkende basert på aritmetiske begreper og tenkning.

Bruk av notasjon er heller ikke i følge Radford (2014) nok til å beskrive forskjellen mellom aritmetikk og algebra. Det alfanumeriske tallsystem vi bruker i dag er en ny oppfinnelse. Flere gamle kulturer har brukt algebra uten notasjon, så bruk av bokstaver i algebra er verken nødvendig eller tilstrekkelig for å tenke algebraisk.

Radford oppsummerer: Bruk av notasjon karakteriserer ikke algebraisk tenkning. Det gjør heller ikke bruken av variabler eller ubestemte størrelser. Han bruker eksemplet med en likning: $2x + 2 = 10 + x$. Denne vil mange løse ved hjelp av prøving og feiling, som vil inkludere en eller annen form for notasjon. Likningen dreier seg om å finne en ubestemt eller ukjent størrelse. Likevel er prøv-og-feil-metode ikke en algebraisk prosedyre. Elevene tenker ikke algebraisk. De bruker aritmetisk begrep og tenker aritmetisk (Radford, 2014).

2.4 Algebraisk tenkning

Det er mange elever som har liten eller ingen motivasjon for å lære algebra. Cai og Knuth (2011) mener at dersom man hjelper elevene til å utvikle sin evne til algebraisk tenkning allerede fra barneskolen av, vil denne motstanden bli mindre.

> *"Dersom elever og lærere rutinemessig brukte de første fem eller seks årene av barneskolen til å samtidig utvikle aritmetisk og algebraisk tenkning (med forskjellig vekt på begge til forskjellige tider), ville aritmetikk og algebra bli sett på å være uløselig bundet sammen. Vi tror at et viktig resultat av dette ville være at studien av algebra i ungdomsskolen ville bli en naturlig og ikke-truende fortsettelse av matematikken på barneskolen"* (Cai og Knuth, 2011, s. 35, min oversettelse).

Rivera (2006) bruker uttrykket "å algebrafisere aritmetikken" når hun skriver om å få frem det algebraiske som ligger i aritmetikken. Det handler ikke om å lage nytt pensum, men om å gjøre pensumet som allerede er der på en ny og annen måte. Videre skriver hun at forskningen som finnes på området gir noen klare føringer for hvordan undervisningen bør være:

1. Aritmetikken må undervises slik at elevene blir gjort oppmerksomme på at det finnes relasjoner og sammenhenger som må kommuniseres matematisk
2. Elevene må lære å sette pris på uformelle og formelle representasjoner. Et mål med undervisningen vil være å føre sammen elevenes egne symboler med det formelle matematiske språket.
3. Lære elevene funksjoner så de tidlig kan begynne å utvikle evnen til matematisk modellering.
4. De må få oppgaver der de må tenke gjennom de matematiske relasjonene i oppgaven før de kan regne ut noe.
5. De må få åpne oppgaver som har flere løsninger.

Kieran (2004) sier at algebraisk tenkemåte kan læres gjennom å analysere forhold mellom størrelser, undersøke strukturen i oppgaver eller arbeide med relasjoner mellom mengder i tekstoppgaver. Alle disse måtene å jobbe på er uten bruk av algebraisk notasjon. Kieran definerer algebraisk tenkning innenfor skolealgebraen på følgende måte:

> *"Algebraisk tenkning på de tidlige trinn involverer utviklingen av tenkemåter innenfor aktiviteter hvor bokstav-symbolsk algebra kan brukes som et verktøy, men som ikke er eksklusiv for algebra, og som en kan være engasjert i uten å bruke bokstav-symbolsk algebra i det hele tatt, slik som å analysere forhold mellom størrelsen, legge merke til struktur, studere endring, generalisere, problemløsing, modellering, rettferdiggjøring, bevise og forutsi"* (Kieran, 2004, s. 149, min oversettelse).

Når det gjelder hva en skal ha som mål for algebraisk tenkning med elevene setter Kieran (2011) opp følgende mål:

- Tenke på det generelle i det spesielle.
- Tenke på regelen i mønstre.
- Tenker relasjonelt om størrelser, tall og operasjoner.
- Tenke på hvordan man kan representere sammenhenger i problemer.
- Tenke på prosesser som begreper,
- Kunne forvente, stille hypoteser og grunngi.
- Kunne visualisere, gestikulere og formulere.

Radford (2014) legger tre forutsetninger til grunn for at noe skal regnes som algebraisk tenkning:

> *"1. Ubestemthet; Oppgaven inneholder ikke-bestemte tall (ukjente variabler, parametere osv.);*
> *2. Betegnelse: De ubestemte tallene i oppgaven må gis navn eller symboliseres. Denne symboliseringen kan gjøres på forskjellige måter. En kan bruke alfanumeriske tegn – men ikke nødvendigvis. Betegnelsen av ubestemte størrelser kan også bli symbolisert gjennom naturlig språk, gester, ukonvensjonelle tegn eller en blanding av disse;*
> *3. Analytiskitet: De ubestemte størrelsene behandles som om de var kjente tall. Det vil si, selv om de ikke er kjent, starter en fra ubestemte størrelser og opererer på dem (dvs. adderer, subtraherer, multipliserer, dividerer dem) som om de var kjente."*
> (Radford, 2014 s. 260-261, min oversettelse*)*

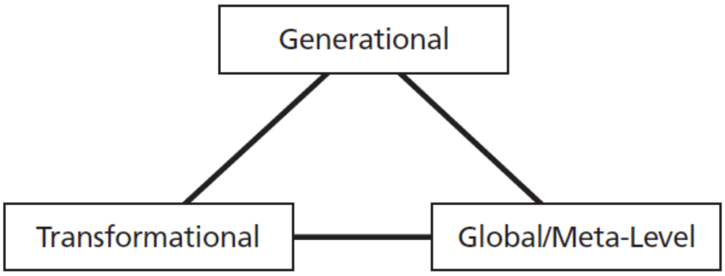
John Mason, som av mange er regnet som en av pionerene når det kommer til generalisering i forhold til læring og undervisning i algebra har beskrevet algebraisk tenkning på følgende måte:

> *"Algebraisk tenkning er forankret i og kommer fra elevenes naturlige kraft til å gi matematikken mening. I hjertet av algebra er uttrykket for generalitet. Å utnytte algebraisk tenkning innenfor aritmetikken, gjennom eksplisitt uttrykk av generalitet, gjør bruk av elevenes evne til å utvikle sin algebraiske tenkning og dermed sette grundigere pris på aritmetikken"* (Mason, 2005 s. 310, min oversettelse)

Bergsten et al., (1997) skiller mellom algebraisk og aritmetisk tenkning ved at en med et aritmetisk utgangspunkt vil ha fokus på å gjennomføre selve regneoperasjonene, mens en med et algebraisk utgangspunkt arbeider med aritmetikkens struktur og betrakter selve operasjonen på tallene (Bergsten et al., 1997).

2.5 Modell for algebraisk aktivitet

Kieran (2007) skriver at Lee fant syv ulike perspektiver på hva algebra var: et skolefag; generalisert aritmetikk; et verktøy; et språk; en kultur; en tenkemåte; en aktivitet. Av de syv var det ideen om algebra som aktivitet som gjennomsyret de andre perspektivene. Lee sier: *"Algebra kommer fram som en aktivitet, noe du gjør, et område for handling, i nesten alle intervjuene"* (Kieran, 2007 s. 713, min oversettelse). På bakgrunn av dette utviklet Kieran en modell for algebraisk aktivitet. Modellen deler skolealgebraen inn i tre aktiviteter: genererende, transformerende og resonnerende aktiviteter (Kieran, 2007).



Figur 3: Kierans tre algebraiske aktiviteter (Kieran, 2007)

2.5.1 Genererende aktiviteter

De genererende aktivitetene er tolkning av situasjoner, verdier, mønster og forhold, og representere de med algebraiske symboler i uttrykk og likninger. Algebraiske symboler brukes for å representere situasjoner, mønstre osv. Radford sier at algebraens rolle i de genererende aktivitetene er å tilføre språk for å gi mening (Kieran, 2007).
Typiske eksempler på genererende aktiviteter:

- Likninger med ukjente eller variabler for å representere en problemsituasjon
- Uttrykk for generaliserte geometriske mønstre eller numeriske følger
- Uttrykk for styrende regler for numeriske forhold

Kieran forutsetter at en har kjennskap til det algebraiske språket og symboler for å arbeide med genererende aktiviteter. Spesielt gjelder det variabler, ukjente og likhetstegnet (Kieran, 2004).

2.5.2 Transformerende aktiviteter

Den andre typen algebraisk aktivitet er de transformerende aktivitetene. Det er den algebraiske regningen, med andre ord de regelbaserte aktivitetene. En stor del av denne typen aktiviteter handler om å forandre formen til et uttrykk eller likning for å ivareta likeverdighet. Dette er prosesser som foregår i den abstrakte matematikken uten sammenheng eller kontekst. Det forutsettes også her at en har kjennskap til algebraiske symboler og algebraisk språk.
Typiske eksempler på transformerende aktiviteter:

- Samle like uttrykk, faktorisere, utvide, substituere, addere og multiplisere uttrykk
- Løsning av likninger og ulikheter, forenkle osv.

Dette er generelle matematiske prosesser og aktiviteter. En kan likevel ikke skille disse resonnerende aktivitetene fra algebra. Da tar en bort all kontekst eller behov for algebra. De er essensielle til de andre aktivitetene i algebra, spesielt til de meningsbyggende genererende aktivitetene. Uten disse er all følelse av mening i algebra borte (Kieran, 2004).

2.5.3 Resonnerende aktiviteter

Den tredje typen algebraiske aktiviteter er de resonnerende aktivitetene. De gir ofte motivasjon til å jobbe med de genererende og transformerende aktivitetene. Felles for de resonnerende aktivitetene er at det finnes flere måter å komme frem til svaret på, og det skal være mulig å komme frem til svaret uten å bruke formell algebra. Det trenger heller ikke alltid handle om å finne et svar, det kan like gjerne være å avdekke et problem eller vurdere et svar. Kieran nevner problemløsing, modellering, arbeide med generaliserte mønstre, argumentasjon og bevis, prediksjon og formodning, studering av forandring i funksjonelle situasjoner og å lete etter forhold eller struktur som eksempler på resonnerende aktiviteter (Kieran, 2007).

2.6 Generalisering

Å jobbe med mønsteraktiviteter blir ifølge Radford (2010) sett på som en av de beste måtene å introdusere elever for algebra på. Likevel er det ikke alle mønsteraktiviteter som fører til algebraisk tenkning. Praktisk har dette stor betydning. En må være klar over hva slags generalisering en jobber med slik at en ikke blander algebraisk generalisering med andre måter å se på den generelle. En må også være utstyrt med de tilstrekkelige pedagogiske evnene og strategiene til å aktivisere elevene med mønstre på en algebraisk måte. Radford fant under en mønsteraktivitet han observerte forskjellige løsningsstrategier. Disse deler han inn i to hovedkategorier, (naive) induksjon og generalisering.

2.6.1 Naive induksjon

Den første kategorien er basert på prøv-og-feil-metode, som Radford kaller for *(naive) induksjon.* Elevene produserte enkle regler og sjekket bare validiteten til reglene i et par tilfeller. Utgangspunktet for reglene var gjetting, noe som gjør at det ikke er en regel, men en hypotese. Disse prosedyrene fører ikke til algebra fordi algebra verken er om gjetting eller om å bruke tegn. Det er tvert i mot om å bruke tegn for å tenke på en bestemt og tydelig måte. Når elevene skulle forklare hvordan de kom frem til regelen sa de gjerne at de fant den med ”et uhell” (Radford, 2010),

Becker og Rivera (2006) skiller også mellom hvordan elevene jobber med generaliseringsoppgaver. De kaller fremgangsmåten der elevene bruker prøv-og-feil metode eller lager formler og regler på bakgrunn av tallene de får oppgitt i oppgaven for *numeriske generaliseringer*. Elevene har da liten forståelse for hva de forskjellige parameterne i formlene representerer. Formlene begrunnes og forsvares ut fra hvordan de passer til en liten mengde informasjon, og ikke hvordan de passer til helheten eller til det en ikke kan se i oppgaven (Becker og Rivera, 2006).

2.6.2 Generalisering

Den andre strategien var å lete etter en sammenheng mellom figurene. Denne strategien har som utgangspunkt at en ser etter hva som er felles med figurene og generaliserer det til å gjelde figurer som kommer senere i sekvensen. En slik sammenligning av to strategier understreker en viktig forskjell mellom induksjon og generalisering, en forskjell som ofte ses forbi og gjør at en ender opp med å kalle noe generalisering når det i virkeligheten er en induksjon. Det viser også en av egenskapene til det som er kjernen av å generalisere et mønster, nemlig evnen til å legge merke til det generelle i det spesielle. Dette er en egenskap Mason (1996) og andre tidligere har pekt på viktigheten av.

Å snakke om generalisering handler om to ting; a) det som skal generaliseres (objektet) og b) det generaliserte objektet. Radford (2010) hevder at prosessen som går fra det ene til det andre inkluderer to sammenhengende komponenter. Den første er å legge merke til noe felles i noen spesielle deler av mønsteret. Den andre er å uttrykke et generelt begrep, gjennom å generalisere det som er felles til å gjelde alle ledd av mønstersekvensen. Han foreslår også en tredje komponent for å kalle denne generaliseringen for algebraisk, at regelen en kommer frem til er et uttrykk som gjelder for hvilket som helst ledd av sekvensen.

Becker og Rivera (2006) kaller det *figurativ generalisering* dersom elevene er i stand til å forsvare generaliseringen de gjør gjennom å knytte symboler og variabler til mønsteret. Elevene er i stand til å se figurative sammenhenger der det er en struktur i mønsteret, og på bakgrunn av det er de i stand til å utlede en formel.

2.6.3 Algebraisk generalisering

Radford har følgende definisjon av å generalisere algebraisk:

> *"Å generalisere et mønster algebraisk hviler på evnen til å oppfatte en likhet mellom noen elementer i en sekvens S, være klar over at denne likheten gjelder for alle elementer i S og være i stand til å bruke denne likheten for å lage et uttrykk for S"* (Radford, 2006 s. 4, min oversettelse).

For en ung elev er det ikke selvsagt å oppdage det underliggende felles i et mønster. Radford (2006) la i sitt arbeid merke til at handlingen av å legge merke til noe i et mønster skjer i en prosess formidlet av en multisemiotisk aktivitet (ord, gester, tegninger, formler osv). Radford kaller denne prosessen hvor en legger merke til et begrep og prøver å få noe mening ut av det for "en prosess av objektifisering" (Radford, 2006).

Radford skriver om tenkning at det ikke er noe som foregår bare i hodet. Tenkning består av vår indre og ytre tale, våre gester og våre handlinger med kulturelle artefakter (Radford, 2014).

Objektifisering handler ifølge Radford om å gjøre noe tydelig. For å gjøre noe tydelig bruker elever og lærere forskjellige tegn og artefakter (matematiske symbol, grafer, ord, tegninger, gester, kalkulatorer osv.) Disse artefaktene, gestene, tegnene og andre semiotiske ressurser brukt for å objektifisere kunnskap kaller han for semiotisk hjelp for objektifisering.
Radford sier at objektifiseringen av det generelle går gjennom flere lag av bevissthet og han skiller mellom tre lag av generalisering: fakta-, kontekstuell- og symbolsk generalisering, som

alle er karakterisert av den semiotiske hjelpen som elevene tyr til for å utføre generaliseringene. I faktageneralisering er og forblir den ubestemte uten navn, og generaliteten er handlinger som utføres på tallene. Disse handlingene kan være ord, gester og perseptuell aktivitet. I både det kontekstuelle og det symbolske laget av generalitet får den ubestemte navn. I en kontekstuell generalitet er den generelle navngitt gjennom en kroppslig og situert beskrivelse (f.eks. den neste figuren, øverste raden osv.), mens i symbolsk generalitet er det generelle objektet og operasjonene som utføres med det uttrykt i det alfanumeriske systemet til algebra (Radford, 2010).

Faktageneralisering har det nødvendige materialet som elevene gjennom gjentatte semiotiske sammentrekninger gjør om til en høyere form for algebraisk generalitet. Det handler ikke om å si det samme på en ny måte, men om å oppnå en dypere form for bevissthet (Radford, 2010).

Tall (2011) definerer generalisering som å se etter et større bilde. En antar først små deler for så å anta større deler, eller en utvider begrep til et større område for å undersøke det nærmere (Mason, Burtin og Stacey, 2010). I følge de vil det å bruke begreper på en vid måte som er nyttig for elever være en form for generalisering. Å bruke generalisering er nødvendig for å ha en effektiv undervisning og læring på alle nivå av matematisk læring (Mason, 2000).

Becker og Rivera (2005) har undersøkt hvilke strategier som er foretrukket av elever når de jobber med generalisering i algebra. De skriver at tidligere undersøkelser viser at omtrent 70% av elevene ikke var i stand til å generalisere. De valgte i sin undersøkelse ut 22 studenter, 11 gutter og 11 jenter, som svarte muntlig på spørsmål. Becker og Rivera prøvde å finne ut om de brukte generalisering i svarene eller ikke. De fant 23 strategier i elevenes løsninger og fant at; 4 generaliserte alt, 5 generaliserte noe og 13 generaliserte ikke noen ting. Å bruke generalisering er noe av det viktigste som bør bli introdusert for elevene og elevene bør oppmuntres til å bruke det. Elever som ikke klarer å generalisere har en tendens til å starte med numeriske strategier, og har ikke fleksibiliteten til å prøve andre tilnærminger eller se andre mulige sammenhenger mellom forskjellige former for representasjon, og generaliseringsstrategier (Becker og Rivera, 2005).

Den greske matematikeren Pappus forklarte analyse med at det er å bevege seg fra noe som er gitt til noe som er søkt etter. Ser en f.eks. på likningen $2x + 2 = 10 + x$, vil en analytisk metode være å starte fra den ubestemte størrelsen og subtrahere x fra begge sider av likningen, som gir $x + 2 = 10$. En subtraherer så 2 fra hver side og får $x = 8$. X er da bestemt gjennom en analytisk algebraisk metode og ikke gjennom prøv-feil-metode hvor en ville satt inn verdier for x og prøvd seg frem til det passet. Løsningen er ikke gjettet, men dedusert og altså algebraisk. En prøv og feil-metode vil ikke oppfylle betingelsene for algebraisk tenkning (Radford, 2014).

Kieran (1989) påstår at å se det generelle i det spesielle ikke er nok til å kunne karakterisere den algebraiske generaliseringen av mønstre. I tillegg til å se det generelle i det spesielle, må en også være i stand til å uttrykke det algebraisk. Kieran mener altså at å tenke algebraisk er mer enn bare å tenke på det generelle. Det er å tenke på det generelle eller det som er generaliserte på en måte som gjør det tydelig algebraisk (Kieran, 1989).

Lannin (2005) skriver at mønsteraktiviteter har blitt anbefalt som et middel for å introdusere elever til algebra, på grunn av den dynamiske representasjonen av variabler. Å gi uttrykk for generalitet og oppdage generalitet er selve kjernen til all matematisk aktivitet (Kaput, 1999;

Mason, 1996; her fra Lannin, 2005) og å generalisere numeriske situasjoner ses på som et middel for å hjelpe elevene med overgangen til formell algebra. Denne typen generalisering kan gi en sammenheng til kontekster som kan hjelpe elevene med å forstå symbolske representasjoner, samtidig som den linker til elevens tidligere kunnskaper om aritmetikk (Lannin, 2005).

De typiske mønsteraktivitetene gir et bilde av noen mønster og ber elevene om å finne eller generere en regel eller formel som kan brukes for å bestemme andre deler av mønsteret. Flere forskere har vist at slike aktiviteter engasjerer elevene i å konstruere flere typer generaliseringer. Likevel er det mange elever som generaliserer utfra en feil resonnering, der de feilaktig bruker multiplikasjon og forholdsbegreper eller bruker en prøv og feil-strategi for å generalisere. En slik gjett-og-sjekk-strategi kan føre til det Mason (1996) beskriver som en lokal strategi, der en prøver å finne en regel som passer akkurat den ene delen av mønsteret istedenfor å prøve forstå den generelle sammenhengen i problemet (Lannin, 2005).

Ifølge Lannin (2005) kan ikke berettigelse skilles fra generalisering. Det finnes mye bevis for at å vise holdbarheten av et generelt uttrykk er vanskelig for elevene, og mange elever holder seg til empirisk validering for å underbygge et generelt uttrykk. Dette antas å skyldes det tradisjonelle fokuset som har vært i de minste trinn om å finne bestemte tilfeller av en situasjon istedenfor å bestemme en generell relasjon til problemet. Selv om generalisering er en viktig og sentral matematisk aktivitet, blir elevene ofte bare bedt om å finne ut f.eks. *”Hvor mye koster 12 appelsiner hvis hver appelsin koster 5 kr?”* De blir ikke spurt om eller utfordret til å se det generelle i oppgaven, hva som skjer hvis prisen på appelsinen eller antallet appelsiner endres (Lannin, 2005).

Lannin (2005) har laget en oversikt over generaliseringsstrategier. Disse er delt inn i to kategorier: Ikke-eksplisitte strategier og eksplisitte strategier.

Ikke-eksplisitte strategier

- Telling
    - Tegne et bilde eller konstruere en modell til å representere situasjonene for å kunne telle seg frem til den ønskede egenskapen.
- Rekursiv
    - Bygger på det forrige leddet eller leddene i sekvensen for å bestemme det eller de påfølgende ledd.

Eksplisitte strategier

- Hel-objekt
    - Bruker en liten del for å konstruere en større del gjennom multiplikasjon (f.eks. 3 epler koster 8 kr, så 9 epler koster 24).
- Gjett og sjekk
    - Gjette en regel uten å tenke på hvorfor denne regelen virker. Normalt sett involverer dette at man eksperimenter med forskjellige operasjoner og tall som er gitt i oppgaven.
- Kontekstuell
    - Konstruerer en regel basert på informasjon som er gitt i situasjonen. Denne regelen relateres til en telle-teknikk.

2.7 Forskningsspørsmål

Det teoretiske perspektivet jeg har presentert vil jeg bruke til å svare på mitt forskningsspørsmål som er:

> Hvordan resonnerer elever i 10-12 årsalderen når de jobber med et tallspill og hvordan generaliserer de?

3 Metode

I forbindelse med denne oppgaven har jeg måttet ta mange valg, både før jeg begynte og underveis i arbeidet. Dette er valg som både kan styrke og svekke oppgaven. I dette kapitlet vil jeg beskrive og redegjøre for disse valgene. I tillegg vil jeg beskrive utvalget, prosessene som har vært i forbindelse med datainnsamlingen og hvordan data ble analysert. Jeg vil også ganske inngående forklare og beskrive dataspillet elevene jobbet med.

3.1 Metodisk tilnærming

Målet med arbeidet var å undersøke hvordan elever på 6. trinn resonnerte omkring et dataspill om tidlig algebra. For å kunne finne ut noe om dette har jeg valgt å bruke en kvalitativ forskningsmetode. Jeg ønsket å la elever sitte sammen om en PC mens de spilte spillet og observere hva de gjorde, samtidig som jeg ville ta opp lyd av det de snakket sammen om underveis i arbeidet. At elevene skulle jobbe sammen og kunne snakke om det de gjorde var viktig for meg, slik at de kunne hjelpe hverandre med tanker, og resonnere sammen om oppgavene. Bryman (2012) skriver om fokusgrupper, der flere elever snakker sammen om et tema. Fordelene med det er at de kan hjelpe hverandre med tenkningen, noe som blir mindre kunstig enn at en person sitter og snakker og skal resonnere alene (Bryman, 2012).

Det jeg ønsker å undersøke foregår i en sosial sammenheng i klasserommet. Elevene skal jobbe sammen, og det skal i utgangspunktet være som en hvilken som helst annen matematikktime for dem. Jeg har derfor valgt å bruke en form for klasseromsobservasjon der elevene er i sitt vante naturlige miljø, og observeres ut fra et sosiokulturelt perspektiv (Merriam, 2002).

En slik måte å forske på har både svake og sterke sider. En svakhet er at jeg har et lite utvalg elever. En annen er at det kan være vanskelig og utfordrende å få tak i elevenes resonnementer gjennom lyd- og skjermopptak. Styrken med denne måten å gjøre det på er at det gir meg nærhet til forskningsobjektene. Jeg får være med dem i klasserommet, prate med dem, får sjansen til å se hvordan de jobber og observere hvordan de tenker og resonnerer. Her må jeg passe på at jeg som forsker ikke blir forutinntatt og lar meg påvirke av elevene, samtidig som mine tanker og ideer vil kunne belyse oppgavene for dem på en annen måte enn den de er vant til.

3.2 Om spillet "Perler på en snor"

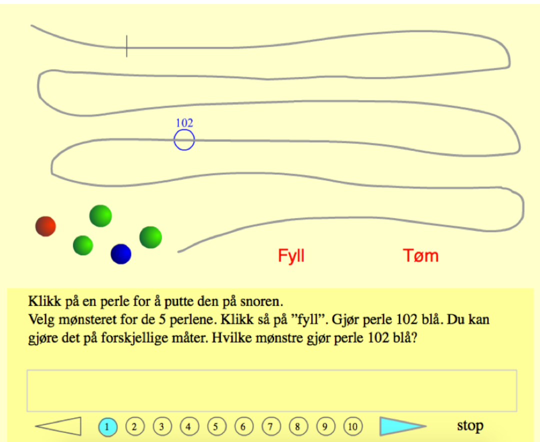
I oppgaven ville jeg se på hvordan elever resonnerte når de jobbet med et dataspill. Valg av et godt spill var derfor viktig. Temaet er tidlig algebra, så spillet måtte være algebraisk. Jeg endte opp med et spill som heter *Beads on a Chain* (Perler på en snor, min oversettelse) fra Freudenthal Institute (http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00747/). Dette er et spill som ligger fritt tilgjengelig på internett for alle til å spille. Spillet ble jeg gjort oppmerksom på av veileder. Jeg falt umiddelbart for spillet, og tenkte ut fra mine kunnskaper og erfaringer i skolen at dette ville slå godt an hos elevene. Jeg mente det ville være motiverende for dem, og at det i tillegg ikke minst var mye bra i forhold til matematikk, og spesielt algebra i spillet.

Kort sagt går spillet ut på at elevene skal perle forskjellige mønstre, og svare på oppgaver til mønstrene de lager. På Freudenthal Institutes hjemmeside, www.fisme.science.uu.nl har de skrevet følgende om spillet (min oversettelse):

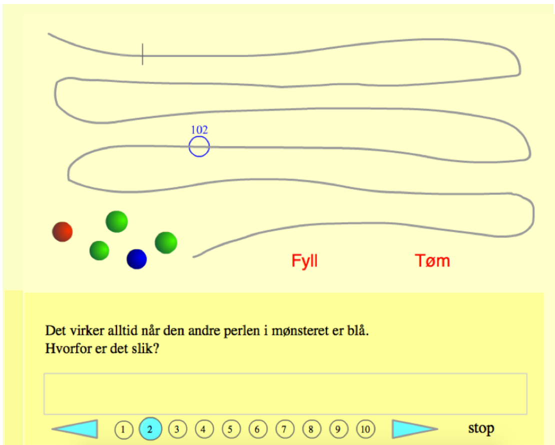
> *"Dette dataspillet er om mønstre. Mønstre av fargede perler. Barn kan finne det riktige mønsteret gjennom å bruke datamaskinen på en utforskende måte. (Fortrinnsvis jobbe i par for å ha bedre diskusjoner mens de jobber).*
>
> *Å utforske mønster er et viktig steg i den matematiske verden, viktig for mange oppgaver elevene skal jobbe med senere hvor mønstre er beskrevet i et mer formelt matematisk språk (funksjoner, osv.)*
>
> *Pedagogiske grunner: Mønsteret til perlene vil hjelpe barna til å bli involvert i matematiske problem, repetert mønstre, linken til multiplikasjonstabellen osv.*
>
> *Karakteristikk: Dataoppgavene er åpne, det er problemløsning og barna må finne sin egen "forskningsplan." Læreren bør være en tilrettelegger, gjennom å åpne arbeidet med en generell introduksjon for hele klassen"*
> (http://www.fisme.science.uu.nl/en/primas/)

3.2.1 Presentasjon og gjennomgang av oppgavene i spillet

Oppgave 1 og 2:
I oppgave 1 skal elevene finne ut hvilken posisjon i mønstret den blå perlen må ha for at perle nummer 102 skal bli blå. I oppgave 2 blir elevene bedt om å svare på hvorfor det alltid virker når perle nr. 2 er blå.

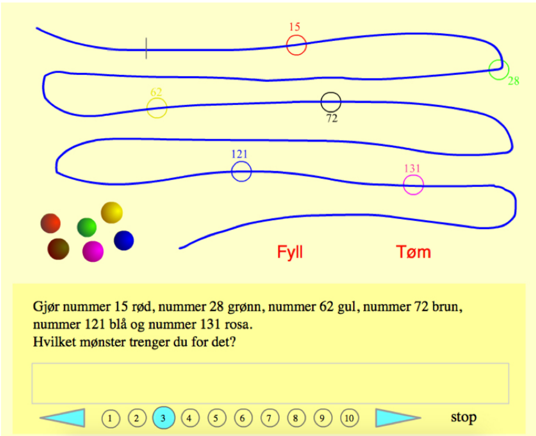


Bilde 2: Oppgave 1

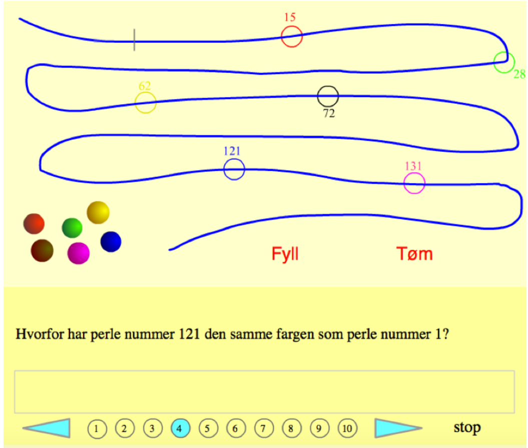


Bilde 3: Oppgave 2

Oppgave 3 og 4:
I oppgave 3 skal elevene sette opp seks perler med forskjellige farger i et mønster slik at hver perle kommer på en angitt plass på snoren. I oppgave 4 skal elevene svare på hvorfor perle nummer 121 har den samme fargen som perle nummer 1.

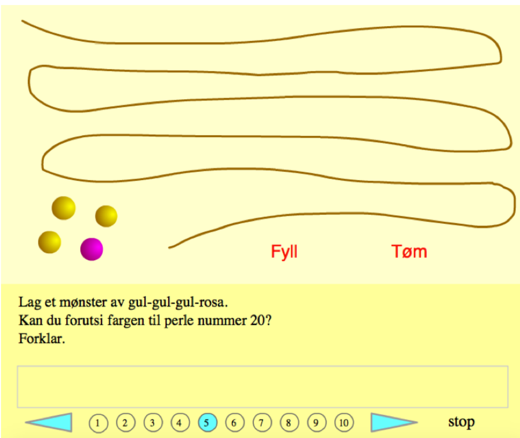


Bilde 4: Oppgave 3

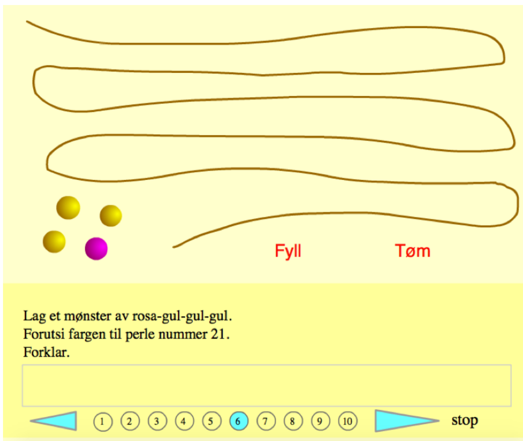


Bilde 5: Oppgave 4

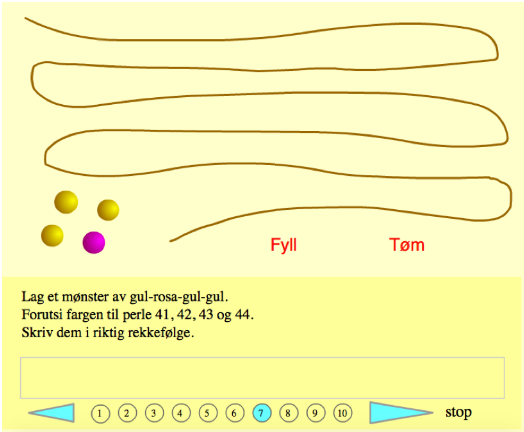
Oppgave 5, 6, 7 og 8:
Disse fire oppgavene har lik oppbygging, der elevene skal plassere tre gule og en rosa perle i riktig rekkefølge for å svare på oppgavene. Alle oppgavene handler om å forutsi hvilken farge som kommer til en angitt plass på snoren.



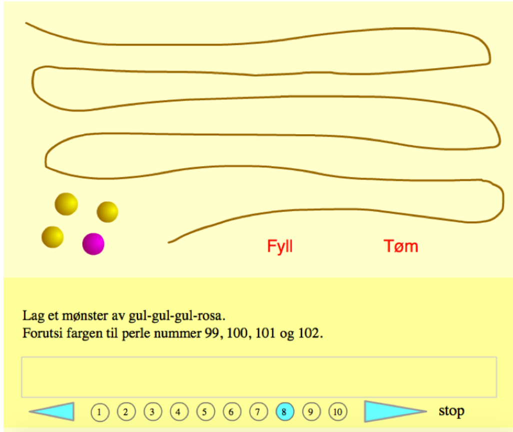
Bilde 6: Oppgave 5



Bilde 7: Oppgave 6

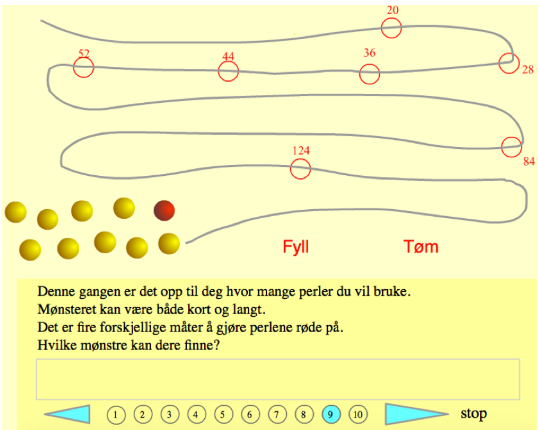


Bilde 8: Oppgave 7



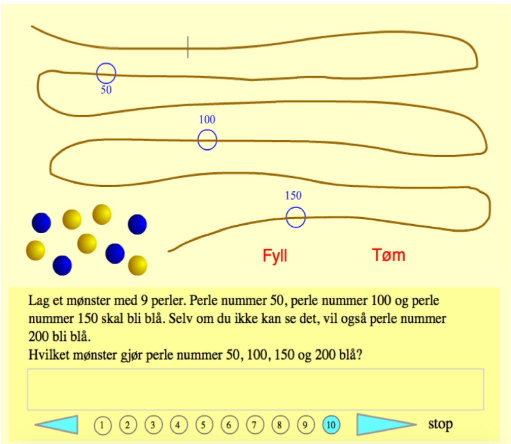
Bilde 9: Oppgave 8

<u>Oppgave 9:</u>
I denne oppgaven skal elevene finne fire forskjellige løsninger. I alle løsningene skal de 7 forhåndsmerkede plassene skal bli røde.



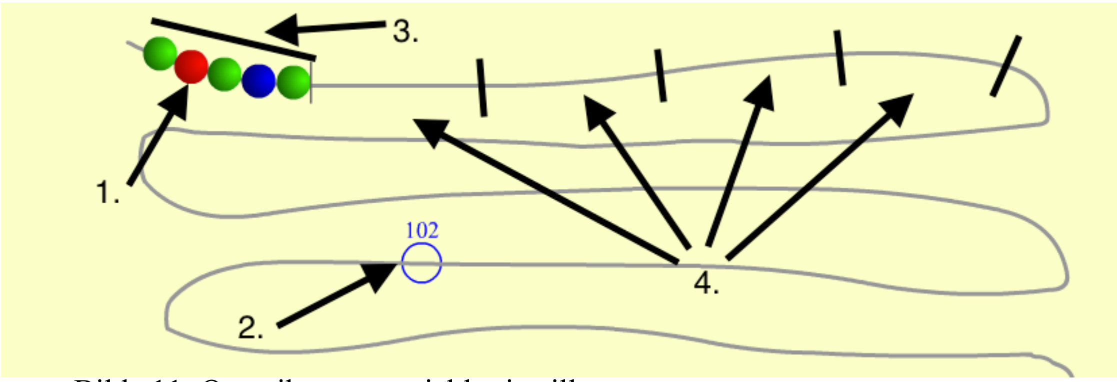
Bilde 10: Oppgave 9

<u>Oppgave 10:</u>
I denne oppgaven skal elevene perle med 9 perler og få tre synlige og en usynlig posisjon blå.



Bilde 10: Oppgave 9

3.2.2 Algebraisk analyse av spillet



Bilde 11: Oversikt over variabler i spillet

En kan identifisere fire variabler i spillet. Bildet over viser en oversikt over de fire variablene en kan finne i hver oppgave. Dette bildet er fra den første oppgaven i spillet hvor man skal gjøre perle nummer 102 blå.

Variabel 1 (S): Startposisjonen. Nummeret til perlen en har som utgangspunkt. I denne oppgaven er det 2. Startposisjonen varierer gjennom de forskjellige oppgavene.

Variabel 2 (M): Målposisjonen. Nummeret til perlen som er "målet" for oppgaven. I denne oppgaven er det 102. Målposisjonen varierer gjennom oppgavene

Variabel 3 (l): Lengden på mønsteret som danner utgangspunktet for oppgaven. I denne oppgaven er det 5 perler. I spillet varierer denne variabelen fra 1 – 9 perler i de forskjellige oppgavene.

Variabel 4 (n): Antallet ganger mønster gjentar seg, eller repeterer seg selv. I denne oppgaven er det 20 ganger. Dette antallet varierer gjennom oppgavene.

Dette gir følgende algebraiske formler:

$M = S + (n \cdot l)$, med $n \in \mathbb{N}$, $(n \cdot l) < M$ og $n = \left\lfloor \frac{M}{l} \right\rfloor$

For å finne S:

$S = M - (n \cdot l) \Leftrightarrow S = M \bmod l$

Til hver av de fire variablene kan en generalisere på følgende:

S: Om plasseringen endres. Hva om startposisjon endres fra 2 til 3?
M: Om plasseringen endres. Hva om målposisjonen endres fra 102 til 103?
l: Om antallet perler i startmønsteret endres. Hva om antallet endres fra 5 til 4 perler?
n: Om antallet repetisjoner som trengs endres. Hva om en skal til målposisjon 1002 istedenfor 102?

3.2.3 Algebraisk løsning til oppgavene

Oppgave 1 og 2:
M og l er kjent. Målet med oppgaven er å finne S.

M = 102, l = 5, n = $\left\lfloor \frac{M}{l} \right\rfloor$ som gir n = $\left\lfloor \frac{102}{5} \right\rfloor$ = 20

S = M – (n • l) gir da 2 = 102 - (20 • 5).

Oppgave 3 og 4:
M og l er kjent. $M_{rød}$ = 15, $M_{grønn}$ = 28, M_{gul} = 62, M_{brun} = 72, $M_{blå}$ = 121, M_{rosa} = 131

Skal finne $S_{rød}$, $S_{grønn}$, S_{gul}, S_{brun}, $S_{blå}$ og S_{rosa}.

n = $\frac{Mfarge}{l}$ som gir: $n_{rød}$ = $\left\lfloor \frac{15}{6} \right\rfloor \approx 2$, $n_{grønn}$ = $\left\lfloor \frac{28}{6} \right\rfloor \approx 4$, n_{gul} = $\left\lfloor \frac{62}{6} \right\rfloor \approx 10$, n_{brun} = $\left\lfloor \frac{72}{6} \right\rfloor = 12 \approx 11$, $n_{blå}$ = $\left\lfloor \frac{121}{6} \right\rfloor$ = 20, n_{rosa} = $\left\lfloor \frac{131}{6} \right\rfloor$ = 21.

Generelt uttrykk: S_{farge} = M_{farge} – ($\left\lfloor \frac{Mfarge}{l} \right\rfloor$ • l), som gir:

$S_{rød}$ = 15 – (2 • 6) = 3
$S_{grønn}$ = 28 – (4 • 6) = 4
S_{gul} = 62 – (10 • 6) = 2
S_{brun} = 72 – (11 • 6) = 6
$S_{blå}$ = 121 – (20 • 6) = 1
S_{rosa} = 131 – (21• 6) = 5

Oppgave 5:
M og l er kjent. n og S må bestemmes. n = $\left\lfloor \frac{M}{l} \right\rfloor$ = $\left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor = 5 \approx 4$.

S = 20 – (4 • 4) = 4. Den fjerde perlen ender på målposisjon 20.

Oppgave 6:

M og l er kjent, n og S må bestemmes. n = $\left\lfloor \frac{M}{l} \right\rfloor$ = $\left\lfloor \frac{21}{4} \right\rfloor$ = 5.

S = 21 – (5 • 4) = 1. Den første perlen ender på målposisjon 21.

Oppgave 7:

M og l er kjent, n og S må bestemmes.

$n_{41} = \left\lfloor \frac{41}{4} \right\rfloor \approx 10$ og $S_{41} = 41 - (4 \bullet 10) = 1$

$n_{42} = \left\lfloor \frac{42}{4} \right\rfloor \approx 10$ og $S_{42} = 42 - (4 \bullet 10) = 2$

$n_{43} = \left\lfloor \frac{43}{4} \right\rfloor \approx 10$ og $S_{43} = 43 - (4 \bullet 10) = 3$

$n_{44} = \left\lfloor \frac{44}{4} \right\rfloor = 11 \approx 10$ og $S_{44} = 44 - (4 \bullet 10) = 4$

Oppgave 8:

M og l er kjent, n og S må bestemmes.

$n_{99} = \left\lfloor \frac{99}{4} \right\rfloor = 24$ og $S_{99} = 99 - (4 \bullet 24) = 3$, perlen i 3. posisjon ender i posisjon 99.

$n_{100} = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 24$ og $S_{100} = 100 - (4 \bullet 24) = 4$, perlen i 4. posisjon ender i posisjon 100.

$n_{101} = \left\lfloor \frac{101}{4} \right\rfloor = 25$ og $S_{101} = 101 - (4 \bullet 25) = 1$, perlen i 1. posisjon ender i posisjon 101.

$n_{102} = \left\lfloor \frac{102}{4} \right\rfloor = 25$ og $S_{102} = 102 - (4 \bullet 25) = 2$, perlen i 2. posisjon ender i posisjon 102.

Oppgave 9:

M er kjent, n, l og S må bestemmes. Bare en av fire variabler er kjente. En løsning er å generalisere over alle målposisjonene og se hvilke S som er felles.

Bruker $M = S + (n \bullet l)$, at $l \in [1,10]$ og at $M > (n \bullet l)$ på M_{20}, M_{28}, M_{36}, M_{44}, M_{52}, M_{84} og M_{124}.

M_{20} gir:
$20 = 1 + (19 \bullet 1)$ gir $l = 1$ og $S = 1$
$20 = 2 + (9 \bullet 2)$ gir $l = 2$ og $S = 2$
$20 = 4 + (4 \bullet 4)$ gir $l = 4$ og $S = 4$
$20 = 4 + (2 \bullet 8)$ gir $l = 8$ og $s = 4$

M_{28} gir:
$28 = 1 + (27 \bullet 1)$ gir $l = 1$ og $S = 1$
$28 = 2 + (13 \bullet 2)$ gir $l = 2$ og $S = 2$
$28 = 4 + (6 \bullet 4)$ gir $l = 4$ og $S = 4$
$28 = 4 + (3 \bullet 8)$ gir $l = 8$ og $s = 4$

Dette er de eneste løsningene der S og l er like, derfor de eneste løsningene på oppgaven.

Løsning 1: l = 1, S = 2
Løsning 2: l = 2, S = 2
Løsning 3: l = 4, S = 4
Løsning 4: l = 8, S = 4

Oppgave 10:

M og l er kjent, n og S må bestemmes.

$n_{50} = \left\lfloor \frac{50}{9} \right\rfloor = 5$ og $S_{50} = 50 – (5 \bullet 9) = 5$

$n_{100} = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$ og $S_{100} = 100 – (11 \bullet 9) = 1$

$n_{150} = \left\lfloor \frac{150}{9} \right\rfloor = 16$ og $S_{150} = 150 – (16 \bullet 9) = 6$

$n_{200} = \left\lfloor \frac{200}{9} \right\rfloor = 22$ og $S_{200} = 200 – (22 \bullet 9) = 2$

De gule perlene må være i posisjon 5, 1, 6 og 2 i startmønsteret.

3.3 Prosedyrer i datainnsamlingen

Forberedelsene mine begynte senhøsten 2015 etter at jeg hadde bestemt meg for hva jeg vil ville oppgaven skulle handle om, og hvordan jeg ville gjøre det. Gjennom jobb fikk jeg kontakt med en kontaktlærer på 6. trinn ved en barneskole som var villig til å la meg komme inn i klasserommet hennes og gjennomføre datainnsamlingen. Jeg snakket med henne sent på høsten og fikk noe informasjon om elevene i klassen, samt at vi avtalte hva jeg skulle gjøre, og når jeg skulle komme på besøk. I tillegg til besøket hvor jeg skulle gjennomføre selve datainnsamlingen avtalte vi at jeg skulle komme på et besøk noen uker før for å bli kjent med klasserommet, og møte elevene mens de jobbet i en helt normal matematikktime. Det praktiske i forhold til det som skjedde den dagen datainnsamlingen fant sted sted avtalte vi rett før selve datainnsamlingen skjedde.

3.3.1 Om skolen og klassen

Skolen jeg gjennomførte datainnsamlingen på er en liten skole med 120-130 elever. Det er en 1.-7. skole med en klasse på hvert trinn, og jeg skulle inn i en klasse på 6. trinn med 15 elever. Faglig sett vil jeg si elevene på denne skolen er på landsgjennomsnittet, noe også resultater fra f.eks. nasjonale prøver siste årene viser. Det betyr at utvalget mitt vil representere den normale elevgruppe i Norge. Ikke veldig faglig sterke, men heller ikke veldig svake. Ifølge lærer var elevene vant med å jobbe praktisk med matematikken. Læreren sier selv at hun er for å løsrive seg fra læreboka. Elevene var ifølge henne vant med å jobbe sammen, og tenke høyt sammen om oppgaver de løste. Dette fikk jeg på lang vei bekreftet da jeg var innom en time på forhånd, og observerte og møtte elevene.

3.3.2 Om elevutvalget

Elevene i klassen ble under datainnsamlingen delt inn i grupper på to og to, og en gruppe med tre elever. Læreren stod for inndelingen, og gruppene ble satt sammen utfra hvem hun mente passet sammen og jobbet godt sammen. Det ble heller ikke satt sammen elever som var på veldig forskjellig faglig nivå.

Under en en oversikt over gruppene. For å anonymisere best mulig har jeg navngitt elevene med tallet på gruppa de er i, og henholdsvis A, B og C. Denne navngivingen kommer igjen i resultatene senere i oppgaven hvor jeg henviser til elevene på denne måten. Det er også slik jeg navngir dem når jeg har skrevet transkripsjoner. Nivådelingen til høyre er det læreren som har gjort for meg.

Gruppe nr.	Navn på elev	Nivå
1	1A	Høyt nivå
	1B	Middels nivå
2	2A	Middels nivå
	2B	Lavt nivå
3	3A	Lavt nivå
	3B	Middels nivå
4	4A	Høyt nivå
	4B	Middels nivå
5	5A	Middels nivå
	5B	Høyt nivå
	5C	Middels nivå
6	6A	Lavt nivå
	6B	Lavt nivå
7	7A	Høyt nivå
	7B	Middels nivå

Tabell 1: Oversikt over gruppene og elevenes faglige nivå

3.3.3 Pilotstudie

Før selve datainnsamlingen hadde jeg tenkt å gjennomføre en pilotstudie. I praksis, og etter litt tilfeldigheter, ble det til at jeg gjennomførte to pilotstudier. Den første kom tilfeldig i gang i en matematikktime på jobb der jeg hadde litt tid til over. Jeg satte elevene i gang med den engelske utgaven av spillet fra Freudenthal Institutes hjemmeside, og elevene jobbet med det i underkant av 30 min. Etter denne økta gjorde jeg meg noen refleksjoner: spillet var motiverende; elevene synes det var spennende; nivået var akkurat passe vanskelig; det var vanskelig med oppgavene på engelsk. På bakgrunn av det siste kontaktet jeg Freudenthal Institute og hørte om det var mulig å få spillet oversatt til norsk, slik at det var det matematiske som stod i sentrum, og at ikke oversettelse eller språkproblemer skulle ødelegge for elevenes tenkning når de jobbet med spillet. Jeg fikk i stand en avtale med dem der jeg oversatte teksten fra engelsk til norsk, og sendte oversettelsen til en ansatt ved Freudenthal Institute. Etter noen uker fikk jeg spillet tilbake som en fil med norsk tekst som jeg kunne bruke direkte i nettleseren på maskinene jeg skulle bruke i datainnsamlingen.

I tillegg til denne tilfeldige pilotstudien, gjennomførte jeg den planlagte pilotstudien med elever på 5. og 7. trinn ved skolen der jeg jobber. Målet med denne undersøkelsen var å forberede meg litt på i hvilken grad spillet fenget elevene, hvor motivert og interessert elevene var for spillet, hvor mange som kunne jobbe med en PC samtidig, hvordan Camtasia virket som et verktøy for å ta opp lyd og skjerm og hvor lang tid jeg trengte for å gjennomføre opplegget. I tillegg ville jeg sjekke om den norske versjonen av spillet virket skikkelig, eller om det var noen feil eller "bug" i det. Jeg fikk alle svarene jeg trengte i løpet av denne pilotstudien, i tillegg til at jeg gjorde en interessant observasjon omkring hvordan elevene løste enkelte oppgaver. Dette var en løsningsstrategi som gikk ut på å bytte seg til riktig løsning. Jeg vil komme tilbake til denne strategien senere i oppgaven.

Spillet fenget elevene veldig bra. Alle elevene i pilotstudiene jobbet med det i rundt 40 minutter, uten at jeg på noen som helst måte måtte motivere de for å jobbe mer. Heller tvert imot, flere av gruppene ville ikke avslutte når de ble bedt om det. Jeg fant at det passet bra å jobbe sammen både to og tre elever, og lydopptaket Camtasia gjorde var klar og tydelig både når 2 og 3 elever snakket sammen, selv om det var 12 elever i klasserommet samtidig som jobbet og pratet. Jeg fant også ut at det var en liten feil i spillet mot slutten i oppgave 9, der en perle ikke dukker opp hvis en prøver å gjøre oppgaven på nytt. Dette kan enkelt løses praktisk, så det hadde ikke noe å si for datainnsamlingen min.

3.3.4 Gjennomføring av datainnsamling

Jeg ble enig med lærer at jeg skulle gjennomføre den delen av datainnsamlingen hvor elevene skulle spille spillet i løpet av én dag, og komme tilbake og gjennomføre intervjuer en uke eller to senere. Dagen jeg skulle gjennomføre var to elever syke, slik at det var 13 elever som gjennomførte den dagen. De to som var syke gjennomførte spillet en av dagene jeg var innom for å gjøre elevintervjuer.

Når elevene spilte spillet var de delt i to grupper, der den ene gruppa var med meg og læreren i klasserommet, mens den andre gruppa gjorde noe annet i et annet klasserom. Neste time byttet vi, og gjennomførte samme opplegg en gang til.

Før elevene begynte med det faglige arbeidet hadde lærer og jeg en felles introduksjon der jeg fortalte hva jeg skulle gjøre og hvorfor jeg var der. Vi gav de også noen tips i forhold til det de skulle gjøre, både av praktisk og faglig art. Det praktiske gikk på å kjapt demonstrere programmet, slik at ikke det tekniske skulle blir en utfordring. Det faglige gikk i å poengtere at samarbeid var viktig, at jeg ville se litt på hvordan de tenkte og hvordan de snakket, og at det var viktig å snakke sammen med den de jobbet med underveis. Deretter spilte elevene spillet mens læreren og jeg gikk rundt og observerte, og hjalp til når det trengtes. Tanken var at elevene skulle jobbe mest mulig selvstendig, men at de skulle få hjelp av fortrinnsvis lærer dersom de misforstod en oppgave, gjorde noe de ikke skulle, eller hvis vi merket at motivasjonen dalte. Jeg hadde i utgangspunktet tenkt å være det Bryman (2012) kaller en passiv observatør, mens det var læreren som skulle hjelpe elevene. Dette forandret jeg på da jeg så at jeg hadde mer igjen for å gå i dialog med elevene og enda sterkere prøve å få frem hvordan de tenkte og resonnerte. Jeg tenkte og avgjorde der og da at det var viktig og riktig å gjøre det, siden jeg bare hadde lyd- og skjermopptak. Det kunne derfor i etterkant bli vanskelig noen steder å få med seg hvordan elevene tenkte, og hva de bygget resonneringen sin på. Begge gruppene jobbet i 30-40 minutter med spillet. Den første gruppen ble forstyrret av en brannøvelse som tok litt tid, mens den andre gruppen jobbet uforstyrret den tida det tok.

3.3.5 Elevintervju

Noen uker i etterkant av timene der elevene spilte spillet gjennomførte jeg et intervju med hver enkelt gruppe. Målet med dette var på forhånd å få snakket enda mer med elevene og få frem deres resonnementer og tanker omkring hvordan de løste oppgavene. Planen min var å høre gjennom det gruppene gjorde mens de jobbet sammen og spørre elevene om det. På forhånd hadde jeg skrevet ned noen få spørsmål til hver gruppe. Dette er i følge Bryman (2012) et semistrukturert intervju. Jeg begynte det første intervjuet etter denne malen, men i tillegg lot jeg elevene spille de oppgavene jeg spurte om på nytt. Dette syntes jeg var en mer hensiktsmessig måte å gjennomføre intervjuet på. På den måten kunne jeg observere og lytte mens elevene jobbet, og bryte inn med spørsmål når jeg fant noe som var interessant i forhold til deres resonnementer. Mens de gjorde det brukte jeg Camtasia og tok opp lyd og video av skjermen. Jeg var aktiv i denne delen og jeg syntes at denne måten å jobbe på gav meg mer i forhold til hvordan elevene tenkte og hvordan de resonnerte enn mitt planlagte intervju. Jeg lagde en liten intervjuguide med noen forberedte spørsmål til mine første intervjuer, men siden denne ikke ble brukt er den ikke lagt med som vedlegg til oppgaven

3.4 Databehandling og gjennomføring av dataanalyse

Da jeg var ferdig med all datainnsamling satt jeg igjen med en del data, først og fremst over seks timer med video- og lydopptak fra når elevene jobbet med spillet. I tillegg hadde jeg noen notater jeg gjorde underveis mens elevene jobbet, litt notater fra elevintervju samt de arkene gruppene spurte om underveis mens de jobbet. Alt dette måtte høres gjennom og struktureres. Over seks timer med video- og lyd opptak gjør at det var nødvendig for meg å redusere dataene litt. Målet med oppgaven var å få frem hvordan elevene tenkte og resonnerte.

Jeg bestemte meg for først å grovt høre gjennom alt, på jakt etter hvordan elevene resonnerte og hva slags løsningsstrategier de brukte. Når en hører på et opptak av elever som jobber er det for en som normalt jobber som lærer mye interessant. Spesielt hva og hvordan jeg kunne gjort dette bedre og annerledes fra et undervisningsperspektiv. I denne situasjonen var jeg ikke lærer, men forsker. For å gjøre det enklere for meg selv mens jeg lyttet til opptakene måtte jeg derfor lage noen slags koder som jeg hørte og så etter underveis i opptakene. Jeg var ute etter hvordan elevene resonnerte og hva slags løsningsstrategier de brukte. Jeg gikk derfor i litteraturen og delte inn resonnerings- og løsningsstrategiene jeg fant der, sammen med strategier jeg oppdaget under pilotstudien min i fire forskjellige kategorier, som jeg kalte A, B, C og D. Disse brukte jeg aktivt underveis mens jeg hørte på opptakene, og noterte for meg selv når det ble sagt eller gjort noe som passet i disse 4 kategoriene. I tillegg noterte jeg ned hvilken løsningsstrategi hver enkelt gruppe brukte. De fire løsningsstrategiene var:

A. **Prøv-og-feil metoder**. Dette er strategier hvor utgangspunktet er å gjette og sjekke. Jeg mener at en kan skille mellom tilfeldige- og systematisk-prøv-og-feil-metoder. Tilfeldig prøv-og-feil-metode er når en gjetter og sjekker uten noen som helst form for system eller struktur i gjettinga. Et eksempel er $x + 4 = 2 + 8$. Dersom en helt tilfeldig setter inn tall for x, er det en tilfeldig prøv-og-feil-metode. Begynner en med å sette inn 1, så 2, så 3 osv. er det en systematisk prøv-og-feil-metode. Da har en et system og en strategi bak det en gjør, men det er fortsatt ingen algebraisk tenkning inne i bildet. I teoridelen min er denne strategien linket opp mot Radfords naiv induksjon, Becker og Riveras numerisk generalisering og Lannins gjett og sjekk-strategi.
B. **Byttestrategi.** Dette er en strategi jeg ikke finner i litteraturen, men som elevene brukte i stor grad når de jobbet med spillet. Jeg oppdaget strategien under pilotstudien min, og syntes den var så interessant at jeg valgte å inkludere den i oppgaven. Strategien er en slags forlenget prøv-og-feil-metode, der elevene bruker feilene sine til å svare riktig til slutt. Elevene har først enten en antakelse som de bruker, eller setter opp et mønster helt tilfeldig som de prøver ut. Hvis det blir feil, bytter de en om på perlene i startmønsteret slik at det blir riktig til slutt. Det er altså en strategi som kan gi elevene svaret på to forsøk, men kan også brukes flere ganger etter hverandre for å svare på en oppgave der en stadig bytter seg nærmere riktig svar.
C. **Generalisering.** Strategi hvor elevene generaliserer i en eller annen form. Jeg delte denne inn etter hvilken variabel i spillet de generaliserte ut fra:
    a. Startposisjonen
    b. Målposisjonen
    c. Lengden på startmønsteret
    d. Antall ganger mønsteret repeterer seg selv.
D. **Andre strategier.** Underveis fant jeg andre strategier elevene brukte som ikke passer direkte inn de tre strategiene ovenfor. Disse har jeg valgt å samle sammen under andre kategorier. Eksempler på slike strategier er forskjellige tellestrategier, der elevene bruker telling for å finne svaret. Også strategier som å tegne modeller eller perler på ark hører hjemme her, strategier som vil være innenfor Radfords teori om semiotisk hjelp.

Analysen er todelt. I den første delen presenterer jeg hvordan alle gruppene løste oppgavene i spillet. Jeg presenterer hver oppgave og hvordan hver gruppe løste oppgaven. Her tar jeg utgangspunkt i strategiene ovenfor. Jeg ønsker å vise hvordan elevene resonnerer, og hva som gjør at disse elevene gjør det de gjør. Målet er at leseren av oppgaven skal få et større innblikk i det komplekse som ligger bak hvordan elevene løser denne typen oppgaver. Den store variasjonen i løsningsstrategier kommer tydelig frem.

I den andre delen av analysen viser jeg til noen episoder som fremhever tilnærmingsmåten elevene har til oppgavene når de løser dem. Hver episode er tatt med for å forsøke å vise eksempler på resonnering, både resonnering som fører til generalisering, og resonnering som viser en induktiv prøv-og-feil-metode. Episodene er også valgt ut for å vise mangfoldet av hvordan elevene resonnerte. Hver episode er transkribert og avsluttes med en oppsummering eller drøfting.

Jeg vil deretter komme med en diskusjon og konklusjon, der jeg svarer på forskningsspørsmålet mitt ut i fra analysen og resultatene. Her vil jeg trekke tråden til teoridelen, og si noe om resultatene mine i forhold til litteraturen.

Helt til slutt vil jeg diskutere svakheter og styrker med oppgaven min, mine anbefalinger for videre forskning, og videre undervisning. I tillegg vil jeg skrive noe om hva jeg personlig har lært, og hvordan jeg ser dette vil ha innvirkning på mitt videre virke som lærer i skolen.

3.5 Forskningens kvalitet

I følge Bryman (2012) vil mitt valg av forskningsdesign si noe om hva jeg prioriterer i forskningsprosessen min, i forhold til de kriterier som gjelder for sosial forskning. De mest vanlige kriteriene her er validitet, relabilitet og replikasjon. Disse kriteriene finner en både innenfor kvantitativ og kvalitativ forskning. Lincoln og Cuba (1985) foreslår at for å vurdere kvalitativ forskning er de to viktigste kriteriene troverdighet og autentisitet. Siden min forskning er kvalitativ er det disse kriteriene jeg vil benytte meg av, og jeg vil vurdere min forskning ut fra Lincoln og Cubas kriterier for troverdighet. Troverdighet er delt opp i fire kriterier: kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet (Bryman, 2012)

3.5.1 Kredibilitet

Dette kriteriet handler om forskningen er gjort i henhold til god praksis, og om resultatene blir gjort tilgjengelig for andre (Bryman, 2012). I mitt tilfelle er forskningen utført i henhold til god forskningspraksis. Jeg har fått alle godkjennelser jeg trenger på forhånd, fra både NSD og foreldrene til barna. Jeg har gjort, etter mitt syn, et fornuftig utvalg. Jeg har funnet en klasse som jeg tenker viser gjennomsnittet av en norsk skoleklasse. Selve gjennomføringen gikk knirkefritt, elevene visste hva som skjedde og hvorfor jeg var der og jeg fikk tak i de resultater jeg skulle. Resultatene, og konklusjonen min, blir gjort tilgjengelig for alle gjennom denne oppgaven

Det kan kritiseres at klassen bestod av 15 elever, som er lite sett i norsk målestokk. Det kan også kritiseres at under selve gjennomføringen var nok både læreren og jeg litt for aktive i forhold til elevene. Målet mitt var å se hvordan elevene resonnerte, uten hjelp eller innblanding fra voksne. Til tider ble elevene kanskje ledet litt for mye i en retning. Dette kommer jeg tilbake til i avslutningsdelen.

3.5.2 Overførbarhet

Dette kriteriet handler om forskningen min er overførbar til andre kontekster, eller kan gjøres om igjen i den samme konteksten den ble utført i. Dette er forskning som kan gjøres om igjen. Den er etter mitt syn enkel å replikere, og kan gjøres om igjen i hvilket som helst klasserom i Norge og andre land utfra hvordan jeg beskriver prosessen. Alt jeg har brukt er åpent og tilgjengelig for alle.

3.5.3 Pålitelighet

Dette kriteriet handler om forskningen min er pålitelig, altså om den er til å stole på. Jeg har gjort tilgjengelig planen min i denne oppgaven, jeg viser til gjennomføringen og resultatene og har opptak av alt og transkripsjoner av en del av det elevene gjorde. Men som forsker har en alltid en bakgrunn, og en lytter med den bakgrunnen og erfaringen en har. Det er godt mulig at en annen person kunne lyttet på opptakene og fått ut noe annet enn det jeg gjorde.

3.5.4 Bekreftbarhet

Dette punktet handler om jeg som forsker har latt mine personlige verdier og tanker påvirke forskningen på noen som helst måte. Når en med lærerbakgrunn har rollen som forsker i et klasserom er dette punktet viktig å være bevisst over. Som lærer tenker en som regel på hvordan en best mulig kan hjelpe elevene, og er opptatt av at elevene skal lykkes og forstå det de gjør. I matematikk vil en hjelpe elevene med de knep og metoder en selv har tro på. Som forsker i et klasserom har en ikke i oppgave å undervise eller sørge for at elevene lærer noe. En er der for å undersøke noe. I mitt tilfelle var dette utfordrende, siden jeg tok på meg rollen som en aktiv observatør. Da er det lett å si for mye, eller hjelpe elevene når en egentlig burde la de tenke selv.

Det samme gjelder når jeg leser/samler teori og når jeg analyserer dataene mine. Også her kan en fort la personlige tanker påvirke, alt fra at jeg husker noe om elevene fra gjennomføringen eller at min overbevisning om hva som er god matematikk styrer utvalget av eksempler jeg viser.

3.6 Etiske betraktninger

"De nasjonale forskningsetiske komiteer" sier at det er viktig at all forskning skal ha et formål eller en verdi som går utover forskerens eget utbytte av sin egen forskning. Personlig har jeg hatt stort utbytte av min egen forskning. Jeg har lært mye om tidlig algebra, jeg har lært mye om hvordan elever tenker og resonnerer og jeg har ikke minst fått bruke og prøve et dataspill jeg nok kommer til å ta med meg inn i mitt daglige virke som lærer på barneskolen. Men jeg har også hatt annet mål med det jeg har gjort, der jeg har hatt et ønske om at det jeg gjort og brukt tiden på kan brukes av andre, i en eller annen sammenheng. Tidlig algebra er et felt som er forholdsvis nytt i Norge og som det er gjort lite forskning på. Jeg håper på å være med på å løfte dette frem for lærerne og skolene rundt forbi i Norge.

Underveis har jeg lest mange artikler, søkt på nettet og kikket etter litteratur, både på måfå og målrettet. I dette arbeidet har jeg vært nødt til å velge og vrake artikler, og som forsker må jeg være åpen for at jeg underveis i prosessen er nødt til å justere eller til og med helt forkaste mine egne oppfatninger av emnet. Jeg kan ha valgt artikler som ikke helt passer, og jeg kan ha valgt bort artikler som jeg burde ha tatt med. Tidspresset er stort, og dette er valg en må ta fortløpende.

Å være etterrettelig og nøyaktig i bruk av andre forskeres artikler, og andre masterstudenter sine oppgaver er et viktig etisk prinsipp. Jeg har i hele oppgaven passet på å referere til de artiklene jeg har hentet teori og ideer fra, og dersom jeg har sitert noe har jeg tatt med sidetallet slik at de kan sjekkes opp i om noen skulle ønske det. For at oppgaven skal bli mer helhetlig og lettleselig har jeg også oversatt sitatene til norsk, merket med "min oversettelse." For originalversjon kan leseren da gå rett til sidetallet som er referert etter sitatene.
Før jeg begynte arbeidet med oppgaven fikk jeg tillatelse fra NSD (Norsk senter for forskningsdata) til å gjennomføre forskningen. Se vedlegg 1.

Jeg har forsket på elever, og med dette fører det også viktige etiske valg. I tillegg til tillatelse fra NSD fikk jeg på forhånd signerte tillatelser fra alle foreldrene/foresatte til barna på at deres barn kunne delta i datainnsamlingen min. Informasjonen jeg sendte ut til foreldrene er vedlegg 2.

I tillegg fører dette til at jeg må være varsom med personopplysninger og databehandling. Jeg har anonymisert både skole, klasse og elever så godt som mulig. Jeg har slettet alle opptak jeg gjorde så fort oppgaven er ferdig, og alle notater med navn på skole, elever osv. er makulert.

4 Resultater og analyse

I denne delen vil jeg presentere og analysere resultatene av arbeidet elevene gjorde med spillet. Jeg har valgt å dele resultatene inn i to deler. Den første delen viser løsningsstrategiene til hver gruppe. I den andre delen vil jeg vise noen eksempler på hvordan elevene resonnerte og drøfte det som skjer. Disse eksemplene er transkribert.

Spillet bestod av 10 oppgaver, og for å få en god oversikt har jeg valgt å slå sammen noen av oppgaven når jeg analyserer resultatene. Oppgave 1 og 2 presenteres sammen, oppgave 3 og 4 presenteres sammen og oppgave 5-8 presenteres sammen. Oppgave 9 og 10 presenteres hver for seg.

Siden elevene både før og underveis i arbeidet fikk beskjed om å fokusere på å snakke sammen og bedt om å heller snakke sammen enn å bruke tid på å skrive, er det det muntlige arbeidet elevene gjorde på disse oppgavene jeg tar utgangspunkt i.

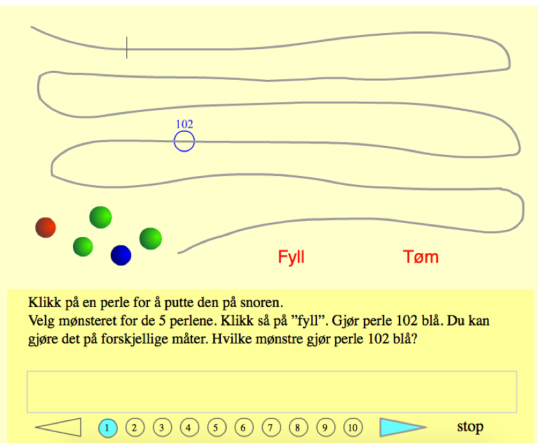
4.1 Gruppenes løsningsstrategier

Elevene hadde flere løsningsstrategier de brukte underveis i arbeidet. Jeg vil nå beskrive kort hvordan hver gruppe løste hver oppgave. For å gjøre oversiktlig har jeg delt inn i fire hovedstrategier jeg fant: (Se §3.4)

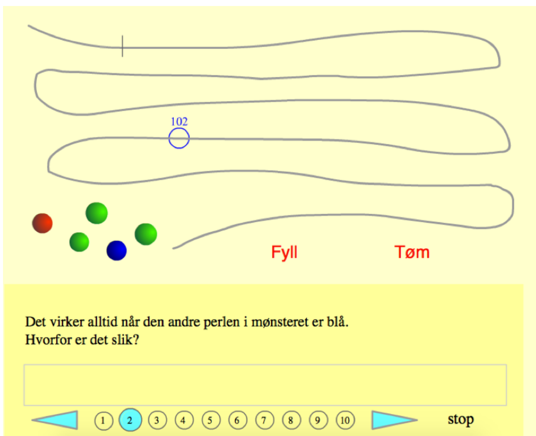
A. **Prøv-og-feil metoder**
B. **Byttestrategi**
C. **Generalisering**
D. **Andre strategier**

4.1.1 Oppgave 1 og 2

I oppgave 1 skulle elevene finne ut hvilken posisjon den blå perlen må ha for at perle nummer 102 skal bli blå, og i oppgave 2 ble de bedt om å svare på hvorfor det alltid virker når perle nr. 2 er blå.



Bilde 12: Oppgave 1



Bilde 13: Oppgave 2

Gruppe 1:
Bruker **byttestrategi**. Setter opp et forslag til mønster og bytter deretter den blå perlen i startmønsteret med den perlen som kom på nr. 102. Mer detaljer om dette er transkribert i §4.3.1

Gruppe 2:
Først to forsøk med tilfeldig **prøv-og-feil-metode**. Deretter nevner elev 2A **byttestrategi** som en mulighet. De setter opp et mønster og bytter deretter den blå perlen i startmønsteret med den perlen som kom på nr. 102.

Til oppgave 2 sier de: *"Når den er nummer to i rekka kommer den i hundre og to fordi det går fem bortover hele tida.."* Her er de borti en **generaliseringsstrategi** der de generaliserer over lengden på startmønsteret.

Gruppe 3:
Først to tilfeldige prøv-og-feil forsøk, før de bruker **byttestrategi** og bytter den blå perlen i startmønsteret med den perlen som kom på nr. 102.

Gruppe 4:
Prøver først å **generalisere** utfra målposisjonen. Setter opp det mønsteret de tror er riktig ut fra den generaliseringen. Bruker **byttestrategi** for å få det riktig når de ser at antakelsen de gjorde ikke stemmer.

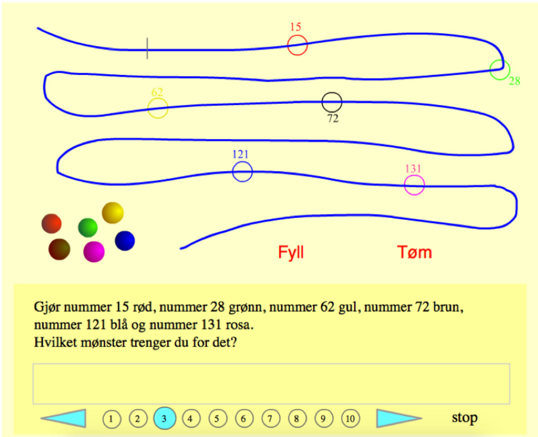
Gruppe 5:
Løser oppgaven gjennom å **generalisere** over startposisjonen. Elev 5B rakk opp handa allerede under introduksjonen og ville svare på oppgave 1 høyt foran resten av klassen.

Gruppe 6:
Prøver først to helt tilfeldige **prøv-og-feil-metoder**. Bruker så **byttestrategi** for å få perlene riktig.

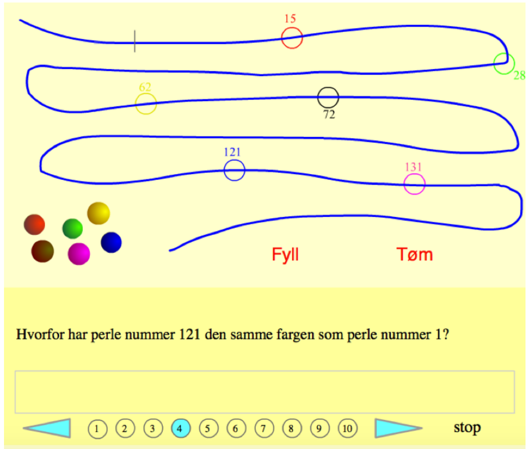
Gruppe 7:
Bruker **byttestrategi**. Setter opp et mønster og bytter den blå perlen i startmønsteret med den perlen som kom på nr. 102.

4.1.2 Oppgave 3 og 4

I oppgave 3 skulle elevene sette opp 6 perler i forskjellige farger i et mønster slik at hver farge kom på riktig plass på snoren. I oppgave 4 blir de bedt om å svare på hvorfor perle nr. 121 alltid har samme farge som perle nr. 1.



Bilde 14: Oppgave 3



Bilde 15: Oppgave 4

<u>Gruppe 1:</u>
I begynnelsen bruker de en **generaliseringsstrategi** der de generaliserer over lengden på startmønsteret, selv om de misforstår og tenker at startmønsteret består av fem perler. De finner ut at nr. 15 må være på siste posisjon i startmønsteret, som er riktig dersom startmønsteret hadde vært 5 perler langt. De oppdager selv sin egen feil.

De finner så resten av perlene gjennom å bruke en **annen strategi** der de finner faktorer til målposisjonen som de identifiserer som plass i startmønsteret. 3 er faktor i 15, 4 er faktor i 28, 2 er faktor i 62, 6 er faktor i 72, 1 er faktor i 121. 5 er ikke faktor i 131, men rosa plasseres der ut fra at det er den eneste igjen. De sier selv at de hadde flaks som klarte den rosa. Dette er en metode som gir riktig svar på oppgaven, men begrunnelsen frem til svaret er ikke riktig. Godtar det de har gjort som svar selv om ikke rosa ble plassert i henhold til strategien og går videre til neste oppgave.

<u>Gruppe 2:</u>
Bruker **byttestrategi**. Setter opp et mønster og bytter etter noen forsøk perlene på riktig plass.

<u>Gruppe 3:</u>
Bruker **byttestrategi**. Setter opp et mønster og bytter slik at det blir riktig.

<u>Gruppe 4:</u>
Byttestrategi. 4A sier med en gang de ser oppgaven: *"..Du vet hva man gjør da*" og setter opp de seks perlene i en vilkårlig mønster som de deretter bruker til å bytte slik at det blir riktig i startmønsteret. Trenger noen forsøk for å få det til.

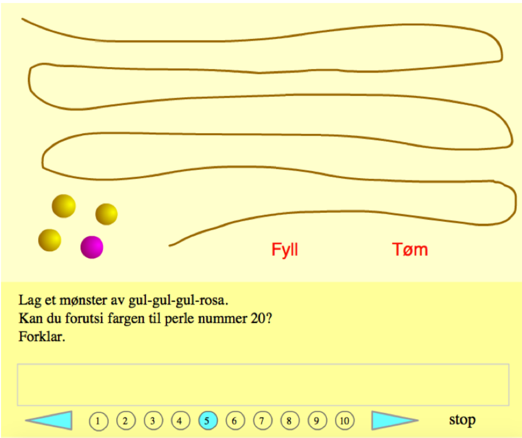
<u>Gruppe 5:</u>
Bruker **generaliseringsstrategi** og **byttestrategi**. Generaliserer over målposisjonen til fire av perlene og bytter de to som ikke stemte på første forsøk.

<u>Gruppe 6:</u>
Først to forsøk med prøv-og-feil-metode. Bruker så en **annen strategi** der de teller seks og seks perler oppover og skriver inn de forskjellige perlene på riktig plass i startmønsteret etterhvert som de kommer til de forskjellige målposisjonene.

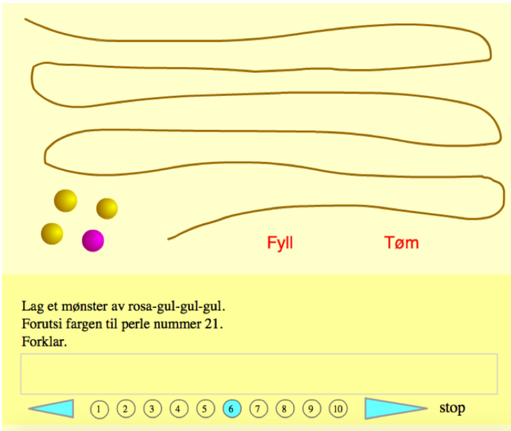
Gruppe 7:
Bruker **tellestrategi**. Setter opp perlene i motsatt rekkefølge av den rekkefølgen de står i oppgaven og fyller ut snoren.

4.1.3 Oppgave 5, 6, 7 og 8

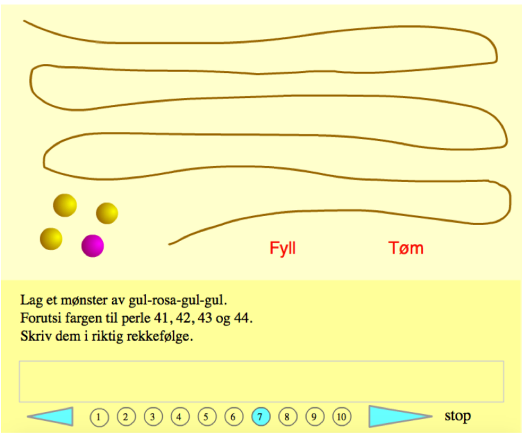
Disse oppgavene har lik oppbygging, der elevene skal plassere tre gule og ei rosa perle i riktig rekkefølge for å svare på oppgavene, som i hvert tilfelle er å forutsi fargen til en eller flere perler i en gitt målposision.



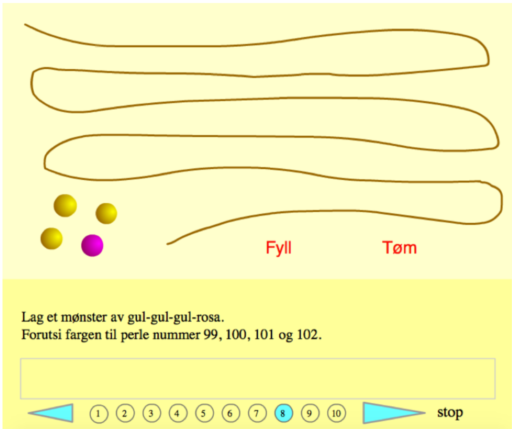
Bilde 16: Oppgave 5



Bilde 17: Oppgave 6



Bilde 18: Oppgave 7



Bilde 19: Oppgave 8

Gruppe 1:
Bruker **generaliseringsstrategi** på alle fire oppgavene. Oppgave 5, 6 og 8 er generalisering over målposisjonen mens oppgave 7 er generalisering over antall repetisjoner av startmønsteret.

Gruppe 2:
I oppgave 5: Tegner perlene opp til tjue på et ark, skriver g (gul) og r (rød) på de og teller opp. En **tellestrategi**
I oppgave 6: Samme **tellestrategi** som oppgave 5.
I oppgave 7: **Tellestrategi**. Bruker svarene fra oppgave 6 og legger til tjue.
I oppgave 8: Finner ut, med mye hjelp fra lærer, at perle nr. 80 må være rosa. Bruker deretter en **tellestrategi** og teller seg frem til det riktige svaret.

Gruppe 3:
Generaliserer ut fra hvor mange ganger mønsteret gjentar seg selv på alle oppgavene, utenom oppgave 8 hvor de setter opp mønsteret, fyller ut strengen og teller seg frem til svaret uten å forutsi på forhånd hva de tror perlen nr. 99, 100, 101 og 102 vil bli. Dette er en **annen strategi.** De verifiserer alle svarene med å telle på skjermen frem til målposisjonen.

Gruppe 4:
Oppgave 5: **Tellestrategi**. Skriver opp fargene til perlene på et ark og teller seg frem til at det må bli rosa. Fyller så ut mønsteret på strengen og sjekker at det stemmer
Oppgave 6: **Tellestrategi**.
Oppgave 7 og 8: Gjør en antakelse ut fra **generalisering** over startposisjon som er feil på begge oppgavene. På oppgave 7 er det fordi de ikke har mønsteret i riktig rekkefølge, uklart på båndet hvorfor det er feil på oppgave 8. De fyller ut snora på begge oppgavene, kontrollteller og bruker **byttestrategi** slik at det blir riktig.

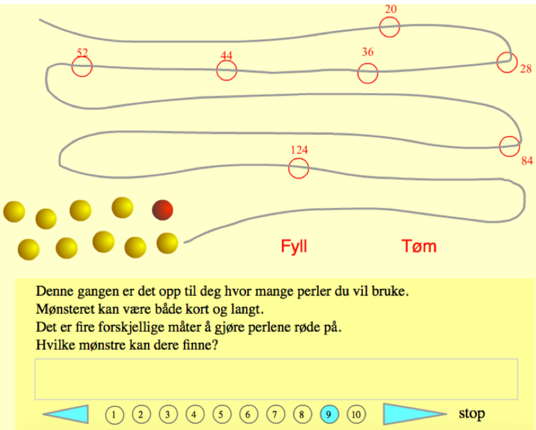
Gruppe 5:
Løser alle oppgavene gjennom å **generalisere** over antall ganger mønsteret repeterer seg selv.

Gruppe 6:
Oppgave 5: Bruker **generaliseringsstrategi** der de generaliserer over antallet ganger mønsteret repeterer seg langs strengen.
Oppgave 6: Løser oppgaven med samme **generaliseringsstrategi** som oppgave 5, men får feil fordi de bruker feil startmønster i oppgaven.
Oppgave 7: **Tellestrategi** uten å forutsi på forhånd hvilken farge perlene får. Setter opp mønsteret, fyller ut på strengen og teller opp til de kommer til målposisjonene.
Oppgave 8: Gjør en antakelse som de sjekker med å fylle ut strengen, teller opp til hundre og finner ut at de har svart feil. Ingen begrunnelse bak denne antakelsen og fremstår som en tilfeldig prøv-og-feil-metode. Bruker **byttestrategi** på startmønsteret slik at det blir riktig.

Gruppe 7:
Løser alle fire oppgavene gjennom å **generalisere** over antallet ganger mønsteret repeterer seg selv.

4.1.4 Oppgave 9

I denne oppgaven skal elevene finne fire forskjellige løsninger, der alle de sju forhåndsmerkede plassene skal bli røde. De kan selv velge hvor mange perler de vil bruke når de lager mønsteret.



Bilde 20: Oppgave 9

<u>Gruppe 1:</u>
Finner tre av fire løsninger gjennom å **generalisere** over lengden av mønsteret og antall repetisjoner. Rekker ikke mer under datainnsamlingen.

<u>Gruppe 2:</u>
Prøv-og-feil-metode som gir de svaret på den ene muligheten på første forsøk. Setter opp et helt tilfeldig mønster med fire perler, gul, gul, gul og rød som stemmer. Rekker ikke mer under datainnsamlingen.

<u>Gruppe 3:</u>
Bruker **byttestrategi** som ikke fungerer. Setter opp et mønster og prøver å bytte på den røde slik at den blir riktig, men uten å få det til.

<u>Gruppe 4:</u>
Bruker **prøv-og-feil-metode** og deretter **byttestrategi**, der de prøver å bytte den røde perlen på riktig plass. Finner plutselig den ene løsningen, og sier som begrunnelse *"Det er ingen oddetall her."* Neste løsning finner de gjennom å **generalisere** over målposisjonen der de gjør en antakelse om *"det ser ut som om alle disse er i 4-gangen."*

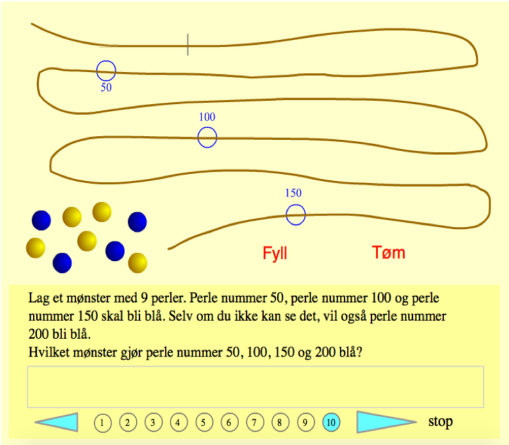
Den siste løsningen finner de tilfeldig etter en mange forsøk med **prøv-og-feil-metode**.

<u>Gruppe 5:</u>
Finner den første løsningen gjennom **prøv-og-feil-metode**. Finner løsning med gul-rød på neste forsøk. Bruker så **byttestrategi** for å finne de to siste løsningene.

<u>Gruppe 6:</u>
Rekker ikke jobbe med denne oppgaven verken når de jobber alene eller på intervju

<u>Gruppe 7:</u>
Bruker en **byttestrategi** for å finne den ene løsningen, gul-gul-gul-rød. Bruker samme strategi videre og finner løsningen med gul-rød og med en rød kule.

4.1.5 Oppgave 10



Bilde 10: Oppgave 9

Gruppe 1:
Rakk ikke gjøre denne oppgaven mens de jobbet alene. Blir under intervju bedt om å løse denne oppgaven uten å bruke byttestrategi eller prøv-og-feil-metode. Klarer det gjennom å **generaliserer** over hvor mange ganger mønsteret gjentar seg selv.

Gruppe 2:
Rekker ikke jobbe med denne oppgaven verken når de jobber alene eller under intervjuet

Gruppe 3:
Rekker ikke jobbe med denne oppgaven verken når de jobber alene eller under intervjuet.

Gruppe 4:
Først har de et forslag om å bruke to kuler, gul og blå som hadde blitt riktig dersom det var lov å bruke bare to kuler. Så noen forsøk med **prøv-og-feil-metode**, helt tilfeldig uten å se på løsningene når det blir feil. Går etterhvert over til **byttestrategi** og løser oppgaven ved hjelp av det.

Gruppe 5:
Generaliserer først om den ene målposisjonen, 50, og setter en blå perle på nummer 5 i startmønsteret. Bruker **byttestrategi** for å klare å få de andre målposisjonene blå.

Gruppe 6:
Rakk ikke å jobbe med denne oppgaven verken når de jobbet alene eller under intervjuet

Gruppe 7:
Rakk ikke å jobbe med denne oppgaven verken når de jobbet alene eller under intervjuet

4.2 Oversikt over løsningsstrategier

Under er en tabell som viser en oversikt over elevenes løsningsstrategier. Gruppene står loddrett og vannrett står oppgavene i spillet, fordelt etter oppgavenummer. Bokstavene i rutene indikerer hvilken av de fire løsningsstrategiene de brukte. Dersom gruppen ikke jobber med oppgave står det en strek i den aktuelle ruten. I noen tilfeller brukte gruppene flere av strategiene i samme oppgave, da står det merket f.eks. med A/B, som betyr at de først brukte gjett-og-sjekk strategi, og deretter gikk over til byttestrategi for å løse oppgaven.

A: Gjett-og-sjekk strategier.
B: **Byttestrategi.**
C: Generaliseringsstrategier. Disse har jeg også delt inn i fire, alt etter hvilken av de fire variablene elevene generaliserte over
C1: Startposisjonen
C2: Målposisjonen
C3: Lengden på det startmønsteret
C4: Antallet repetisjoner av startmønsteret
D: Andre strategier.

	1 og 2	3 og 4	5	6	7	8	9	10
Gruppe 1	B	C3/D	C2	C2	C4	C2	C3/C4	C4
Gruppe 2	A/B/C3	B	D	D	D	D	A	-
Gruppe 3	A/B	B	C4/D	C4	C4	D	B	-
Gruppe 4	C2/B	B/C1	D	D	C1/B	C1/B	A/B/C1	A/B
Gruppe 5	C4/C2	C2/B	C4	C4	C4	C4	A/B	C2/B
Gruppe 6	A/B	A/D	C4	C4	D	D/B	-	-
Gruppe 7	B/C2	D	C4	C4	C4	C4	B	-

Tabell 2: Oversikt over gruppenes løsningsstrategi

4.3 Elevenes resonneringer

I denne delen vil jeg presenterer noen eksempler på hvordan elevene resonnerte. Jeg vil knytte noen korte kommentarer til hvert utdrag, og drøfte det i lys av mitt teoretiske perspektiv. Eksemplene er tatt fra både klasseromsarbeidet og intervjuene, og eksemplene som er tatt fra intervjuene er spesielt merket med det.

De eksemplene jeg har valgt å presentere er valgt ut på bakgrunn av et ønske og mål om å vise mangfoldet og variasjonen i løsningsstrategiene.

4.3.1 Oppgave 1 og 2

Fra oppgave 1 har jeg valgt ut tre eksempler, fra gruppe 1 (oppgave 1), gruppe 5 (oppgave 2) og gruppe 7 (oppgave 2).

Gruppe 1
Gruppa er kjapt ferdig med å finne et mønster gjennom byttestrategi og vil gå videre til neste oppgave. Oppgave 1 ber elevene om å svare på hvilke mønstre (i betydning at det finnes flere) og lærer griper inn med et spørsmål til elevene.

L: Finnes det et annet mønster som passer? Eller er det kun det som funker? (Viser til det mønsteret elevene har funnet)
1A: Det.
L: Se om dere finner et til.
1A: Den blåe må jo være akkurat der, men de andre kan jo være.
L: Hvorfor må den blå være akkurat der?
1A: Fordi den kom akkurat på den..hundre og to da.
1B: Det er jo mange mønstre, bare den må være på nummer to.

Her viser elevene i gruppe 1 tegn på at de har forstått at det er flere mønstre som kan passe, men det som må være felles er at den blå perlen må være på nr. 2 i hvert startmønster. Dette er en **generaliseringsstrategi**, der de generaliserer over startposisjonen. De bruker ikke dette for å svare på oppgave 1, og de bruker heller ikke mer tid på oppgaven enn det som er vist her i denne transkripsjonen. Dette er elever som ifølge lærer er på et høyt og et middels nivå innenfor matematikk. Det viser de gjennom resten av spillet også, da de løser resten av oppgavene med hjelp av diverse generaliseringsstrategier. Dette stemmer med Becker og Rivera (2005) sine funn om hvilke strategier elever foretrakk når de jobbet med generalisering i algebra. De skriver at å bruke generalisering er noe av det viktigste som bør bli introdusert for elevene og elevene bør oppmuntres til å bruke det. Spillet er med på å oppmuntre til det. Skal en lykkes helt med det er det viktig at læreren også følger opp med gode og riktige spørsmål og kommentarer til det elevene gjør for å hjelpe dem i utviklingen av algebraisk tenkning.

Becker og Rivera skriver videre at elever som ikke klarer å generalisere har en tendens til å starte med numeriske strategier, og ikke har fleksibiliteten til å prøve andre tilnærminger eller se andre mulige sammenhenger mellom forskjellige former for representasjon, og generaliseringsstrategier. Disse elevene viser at de klarer å generalisere og de klarer å se andre tilnærminger og sammenhenger til oppgaven når læreren spør om det.

Gruppe 5
Eksempel fra oppgave 2. Hentet fra når de skal begynne å jobbe med oppgave 2.

5B: Sånn..oppgave to.
5C: Det virker alltid..Ja, nei, nå er det littegrann forskjellig.
5B: Grønn, blå, rød, grønn, grønn (Henviser til mønsteret de satte opp på oppgave 1).
5A: Nei, nå står det, hvorfor er det slik.
5B: Hø?
5A: Nå står det det virker alltid når den andre perlen i mønsteret er blå, hvorfor er det slik?
5B: [Fordi hundre og to minus.]
5C: [Når den andre perlen i mønsteret er blå.]
5A: Ja, på grunn av hvis man tar bort hundre så blir det jo to da..ja.
5B: Og da må den være den andre perlen ikke sant?
5C: Så hva skal jeg skrive da?
5B: Hundre og to minus hundre er lik to, da må den andre perlen være to..være blå.
5C: Ok.

Disse elevene klarer denne oppgaven kjapt, og på første forsøk. Gruppa består av tre gutter og den ene eleven, 5B, som læreren vurderer til å være på et høyt nivå, var veldig aktiv og ivrig allerede under introduksjonen vi hadde før elevene begynte å jobbe. Her hadde denne eleven hånda tidlig oppe og ville tydelig svare på hvor den blå perlen skulle være og hvorfor det måtte være sånn. De viser her at de kan **generalisere** over målposisjonen, og laget uttrykket "102 – 100 = 2", som tilsvarer M – (n •l) = S med algebraisk notasjon. Elevene i gruppa hjelper hverandre i denne oppgaven, og alle tre elevene bidrar med opplysninger som hjelper i arbeidet med å lage uttrykket de ender opp med.

Kieran (2011) lister opp noen mål for algebraisk tenkning, blant annet "tenke på det generelle i det spesielle" og "tenke på regelen i mønstre." Begge disse målene er denne gruppen innenfor. De skjønner at de kan se på noe generelt i den spesielle situasjonen i oppgave 1 og laget et uttrykk med tall som forklarer hvorfor det stemmer. De lager en regel for akkurat dette mønsteret og klarer å "tenke på hvordan man kan representere sammenhenger i problemer" som Kieran skriver.

Gruppe 7
Dette eksempelet er hentet fra intervjuet, og er fra når de holder på med oppgave 2.

7A: Hvis det er fire perler da kommer den ikke på hundre og to, hvis du setter den på nummer to..da må du sette den på et annet sted.
7B: mm..(ler).
7A: Det har noe med det ...at det er fem..sånn perler.
L: Ja.
7A: Så skal han gå på hundre og to.. ja..men jeg vet ikke hva.
L: Nei.
7A: Du vet noe..(sier dette henvendt til 7B).
7B: Nei, men hvis det hadde vært..hvis det hadde vært hundre og tre.
7A: Da måtte den vært på nummer tre hvis det var fem.
7B: mm.

Elevene i denne gruppa viser tegn på at de kan **generalisere** over målposisjonen. De sier at dersom målposisjonen hadde vært en annen, f.eks. 103, hadde startposisjonen blitt tre. Dette er riktig, men elevene sjekker ikke om det stemmer. De henviser hele tiden til konkrete tall og bruker ikke ord eller uttrykk som drar generaliseringen videre til å bli mer generell. Becker og Rivera (2006) kaller det numeriske generaliseringer dersom en lager en regel som bare baserer seg på tall en får oppgitt i oppgaven. Disse elevene er på et høyere nivå enn det, siden de generaliserer over hva som ville skjedd dersom målposisjonen hadde vært 103 i stedet for 102. Elevene ser her det generelle i oppgaven, noe som ifølge Lannin (2005) er med på å hjelpe elevene med å eventuelt kunne berettige sin generalisering. Han mener at det tradisjonelle fokuset som har vært på å finne bestemte tilfeller av en situasjon i en oppgave istedenfor å bestemme en generell relasjon til problemet har vært med på å skape den utfordringen.

Følger en Radfords lag av generalitet er dette en faktageneralisering, som er en generalitet som utføres på tallene. En slik generalisering er også med på, i følge Radford (2010), å hjelpe elevene til en høyere form for algebraisk generalitet.

4.3.2 Oppgave 3 og 4

Fra oppgave 3 og 4 har jeg valgt ut fire eksempler, fra gruppe 1 (oppgave 3), gruppe 3 (oppgave 3), gruppe 5 (oppgave 4) og gruppe 7 (oppgave 3)

Gruppe 1
Dette eksemplet er hentet fra når de skal til å begynne og jobbe med oppgave 3.

1B: Det er jo lett. Æ vet, det blir..fordi her går det jo..da blir det, rød, grønn.
1A: Nei det tror ikke jeg det blir.
1B: Brun, blå og lilla.
1A: Man må tenke først da.
1B: Det er fordi..det er fem i mellom.
1A: En, to, tre, fire, fem...seks, sju, åtte, ni, ti...(teller lavt) Den vi tar sist skal være rød.
1B: Da må vi ta den, den, den og den (peker antakelig vis på perlene på skjermen).
1A: Det er ikke sikkert..kan prøve (Setter opp perlene i et mønster) Jeg vet ikke om det er riktig da. (De starter mønsteret på skjermen)
1B: Nei.
1A: Se det var jo det jeg sa.
1B: [Det blir.]
1A: [Det blir jo helt feil] (Klikker bort perlene).
1A: Den treeren..(Teller opp til 15 igjen med tre og tre).
1B: Det er jo treeren, fordi det er i tre gangen.
1A: Det er jo seks sånne (peker med musa på perlene).
1B: Å.
1A: Det er jo seks sånne..Jeg tenkte at det var fem. Da har vi det..og så tjueåtte, det er jo i firegangen..da må jo grønn være nummer fire.

Disse elevene gjør først en antakelse som delvis er riktig. De tenker at det det er 5 perler i mønsteret, og teller 5 og 5 oppover til de kommer til 15, og sier at den siste perlen i mønsteret må være rød. Dette er en slags **generalisering** over antall ganger mønsteret repeterer seg selv. Det blir for disse elevene feil siden det er 6 perler i mønsteret. Når de oppdager det går de over til en interessant teori som ble brukt av flere grupper. Den går i hovedsak ut på at elevene finner faktorier i målposisjonen, og bruker en faktor som plassnummer i startmønsteret. F.eks. er $28 = 7 \bullet 4$. Derfor skal perle nummer 4 være blå. Mønstret har ikke 7 plasser, og det er nok derfor den faktoren ikke blir vurdert. Denne oppgaven er lagd slik at dette tilfeldigvis stemmer med samtlige målposisjoner utenom den rosa perlen på plass 131. Den rosa perlen skal være på plass nummer 5 i mønsteret, men 131 har ikke 5 som faktor. Siden den rosa perlen er den siste som skal plasseres, setter elevene naturligvis den rosa perlen på plass på plass nummer 5 selv om det ikke stemmer med antakelsen.

Denne gruppa ble under intervjuet bedt om å løse oppgaven uten å bruke byttestrategi eller prøv-og-feil metode. De skulle få et forsøk på å få det riktig. De bruker da først samme strategi som når de jobbet alene, der de finner faktorer i målposisjonen de kan identifisere som plasser i startmønsteret. Når de ikke finner 5 som faktor i 121 skjønner de at det blir feil og blir da utfordret av meg til å finne en annen strategi på å løse oppgave.
De bruker da en blanding av **tellestrategi** og **multiplikasjonsstrategi** der de generaliserer over antall ganger mønsteret gjentar seg selv. Rød perle (nr. 15) og grønn perle (nr. 28) teller

de seg opp til. På gul perle (nr. 62) bruker de at mønsteret gjentar seg 10 ganger og så legger på 2 til, slik at det blir plass nummer 2 i mønsteret.
Brun perle (nr. 72) finner de ved å legge på seks og seks fra 60, siden 60 er den siste etter at mønsteret har gjentatt seg 10 ganger. Blå perle (nr. 121) finner de ved å multiplisere 12*10, og rosa perle (nr. 131) finner ved å legge til opp fra 120.

Elevene viser under intervjuet at de er i stand til å løse oppgaven ved hjelp av mer avansert strategi enn prøv-og-feil-metode og byttestrategi. Radford (2014) skriver at elever kan tenke algebraisk selv når de er små, men at det er utradisjonelle former for algebraisk tenkning. Denne gruppa klarer å finne en mer avansert strategi enn prøv-og-feil-metode, og løser etter min mening oppgaven ved hjelp av det Radford henviser til som en utradisjonell algebraisk tenkning. I dette tilfellet hadde det vært interessant å se hvordan disse elevene hadde løst oppgaven alene dersom oppgaven var lagd slik at de tidlig skjønte at strategien om å bruke faktorer i målposisjonen ikke fungerte. Gruppa bestod av en elev på høyt- og en på middels nivå, noe de viser under intervjuet da de klarer, etter å ha blitt utfordret til det, finne en alternativ strategi som gir de løsning på oppgaven.

Gruppe 3
Eksemplet under er hentet fra intervjuet, hvor de blir utfordret til å løse oppgaven på et forsøk uten mulighet for å bruke prøv-og-feil-metode eller byttestrategi.

Denne gruppa bestod av en elev på middels nivå og en elev på lavt nivå. Når de spilte alene løste de oppgaven ved hjelp av **byttestrategi**. Under intervju blir de utfordret til å løse oppgaven på ett forsøk, dvs. uten mulighet til å bruke **prøv-og-feil-metode** eller **byttestrategi**. Det blir veldig vanskelig for de, og de klarer det til slutt etter mye hjelp fra min side. Dette er elever som gjennom hele spillet konsekvent holdt seg til strategi A og B, foruten at de så vidt på oppgave 1 viste prov på å ha sett en sammenheng når den ene sier: *"Når den er nr. 2 i rekka kommer den i 102 fordi det går 5 bortover hele tida*." Denne tanken klarte de derimot ikke å følge opp og gikk videre til neste oppgave.

Handlingen til disse elevene, både i dette eksemplet og i resten av spillet, passer med konklusjonen til Becker og Rivera (2005). De sier at elever som ikke klarer å generalisere har en tendens til å starte med numeriske strategier, og har ikke fleksibiliteten til å prøve andre tilnærminger eller se andre mulige sammenhenger mellom forskjellige former for representasjon, og generaliseringsstrategier. Disse elevene jobbet stort sett med strategi A og B, som begge er numeriske. De var ikke i stand til å generalisere, utover den ene setningen som er gjengitt over. I en vanlig matematikktime måtte en som lærer grepet tak i den muligheten, og brukt den for alt den er verdt. En vil ha elevene til å generalisere, og en vil ha elevene i stand til å utføre algebraisk tenkning. Mason (2005) sin definisjon av algebraisk tenkning inneholder følgende: *"... I hjertet av algebra er uttrykket for generalitet. Å utnytte algebraisk tenkning innenfor aritmetikken, gjennom eksplisitt uttrykk av generalitet, gjør bruk av elevenes evne til å utvikle sin algebraiske tenkning og dermed sette grundigere pris på aritmetikken."* Dette påpeker viktigheten av at elevene jobber med den algebraiske tenkningen og øver sin evne til å utvikle den. Noen elever må ha mye hjelp og støtte av læreren for å gjøre det. Da er det ekstra viktig å gripe de mulighetene som oppstår. Cai og Knuth (2011) påpeker viktigheten av å hjelpe elever med å utvikle sin algebraiske tenkning helt fra barneskolen av, for å unngå at elevene skal miste motivasjon for å jobbe med algebra når de blir eldre. Hvorfor ikke gjøre det med et tidlig-algebra spill?

Gruppe 5
Dette er et eksempel fra når de jobbet med oppgave 4. Det er hentet fra når de begynte å se på oppgaven.

5C: Hvorfor har perle nummer hundre og tjueen den samme som perle nummer en?
5B: Fordi..fordi seks ganger ti..nei..seks ganger tjueen er hundre og tjueseks og da.
5C: Skriv det.
L: Hva var det du sa for noe?
5B: Hæ?
L: Hva sa du for noe?
5C: Jeg skjønte ingenting.
5B: Seks ganger tjueen er lik hundre og tjueseks og nummer en er da hundre og tjueen.

Denne gruppa bestod av tre til dels flinke elever. Særlig elev 5B utmerket seg gjennom flere oppgaver, og han søkte ofte etter å begrunne ut fra en sammenheng han hadde funnet. Her generaliserer de over antall ganger mønsteret har repetert seg selv, og lager et uttrykk som gir de startposisjonen til den rosa perlen. Mason (1996, her fra Lannin, 2005) beskriver en lokal strategi som en strategi der en prøver å finne en regel som passer akkurat den ene delen av mønsteret istedenfor å prøve forstå den generelle sammenhengen i problemet. Denne gruppa er ute etter det siste, å forstå en sammenheng. De har ikke en lokal, prøv-og-feil-metode, men **generaliserer** ut fra det Radford (2010) kaller generalisering, hvor de leter etter en sammenheng i det de jobber med. Kjernen til det å generalisere et mønster er å legge merke til det generelle i det spesielle, et egenskap blant annet Mason (1996) peker på viktigheten av. Denne egenskapen viser elevene i denne gruppa at de har.

Når denne gruppa spilte alene brukte de **generaliseringsstrategi** og **byttestrategi** for å finne svar på oppgaven, Under intervjuet ble de utfordret av meg til å løse oppgaven på ett forsøk, uten å kunne sjekke på skjermen om det var riktig før de trykte fyll inn på slutten

5B: Ja, skal ikke..hvor skal vi ta rød?
5C: I tre..liksom i treeren..eller som..I posisjon tre.
L: Hvorfor vil du ha den i posisjon tre?
5C: Fordi jeg tenkte at hvis du tar seks ganger to da får du tolv.
5B: Ja det er riktig.
5C: Ja, og hvis du da..og da pluss tre..så får.
5B: Ja.
5C: Ja, det var noe sånn jeg tenkte.
5B: Ja, og hvis du ganger alle sammen til atten, er det bare å gå ned til den rød og da er det på femten, så den rød er nummer tre.
L: Ja..smart tenkt. Da har dere plassert den ene.
5B: Ja.
L: På plass nummer tre..ja.
5B: Ja..Også.
5A: Den grønne.
5B: Grønn på tjueåtte.
5C: Hva tar vi fra..Kanskje vi skal ha grønn i nr. fire.
5B: Vent litt..tjuefire..tretti...han må være på nummer to.
5A: Ja, det var det jeg tenkte.
5C: Nummer to..ok.

5B: Ja, jeg ganga opp til tjueseks og så plussa jeg på to..og da blir det tjueåtte og da må den være på to.

Elev 5B forklarer så hvordan han tenkte og overbeviser de andre. Elev 5C gir seg og godtar at den må være på plass nummer to, selv om han egentlig resonnerte riktig. Når de skal finne plasseringen til den blå perlen bruker de at $(6 \bullet 10) + 2 = 62$, og at den blå perlen da må være i posisjon nummer 2. De oppdager da at de har feil plassering til den grønne perlen.

5B: 2, Men da må grønn være på en annen plass og da må den røde også det.
5A: Kanskje den kan være på nummer fire..vi vet ikke.
L: Gul var nummer.
5B: To.
L: Også..ja.
5A: Grønn..kanskje.
5C: Hva med tjueåtte da, hvilken er det da?
L: Men du sa en ting...du sa..(Sier navnet på eleven) Du sa at du ganga deg opp til tjueseks.
5B: Åàhh, vent litt, jeg tok feil..jeg ganga..jeg ganga..jeg trodde jeg ganga med fem opp til tjue også plussa jeg på seks..blir atten, og tjuefire.
5A: Fire.
5B: Ja, den må være på firer.
5C: Ja.
L: Var det ikke det du sa?
5C: Jo, det var det jeg sa.
5B: Det var det.
L: Hvordan tenkte du når du sa fire, husker du det?
5C: Jeg tenkte at seks ganger fire, det blir jo tjuefire også tenkte jeg tok jeg fire pluss og da kom jeg til tjueåtte og da kom den perle...den grønne perla i nummer fire.

Her viser elevene kjapt at de har sett sammenhengen og mønsteret i oppgaven. De regner først ut at den rød må være nr. 3 fordi $(6 \bullet 2) + 3 = 15$, som tilsvarer det algebraiske uttrykket $(l \bullet n) + S = M$. De **generaliserer** over målposisjonene. De bruker akkurat samme **generalisering** på neste oppgave, selv om det her skjer noe interessant i det 5C kjapt sier at grønn perle må være på plass nr. 4, noe som er riktig. Han blir korrigert av 5B som er den fagligst sterkeste på gruppa. Han sier at grønn må være på plass nr. 2, fordi han ganga seg opp til 28. Dette godtas og elev 5C, som hadde regnet riktig gir seg og sier at han har tenkt feil. Regnefeilen til 5B oppdages når de skal finne den blå perlen, som de helt riktig regner seg frem til må være på plass nummer to, gjennom å **generalisere** over målposisjonen. 5C viser med siste uttalelse at han har forstått sammenhengen bak oppgaven, og at han er i stand til å sette opp et uttrykk for å regne seg frem til startposisjonene.

Gruppe 7
Eksemplet under er hentet fra når de jobber med oppgave 3.

Disse elevene gjør en antakelse om at perlene i startmønsteret må stå i motsatt rekkefølge av slik de blir presentert i oppgave. De begrunner ikke denne antakelsen og setter opp mønsteret på den måten.

7A: Men nå kan vi se..følge med nå.
7B: Ja, nå kan se hvilken.

7A: (Sier noe uforståelig) Ok..at nummer femten..du nå satt vi de jo bare i noe,,og da kan vi se som vi gjorde i stad.
7B: Det må jo være.
7A: Altså, han slutter på rød og så begynner han på nytt..så den.
7B: Nummer femten må være.
7A: Nummer tre må være rød også går den jo dit..nummer tre må være rød og så.
7B: Gul den må være..en, to, tre, fire, fem, seks.
7A: Nei, men jeg mener en, to, tre...Også nummer fire må være grønn.
7B: Ja.
7A: Tre rød og fire grønn..Og så to den må være gul.
7B: Ja.
7A: Tre, fire, to.
7B: Tre, fire, to.
7A: En.
7B: Ja.
7A: [Tre, fire, to, en.]
7B: [Det blir.]
7A: Nei, den må være nummer..Den må være nummer en...Den må være tre og den må være fire og den må være to..så..fire,fem..Og den må være nummer seks.
7B: Ja.
7A: Tre, fire, en..nei..tre, fire, to, seks..en.
7B: Ja...Nei..jo.
7A: Jo.
7B: Jo, jo en.
7A: og fem..ok..tre, fire, to, seks..også en..også fem (Setter så opp riktig mønster, fyller ut og sjekker at det er riktig.)

7A sier: *"Altså, han slutter på rød og så begynner han på nytt..så den.."* Disse elevene løser oppgaven med hele tiden å se på den sjette perlen i mønsteret, som i deres første mønster ble den røde, siden den røde er nevnt først i oppgaven. Dette er igjen et eksempel på det Radford (2014) kaller for utradisjonell algebraisk tenkning, hvor de plasserer alle perlene i startmønsteret ut fra hvor målposisjonen til de forskjellige fargene er i forhold til den røde perlen, som de alltid vet er den siste i hvert gjentatt mønster bortover langs strengen.

4.3.3 Oppgave 5, 6, 7, 8

Fra disse oppgavene har jeg valgt ut eksempler fra gruppe 3 (oppgave 5 og 6), gruppe 6 (oppgave 5) og gruppe 7 (oppgave 6 og 7).

Gruppe 3
Dette eksemplet er hentet fra når de jobber med oppgave 5

3A: Det vil være gul.
L: Fordi?
3A: Fordi..vi..ehm..tre pluss en blir fire..og fire..eller..vent litt.
L: Kan du si høyt hva du tenker?
3A: Fire ganger fem..det er tjue og nummer tjue..det er gul.
L: Hvorfor er nummer tjue gul? Hvordan vet du det?
3A: Fordi det er fire, åtte, tolv, seksten, tjue og det er i fem gangen.

L: Ja. Men hvorfor må den være gul? Du har gul, gul, gul, rosa står det her (Setter perlene på snoren). Også sier du at perle nummer tjue.
3A: Den vil være gul.
L: Fordi.
3A: Fordi du skal plusse på tre gule pluss en rosa, pluss tre gule pluss en rosa pluss tre gule pluss en rosa, pluss tre gule pluss en rosa.
L: Hvor mange perler har du bortover her?
3A: (Teller på strengen) Da vil den være rosa.

Denne eleven tenker og resonnerer riktig. Hun gjør en **generalisering** over antall repetisjoner av startmønsteret, og sier at 4 • 5 = 20, derfor må den være gul. Dette svaret er feil, siden hun har utgangspunkt i feil mønster, noe hun blir påpekt av fra læreren. Elevene klarer likevel å holde fast ved sin opprinnelige tanke og rette opp i feilen sin. Denne formen for algebraisk tenkning følger tankene til Cai og Knuth (2011), som skriver at at algebraisk tenkning på de tidlige trinn bør ha fokus på den underliggende strukturen i matematikk, og se forbi mestring av aritmetikk og regneferdigheter. Det er tankemåten og strukturen bak som er det viktige her, ikke regneferdigheten, svaret eller at eleven i dette tilfellet hadde utgangspunkt i feil mønster. Her må en som lærer ta en skritt bak, og ha fokus på de algebraiske ideene og tankene elevene kommer med. Vi må, som Radford (2014) sier, ha et bevisst forhold til om det er aritmetikk eller algebra vi holder på med. Aritmetisk er dette et feil svar, men det algebraiske resonnementet til elevene er riktig.

Eksemplet under er hentet fra når de akkurat har begynt å se på oppgave 6

3A og 3B (i kor): [Lag et mønster av gul, rosa, gul, gul. Forutsi fargen til perle førtien, førtito, førtitre og førtifire. Skriv dem i riktig rekkefølge.]
3B: Hva mener du med å skrive dem i riktig rekkefølge?
L: Jo..hvis du har.
3A: Jeg skjønte det.
L :Kan du nå fortelle, hvilken farge får nummer førtien, førtito, førtitre og førtifire.
3A: Ok...førtien..ti ganger fire..det blir førti.
3B: Ja.
3A: Pluss en blir førtien...da blir det gul.
Elevene skriver: *4*10=40 og den fjerde perla er gul men så må vi plusse på 1 og da er svaret gul for fordi den 1 perla er gul! Perle nr. 2 er rosa og siden forrige tall var 41 var 41 gul det var gul og gul er en foran rosa så blir neste rosa og neste der igjen blir gul og neste der igjen blir gul igjen.*

Dette er nok et eksempel på at elevene i denne gruppa er i stand til å **generalisere**, her over antall repetisjoner av startmønsteret. De bruker samme generaliseringsstrategi som eksemplet over, men her virker det som om de har en større grad av sikkerhet. Kanskje mestringsfølelsen er sterkere tilstede i denne oppgaven enn i den forrige. De fikk bekreftet at den forrige oppgaven var riktig, og fikk litt prosesshjelp av læreren til å få orden på tankene sine. I neste oppgave viser de at denne lille hjelpen gjør de i stand til å utføre denne generaliseringen på egen hånd. De har løftet seg ett nivå innenfor generalisering. Dette er også et eksempel på det Kieran (2007) kaller for resonnerende aktiviteter. Disse aktivitetene er med på å gi motivasjon og gir en grunn til å jobbe med de genererende og transformerende aktivitetene. Elevene finner her svaret uten algebra gjennom å lete etter forhold og struktur. Sett fra et motivasjonsperspektiv er det viktig å jobbe mye innenfor disse aktivitetene, og da er oppgaver der en må forutsi før en finner svaret fine å bruke.

Gruppe 6
Dette eksemplet er hentet fra når de jobbet med oppgave 5. De hadde holdt på noen minutter da læreren kom bort til dem.

6A: Det er flest gule.
L: Så det er størst sjanse for at det er gul.
6A: Ja.
L: Noen måter å finne det ut på forhånd..før dere trykker på fyll?
6B: Telle det.
L: Dere kan telle det ja..Kan dere forklare med matematikk?
6A: Nei, jeg tror det er lilla.
L : Fordi.
6A: Fordi hvis vi går i gangetabellen..fire gangen.
L: Ja.
6A: Så blir det jo..tjue.
L: Hva blir tjue?
6A: Fire ganger fire..nei.z.fire ganger frem mener jeg.
L: Fire ganger fem er lik tjue.
6A: Ja.
L: Og siden rosa er den fjerde perlen.
6A: Så blir det nummer tjue.
L : Ja, det kan du skrive her.
6A: Kan jeg skrive det?
(Elev 6A skriver inn på skjermen: *Vi tar og ganger 4 gange 5 så blir nummer 20 lilla.)*

Denne gruppa består av to elever som etter læreren sin vurdering er på et lavt nivå. Men her viser 6A at hun likevel er i stand til å **generalisere** over startposisjonen og antall ganger mønsteret repeterer seg selv, bare med litt motivasjon fra læreren sin side. Radford (2014) hevder at elever kan tenke algebraisk selv om de er små, men at denne tenkningen er utradisjonell og ikke nødvendigvis er basert på det alfanumeriske nummersystem. Det er disse elevene et eksempel på, selv om det er elever på lavt nivå innenfor matematikk. Det er viktig at elever som er på dette stadiet får utviklet sin algebraiske tenkning slik at sjansen minker for at de, som Cai og Knuth (2011) skriver, blir blant de elevene som har liten eller ingen motivasjon for algebra. Kieran skriver om algebraisk tenkning blant annet: ”*...men som ikke er eksklusiv for algebra, og som en kan være engasjert i uten å bruke bokstav-symbolsk algebra i det hele tatt, slik som å analysere forhold mellom størrelsen, legge merke til struktur...”* (Kieran, 2004 s. 9). Denne oppgaven og slik elevene svarer er i aller høyeste grad algebraisk tenkning, uten form for bokstav-symbolsk algebra. Fokuset er på å finne det ut på forhånd, ”*Kunne forvente, stille hypoteser og grunngi*,” som Kieran har som et av sine mål for algebraisk tenking.

Eksempelet under er fra intervjuet. Denne gruppa løste oppgave 7 når de jobbet alene gjennom å sette opp mønsteret, fylle ut på skjermen og telle seg opp til 40 for så å se hva svaret blir, Under intervjuet blir de utfordret til å løse denne oppgaven slik den er ment, der de på forhånd skal forutsi fargene før de fyller ut.

6B: Hvordan tenker du?
6A: Førtien..så blir det..gul..Hvis vi sier..ti ganger fire.. det blir jo førti.
L : Mm.

6A: Og legger til en så blir det.
6B: Pluss en gul.
6A: også førtito.
6B: Det blir rosa.
6A: lilla.
6B: nei.
6A: Gul..en.
6B: For hvis du.
L: Fire ganger ti..fortsett på det sporet.
6A: Det er førti.
L: Førti..og hva har skjedd..da har mønsteret.
6A: Ja og hvis vi tar da blir det jo gul..og da må førtito bli.. lilla og førtitre og førtifire gul.
L: Mmm.
6B: Blir alle gul da?
L: Ikke alle..nei.
6A: Bortsett fra?
6B: Skal jeg trykke..alle blir gul..Hvis førtien blir gul og førtito blir.
6A: Lilla.
L: Lilla eller rosa.
6A: Ja.
6B: Så er det førtitre og førtifire blir gul.
L: Ja.
6B: Førtitre og førtifire blir gul.

Her klarer gruppa å komme frem til svaret gjennom å multiplisere antall ganger mønsteret gjentar seg selv opp til 40, de **generaliserer** over antall ganger mønsteret gjentar seg selv. Deretter justerer de inn de andre perlene ut fra startmønsteret. Disse eksemplene viser at de svake faglige elevene også kan generalisere og finne sammenheng og mønster, men at de i begge eksemplene trenger mer motivering og påvirkning fra læreren sin side. Radford (2014) skriver at det er viktig at vi er bevisst at det er algebraisk tenkning vi jobber med, og ikke aritmetikk. Målet med denne oppgaven, og hele spillet, er å jobbe med mønster og se sammenhenger. Da må hjelpen og støtten fra læreren være i forhold til det, en må kjenne elevene og vite hvordan og hva slags hjelp de trenger. Noen elever klarer kjapt å se det abstrakte i matematikken, se sammenhenger og kunne se hele bildet for å generalisere, som Tall (2011) skriver om. Andre elever holder seg på et mer konkret nivå og bruker mer tid på de tallene og figurene de jobber med. Dersom en jobber med elevenes algebraiske tenkning vil hovedfokuset være på å prøve å løfte elevene frem til å se sammenhenger og mønster, og se at matematikken er et språk som kan brukes til å forklare og beskrive det vi ser.

Gruppe 7
Disse eksemplene er hentet fra når de begynte å jobbe med oppgave 6 og fra når de jobbet med oppgave 7. Eksemplene drøftes sammen under.

7A: Lag et mønster av rosa-gul-gul-gul. Forutsi fargen til perle nummer tjueen..Da var det..rosa, gul, gul, gul (setter opp fargene i riktig rekkefølge på skjermen) Ok, men da er det jo bare sånn her...det er fire farger og hvis det bare gjentar seg og gjentar seg.
7B: Ja,
7A: Så da blir det jo.. eh..ikke gul..men rosa..rosa..ja.
7B: Ja. (Fyller ut strengen på skjermen)
7A: Fire, åtte, seksten, tjue.

7B: Nei.
7A: Fire..også blir det åtte, så blir det tolv, seksten, tjue..og tjueen..Ja, det blir rosa.

Eksempelet under er fra starten av oppgave 7.
7A: Gul, rosa, gul, gul.
7B: Ja.
7A: Se..hvis du skal ha førtien..da er det jo..hvis du skal ta det da..ti ganger.
7B: Førti.
7A: Ti ganger blir det da.
7B: Ja.
7A: Også skal du ha nummer førtien...da blir det gul..gul, rosa, gul, gul.
7B: Ja, da blir det gul da.
7A: Nei, men..førtien, førtito, førtitre og førtifire..Da blir det jo..Se hvis det har gått ti ganger da er det jo samme mønster hele tida, og hvis det skal være på førtien da går den jo på nytt til nummer gul og så førtito rosa, førtitre gul, førtifire gul.
7B: Ja.
7A: Så da blir det jo bare..gul, rosa, gul, gul.
7B: Mhm.
7A: Vi må dobbeltsjekke.
7B: Ja.

I begge disse eksemplene viser elevene i gruppen at de kan **generalisere** over antall ganger mønsteret repeterer seg selv. I det første eksemplet bruker de ikke ord som ganging eller multiplikasjon, selv om det helt tydelig er det de holder på med. I det andre eksemplet bruker de samme løsningsstrategi, men her med en klar referanse til at det er ganging de holder på med. Antakeligvis skyldes det at det i det andre eksemplet er litt større tall, samt at det er 10 de ganger med. Det gjør at det blir mer åpenbart at det er lurt å bruke gangetabellen. I det første eksemplet kunne de enkelt hoppe fire og fire opp til 20, så ikke noe direkte behov for ganging her. I følge Freudenthal Institute handler spillet om mønster, sammenheng og har en link til multiplikasjonstabellen. Dette viser denne gruppen tydelig at de har forstått og behersker.

4.3.4 Oppgave 9

Til oppgave 9 har jeg plukket ut eksempler fra gruppe 1, gruppe 4 og gruppe 5.

Gruppe 1
Gruppen setter først opp et tilfeldig mønster som ikke blir riktig.
1A: Nå må vi prøve å tenke logikk.
1B: Det kan være.
1A: Skal vi begynne med å..se alt.. det kan jo være.
1B: Men det er åtte overalt..men det kan.
1A: En, to, tre, fire, en, to, tre, fire..Vi kan prøve åtte..jeg mener nummer fire...en, to, tre, fire.
1B: Også er det fire igjen. (Setter opp et mønster med gul, gul, gul, rød og fyller ut.)
1B: Det gikk.
1A: Nå må vi tenke neste.
1B: Yes.
1A: Hvilke mønstre kan dere finne? Vi skal finne flere da.
1B: Men det ene mønsteret er jo. (sier noe uforståelig.)

1A: Det må jo bli mindre. (skriver inn mønsteret de fant.)
1B: Vent litt..en, to, tre..Selvfølgelig..fire ganger fem det blir tjue og da må vi ha fem perler.
1A: Nei..for der hadde vi jo bare fire.
1B: Fire mener jeg..Det sier seg jo selv.
1A: Nei.
1B: Jo.
1A: Ikke for meg.
1B: Se da..en, to, tre, fire, fem..fire ganger tjue, og da må det være på den siste.
1A: Ja.
1B: Det gir jo egentlig litt mening uansett.
(Elev 1A fortetter å skrive inn det mønsteret de har funnet.)
1A: Skal vi prøve å finne noen andre måter?
1B: Nei..Det vet jeg.
1A: Jeg tror kanskje det kan være den andre.
1B: Jeg vet hvordan...Jeg tror det kan være..jeg tror det kan være.
1A: Vi prøver den andre.
1B: Den, den.
1A: Og så rød. (Setter opp gul perle og rød perle og fyller ut.)

Denne gruppa bruker først **prøv-og-feil-metode**, som ikke blir riktig. Deretter sier de: *"Nå må vi prøve å tenke logikk.."* og senere *"skal vi begynner med å se...alt..det kan jo være.."*. Dett er begge utsagn som viser at de er ute etter å finne en sammenheng eller et mønster, og at de tenker det må være noe logisk bak hvordan en finner svaret i oppgaven. Denne gruppa var innom generaliseringsstrategier på alle oppgavene i spillet utenom en, og viser med disse utsagnene og hvordan de ender opp med å løse oppgaven til slutt at de har utgangspunktet sitt i algebraisk tenkning. De har, som Bergsten et al., (1997) skriver, et algebraisk utgangspunkt der de har fokus på struktur og ikke på å gjennomføring av selve regningen. Kieran (2004) skriver: En må ha fokus på relasjoner, og ikke bare på utregning av et (numerisk) svar for å komme fra aritmetisk fra algebraisk tenkning. Matematikk er et fag der det tradisjonelt har vært et sterkt fokus på svaret, og der prosessen frem til svaret er mindre viktig. Denne oppgaven, og denne løsningsstrategien, demonstrerer viktigheten av at en har sterkere fokus på **hvordan** en finner svaret enn **at** en finner svaret.

Gruppe 4
Dette eksemplet er tatt fra når de hadde jobbet med oppgaven noen få minutter, og prøvd to forskjellige **prøv-og-feil-metoder** som gav dem feil svar.

4A: Hva om vi bare gjør sånn? (setter opp et mønster med to perler, rød og gul.) Fyll..rød, rød, rød, rød (ler) Åhh.
L : Hvorfor ble det riktig?
4A: Jeg gjettet.
L: Ja ..Men..men.
4A: Det er ikke noen oddetall her..hvis man..en er oddetall og to er partall..så da må den være rød så blir alle de også rød.
L: Nå har dere funnet en måte, og så finnes det tre til står det
4B: De kan vi finne lett. (Noe praktisk snakk om hvordan de kan klikke bort kulene.)
4A: Hva om vi bare gjør det samme bare med dobbelt og så setter vi den i fire? ..Det ser ut som alle disse er i fire-gangen
4B: Ja. (Sier noe uforståelig.)
4B: Jeg gjør det.

4A: Ok..en, to, tre, fire.
4B: Mmm.
4A: Rød, rød, rød, rød, rød..rød..rød.
4B: Ok. (Skriver den den løsningen de fant.)
4A: Det kan ikke være det samme bare med..Det kan ikke være med åtte eller seks siden tjue er ikke i seks og åttegangen.
L: Riktig.
4A: Hvilke gange er i..hvilke gange er i..hvilke forskjellige ganger har tjue i seg..1 har.
4B: To.
4A: Fem har..fem har (Prøver et mønster med gul-gul-gul-gul-rød) Der. Fyll.
4B: Ja, men det blir jo ikke riktig.
4A: Siden tjueåtte har ikke
L: Ja ikke sant.
4A: Dumme, dumme, dumme...OK, jeg vet en annen måte. (Setter opp et mønster med bare en rød perle. Begge ler.)
4A: Det telles?
L: Du sa det jo egentlig..tjue er jo i.
4A: Det telles?
L: Ja.
4A: Yes.

Elev 4A sier at han gjettet når han fant den første løsningen. Dette begrunner han det med at det ikke var noen oddetall blant de røde i målposisjonen, og derfor kunne ikke den røde perlen være på oddetallsplass i startmønsteret. Gjetting er en **prøv-og-feil-metode**, og det Becker og Rivera (2006) kaller for numerisk generalisering. Dersom utgangspunktet for regelen er gjetting, er det ikke ifølge Radford (2010) en regel, men en hypotese. Denne eleven har tvert i mot gjort en generalisering som stemmer, og som hjelper gruppa med å finne de neste løsningene og, gjennom at han oppdager en sammenheng i oppgaven om at alle målposisjonene er i 4-gangen. Her er vi over på at eleven **generaliserer**, og det har ikke noe med gjetting å gjøre. Han har har sett et mønster og noen sammenhenger som han bruker. I dette tilfellet bør eleven gjøres oppmerksom på det, og hjelpes til å forstå at det var viktig og riktig å se etter og finne en sammenheng. Dette er algebraisk tenkning, og det eleven selv sier er gjetting begrunnes så algebraisk ut i fra en sammenheng eleven har oppdaget. Gjetting kan gjerne brukes som en hjelp til å finne et svar, men det må etterfølges av en algebraisk generalisering og en begrunnelse som viser at en har forstått og sett et mønster, og er i stand til å uttrykke det algebraisk, enten med algebraisk notasjon eller med andre ord eller gester som Radford skriver om. Dette er med på, ifølge Radford (2010) sin teori om prosess av objektifisering, å gjøre elevene enda mer bevisst og hjelpe de til en enda høyere form for algebraisk generalitet.

Gruppe 5
Dette eksemplet er hentet fra når de akkurat hadde begynt å jobbe med oppgaven.

5B: På nummer tjue da må rød være på nummer..Jeg skal bare teste engang.
5A: Husk vi kan velge hvor mange vi må ha..Vi må ikke ha alle..sånn.
5B: Jeg skal bare teste en gang. (Setter opp et mønster med rød på plass nr. 5.)
5A: Det er nok riktig.
5C: Ja.
5B: Nei.
5C: Nei, nei, nei.

5A: Det var riktig på noen av de.
5B: Det var bare riktig på den første.
5A: Kanskje på den andre.
5C: Ikke på hundre og tjuefire..Jeg visste det.
5B: Ok, da må det kanskje være nummer fire.
5C: Bare vent litt..sånn. (Fjerner perlene fra snoren.)
5A: Prøv nummer fire.
5C: Gul, gul, gul rød.
5B: Vent litt.
5C: Gul, gul, gul, rød..Fyll (Setter opp nytt mønster og fyller ut.)
Alle: Jada, jada, jada, ja, ja. (snakker i munnen på hverandre.)
5B: Hæ..Jeg bare gjettet.
5A: Ja. Yes.
5C: Vi tok en give me five.
L: Ja, det er godt.
5C: Bare så du vet det.
5B: Vi gjettet oss bare frem til svaret.
L: På den.
5B: På andre forsøk.
L: Har dere alle mønstrene nå?
5B: Vi bare gjettet..tok rød på nummer fire.

Denne gruppa bestod av to elever på middels nivå og en elev på høyt nivå. Dette eksemplet viser at de finner den første løsningen ved hjelp av det de selv sier er gjetting. I praksis satt de opp et mønster som nesten var riktig og brukte en slags **byttestrategi**. Jeg antar at det første forslaget med fire gule og en rød perle til slutt var for å få nr. 20 rød, noe de klarte. Når resten så ble feil byttet de om fra 5 til 4 perler og satt den røde sist, fortsatt for å få nr. 20 rød. Her **generaliserer** de altså over målposisjonen to ganger, og får riktig på den siste. De har ikke fokus på de andre målposisjonene og sånn sett er det litt flaks og gjetting som gjør at de får til hele oppgaven. Eksemplet viser også hvor løsningsfokuserte elevene blir. Gleden over å finne løsningen ved hjelp av gjetting er minst like stor som de løsningene de finner i spillet gjennom generalisering. Dette er nok et eksempel på viktigheten av at en kommuniserer tydelig hva en holder på meg, og at elevene vet hva som forventes av dem. Denne oppgaven bad ikke elevene eksplisitt om å forklare eller begrunne noen av løsningene de fant, bare om hvilke en kan finne. Hovedfokuset til elevene lå på nettopp det, å finne løsninger. Samtidig er oppgaven om tidlig algebra, og det er algebraisk tenkning en skal øve på. Radford (2010) sier at det er viktig at læreren er utstyrt med tilstrekkelige pedagogiske evner og strategier til å aktivisere elevene på en algebraisk måte. Det er da viktig at flinke elever får gode oppfølgingsspørsmål og utfordringer fra læreren sin side om hvorfor det alltid blir sånn, og hva ville skjedd om noen av målposisjonene flyttet på seg, hva om ikke alle var oddetall osv.

4.3.5 Oppgave 10

Til oppgave 10 har jeg plukket ut eksempler fra gruppe 1 og gruppe 5.

Gruppe 1
Elevene rakk ikke gjøre denne oppgaven mens de jobbet alene. Under intervjuet blir de bedt om å løse denne oppgaven uten å bruke byttestrategi eller prøv-og-feil-metode.

1A: Da må vi gå i nigangen...ni..atten..tjuesju..trettiseks..førtifem..femtifire..nei..det..ok.. førti..førtifem er nærmest.
L: Førtifem? Hvor mye ganger du ni med for å få førtifem?
1A: Fem
L: Fem..Ja, ni ganger fem er førtifem. Korrekt. Hvordan kan dere bruke det for å finne ut hva.
1A: Da er det..Siden det er førtifem, han slutter på førtidem, da må den femte være blå..tror jeg.
L: Hva tenker du?
1B: Jeg tror også den femte blir blå fordi.
1A: Tjuefem..nei..førtifem..også..førtiseks, førtisju, førtiåtte, førtini, femti...Den femte må være blå.
L: Ja.
1A: Da må den femte må være blå.

Denne gruppa brukte en form for **generaliseringsstrategi** på alle utenom en oppgave, og når de blir bedt om å gjøre denne oppgaven under intervjuet går de rett inn i gangetabellen og generaliserer over målposisjonen og hvor mange ganger mønsteret gjentar seg selv. De regner: $(9 \bullet 5) + 5 = 50$, som algebraisk tilsvarer $(n \bullet l) + S = M$. Disse elevene viser at de har en høy forståelse og behersker denne generaliseringen på en god måte. I et videre arbeid kunne slike elever bli bedt om å ta generaliseringen opp på et enda høyere nivå og bedt om å, som Kieran (2011) skriver, tenke på hvordan man kan representere sammenhenger i mønster og jobbe med å grunngi og formulere. De kan for eksempel bli bedt om å validere generaliseringen sin for å vise holdbarheten av uttrykket, noe som ifølge Lannin (2005) er noe som ikke kan skilles fra generalisering.

Gruppe 5
Denne gruppen får under intervjuet en utfordring om å klare oppgaven på ett forsøk, dvs. uten mulighet for å bruke prøv-og-feil-metode eller byttestrategi.

5B: Åja, vi må gange ni også opp til ca. fem..eehh..ni ganger seks er femtifire og da må det være blå på nummer fem.
L: Forklar til de andre to..hvorfor det blir sånn.
5B: Ni ganger seks er femtifire ..også da må vi ta minus fire og der skal det være en blå.
5A: Ok.
L: Skriv opp.
5B: Nr fem...en, to, tre, fire, fem..blå..og de gule farger vi jo bare ikke. (Tegner perlene på et ark de har foran seg.)
L: Ja..da er det greit..flott..Neste da?
5A: Hundre?
L : Mm.
5B: Hvis vi ganger ni med ti..nei ni med elleve så blir det nittini, da må nummer en være blå ...for da må vi plusse på en..er du enig.
5C: Ja.
5B: Også nummer hundre og femti.
5A: Ni ganger sytten eller seksten.
5B: Ni ganger 10..nei..ni ganger tjue er hundre og åtti..minus tretti..det blir tjuesju.. som er nærmest og da må vi ta.. gange sytten
L : Du sa seksten sytten og så fant vi ut sytten.
5B: Jeg tok bare gange tjue og det blir hundre og åtti, så måtte jeg finne det nærmeste tretti.
L: Hvor langt har du kommet da?

5B: Eehh..da må jeg ta minus tjuesju.. og det blir hundre og femtitre..og da må vi ta minus tre som må bli der..nei der.
L: Ja..der eller der? Der er det fire.
5B: Jeg fargelegget feil. (snakker om arket de tegner på.)
5A: Men hvis vi skal få to hundre må det jo være tjuefem ganger ni..ikke sant?
5B: Hm?
5A: Tjuefem ganger ni.
L: Ja..så skal vi..hvorfor en skal være gul av de to? (peker på det de har tegnet på arket.)
5B: Den i midten
L: Ok..Du sa to hundre..nå skal vi regne på den og.
5B: Ganger tjueto..det blir jo atten.
5A: Ni ganger tjuefem.
5B: Hæ?
5A: Ni ganger tjuefem.
5B: Nei, ni ganger tjueto blir hundre og nittiåtte.
5A: Hundre og nittiåtte?
5B: Ja.
5A: Ok.
5B: Ja, og da må perle nummer to være blå.
L: Perle nummer to?
5B: Ja, skal vi prøve da?

Disse elevene klarer oppgaven gjennom hele tiden å **generalisere** over målposisjonen. De viser at de behersker dette og at de har evne til å se den nødvendige sammenhengen og strukturen for å løse oppgavene i spillet. I tillegg er de sikre når de gjennomfører utregning, og kan bruke gangetabellen som et hjelpemiddel for å svare på oppgavene. Dette er algebraisk tenkning og resonnering på et høyt nivå.

5 Diskusjonskonklusjon

Denne oppgaven dreier seg om tidlig algebra. Jeg har presentert relevant teori for å kunne analysere hvordan elevene resonnerer, og hvordan de generaliserer når de spiller *Perler på en snor.* Ut fra det teoretiske perspektivet og min egen forståelse av tidlig algebra har jeg så analysert resultatene, og presentert hvordan elevene resonnerer, hvilke løsningsstrategier de bruker og hvordan de generaliserer.

I denne delen vil jeg svare på forskningsspørsmålet mitt. Jeg vil ta for meg ett og ett punkt i forskningsspørsmålet og trekke sammenheng mellom det teoretiske perspektivet, resultatene jeg har funnet og mine egne tanker og refleksjoner.

Det har vært en utfordring for meg at det jeg har forsket på er en forholdsvis ny tankegang når det gjelder elevers arbeid med tidlig algebra. Det meste av litteraturen og forskning på elever om tidlig algebra handler om hvordan elever jobber med og forholder seg til mønsteraktiviteter på ark, tallmønstre eller fyrstikkoppgaver. Dette er oppgaver hvor elevene skal finne en sammenheng mellom figurene, og komme frem til en formel som gir antall elementer i den n-te figur. Slike oppgaver er kjente for alle som driver med matematikk. *Perler på en snor* er et spill om mønster, men spillet spør ikke i så stor grad om å finne sammenheng mellom figurer eller komme frem til en regel. Det fører også til at den algebraiske resonneringen og tenkningen i spillet blir litt annerledes enn andre mønsteraktiviteter. Dette vil jeg forsøke å få frem i denne delen.

Forskningsspørsmålet mitt var:

> Hvordan resonnerer elever i 6. klasse når de spiller *Perler på en snor,* og hvordan generaliserer de?

Dette spørsmålet er todelt. Først spør jeg om hvordan elevene resonnerer, så om hvordan de generaliserer. For å svare på forskningsspørsmålet vil jeg svare på disse punktene for seg. Til slutt har jeg skrevet noe om ytterlige resultater. Det handler om hva slags oppgaver det er mulig å gi elever innenfor tidlig algebra og var opprinnelig inkludert i forskningsspørsmålet mitt. Jeg mener punktet er så viktig at jeg likevel vil si noe om det i denne delen.

5.1 Resonnering

Den første delen av forskningsspørsmålet handlet om resonnering. Resonnering i denne sammenheng handler om hvordan elevene går frem for å finne svar på oppgavene. I resultatdelen har jeg laget en oversikt over løsningsstrategiene til hver gruppe (se tabell 2) og vil ta utgangspunkt i den for å svare på dette spørsmålet.

Den første strategien var **prøv-og-feil-metode (A).** Spillet er laget slik at elevene kan løse mange av oppgavene gjennom prøving og feiling. Mine resultater viser at elevene på oppgave 1, 3, 9 og 10 i større grad bruker prøv-og-feil-metode enn de gjør på oppgave 2, 4, 5, 6, 7 og 8. Til oppgave 1, 3 , 9 og 10 vil det for mange elever være naturlig å sette opp et mønster, og se hva som skjer. Det er ikke nødvendig å tenke gjennom de matematiske relasjonene i oppgavene før de kan regne ut noe, slik Rivera (2006) skriver om undervisning for å få frem det algebraiske i matematikken. Samtidig har spillet alle tre av Radford (2014) sine forutsetninger for algebraisk tenkning i seg: *Ubestemthet* i at det finnes ikke-bestemte variabler i hver oppgave; *Betegnelse* i at startposisjonen og målposisjonen må gis et eller annet navn av elevene, enten tall eller ord; *Analytiskhet* i at en må operere på målposisjonen, startmønsteret og startposisjonen. Disse forutsetningene kommer klart frem i oppgave 2, 4, 5, 6, 7, og 8, men er også gjeldende for de andre oppgavene.

Byttestrategi (B) var en mye brukt strategi blant elevene. I begynnelsen skilte jeg ikke mellom den og prøv-og-feil-metode, men innså etterhvert at det måtte jeg. Byttestrategi er ikke en ren prøv-og-feil-metode, men mer en bruk-feilen-metode der elevene systematisk bruker det de gjorde feil for å finne svaret. Dette er en interessant strategi som jeg ikke finner direkte nevnt i litteraturen. Bergsten et al. (1997) sier at en med et algebraisk utgangspunkt har fokus på aritmetikkens struktur og betrakter selve operasjonen på tallene. Kieran lister opp *"Tenke på det generelle i det spesielle; tenke på regelen i mønstre; tenke relasjonelt om størrelser, tall og operasjoner"* som mål for algebraisk tenkning, mens Radford krever både *ubestemthet*, *betegnelse* og *analytiskhet* for at noe skal regnes som algebraisk tenkning. Ut fra det vil byttestrategi ikke være en algebraisk metode. Jeg vil likevel hevde, i lys av Mason (1996), at det er en lokal, algebraisk strategi som både virker, og er hensiktsmessig i løsningen av flere oppgaver i spillet.

Når det gjelder bruk av **generalisering (C)** som løsningsstrategi fant jeg at det var generalisering over antall repetisjoner av startmønsteret (C4) som var den mest fremtredende, selv om det var flere innslag av alle de fire generaliseringene. Av 8 oppgaver (se tabell 2) hadde gruppe 1 og 5 hele syv generaliseringer og gruppe 4 og 7 hadde fem generaliseringer. Felles for disse gruppene var at de under spillet hadde fokus på å finne en sammenheng i oppgavene som kunne hjelpe dem med å finne svaret. De snakket om hvor mange ganger mønsteret repeterte seg selv og brukte det for å finne målposisjonen. Oppgave 5, 6, 7 og 8 hadde flest innslag av generalisering. Grunnene til det kan være mange, blant annet at dette var oppgaver der en skulle forutsi hva svaret ble. Derfor passet det ikke med byttestrategi eller prøv-og-feil-metode. Når oppgavene spør etter å forutsi flytter en fokuset bort fra svaret, og over på utforskning, sammenheng og begrunnelse. Det er akkurat det Cai og Knuth (2011) mener at algebraisk tenkning på tidligere trinn bør ha fokus på. Slike oppgaver vil være med på å fremme algebraisk tenkning, og hjelpe elever til å gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra enklere og sterkere.

Jeg var nødt til å samle noen strategier i en kategori som jeg kalte **andre strategier (D).** Det er de strategiene jeg ikke fant plass til i noen av de andre kategoriene. Flere av gruppene brukte en innfallsvinkel der de brukte multiplikasjonstabellen som hjelp for å svare på oppgavene. Spesielt gjaldt det oppgave 3, 5, 6, 7 og 8. På disse oppgavene var strategi D mye i bruk. Innlæring og øving av multiplikasjonstabellen står etter mitt syn sterkt i norsk skole. Det er sett på som viktig at elevene behersker den, men det er delte meningen om den bare skal pugges eller læres med forståelse. Elevene i studien behersket stort sett multiplikasjonstabellen godt, og for mange av dem var det naturlig å bruke den når de løste oppgavene. Gruppene som viste at de ikke behersket den godt hadde store vanskeligheter med å svare på oppgave 2 og 4. Gruppe 2 er et eksempel på det. Også under arbeidet med oppgave 5, 6, 7 og 8 kom det tydelig frem at de gruppene som behersket multiplikasjon hadde løste oppgavene raskere, mer effektivt og med en bedre begrunnelse.

Resultatene mine viser at det er stor variasjon i strategiene elevene bruker for å løse oppgavene. Det er 32 tilfeller av en eller annen form for generalisering (C), 19 tilfeller med byttestrategi (B), 12 tilfeller av annen strategi (D) og 8 tilfeller av prøv-og-feil-metode (A). At strategi A og B står så sterkt kan det være flere grunner til, men ut ifra disse oppgavene mener jeg det først og fremst er fordi elevene er ute etter å finne svaret på den måten de mener er mest hensiktsmessig. En kan argumentere for at byttestrategi ikke er en algebraisk strategi siden den har utgangspunkt i prøv-og-feil-metode, men den er likevel hensiktsmessig å bruke i dette spillet. Det blir derimot utfordrende for gruppene å si noe om hvorfor det blir riktig etter å ha brukt en slik strategi. Gruppene som brukte generalisering for å løse oppgave 1 klarte å formulere noe skriftlig eller muntlig på oppgave 2. De gruppene som brukte strategi A eller B slet med å formulere noe, og klarte ikke si noe om hvorfor det måtte være slik. Tall (2011) definerte generalisering som *"å se etter et større bilde"*. Generalisering handler om å se forbi svaret og se på strukturen og mønsteret som ligger til grunn for oppgaven.

Becker og Rivera (2005) konkluderte med at elever som ikke generaliserer har en tendens til å starte med numeriske strategier, og ikke er fleksible til å se andre sammenhenger mellom andre representasjonsformer og generalisering. Elevene som brukte prøv-og-feil-metode og byttestrategi klarte ikke i særlig grad å se sammenheng mellom oppgave 1 og oppgave 2, eller koble sammen startposisjonen med målposisjonen. I stedet hang de seg ofte opp i tallene som var gitt i oppgaven, og på grunn av at det ble spurt om hvorfor nr. 102 fikk samme farge som nr. 2 hørte jeg utsagn som *"det må ha noe med 2 å gjøre"* flere ganger. Her er elevene opptatt av de konkrete tallene som er gitt i oppgaven og ikke av sammenhengen eller mønsteret bak.

Oppgave 5, 6, 7 og 8 skilte seg fra de andre oppgavene. Elevene skulle i disse oppgavene forutsi hvilken perle de trodde kom på noen gitte målposisjoner. Her fant jeg veldig forskjellige innfallsvinkler. Noen grupper var opptatt av å finne svaret så fort som mulig mens andre brukte lengre tid på oppgaven og prøvde å generalisere. På disse oppgavene var det spesielt generalisering over antallet repetisjonen av startmønsteret jeg fant. Gruppene som klarte det har skjønt at det finnes en sammenheng og et mønster de kan bruke for å løse oppgavene, og uttrykker det gjennom handling ved å bruke den samme strategien til å løse flere oppgaver.

5.2 Generalisering

Resultatene mine viser at det er stor variasjon i forhold til hvordan elevene generaliserer. På forhånd hadde jeg fire forskjellige generaliseringsstrategier jeg så etter:

C1: Startposisjonen
C2: Målposisionen
C3: Lengden på det startmønsteret
C4: Antallet repetisjoner av startmønsteret

Jeg fant ut at alle generaliseringene var i bruk. Den mest hyppige var C4, generalisering over antall repetisjoner av startmønsteret. Denne fant jeg i bruk i hele 17 ganger (se tabell 2). Strategien C1, generalisering over startposisjonen fant jeg i bruk 4 ganger og C3, lengden på startmønsteret 3 ganger.

Grunnene til at C4 var den mest brukte kan være flere. Freudenthal Institute skriver følgende om de pedagogiske grunnene bak spillet: "*Mønsteret til perlene vil hjelpe barna til å bli involvert i matematiske problem, repetert mønstre, linken til multiplikasjonstabellen osv."* Spillet er lagt opp til at det skal involvere elevene i å jobbe med multiplikasjonstabellen, noe resultatene mine viser at det gjør. Elevene skjønner denne linken kjapt, og det er naturlig for dem å både tenke ut fra multiplikasjonstabellen og å bruke en generalisering som lar dem generalisere over antall repetisjoner av startmønsteret.

Resultatene viser at elevene er i stand til å generalisere og det er stor variasjon i hvilken type generalisering de bruker. Flere grupper generaliserer over nesten alle oppgavene, og alle gruppene er innom en eller annen form for generalisering i løsningene sine.

Det er klart mest innslag av generalisering under oppgave 5, 6, 7 og 8. Dette er oppgaver der en ikke kunne bruke prøv-og-feil-metode eller byttestrategi. På de andre oppgavene var det mer utbredt med de to sistnevnte strategiene. Dersom oppgaven er formulert slik at de oppfordrer til generalisering, og muligheten for prøv-og-feil-metode er begrenset, viser resultatene mine at en vil få mer generalisering.

Jeg har funnet ut at elevene er kapable til både å variere løsningsstrategiene sine og til å generalisere. Mest sannsynlig klarer elevene mer enn vi voksne tror, og det kan tenkes at pensumet og oppgavene som blir gitt begrenser en del algebraisk tenkning. Jeg synes det er mye tradisjon og forventning omkring algebra som kanskje er for styrende. Forventing om at det er vanskelig, forventning om bokstaver og forventning om å lære regler. Men det er bare den skolealgebraen vi og foreldrene er vant til, med bokstaver og uttrykk og likninger. Tidlig algebra tilbyr en ny og helt annen måte å tenke algebra på. Her handler det om å gjøre antakelser, forutsi, vurdere, sjekke, kontrollere og endre. Dette er alle punkter som elevene må bruke når de spiller *Perler på en snor*. Da kan elevene tenke algebraisk helt fra de er små og på den måten være bedre rustet til å møte skolealgebraen.

5.3 Ytterligere resultater

Spørsmålet**:** ”*Hvilke utfordringer innenfor tidlig algebra kan gis til elever i 10-12 årsalderen for å hjelpe de i å utvikle sin algebraiske tankemåte?”* var opprinnelig en del av forskningsspørsmålet mitt. Jeg tok det bort, men synes likevel at dette er et så viktig punkt for oss lærere at jeg vier det en liten del i diskusjonskonklusjonen min.

Dette spillet kan være med på å gi en liten pekepinn på hvilke utfordringer som kan gis elever på barneskolen for å hjelpe de i å utvikle sin algebraiske tankemåte. Først og fremst mener jeg at en må definere algebraisk tenkemåte slik Kieran (2004) gjør det. En slik definisjon, sammen med Kieran (2011) sine mål for algebraisk tenkning, og Rivera (2006) sine føringer for undervisning danner et godt bakteppe for å drøfte hvilke utfordringer som bør og kan gis. Da vil tanken om at en må utvikle algebraisk tenkning som ikke har fokus på bokstaver eller symbolmanipulasjon ivaretas. Dette er et viktig prinsipp innenfor tidlig algebra

Spillet har fire variabler, noe som gjør det utfordrende rent matematisk for elevene. Det er mye å ta hensyn til når de skal løse oppgavene. Oppgave 2, 4, 5, 6, 7 og 8 er spesielle i den forstand at det ikke er noen direkte oppgave elevene skal finne ut av, men de skal forklare, svare på hvorfor og forutsi. Alt dette er satt i en kontekst som gjør det mulig for elevene å få til oppgavene, selv om de ikke har mye erfaring med algebra. Spillet kan løses aritmetisk ved prøving og feiling. En kan f.eks. droppe å forutsi i oppgave 5-8, og heller se på det som en oppgave som skal svares på. Da blir det ikke oppgaver der ”*..elevene tenke gjennom de matematiske relasjonene i oppgaven før de kan regne ut noe.”* som Rivera skriver at en oppgave innenfor dette feltet bør være. For at oppgavene skal bli utfordringer innenfor tidlig algebra må en som lærer være bevisst hva en gjør og hvilke ord en bruker.

Når det gjelder å jobbe med algebraisk tenkning med elever er det spesielt mønsteraktiviteter som fremheves i litteraturen. Det er sett på som den beste innfallsporten til algebra, og er et område det har vært forsket mye på. Spillet jeg har brukt handler også om mønstre, men ikke i den forstand at elevene skal finne en struktur i en sekvens, eller finne en formel for å uttrykke et hvilket som helst ledd. I spillet er fokus på å finne og forstå mønsteret, og bruke det til å svare på oppgaver. Spillet hjelper elevene med å utvikle algebraiske tenkning på den måten at det utfordrer til utforskning, det utfordrer til utprøving og det utfordrer til å se sammenheng og finne et mønster for hvordan perlene vokser. Alt dette viser resultatene mine at elevene kan beherske.

6 Avslutning

Denne oppgaven er skrevet som avslutning på en mastergrad i matematikkdidaktikk. I denne delen vil jeg først og fremst løfte det didaktiske frem i lyset, og si noe om de pedagogiske implikasjonene jeg mener oppgaven har. Jeg vil også si noe om begrensingene og svakhetene ved forskningen min, og komme med noen føringer for videre forskning og undervisning på feltet. Til slutt vil jeg si noen om hva jeg har lært, og hva jeg sitter igjen med etter arbeidet med denne oppgaven.

6.1 Pedagogiske implikasjoner

Oppgaven er skrevet for å øke forståelsen for tidlig algebra, og for å gi et innblikk i hvordan elever på 6. trinn resonnerer når de jobber med et dataspill om tidlig algebra. Utfra det jeg har gjort, lest og erfart gjennom dette arbeidet mener jeg det er verdt å nevne noe om hvilke pedagogiske implikasjoner oppgaven har. Tidlig algebra er et forholdsvis nytt felt innenfor matematikkfeltet. Det har skilt seg ut fra algebra, bort fra pre-algebra og er nå ifølge Carraher og Schliemann (2007) en tilnærming for undervisning og læring i matematikk der algebra og algebraisk tenkning introduseres hånd i hånd med aritmetikk. Mye av opplæringen innenfor tidlig algebra har rettet seg mot mønsteroppgaver og mønsteraktiviteter, f.eks. tallmønster, figurtall og andre fyrstikkmønster elevene har jobbet med å beskrive og finne en formel for. Dette spillet tilbyr en litt annen tilnærming til tidlig algebra, som jeg mener kan og bør benyttes i matematikkopplæringen av flere årsaker. Dette vil jeg begrunne punktvis under.

6.1.1 Motivasjon og passende oppgaver

Skal elevene lære må de være motiverte. Motivasjon kan komme av flere ting, men den aller beste motivasjonen får elevene etter min erfaring når de synes det de holder på med er gøy, passe vanskelig, de får finne ut av noe og får rask tilbakemelding på det de gjør. Alt dette har jeg erfart at spillet gir. Oppgavene er motiverende, de har et innbydende utseende og en passe vanskelighetsgrad som gjør at det kan spilles av alle. Det er positivt at oppgavene kan løses både ved hjelp av prøv-og-feil-metode og ved hjelp av algebraiske strategier. Det gjør at spillet kan spilles av elever på alle nivåer. Det er her avgjørende at læreren hele tiden er bevisst på om det er algebra eller aritmetikk en holder på med, og prøver å hjelpe elevenes algebraiske tenkning. Her vil de 5 punktene til Kieran (2004) om å komme fra aritmetisk til algebraisk tenkning være sentrale, og da kanskje spesielt det første punktet om å holde fokus på relasjoner og ikke bare på svaret.

Elevene får i spillet hele tiden en tilbakemelding om det de gjør er riktig, og kan selv kontrollere svarene i de aller fleste oppgavene ved å se om rett perle kommer på riktig plass i mønsteret. Det er motiverende å vite at det de gjør er riktig, Spillet er utforskende, med muligheter for å prøve seg frem, justere det en tenker og sammen finne svar på oppgavene. Det er 10 oppgaver, noe som gjør spillet passe langt og det er ikke lagt opp til at man må beherske noen typer oppgaver for å klare de neste.

6.1.2 Faglig innhold

Spillet er ifølge Freudenthal Institute om mønstre, der elevene skal finne det riktige mønsteret gjennom å bruke datamaskinen på en utforskende måte. Utforsking av mønster er viktig for senere oppgaver hvor elevene skal jobbe med mønstre beskrevet i et mer formelt matematisk språk og mønsteret hjelper barna til å involvere seg i et matematisk problem, repetert mønstre, linken til gangetabellen osv. (http://www.fisme.science.uu.nl/en/primas/).

Etter å ha jobbet med spillet, analysert det, brukt det både under pilotstudie og datainnsamling synes jeg at det har et stort faglig innhold:

- Det er algebraisk i den forstand at det handler om å gjenkjenne, beskrive og finne et mønster, forutsi hva som skjer og grunngi og forklare hvorfor det er slik.
- Det handler om å se og finne en sammenheng. Sammenheng mellom perler og plasseringen på snoren, der en oppdaget sammenheng brukes for å løse oppgaven. Dette er i aller høyeste grad generalisering og å legge til rette for generaliseringsaktiviteter. Mason (1996) mener generalisering er kjernen i all matematikkundervisning, og at den time som ikke er preget av generaliseringsaktiviteter ikke er en ordentlig matematikktime. Å spille spillet i en time vil i følge Mason være en ordentlig matematikktime.
- Det er aritmetisk trening i den forstand at elevene får øvd på å bevege seg på tallinje, gjennom å hoppe langs snoren. De får bruke multiplikasjonstabellen i en annen kontekst, og en vil kunne vise elevene nytten av å kunne den.
- Det er lagt opp til samarbeid i spillet. Elevene får da trening på å resonnere sammen, begrunne og forklare det de gjør til hverandre.

Når dette er sagt synes jeg det er viktig å få frem at spillet er algebraisk og kan brukes i algebraisk sammenheng hvis det brukes på en algebraisk måte, og at en som lærer har fokus på å fremheve det algebraiske. Alle oppgavene kan løses ved til dels tilfeldig prøving og feiling, og som Howe (2005) sier, det er ingenting algebraisk ved det.

I spillet, og generelt i matematikkundervisning bør følgende være fokus: Læreren må hele tiden fremheve det algebraiske og aritmetiske i oppgaver hånd i hånd og stille spørsmål underveis som hjelper elevene med å utvikle sin algebraiske tenkning. Fokus må ikke være på selve svaret, men på å finne strukturen og sammenhengen som ligger bak. Da vil innholdet i begrepet generalisering være kjent for elevene på et mye tidligere tidspunkt enn det som ha vært vanlig til nå.

6.2 Svakheter og begrensinger med oppgaven

Sett i etterkant er det mye jeg ville gjort annerledes. Det er ikke vanskelig å finne verken svakheter eller forhold som begrenser oppgaven min. Videre vil jeg kommentere noen punkter jeg mener er en svakhet i oppgaven og med på å begrense den.

6.2.1 Datainnsamlingen

Jeg gjennomførte ikke et tilfeldig utvalg i og med at jeg selv kjente til og spurte læreren til elevene jeg forsket på om det var greit at jeg kom til henne. Jeg visste hun drev en litt annerledes matematikkundervisning, med fokus på samarbeid, at elevene skulle tenke og at målet hennes ikke var å gjøre mest mulig eller bli ferdig med læreboka. Jeg hadde også hørt positivt om henne fra andre som kjenner henne. Det er dermed ikke sikkert at jeg ville fått samme gode gjennomføring av datainnsamlingen og tilbakemeldinger som jeg fikk fra disse elevene hvis jeg hadde valgt en annen klasse. Det kan tenkes at elevene gjennomførte på en så god måte, og var så motiverte som de var fordi de var vant med å jobbe på en litt annen måte i matematikktimene. Samtidig visste jeg ingenting om elevene i klassen og hadde ingen forventninger til det faglige nivået. Skolen har scoret omtrent gjennomsnittlig på nasjonale prøver siste årene, og danner sånn sett et utgangspunkt for hvilken som helst klasse i Norge. Det kan også stilles spørsmålstegn ved antall elever i datainnsamlingen. 15 elever er ikke mange elever i en klasse, og det kan godt tenkes jeg hadde fått et annet, og mer nyansert resultat dersom jeg hadde gjennomført forskningen i en annen klasse.

Noen av oppgavene ber elevene om å svare skriftlig på skjermen. Dette la jeg opp til at elevene skulle gjøre og de fikk felles info om at de skulle prøve å skrive noe sammen i gruppene på disse oppgavene. Tanken bak det var at jeg kunne skrive dette ut, eller få skriftlig på skjermen det de skrev og bruke det senere i arbeidet mitt. Denne skrivinga tok litt tid, og for noen ble det litt fokus på skriving og staving underveis istedenfor matematikken, og de fleste gruppene fikk etterhvert muntlig beskjed om å skrive minst mulig og heller ha fokus på å snakke sammen. Det kunne nok med fordel vært mindre fokus på at de skulle skrive, og hele skrivinga kunne kanskje vært droppet siden det ble tatt både skjerm- og lydopptak av det de gjorde.

6.2.2 Forutinntatt lærer og forsker

Målet med oppgaven var å se på hvordan elevene resonnerte. Det er derfor viktig at en som lærer og forsker lar elevene få muligheten både til å resonnere og til å vise hvordan de resonnerer. Jeg er lærer, og når jeg samtidig skal være forsker blir dette en utfordring. I praksis var vi 7-8 elever og to voksne i klasserommet. I etterkant ser jeg at det kan kritiseres og stilles spørsmål ved om det ble for mye innblanding fra oss voksne, og lagt for mye føringer for elevenes resonnering. Dette er en utfordring i forhold til at en som lærer ønsker at elevene skal lykkes, og få til oppgavene de jobber med. En ønsker å holde motivasjon og engasjement til elevene oppe gjennom å hjelpe og støtte dem på den måten en kan og synes fungerer for sine elever. Jeg mener at læreren og jeg holdt oss innenfor det som kan sees på som akseptabel hjelp, og det var bare noen få tilfeller hvor jeg hørte på opptakene at det ble lagt for mye føringer elevens tenkning. Det er likevel et kritikkverdig punkt i en oppgave som dreier seg om hvordan elevene resonnerer og generaliserer.

6.2.3 Føring i intervju

Intervjuet ble gjennomført annerledes enn jeg hadde tenkt på forhånd. Jeg hadde en plan om å høre gjennom det alle gruppene gjorde, finne noen interessante spørsmål ut fra det og spørre ut elevene om det de gjorde, de valgene de tok og hvordan de resonnerte. I praksis gjennomførte jeg det ved å la elevene spille noen oppgaver om igjen, mens jeg observerte, samtalte og spurte elevene underveis om det de gjorde. Denne avgjørelsen tok jeg veldig fort underveis i det første intervjuet, fordi jeg syntes ikke jeg fikk noe igjen for den måten jeg hadde planlagt å gjøre det på. Det kan tenkes at jeg hadde fått mer igjen for å spørre elevene ut om de resonnementene de gjorde mens de spilte alene, men syntes likevel det var en riktig avgjørelse. Det kan være vanskelig å få tak i elevenes resonnementer gjennom lyd- og skjemopptak, og det var min begrunnelse for endringen jeg gjorde.

6.2.4 Forskningsmessige endringer

Skulle jeg gjort denne forskningen om igjen er det spesielt fire ting jeg ville gjort annerledes:

- Jeg ville tenkt nøyere gjennom på forhånd hva jeg ville med forskningen, hva jeg forventet å få ut og hva slags data jeg var ute etter. Dette hadde vært med på å begrense omfanget data underveis og etter. Jeg opplevde at jeg hele tiden underveis snevret inn det jeg holdt på med, og mener at noe av dette kunne vært unngått dersom jeg hadde tenkt enda bedre igjennom dette på forhånd og hatt klarere fokus på elevenes strategier og generalisering fra begynnelsen.
- Jeg ville bedt elevene om å ikke skrive noe på skjermen underveis, men heller svare muntlig på spørsmålene. Fokus skal være på tenkning, ikke på skriving og formulering.
- Jeg ville vært enda tydeligere på rollen til de voksne underveis i datainnsamlingen, og latt elevene få jobbe og resonnere friere. Eneste hjelpen de hadde fått var det Dekker & Elshout-Moor (2004) kaller prosesshjelp, når en hjelper elevene med den prosessen de er i, og ikke med svaret eller lede resonneringen på noen som helst måte.
- Jeg ville i enda større grad vært forberedt og lyttet nøye gjennom det elevene sa og gjorde mens de jobbet alene, og gjennomført noen av intervjuene etter den malen jeg opprinnelig hadde tenkt. Jeg har flere steder i etterkant savnet å vite enda mer om hvorfor elevene gjorde som de gjorde. Det klarte jeg kanskje ikke å få gode nok svar på slik jeg gjorde det.

6.3 Svakheter med spillet

Spillet jeg valgte å bruke i datainnsamlingen har flere svakheter som er verdt å nevne i denne sammenhengen. Først og fremst gjelder det en svakhet i oppgave 3 som gjør at elevene kan løse oppgaven gjennom feil resonnering. Noen grupper løste oppgaven gjennom å finne faktorer til målposisjonen og identifisere det som plasser i startmønsteret. Rød på nr. 15 på plass nr. 3 fordi 3 • 5 = 15, gul på nr. 28 på plass nr. 4 fordi 4 • 7 = 28 osv. Dette systemet stemmer på alle perlene utenom den rosa på nr. 131. Den skal være på plass nummer 5 i mønsteret, men 5 er ikke faktor i 131. Siden den er den siste perlen å plassere trenger en ikke bry så mye om det, bare plassere den på den siste plassen. Jeg mener at denne oppgaven burde vært endret litt på slik at elevene skjønte tidligere at denne strategien ikke fungerer. F.eks. kunne den grønne perlen hatt målposisjonen i posisjon 34 istedenfor 28.

Det er også en svakhet i oppgave 5-8, der elevene kan løse oppgaven uten å forutsi, rett og slett ved å fylle ut strengen og telle opp. Elever med sterkt fokus på å finne svaret kan fort finne på å gjøre det på denne måten. Andre typer oppgaver, der elevene må skrive inn svar i

ruter som må godkjennes før de kan gå videre, eller en annen spørsmålsformulering kunne gjort at elevene måtte løst det på en annen måte. Samtidig, dersom en er bevisst dette som lærer, snakker om hva det betyr å forutsi og fremhever det for elevene er det veldig gode oppgaver.
Siden spillet her skal brukes i forbindelse med tidlig algebra, kan det også kritiseres at det er mulig å svare på alle oppgavene gjennom prøving og feiling. Prøv-og-feil-metode er en ikke algebraisk metode, og tankegangen bak er ikke algebraisk tenkning. Det kan godt være det finnes spill som i større grad fremhever dette, og blokkerer muligheten for aritmetisk tenkning. Et alternativ kunne være å lagt inn en begrensing for hvor mange ganger elevene kunne prøve på hver oppgave.

Jeg ville også vurdert å gjøre dette spillet adaptivt, i den forstand at det er en større database med oppgaver inkludert. På den måten kunne elevene som svarte feil på en oppgave i neste omgang fått en tilsvarende oppgave, bare på et litt lavere nivå. Svarer de riktig på den, kan de få prøve seg på oppgaven de svarte feil på igjen. Dette kan tilrettelegges også for flinke elever, gjennom å gi de tilsvarende oppgaver, bare på et høyere nivå.

6.4 Videre forskning

Dersom jeg skal peke på noen punkter i forhold til videre forskning på dette området på bakgrunn av min masteroppgave må det være å forske enda mer på det komplekse rundt temaet tidlig algebra og hva en kan gjøre i klasserommet med elevene. Når jeg leste og søkte etter litteratur fant jeg at litteraturen handlet ofte om hvorfor det er lurt med tidlig algebra og ikke så mye om hva som var lurt å gjøre. Når det var noe som handlet om hva, var det ofte i forbindelse med mønsteraktiviteter på papir der elevene jobbet med figurtall, tallmønster osv. Her synes jeg det kunne vært interessant med mer forskning, spesielt i forbindelse med å bruke spill, der strategiene og metodene elevene bruker blir veldig mange og komplekse. Det trengs kanskje en litt fornyet definisjon på hva som er algebraisk tenkning og hva forskjellen mellom algebra og aritmetikk er, i og med det stadig er mer digitale hjelpemidler elevene jobber med. Dette vil kanskje føre til nye og utradisjonelle former for algebraisk tenkning. Her må det forskning til.

6.5 Videre undervisning

Når det gjelder hvilke føringer denne oppgaven skal ha for videre undervisning er det spesielt to forhold jeg vil trekke frem. Det ene er at det er viktig å ha en vid forståelse av hva som er algebraisk tenkning, og ikke låse seg fast i det litteraturen og tradisjonen sier. Elevene er i stand til å tenke algebraisk og generalisere, vi må bare finne ut hvordan de egentlig tenker. F.eks. bør man allerede mens barna er små venne de til generalisering gjennom å stadig generalisere over de oppgavene de jobber med. En vanlig matteoppgave er: ”5 is koster 20 kr. Hvor mye koster 10 is?” Elevene må bli vant med å bruke mer tid på en slik oppgave, der en snur og vender på informasjonen og premissene i oppgavene. *”Hva om det er 15 is? Hva om 5 is koster 30 kr? Hva om det ikke var is, men brus?”* Slike spørsmål er med på å gjøre elevene oppmerksomme på strukturen i oppgaven, og flytte fokus bort fra svaret.

Det andre er at dataspill, slik som perler på en snor, kan og bør brukes på barneskolen i forbindelse med tidlig algebra. Det er motiverende, tilbyr en ny og god innfallsvinkel til algebra og algebraisk tenkning og gir oss som lærere enda et nytt verktøy å bruke ovenfor elever. Spillet er med på å gjøre elevene oppmerksomme på at det finnes sammenhenger og relasjoner som må kommuniseres matematisk, og som lærer bør en legge til rette for at elevene får jobbet med sin algebraiske tankegang. Det er mye i teorien min som viser hvorfor dette er viktig. Men, som Radford (2006) sier, det skjer ikke av seg selv. Det er ikke selvsagt for en elev å oppdage det underliggende i et felles mønster. Det må øves og trenes på, og her er læreren viktig.

6.6 Hva jeg har lært

Når jeg skulle velge tema for masteroppgaven var jeg opptatt av å velge noe jeg kunne ha nytte av i mitt eget arbeid i barneskolen. Jeg ville ikke velge en oppgave bare for å ha noe å skrive om, men jobbe med noe jeg synes var interessant og nyttig for meg, og som jeg kunne ha bruk for i jobben min etterpå. Tidlig algebra er både aktuelt og nyttig i den sammenheng.

Jeg synes jeg har lært mye gjennom arbeidet med oppgaven. Først og fremst har jeg lært mye om viktigheten og betydningen av at elevene jobber algebraisk helt i fra de er små. De er i stand til å se sammenhenger, mønster og generalisere lenge før de kommer på ungdomsskolen. Det har vært en oppdagelse for meg at tidlig algebra er så omfattende og at det kan introduseres til elevene helt fra 1. klasse. Viktigheten av at algebra og aritmetikk går hånd i hånd fra elevene er små kommer jeg til å formidle videre, både til kollegaer, elever og foreldre. Vi må ikke låse oss fast i det aritmetiske og bruke mye tid på å øve og lære strategier. Vi må løfte blikket og jobbe med strukturen i oppgaver og bruke mye tid på å la elevene samtale, diskutere og forklare det de gjør. Dette kommer til å bli viktige prinsipper i min undervisning fremover.

Jeg har også lest mye interessant forskning om elever og algebra, om hva som er viktig og om hva en bør legge vekt på i undervisningen. Jeg har alltid vært opptatt av det praktiske i klasserommet, og ment at teori er kunnskap som ikke kan overføres direkte til klasserommet. Her er den enkelte lærer avgjørende. Dette synet har jeg nok nyansert litt etter å ha lest mye forskning, men mener fortsatt at det aller viktigste for meg som matematikklærer er måten jeg opptrer på ovenfor elevene. Jeg må vise entusiasme for faget og motivere elevene. Jeg må vite hvordan elevene lærer, hva som fungerer for dem og hvilke knapper jeg skal trykke på. Jeg må formidle klart hva jeg mener er det viktigste de skal lære, vite hva de må kunne, og veilede elevene videre i sin matematiske og algebraiske tenkning gjennom å ha fokus på det. Dette er kompetanse en ikke lærer gjennom å lese teori, men gjennom å være med elevene i klasserommet og reflektere over det en gjør både alene og sammen med kollegaer.

7 Litteraturliste

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). Melbourne: PME.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 465-472). Prague,, Czech Republic: Charles University.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren Tema: Algebra för alla*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra, K-12 (1988 Yearbook)* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brekke, G. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J*. Oslo: Læringssenteret

Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford university press.

Brøyn, T. (2013). Nye læreplaner i matematikk. *Bedre skole (Utdanningsforbundet),*2013(1), 24-25.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer Science & Business Media.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., Schliemann, A. & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.). *Algebra in the Early Grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ, Erlbaum.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). L. (1994). Teacher interventions aimed at mathematical level-raising. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(1), 39-65.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Howe, R. (2005). Comments on NAEP algebra problems. *Retrieved 15.05.16 from* http://www.brookings.edu/~/media/Events/2005/9/14%20algebraic%20reasoning/Howe_Presentation.PDF.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, *4* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(1), 39-65.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, M. (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (pp. 45-70). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer Netherlands.

Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra*. London, UK: Sage.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in Algebra.* London: The Open University in association with Paul Chapman Publ.

Merriam, S. B. (2002). *Qualitative research in practice: Examples for discussion and analysis*. Jossey-Bass Inc Pub.

Naalsund, M. (2012). *Why is Algebra So Difficult?: A Study of Norwegian Lower Secondary Students' Algebraic Proficiency*. Oslo: Faculty of Educational Sciences, University of Oslo.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA – Pensamiento Númerico Avanzado*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.

Radford, L., & Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21). PME- NA.

Rivera, F. D. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics*, *12*(6), 306-311.

Schliemann, A. D., W.Carraher, D., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic, From Children´s Ideas to Classroom Practice*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149-167.

Tall, D. (2011). Looking for the bigger picture. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 17-18.

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1 – Godkjennelse fra NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Francisca Pauline Vos
Institutt for matematiske fag Universitetet i Agder
Serviceboks 422
4604 KRISTIANSAND S

Vår dato: 14.01.2016 Vår ref: 46084 / 3 / AGL Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 11.12.2015. Meldingen gjelder prosjektet:

46084	*En studie om tidlig algebra om elever på 6. trinn*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Agder, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Francisca Pauline Vos*
Student	*Ronny Stenberg*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 17.06.2016, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / *District Offices*:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

8.2 Vedlegg 2 – Skriv til foreldre/foresatte

TIL ELEVER/FORESATTE VED ___________ SKOLE, 6. TRINN

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved UiA og skal gjennomføre ett opplegg på 6. trinn der jeg skal samle inn data som skal analyseres i forbindelse med en masteroppgaven min. For å kunne analysere mine data ordentlig ber jeg om tillatelse til å gjennomføre lydopptak. Disse lydopptakene vil i hovedsak være i form av samtaler elevene har seg i mellom når de løser oppgaver og intervjuer som jeg gjennomfører med noen av elevene. Behandlingen og bruken av innsamlede data vil bli fullstendig anonymisert og umulig å knytte til enkeltindivider, og lydopptakene vil bli slettet i løpet av våren 2016 straks jeg har fullført min oppgave.
På forhånd hjertelig takk!

Vennlig hilsen Ronny Stenberg

SVARSLIPP
Jeg godkjenner at det tas lyd/videoopptak i forbindelse med retningslinjene som er beskrevet over.

-------------------   -----------------
Navn (elev)   Signatur (foresatt)

8.3 Vedlegg 3 – Transkripsjonsnøkkel

..	Liten pause før utsagnet fortsetter.
.	Avsluttende utsagn.
?	Spørrende utsagn.
[ ]	Overlappende utsagn.
(kommentar)	Mine kommentarer til det som skjer