UNIVERSITETET I AGDER

Problemløsning i matematikk

Hvordan resonnerer elever på 9.trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon?

An-Magritt Leistad

Veileder
Hans Kristian Nilsen

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2016
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Jeg startet på lærerutdanningen høsten 2011 på UiA i Kristiansand. I de fem påfølgende årene har jeg studert pedagogikk, kroppsøving og matematikk. Høsten 2014 startet jeg på masterløpet i matematikkdidaktikk. Denne masteroppgaven er en avslutning av masterstudiet mitt i matematikk. Jeg startet på oppgaven i januar 2016. De siste månedene har vært spennende og lærerike. I tillegg til å ha jobbet med denne masteroppgaven, har jeg vært så heldig og få et deltidsvikariat som lærer på en ungdomsskole. Det har til tider vært svært hektisk, men samtidig har det gitt meg veldig mye. Jeg har fått utfolde meg som lærer, og prøvd ut ulike undervisningsmetoder, blant annet problemløsning.

Jeg har alltid hatt en interesse for matematikk. Mye av grunnen til dette er nok at jeg har hatt lett for å gjøre logiske resonnementer. Jeg tror at forståelse er viktig i matematikk. Da handler det ikke om å arbeide med flest mulig oppgaver med den samme oppskriften, men å få en forståelse for matematikken bak. Et av flere grep i et forsøk på å oppnå dette kan være bruk av *problemløsning* i matematikkundervisningen. Det kan øke elevenes forståelse av matematikk fordi de må tenke selv, de må tenke logisk og resonnere seg frem til ulike strategier for å løse oppgavene. «Matematikken er aktiviteten, den er ikke svaret eller symbolene – men selve aktiviteten» (Gjone & Brekke, 2001). Jeg har selv erfart at elever er mest opptatt av om svaret deres er riktig eller feil, når de heller burde konsentrere seg om måten de kommer frem til svaret. Dette har trolig en sammenheng med hvordan matematikk undervises i skolen. I henhold til Brekke (1995) preges norsk matematikkundervisning av repeterende oppgaver for å styrke elevenes forståelse. Flere forskningsresultater viser imidlertid at det er «(...) bedre å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter, enn å gjennomføre en lang rekke øvelser» (Brekke, 1995).

Jeg ønsker å takke læreren min, Martin Carlsen, som introduserte meg for problemløsning i faget Arbeidsmåter i matematikk. Semesteret før jeg skulle skrive masteroppgaven, hadde jeg dette faget. Det skapte nysgjerrighet hos meg, og jeg fikk lyst til å arbeide mer med dette. Slik ble denne masteroppgaven til.

Videre vil jeg takke elevene som stilte til gruppearbeid og intervjuer. I tillegg vil jeg takke familie og venner for støtte og hjelp under denne hektiske perioden. Tusen takk for deres tålmodighet og oppmuntring. Uten dere hadde jeg ikke klart dette.

Sist, men ikke minst, ønsker jeg å takke veilederen min, Hans Kristian Nilsen. Jeg setter pris på at du har gitt meg rom til selv å finne retninger og gjøre egne valg, samtidig som du har kommet med konstruktive og konkrete tilbakemeldinger. Du har gitt meg inspirasjon og ideer til videre arbeid, vært tålmodig med meg, og rettledet meg når jeg har trengt det. Tusen takk!

Kristiansand, 18. mai 2016

An-Magritt Leistad

Sammendrag

Dette er en kvalitativ case-studie som belyser elevers resonnementer ved problemløsning. Den overordnede problemstillingen: *Hvordan resonnerer elever på 9 trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon*. Formålet med denne studien er å undersøke hvordan elever på 9.trinn resonnerer under arbeid med problemløsningsoppgaver. Mer kunnskap om elevers resonnement ved problemløsning, kan bidra til hensiktsmessig bruk av dette i undervisning. Jeg definerte to underspørsmål som belyses store deler av studien og som forsøkes å bli besvart i diskusjonen. De to underspørsmålene er:

1. Hvordan resonnerer elever og hvilke læringsstrategier benytter de?
2. Hvordan foregår problemløsning i smågrupper? er vesentlige i studien.

Teorien som vil bli lagt frem i denne studien er sosiokulturell læringsteori som er det læringssynet denne studien er utført i. Videre vil det bli presentert teori om resonnement og strategier, problemløsning og ulike modeller over problemløsningsprosessen, utvalg av relevant forskning og teori om multiplikasjon og posisjonssystemet.

Studiens empiriske materiale bygger på observasjon av to smågrupper som arbeider med problemløsningsoppgaver, hvor hensikten var å studere elevenes resonnementer. Videre ble det gjort individuelle semi-strukturerte intervjuer for å supplere observasjonen. Dette for å få innblikk i den enkelte elevs isolerte resonnement rundt problemløsningsoppgavene. I smågruppene ble elevene delt inn i en høytpresterende elevgruppe og en lavtpresterende elevgruppe.

Resultatene fra studien viser at elevene benytter tre ulike problemløsningsstrategier, disse er (1) *prøve og feile metoden,* (2) *logisk resonnement* og (3) *monitorerende strategi og monitorerende spørsmål*. Studien viser at det er vesentlige forskjeller på disse to elevgruppene.

Den høytpresterende gruppen viste gode resonnementer rundt problemene, og de klarte til dels å arbeide med problemene slik problemløsningsprosessen fremlegges av blant annet Polya (1957) og Mason og Davis (1991). De viste at de håndterte å bruke alle de tre problemløsningsstrategiene, noen av strategien mer hensiktsmessig enn andre. Imidlertid viste de høytpresterende elevene liten grad av monitorerende strategi. De var preget av rutinearbeid, hvor det var om å gjøre og komme raskest mulig frem til løsningen.

Den lavtpresterende gruppen derimot strevde med å komme i gang med problemløsningsoppgavene, samtidig som de gjorde få logiske slutninger underveis. De viste tydelig at de var preget av rutinearbeid, ved at de var lite kritiske til løsningene sine, og stilte ingen monitorerende spørsmål rundt problemene. De lavtpresterende elevene viste altså begrenset bruk av ulike problemløsningsstrategier.

Abstract

This is a qualitative case study, which highlights students' reasoning in problem solving. The research question is: *How do students in 9th grade reason while working with problem solving tasks in multiplication.* The purpose of this study is to investigate how students in 9th grade reason while working with problem solving tasks. More knowledge about students' reasoning in problem solving, can contribute to appropriate use of this in teaching. I defined two sub-questions that is attempted to be answered in the discussion. The two sub-questions are:

1. How do students´ reason and which strategies do they use?
2. How do problem solving work in small groups?

The theories that will be presented in this study are sociocultural learning theory, that is the performed learning theory in this study. Furthermore, it will be presented theory of reasoning and strategies, problem solving and various models of problem-solving processes, selection of relevant research and theory of multiplication and the position system.

The empirical material is based on observation of two small groups who work with problem solving tasks, where the purpose was to study students' reasoning. Furthermore, it was completed individual semi-structured interviews to supplement the observation. This to gain insight into the individual student isolated reasoning around problem-solving tasks. The small groups were divided into a high-performing student group and a low-performing student group.

The results from the study showed that the students used three different problem-solving strategies; (1) trial and error strategy, (2) logical reasoning and (3) monitoring strategy and monitoring questions. The study shows that there are differences between these two student groups.

The high-performing group showed good reasoning with the problems, and they managed to some extent to work with these problems like the problem-solving processes are submitted partly by Polya (1957) and Mason and Davis (1991). They showed that they handled using all three problem-solving strategies, some of the strategy more appropriate than others. However, the high-performing students showed a small hint of monitoring strategy. They were dominated by routine work, and concerned about getting the mathematical solution as fast as possible.

The low-performing group on the other hand struggled to understand the problem solving tasks, and they did few logical conclusions. They clearly showed that they were dominated by routine work, when they were little critical of their solutions, and posed no monitoring questions around the problems. The low-performing students showed limited use of various problem-solving strategies.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

Dette kapittelet presenterer bakgrunn for studiens tema, og aktuell problemstilling. Kapittelet gir et overordnet innsyn i studiens hensikt og formål, dets relevans, samt den faglige og teoretiske tilnærmingen.

1.1 Bakgrunn for studien

Norge har gode forutsetninger for å skape verdens beste skole. Vi har skoler som er tilgjengelige for alle i hele landet. Vi har en høyt utdannet befolkning og relativt små sosiale forskjeller. Det er svært få land som bruker så store økonomiske ressurser på skole som Norge (Meld. St. nr. 30, 2003-2004). Det er bred politisk oppslutning om skolens mål – å gi barn og unge muligheter for allmenndannelse, personlig utvikling, kunnskap og ferdigheter. På den annen side viser norsk og internasjonal forskning at vår skole har svakheter. Forskning dokumenterer ferdighetssvikt i sentrale fag. Resultatene for de norske elevenes lese-, matematikk- og naturfagkompetanse ligger rundt det internasjonale gjennomsnittet. Finland kommer svært godt ut i denne undersøkelsen, også Sverige ligger klart bedre an enn Norge. Norske elevers ferdigheter og kunnskaper i matematikk og naturfag ble kartlagt for barnetrinnet, ungdomstrinnet og videregående opplæring i TIMSS undersøkelsen i 1995. Der oppnådde norske elever svake resultater i matematikk, mens de viste gode allmennkunnskaper i naturfag (Meld. St. nr. 30, 2003-2004). Elevenes svake prestasjoner i matematikk er interessante å se i sammenheng med at Norge har svært gode forutsetninger for å skape en kvalitetsskole. Det kan få en til å sette spørsmålstegn ved matematikkundervisningen i norsk skole.

Problemløsning i matematikkundervisningen er en undervisningsform som bryter med den tradisjonelle klasseromsundervisningen, og det krever at både lærer og elever omstiller seg. Undervisningsformen innebærer at elevene må jobbe med oppgaver som er langt mer utfordrende enn det man finner i lærebøkene, noe som krever omstilling, økt innsats og engasjement både fra læreren og elevene. Den matematiske samtalen skjer i fellesskap, og gjennom den matematiske samtalen kombinert med bruken av medierende verktøy legges det til rette for refleksjon og læring i gruppe. Elevene vil dermed ha flere å støtte seg til, når de arbeider med problemløsningsoppgaver i smågrupper.

Pisaundersøkelsen fra 2003 avslørte at norske elever har dårlige kunnskaper om læringsstrategier, mens elever fra blant annet Finland og Singapore viser god kompetanse i dette. De har gode læringsstrategier kombinert med problemløsing imatematikkundervisningen (Røsseland, 2008). *"Læringsstrategier er framgangsmåter elevene bruker for å organisere sin egen læring. Dette er strategier for å planlegge, gjennomføre og vurdere eget arbeid for å nå nasjonalt fastsatte kompetansemål. Det innebærer også refleksjon over nyervervet kunnskap og anvendelse av den i nye situasjoner"* (LK06, 2011).

Videre sier Røsseland (2008) at gode læringsstrategier gir økte muligheter for tilpasset opplæring, både fordi elevene får bedre innsikt i egen læring, men også fordi de får flere verktøy til å løse matematikkoppgaver med. I Meld. St. 30 (2003-2004) defineres læringsstrategier som evnen til å organisere og regulere egen læring, anvende tid effektivt og løse problemer, planlegge, gjennomføre, evaluere, reflektere og erverve ny kunnskap og viten (Meld. St. nr. 30, 2003-2004). Ferdighetstrening, refleksjon og kontroll av egen læring kan med en fellesbetegnelse kalles læringsstrategier (Grønmo & Throndsen, 2006; Røsseland, 2008).

Forståelsen av elevers læringsstrategier er interessant for lærere. I denne studien vil resonnement og strategier sees på som to synonymer for elevenes tanker når de løser matematikkoppgaver. Det å studere elevenes resonnement ved problemløsning kan være til hjelp for læreren, for å få en større innsikt i hva elevene strever med. Det vil gjøre det lettere for å tilpasse opplæringen til elevene ut i fra den enkeltes forutsetninger.

1.2 Problemstilling

Basert på bakgrunn for studie har jeg kommet frem til følgende problemstilling:

Hvordan resonnerer elever på 9.trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon?

Fokuset mitt i denne studien er hvordan elevene resonnerer ved problemløsning, og ikke spesifikt på temaet multiplikasjon. Problemløsningsoppgavene jeg benyttet ved datainnsamlingen omhandlet derimot multiplikasjon. Derfor er det aktuelt, men multiplikasjon er ikke i hovedfokus i studien. Jeg valgte å dele informantene inn i to smågrupper. I følge Bjuland (2002) kan det være hensiktsmessig å skille elevene fra lavt til middels faglig nivå, eller fra middels til høyt faglig nivå. Bjulands (2002) argumenter støttet mine egne tanker om inndeling, så jeg valgte å dele elevene i én gruppe med høytpresterende elever og én gruppe med lavtpresterende elever. For å svare på den overordnede problemstillingen har jeg definert følgende to underspørsmål som videre skal utdypes og besvares i diskusjonskapittelet:

1. Hvordan resonnerer elever og hvilke læringsstrategier benytter de?
2. Hvordan foregår problemløsning i smågrupper?

I kapittel 2 vil det bli presentert teori relatert til underspørsmål 1 og 2. Videre vil et forsøk på å besvare underspørsmålene bli presentert i diskusjonskapittelet. Diskusjonskapittelet vil videre koble analysen opp mot teorien. Jeg vil avslutte med et endelig svar på den overordnede problemstillingen for studien, i konklusjonsdelen.

1.3 Innsnevring og avgrensning

I denne studien er det flere innsnevringer og avgrensninger jeg har tatt hensyn til. Den viktigste innsnevringen jeg har gjort er i forhold til problemstillingen min. Jeg har valgt å legge vekt på elevenes ulike typer resonnementer, fremfor generelle kommunikasjonsprosesser. I observasjonen av smågruppene fokuserte jeg på enkeltindividenes bidrag og ytringer inn i elevdiskusjonen, fremfor en generell analyse av samtalene som helhet. Videre har jeg valgt å fokusere på de rent matematikkfaglige aspektene fremfor for eksempel affektive aspekt som holdninger, motivasjon og lignende. I tillegg har jeg måtte gjøre begrensninger i forhold til tidsaspektet. Jeg begrenset omfanget av problemløsningsoppgaver, slik at transkriberingen av datamaterialet ikke ville bli for omfattende. Således begrenset jeg antallet elever, til 10 elever. Disse begrensingene ble gjort på grunn av studiens tidsaspekt og omfang.

1.4 Studiens aktualitet og formål

Fremtidens arbeidsliv vil stille større krav til omstilling og evne til å løse komplekse problemer. Har dagens elever, som fremtidens arbeidsgivere og arbeidstakere, de ferdighetene som vil kreves i arbeidslivet? PISA undersøkelsen som ble utført i 2012 målte 15-åringers evne og vilje til å løse problemer. Studien viste at norske elever ligger litt under snittet i OECD i matematikk og naturfag. I tillegg til å måle 15-åringers ferdigheter i naturfag, matematikk og lesing, inneholdt PISA undersøkelsen fra 2012 også oppgaver som handlet om praktisk problemløsning (NOU 2014: 7, 2014; Utdanningsdirektoratet, 2014). Dette er oppgaver som beskriver en problemstilling uten en opplagt løsning. Problemet krever at elevene forstår situasjonen, kommer opp med løsninger og vurderer løsningene underveis. Undersøkelsen viste at det er en sterk sammenheng mellom prestasjoner i matematikk, lesing og naturfag og prestasjoner i problemløsning. Det betyr at elever som skårer høyt på matematikk, lesing og naturfag i PISA, generelt også er gode til å løse problemer. Dette gjelder både for elever i OECD-landene og for norske elever. I likhet med resultatene for lesing, naturfag og matematikk, skårer de norske elevene også rundt OECD-gjennomsnittet når det gjelder problemløsning. Elevene i Japan og Sør-Korea presterer klart best av OECD-landene i problemløsing. Videre følger Canada, Australia og Finland. Sør-Korea og Japan var blant de best presterende landene også i matematikk, lesing og naturfag i PISA 2012. Det samme gjelder Finland, Canada og Estland (NOU 2014: 7, 2014; Utdanningsdirektoratet, 2014).

Norske elevers prestasjoner i problemløsning gjenspeiler ikke trykket det er på problemløsning i læreplanen i matematikk. Det står tydelig i Kunnskapsløftet at elevene skal ha kjennskap til strategier til problemløsning, de skal utforsk matematiske problemer og de skal kunne løse et spekter av komplekse problemer med et variert utvalg av strategier. I følge læreplanen i matematikk skal den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne* forståes slik:

> Å kunne rekne i matematikk inneber å bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem. Dette inneber å kjenne att og beskrive situasjonar der matematikk inngår, og bruke matematiske metodar til å behandle problemstillingar. Eleven må òg kommunisere og vurdere kor gyldige løysingane er. Utvikling av å rekne i matematikk går frå grunnleggjande talforståing og å kjenne att og løyse problem ut frå enkle situasjonar til å analysere og løyse eit spekter av komplekse problem med eit variert utval av strategiar og metodar. Vidare inneber dette i aukande grad å bruke ulike hjelpemiddel i berekningar, modellering og kommunikasjon (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Formålet med denne studien er å undersøke hvordan elever på 9.trinn resonnerer under arbeid med problemløsningsoppgaver. Innsikt i elevers resonnement ved problemløsning, vil være interessant kunnskap ved tilrettelegging av matematikkundervisningen.

1.5 Empiri

Studien baserer seg på et kvalitativt case studie av to elevgrupper, en elevgruppe med høytpresterende elever og en elevgruppe med lavtpresterende elever, på niende trinn. Det er i hovedsak benyttet tre former for kvalitativ metode; dokumentstudier, observasjon og semi-strukturerte intervjuer. Datainnsamlingen bestod av observasjon av de to elevgruppene som samarbeidet om problemløsningsoppgaver, for videre å intervjue elevene individuelt. Jeg valgte å intervjue elevene i etterkant av gruppearbeidet for å få deres individuelle tanker om hvordan de forstod, resonnerte og løste oppgavene. Dette ble gjennomført relativt tidlig i prosessen for å skape et bredt og overordnet bilde av elevers resonnement ved problemløsning. Noe som igjen bidro til de avgrensningene som er foretatt i studien. Resultatene av funnene er drøftet i lys av teori som i hovedsak omhandler problemløsning i smågrupper, resonnement og strategier.

1.6 Struktur

Studien er bygget opp av tre hoveddeler, og består av seks kapitler. *Den første hoveddelen* av studien min er bygget opp av en innledning, hvor jeg har presentert begrunnelse for tema på oppgaven, problemstilling og underspørsmål, samt hensikten med studien. Videre vil jeg presentere det teoretiske rammeverket i kapittel 2, som skal belyse datamaterialet mitt i forhold til problemstillingen og underspørsmålene. *Den andre hoveddelen* av studien forklarer den metodiske tilnærmingen til studie. Kapittel 3 går i dybden på hvorfor den metodiske tilnærmingen er valgt, og hvordan forskningen har blitt gjennomført. *Den tredje og siste hoveddelen* består av en analyse av funn. Disse er presentert i kapittel 4. Videre i kapittel 5 vil empirien bli diskutert opp imot det teoretiske rammeverket, samt at jeg vil komme med noen egne betraktninger. Kapittelet tar utgangspunkt i de to definerte underspørsmålene. Dette blir sett i lys av aktuell teori, og tar sikte på å besvare den overordnede problemstillingen for studien. Til slutt presenteres en endelig konklusjon i kapittel 6. Her konkluderes det med tanke på problemstillingen. Videre vurderes styrker og svakheter ved forskningen i denne studien, og hvilke didaktiske implikasjoner studien har og hvilke muligheter det gir med tanke på fremtidig forskning.

2.0 Teoretisk rammeverk

Hensikten med dette kapittelet er å redegjøre for teori som kan bidra til å gi en teoretisk forankring for resultatene fra datainnsamlingen. Jeg har valgt å starte med en redegjørelse for læringssynet denne studien har tatt utgangspunkt i, altså det sosiokulturell læringsperspektivet. Videre vil det bli presentert teori om resonnement og strategier. Således vil jeg legge frem teori som forklarer hva problemløsning er, og ulike forskeres modeller over problemløsningsprosessen, samt dens ulike stadier. Deretter vil det bli presentert utvalg av relevant forskning. Avslutningsvis vil det bli en kort presentasjon av multiplikasjon og posisjonssystemet, da dette er relevant med tanke på problemløsningsoppgavene jeg har basert studien på.

2.1 Sosiokulturell læringsteori

Lev Vygotsky regnes som grunnleggeren av sosiokulturell læringsteori. Han systematiserte sitt arbeid i Russland på 1920- og 30-tallet, hvor han spesielt tok for seg sammenhengen mellom kultur og læring (John-Steiner & Mahn, 1996). Vygotsky forstod læring som det som skjer gjennom samhandling med andre. Vi bruker språket til å kommunisere med andre og slik utvikles tenkningen videre gjennom språklig samhandling. Det sosiokulturelle perspektivet bygger altså på en antakelse om at læring skjer gjennom bruk av språk og deltakelse i sosial praksis (Lyngsnes & Rismark, 2010). Et grunnprinsipp ved dette læringssynet er at språket blir et redskap for det å tenke (Säljö, 2010). Vygotsky brukte begrepet *mediering*, som handler om støtten eleven får i læringsprosessen, enten det er fra personer eller fysiske gjenstander. Språket er et av våre medierende verktøy. Dermed er læreren og medelever viktige i læringsprosessen som medierende verktøy (Dysthe, 2001)

Det eleven kan her og nå kaller Vygotsky for *det aktuelle utviklingsnivået*. Innenfor dette området kan eleven løse problemer uten hjelp, men eleven lærer ikke noe nytt. Videre kaller Vygotsky avstanden mellom det eleven kan klare selv og det eleven kan klare ved hjelp av andre, for *den nærmeste utviklingssonen (Lyngsnes & Rismark, 2010)*. I denne sonen kan ikke eleven løse et problem alene, men eleven kan klare det ved hjelp av andre . Dette kan for eksempel være en medelev, læreren, søsken eller forelder. Eleven trenger noen med supplerende kompetanse, som blant annet kan stille spørsmål som får eleven til å tenke. I følge Vygotsky tar eleven i bruk sin nærmeste utviklingssone samtidig som han/hun i samspill med andre går inn i problemløsning på et området som til dels er ukjent (Lyngsnes & Rismark, 2010). I tråd med et sosiokulturelt læringsmiljø, vil elevene utvikle sine resonnement og strategier i samhandling med hverandre, og ved at medelever og lærer eksempelvis stiller en spørsmål som får en til å reflektere.

2.2 Resonnement og strategier

Som tidligere nevnt blir strategier og resonnementer omtalt som to synonymer i denne studien. Jeg vil nå forsøke å forklare disse begrepene ved hjelp av teori. Begrepet «strategi» brukes om hvordan man velger å løse en oppgave. Altså hvilken plan man har (Bjuland, 2002a). Et matematisk problem er en oppgave uten fullstendig kjent løsningsmetode. Dermed kan ikke elever imitere eksempler og oppgaver de har sett tidligere, hvis elevene skal løse et problem. Eleven må produsere noe nytt (Boesen, 2006). Elevers resonnement handler om deres tenkning, slutninger og tankerekker som fører til og begrunner en slutning eller mening

(Svendsen, 2009). I følge Lithner (2005) består løsningsprosessen i en matematikkoppgave av fire steg. Det starter med at oppgaveløseren først leser oppgaven, deretter velger han en løsningsstrategi, for videre å implementere strategien, for så til slutt å komme frem til en konklusjon (Lithner, 2005). Gjennom arbeid med problemløsning, vil elever utvikle et større repertoar av problemløsningsstrategier etter hvert som de får mer erfaring. Polya (1957) poengterer at man kan ikke drille elevene i en bestemt form for problemløsningsstrategi knyttet opp mot en bestemt type oppgave. Da vil det ikke lenger kunne sees på som en problemløsningsstrategi, men heller betraktes som en algoritme (Polya, 1957). For å analysere dataene mine har jeg tatt i bruk teori om resonnement og strategier fra blant annet Boesen, Polya, Mason & Davis og Schoenfeld.

2.2.1 Kreativ og imiterende resonnering

Boesen (2006) deler matematisk resonnering inn i to hovedtyper, kreativ resonnering og imiterende resonnering. Resonnering trenger ikke nødvendigvis være basert på formell logikk, derimot er det viktigste at resonneringen er logisk for personen som resonnerer. Å kunne løse et matematisk problem er knyttet til kreativ resonnering. I følge Boesen (2006) kan resonnering defineres som en tankegang, måten å tenke på, tilpasset for å produsere påstander og trekke slutninger (Boesen, 2006).

En sentral del av resonneringsprosessen er argumentering. Målet er å overbevise seg selv eller andre om at resonneringen stemmer. Lithner (2005) deler argumentasjon inn i to. Valg av strategi og implementering av strategi (Lithner, 2005). Valg av strategi handler om å forsøke og velge en strategi som kan løse problemet. Noen eksempler på det kan være å velge, huske, konstruere, oppdage og gjette. Implementering av strategi handler om verifisering, altså løste strategien oppgaven (Boesen, 2006).

Boesen (2006) definerer kreativ resonnering i matematikk som ny, fleksibel, sannsynlig og basert på matematikk. Dette kan sees i sammenheng med elevenes resonneringer under arbeidet med problemløsningsoppgavene. Her kom de med logiske resonnementer som var sannsynlige og basert på matematikk. Det han legger i det er at (1) en *ny* sekvens med løsningsresonnering blir laget, eller en glemt sekvens blir gjenskapt. (2) Resonneringen er *fleksibel* ved at den tillater forskjellige tilpasninger og tilnærmelser til situasjonen. (3) Argumentene som støtter strategien fungerer som motivasjon for at konklusjonen er *sannsynlig*. (4) Argumentene er basert på grunnleggende, matematiske egenskaper som berører resonneringen (Boesen, 2006). Derimot er resonnering som er en *imitering* av et svar eller en løsning ikke definert som kreativ resonnering. Dette fordi det ikke tilfredsstiller kravet om at resonneringen skal være ny. Boesen (2006) definerer slik resonnering, som ikke tilfredsstiller kravene til kreativ resonnering, for *imiterende resonnering*. Han hevder at flere studier viser at imiterende resonnering er mye brukt av elever. Dette kan være noe av grunnen til at mange elever sliter i matematikk (Boesen, 2006). Videre deler Boesen (2006) kreativ resonnering inn i to typer; lokal og global kreativ resonnering. *Lokal kreativ resonnering* er basert på imiterende resonnering, men inneholder små lokale elementer av kreativ resonnering. Mens *Global kreativ resonnering* inneholder store elementer av kreativ resonnering (Boesen, 2006).

Boesen (2006) deler imiterende resonnering inn i minnebasert og algoritmisk resonnering. Minnebasert resonnering er resonnering hvor strategivalget er basert på det en husker av svaret på en oppgave og strategien består av å skrive ned svaret. *Algoritmisk resonnering* er resonnering hvor strategivalget består av å huske en algoritme som garantert gir riktig svar og strategien dermed er å bruke algoritmen (Boesen, 2006).

2.2.2 Strategier

Raymond Bjuland (2002) definerer begrepet *strategi* som en plan man bruker for å oppnå noe. Problemløsningsstrategier og heuristiske strategier brukes ofte om hverandre (Bjuland, 2002b). Polya (1957) hevder at mentale operasjoner eller heuristiske strategier kan være nyttig ved problemløsning. Handlingene ved å stille spørsmål og å komme med forslag, spiller en vesentlig rolle i å fremprovosere slike mentale operasjoner. Dette er det flere eksempler på fra observasjonen av elevene. Elevene stilte hverandre spørsmål hvis det var noe de ikke forstod, de la frem mulige ideer om løsningsstrategi, i tillegg opplevde samtlige elever å måtte forklare matematiske begreper. Strategiene er knyttet til ulike faser i problemløsningsprosessen (Polya, 1957). Alseth (1995) peker på det faktum at strategier er generelle og abstrakte av natur, siden de skal benyttes i ulike situasjoner. Til en viss grad betyr det at de ikke er knyttet til noen bestemt sammenheng. Alseth (1995) mener at det er gjort lite forskning innen strategier, og han legger vekt på at det blant annet er et behovet for å beskrive ulike strategier knyttet til matematisk tenkning.

Nå vil jeg gå nærmere inn på noen heuristiske strategiene som er kjent i forskningslitteraturen. Bjuland (2002) er opptatt av de tre strategiene: spesialisering, generalisering, og konstruere analogier. Deretter vil jeg gå nærmere inn på noen strategier fra Polya - stille spørsmål, monitorere og se tilbake, og visualisere.

2.2.3 Spesialisering, generalisering og konstruksjon av analogier

Mason og Davis (1991) bruker begrepet *spesialisering* for å referere til en handling av forenkling, eller for å prøve ut spesielle tilfeller. Hensikten med spesialisering er å skape selvtillit for å oppdage mønstre som er felles for flere eksempler. De mener at spesialisering forbereder en på veien mot generalisering. I følge Mason og Davis er begrepet *generalisering* brukt som en prosess for å spesialisere seg, når en gradvis prøver ut det mer generelle. En kan dermed si at spesialisering handler om å forenkle problemet, mens generalisering er den tilsvarende strategien som fokuserer på et mer generelt mønster. Når man løser et problem prøver en ofte å imøtekomme den nye situasjonen til eksisterende kunnskap, og dette gjøres ofte ved å lage *analogier.* Analogisk resonnement er derfor et kraftig verktøy i problemløsning. Problemløsningsstrategi for konstruksjon av analogier er knyttet til strategier for spesialisering og generalisering. Hvilken som helst generalisering eller abstraksjon bruker underliggende analogier. Når elevene lager overganger fra spesielle tilfeller til mer generelle tilfeller, eller retningen er fra det generelle til det mer spesielle, gir bruken av analogi fleksibilitet til elevenes resonnement (Dreyfus & Eisenberg, 1996)

2.2.4 Stille spørsmål, monitorere og se tilbake, og visualisere

Det er vanskeligere å *stille gode spørsmål* enn å svare på dem. For å kunne stille et spørsmål, må man ønske å vite, og det betyr å vite at man ikke vet. Fra Gadamer (1989) ser vi den viktige rollen av spørsmål og svar i dialog. Problemløsningsstrategi for å stille åpne spørsmål kan bidra til å komme frem til et overbevisende argument om et problem (Gadamer, 1989). Spørsmål kan også stimulere til begrepsendring og gi støtte for elevenes nyskapning. Ifølge Cestari (1997) tar det å stille spørsmål sikte på å innhente informasjon, oppnå et mål, eller få hjelp fra en annen person. Når elevene arbeider med et problem i smågrupper, hender det at de ikke forteller de andre gruppemedlemmene deres idé. En årsak til dette kan være at de ikke tror at ideen er viktig, så det er ikke nødvendig å si noe om det. En annen grunn kan være at elevene er så vant til å arbeide individuelt på et matematisk problem at de ikke ser poenget med å invitere de andre på gruppen til å håndtere deres idé. Det kan være viktig i smågrupper å monitorere hva de andre elevene gjør og generere spørsmål eller uttalelser på en slik måte, at alle medlemmene i gruppen er klar over disse ideene. Stille spørsmål som «hva er det du gjør» eller komme med uttalelser som «hun har tegnet en sirkel», er en invitasjon til alle elevene i gruppen til å delta i diskusjonen og fokus på den ny ideen. Spørsmål som: «hva gjør du?», «hvorfor gjør du det?» og «hvordan hjelper det?» er også brukt i problemløsningskurs for å hjelpe elevene til å utvikle metakognitive ferdigheter (Schoenfels, 1993). Elever som jobber i smågrupper, kan stimulere resonnementene til hverandre ved å stille spørsmål som: «hva har du?» og «hva gjør du?» (Bjuland, 2002a). Gruppemedlemmene kan fremkalle forklaringer ved å spørre: «hvordan fikk du det?», «jeg forstår det ikke», og de kan stimulere prosessen med å rettferdiggjøre ved å uttrykke kritikk. Hvis rettferdiggjøringen mislykkes, kan det føre til gjenoppbygging av arbeidet.

Uttrykket *monitorere og se tilbake* (metakognisjon) har spilt en viktig rolle i amerikansk forskningslitteratur om problemløsning gjennom 80 og 90-tallet. I sine betraktninger om matematisk problemløsningsforskning påstår Lester (2007) at metakognisjon ble sett på som drivkraften i problemløsning. Metakognisjon handler om å velge og planlegge hva du skal gjøre, og monitorere hva som blir gjort. Flere studier viser at monitorering og selvregulering er metakognitiv atferd som har en avgjørende betydning for vellykket problemløsning i matematikk (Lester, 2007). Denne strategien vil videre bli omtalt mye i min studie. Jeg observerte at den høytpresterende elevgruppen benyttet denne strategien ved problemløsningen. Monitorerende strategi og monitorerende spørsmål er dermed en av tre strategier elevene benyttet seg av, og det vil derfor bli viet en egen kategori til denne strategien i analysekapittelet. Den heuristiske strategien om *monitorering* og *se tilbake på løsningen* kan knyttes til Schoenfelds (1992) tredje komponenten i hans rammeverk (monitorere og kontroll) og Polyas (1957) fjerde steg (se tilbake) i hans modell over problemløsningsprosessen (Schoenfeld og Polyas modeller vil bli presentert lenger ned i seksjon 2.3). Planlegging og monitorering er kontrollprosesser som involverer refleksjon, som er avgjørende for å gjøre matematikk. Ifølge Polya (1957) kan elevene forsvare sin kunnskap når de ser tilbake på en løsning ved å revurdere og re-undersøke resultatet og løsningsprosessen. Se tilbake kan gi elevene et innblikk i etableringen av antagelser, og det kan utvikle utsiktene om at hvordan man kommer opp med løsninger er mer avgjørende enn selve løsningen. Dette observerte jeg hos de høytpresterende elevene, da de arbeidet med oppgave 5. Jon og samtlige av elevene gikk tilbake til oppgaveteksten for å verifisere at de hadde forstått problemet, og dobbeltsjekket at løsningen stemte med det opprinnelige problemet (se eksempel 4.3.1).

Å visualisere er en problemløsningsstrategi som er allment akseptert, ikke bare for objekter i geometriske problemer, men det kan også være nyttig for alle slags matematisk problemløsning. Ved hjelp av noen passende geometrisk representasjoner, forsøker vi å uttrykke alt i «språket av figurer» (Bjuland, 2002a). Mason og Davis (1991) forsvarer at et diagram kan hjelpe elevene til å stabilisere deres indre bilder. En figur gir struktur, og oppmuntrer til å få ned tanker og antagelser som svirer rundt i elevenes hoder. Knyttet til Mason og Davis, har Bjuland (2002) kategorisert denne problemløsningsstrategien for visualisering.

2.3 Problemløsning

Denne seksjonen vil bli viet til temaet problemløsning. Jeg vil gå dypere inn på hva problemløsning er. Videre vil jeg ta for meg tre forskjellige modeller over de ulike stadiene i problemløsningsprosessen. Den første modellen er Polyas kjente fire stegs modell, deretter vil jeg komme inn på Mason, Davis og Staceys (1982) problemløsningsprosess. Til slutt vil jeg ta for meg Borgersens (1994, 2004) syv-trinns modell over problemløsningsprosessen. Jeg vil avslutte denne seksjonen med å forklare hensikten med problemløsning.

2.3.1 Hva er problemløsning?

Når vi bruker begrepet problemløsning i matematikk, er ikke dette noe vi alltid utdyper, men antar at andre oppfatter relativt likt som en selv. Om vi derimot ser på ulike definisjoner av problemløsning, er det noe sprik i hvordan dette oppfattes. Derfor kan det være hensiktsmessig å få en viss forståelse for hva det innebærer. Mason og Davis (1991) beskriver problemløsningsoppgaver i matematikk som en oppgave der personen som skal løse oppgaven ikke umiddelbart vet hvordan denne kan løses. I intervjuene med elevene uttrykte samtlige at dette var utfordrende med oppgavene de arbeidet med, fordi de var vant til at det i læreboka stod hva de skulle gjøre, og derfor fulgte de vanligvis bare et oppsett. Derimot måtte de under arbeidet med problemløsningsoppgavene tenke logisk og selv finne ut hvordan de skulle løse de ulike problemene. Videre forteller Mason og Davis (1991) at dette innebærer at nesten hvilken som helst matematikkoppgave kan være et matematisk problem. Det er altså ikke oppgaven i seg selv som danner kriteriet for hvorvidt det dreier seg om en problemløsningsoppgave eller ikke, men hvem oppgaven presenteres for. Boesen (2006) mener at et problem er en oppgave uten fullstendig kjent løsningsmetode. Dersom eleven skal løse et problem, kan han ikke imitere oppgaver og eksempler som han tidligere har sett. Eleven må derimot produsere noe nytt (Boesen, 2006).

Et annet kriterie som må ligge til grunn for at en oppgave skal kunne karakteriseres som problemløsning er at oppgaven må engasjere (Mason & Davis, 1991; Schoenfeld, 1992). Björkqvist (2007) understreker nødvendigheten av at problemløseren opplever et eierforhold til det matematiske problemet. I en slik situasjon vil ofte problemløseren drives av indre motivasjon og arbeidet med problemet kan på mange måter sammenlignes med arbeidet til den viderekomne matematikeren (Björkqvist, 2007). Derfor kan det være hensiktsmessig at læreren lager problemløsningsoppgaver som han vet kan interessere elevene. Et eksempel på dette kan en oppgave elevene kjenner seg igjen i, eller en oppgave som de kan levere til dagliglivet.

Dette står i samsvar med Schoenfelds (1992) definisjon av et matematisk problem. Han mener at det er en oppgave der eleven er interessert og engasjert, og ønsker å oppnå en løsning. Det som er annerledes med slike oppgaver fra andre type matematikkoppgaver er at elevene ikke har tilgjengelig hvilken matematiske metode de skal benytte for å løse oppgaven, men må komme frem til dette på egenhånd.

2.3.2 Problemløsningsprosessen

Ulike modeller har blitt introdusert i litteraturen for å illustrere ulike stadier i problemløsningsprosessen. I diskusjonskapittelet (kapittel 5) benytter jeg disse ulike problemløsningsprosessene for å diskutere resultatene mine. Jeg vil nå først ta for meg Polyas (1957) firetrinnsmodell for å illustrere den matematiske problemløsningsprosessen. Dette er kanskje den mest kjente modellen. Polya baserte sine analyser på hvordan matematikere løser problemer (Polya, 1957):

1. Å forstå problemet
2. Å utarbeide en plan
3. Å gjennomføre planen
4. Å se tilbake.

Disse stadiene har vist seg å ha betydelig innflytelse på matematikkundervisning (Bjuland, 2002; Lester, 1994). Videre har Polyas (2004) modell blitt tatt som et utgangspunkt både for Mason, Burton og Stacey (1982) og Borgersen (1994, 2004) i sine analyser. Mason et al. (1982) har delt problemløsnings prosessen i tre faser, som de kaller:

1. Oppføring
2. Angrep
3. Vurdering

Oppføringsfasen har nært samsvar med den første fasen til Polya (1957). Aktivitetene i denne fasen innebærer å stille spørsmål som «Hva vet jeg, og hva vil jeg?» og «Hva kan jeg introdusere?» Prosessen med matematisk tenkning kalles *spesialisering*. Dette er et begrep som er videreutviklet av Mason og Davis (1991), og det er ofte fruktbart her. Spesialisering refererer til handlinger for å prøve ut spesielle tilfeller eller handlinger av forenkling, for å være i stand til å manipulere objekter, diagrammer og tallmønstre med mer selvtillit. Mason og Davis (1991) understreke at spesialisering, handler om å være på jakt etter et enklere eksempel, eller en enklere oppgave. Ved å gjøre problemet lettere kan en oppdage mønstre som er felles for flere eksempler, for å videre forberede veien mot generalisering. Denne prosessen gjør det lettere å oppdage mønstre og for å få en følelse av hva som skjer. Spesialisering er således til en viss grad den motsatte prosess av generalising. *Angrepsfasen* er en fase som består av de to matematiske prosessene conjecturing og convincing. Prosessen med conjecturing er karakterisert ved bevegelig, testing, og å modifisere de antagelser man kommer opp med. Prosessen med convincing er preget av å begrunne de antagelser man gjør ved å forklare hvorfor et utsagn er sant eller holder. Denne aktiviteten med å forklare hvorfor kan trenge flere endringer, siden det involverer tre stadier: overbevise seg selv, å overbevise en venn, og overbevise en fiende eller skeptisk kollega (Mason, Burton, & Stacey, 1982; Mason & Davis, 1991). Derfor er denne fasen i innretting med det andre og tredje trinnet til Polya (1957). Den tredje fasen, *vurdering*, tilsvarer Polya's (1957) fjerde etappen, se tilbake, og sjekke om det burde være bekymringer til aktivitetene, reflektere over, og utvide det løste matematiske problemet. Derfor er prosessen med generalisering uthevet her. På et mer generelt nivå er de grunnleggende matematiske prosessene av spesialisering og generaliser relevante i visse faser. Førstnevnte er relevant i den første og andre fase, mens den sistnevnte er relevant i både den andre og den tredje fase (Mason et al., 1982; Mason & Davis, 1991). Borgersen (1994, 2004) har utvidet problemløsningsprosessen til en syv-trinns modell. Fasene er som følger:

1. Analysere og definere
2. Modellering/tegning
3. Kvalifisert gjetting
4. Conjecturing
5. Bevise
6. Karakterisering og tolke beslutningen
7. Generalisere og formulere nye spørsmål.

Denne modellen er mer detaljert enn de to tidligere, men den generelle ideen av modellene er av samme betydning. Borgersen (1994, 2004) hevder at utfordringen med å få elevene til å oppleve hele prosessen med å gjøre matematikk, er det å la dem samarbeide med å gjøre åpne problemløsningsoppgaver i små grupper. På tross av å være presentert i lineære prosesser som påfølgende stadier eller faser, illustrerer problemløsningsprosessen til disse tre modellene dynamisk og ikke-lineære prosesser (Borgersen, 1994; Mason et al., 1982; Polya, 1957). Et eksempel er at elevene beveger seg frem og tilbake mellom ulike faser, for eksempel mellom å forstå problemet og gjennomføring av planen (Polya, 1957). Hvis elevene ikke klarer å løse problemet ved sin første tilnærming, flytter de seg tilbake til analysen og prøver å forstå problemet på nytt (Carlsen, 2008).

2.3.3 Hensikten med problemløsning

Mason og Davis (1991) snakker om at verdien i å ha en bred oppfatning av hva som utgjør et problem er at det legger vekt på at noe er et problem, når det er et problem for en person. Et spørsmål er bare et spørsmål både muntlige og skriftlige. Et problem er noe som går inni deg, det opptar deg og det ønsker å bli løst. Hvordan kan for eksempel læreren utfordre elevene til å arbeide med problemene, og hvordan kan han få elevene til å oppleve spørsmålet som et spørsmål for dem, som deres eget spørsmål? Hvis læreren har en tanke om at spørsmålet skal bli løst på en spesiell måte, vil læreren sannsynligvis bli skuffet fordi elevene vanligvis finner mange forskjellige måter å engasjere seg på eller en annen måte å løse en oppgave (Mason & Davis, 1991). Problemløsningsferdigheter er noe som utvikles over tid i følge Schoenfeld (1992). For å bli en god problemløser trenger man erfaring (Schoenfeld, 1992)

Elever har i følge Schoenfeld (1992) lært gjennom skolegangen å arbeide med tusenvis av matematiske «problem» som i bunn og grunn har vært rutineoppgaver. Elevene har tradisjonelt blitt lært en fremgangsmåte for hvordan disse oppgaven skal løses, for deretter å sette i gang å løse drøssevis av like oppgaver, som krever samme fremgangsmåte. Dette gir elevene et inntrykk av at de mestrer å løse en bestemt oppgavetype, så sant den løses innenfor en viss tidsramme. Dette observerte jeg på begge elevgruppene, de viste at de var opptatt av å raskt komme frem til en løsning, for så å skynde seg videre til neste problem. Derfor kan oppgaver som problemløsningsoppgaver komme under den kategorien om oppgaver som elevene ikke mestrer, fordi de er tidkrevende og fremgangsmåten er ikke kjent for elevene på forhånd. Tidsaspektet blir da i forbindelse med løsningsprosessen en måte elevene måler hvorvidt de mestrer oppgaven eller ikke (Schoenfeld, 1992).

Interessen for hvordan en lærer av og gjennom problemløsning i matematikk spores vanligvis tilbake til Polya. Hans fire-trinns modell for problemløsning er viden kjent innen feltet. Ifølge Polya er det å løse problemer en praktisk ferdighet som må praktiseres gjennom å observere og imitere andre problemløsere, for at man skal lære seg det. Schoenfeld hevder videre at begrepet problemløsning i litteraturen brukes både til å beskrive hva matematikere gjør, og det brukes som en karakterisering av en måte å lære matematikk. Stanic og Kilpatrick (1989) identifiserer tre hoved bruksområder for begrepet: problemløsning som kontekst, problemløsning som en ferdighet, og problemløsning som en kunst. Det første bruksområder refererer til matematisk problemløsning som en måte å lære matematikk. Den andre bruken gjelder heuristikk og teknikker lært gjennom problemløsning som legger til matematisk verktøysett. Det siste bruksområdet hevder Schoenfeld (1992) at viser til reell problemløsning som kjernen i matematikk, hvis ikke matematikk selv. Problemløsning er hva matematikere gjør og har gjort siden blant andre Euclid, Pappus, og Descartes tid (Carlsen, 2008; Stanic & Kilpatrick, 1989).

For mange elever viser det seg å være problematisk med overgangen fra kunnskap om et matematikkbegrep eller en regneprosedyre (det konkrete), til den abstrakte forståelsen for fenomenet. Mange elever stopper opp i utviklingen ved det å overføre språklig og tallmessig kunnskap til abstrakte regneprosedyrer. Problemløsning i matematikk innebærer at man skal uttrykke kunnskapen i et abstrakt og formelt matematikkspråk (Mason & Davis, 1991).

2.4 Utvalg av relevant forskning

2.4.1 Problemløsning i smågrupper

Vygotsky (1978) snakker om den nærmeste utviklingssonen. Dette er som tidligere forklart den sonen som ligger utenfor det en person kan klare alene. For å nå ut i den nærmeste utviklingssonen trenger man medierende verktøy (Lyngsnes & Rismark, 2010). Problemløsning i små grupper kan være et eksempel på dette, der medelever virker som medierende verktøy for hverandre. Problemløsning og tenking er en sosial prosess, og kan sees i sammenheng med undervisning i skolen. Der det tidligere var vanlig med individuell oppgaveløsing, er det nå mer vanlig med gruppearbeid og samhandling som læringsstrategi i skolen. Det er blitt en større forståelse for at matematisk tenkning gjøres best sammen med andre (Schoenfeld, 1992).

Det som menes med smågrupper, er elevgrupper bestående av 3-5 elever. En slik organisering gir rom for diskusjon elevene i mellom. Det kan være hensiktsmessig at elevene er på omtrentlig samme faglige nivå. Elevene i gruppen kan gjerne skilles fra lavt til middels faglig nivå, eller fra middels til høyt faglig nivå (Bjuland, 2002b). Ut i fra Bjulands (2002) resonnementer rundt gruppeinndeling, samt noen egne erfaringer, valgte jeg å dele elevene inn grupper etter faglig nivå. En gruppe bestående av høytpresterende elever og en gruppe bestående av lavtpresterende elever. I følge Bjuland (2002) vil arbeid med problemløsning i smågrupper kreve at elevene er aktive deltakere. Ved diskusjon rundt problemet vil elevgruppen bidra med ulike perspektiver, i tillegg til at de får øvd seg på å sette ord på tanker og ideer, samt aspekter de er usikre på rundt problemet. Arbeid med problemløsning i smågrupper kan sees i lys av et sosiokulturelt læringssyn. Her vil medierende verktøy spille en vesentlig rolle for læring. I følge Carlsen (2008) er et medierende verktøy noe som danner en bro mellom subjektet og objektet der eleven er subjektet og objektet er problemet. Medierende verktøy kan være alt fra tekstbøker, matematiske symboler og ulike kalkulatorer til medelever (Carlsen, 2008). Dette står i samsvar med Säljös (2010) forklaring av medierende verktøy. Han mener det både kan være gjenstander, men også mennesker (Säljö, 2010).

2.4.2 Matematisk tenkning

Det synes å være en voksende enighet om at matematisk tenkning er nødvendig for å kunne drive med problemløsning. Jeg har tatt utgangspunkt i Schoenfelds (1992) aspekter av kognisjon i min konklusjon (kapittel 6) for å vurdere de to elevgruppenes matematiske tenkning, for å betrakte mulige forutsetninger for elevene videre i problemløsning. Selv om detaljene kan varierer blant forskere, synes det å være generell enighet om at matematisk tenkning består av disse fem aspektene av kognisjon (Schoenfeld, 1992):

1. Kunnskapsbase
2. Problemløsningsstrategier
3. Kontroll og monitorering
4. Oppfatninger og følelser
5. Praksis

Kunnskapsbasen består av det man har i minnet. Dette blir identifisert ved ferdigheter og kunnskaper som allerede er lagret, og som eleven lett kan hente frem og anvende. Ethvert matematisk problem krever at eleven har basiskunnskap for å kunne komme videre. Denne basiskunnskapen danner kunnskapsdatabasen.

Problemløsningsstrategier er ulike strategier en bruker for å løse matematiske problemer. Gjennom arbeid med problemløsning, vil elevene utvikle et større repertoar av problemløsningsstrategier etter hvert som de får mer erfaring med ulike typer problemer (Bjuland, 2002a). Polya (1957) fremhever at man kan ikke trene elevene i en bestemt form for problemløsningsstrategi knyttet til en bestemt oppgave. Det vil da ikke kunne regnes som en problemløsningsstrategier, men derimot betraktes som en algoritme (Polya, 1957).

Kontroll og monitorering kan betraktes under metakognisjon, og vil i følge Schoenfeld (1992) kunne betraktes som selv-regulering. Det at man i løpet av problemløsningsprosessen går tilbake til det opprinnelige problemet for å kontrollere at man har forstått det, eller at man går tilbake for å sjekke om man har tatt de riktig avgjørelsene, kan være et eksempel på monitorering eller selv-regulering.

Oppfatning og følelser handler om at en elev for eksempel kan være klar over at han er flinkere i matematikk enn i samfunnsfag. Dette betraktes som metakognitive ferdigheter, som kan forklares som kunnskap om egen læring. Hvordan en selv lærer best og hvilke ferdigheter en mestrer bedre enn andre kan betraktes som metakognitive ferdigheter (Bjuland, 2002a). Det femte og siste punktet i matematisk tenkning er *Praksis*. I følge Schoenfeld (1992) handler det om hvordan en profesjonell matematiker arbeider med matematiske problemer kontra hvordan elever som ikke har erfaring med problemløsning arbeider.

2.5 Multiplikasjon og posisjonssystemet

2.5.1 Multiplikasjon

Siden problemløsningsoppgavene jeg brukte i studien både skulle favne høytpresterende og lavtpresterende elever, valgte jeg å fokusere på multiplikasjon. Ved dette valget var intensjonen at begge gruppene skulle kunne ta utgangspunkt i kjent stoff og dermed i størst mulig grad kunne bidra inn i diskusjonene i forbindelse med oppgaveløsingen. Multiplikasjon er dessuten et sentralt område i form av å være en av de fire regneartene, og det er grunnleggende for videre læring i matematikk. De fire grunnleggende regneartene er addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon (Vatne, 2016).

Multiplikasjon kan forklares som en forenklet versjon for addisjon av flere like ledd. Å multiplisere er altså det samme som å addere samme tallet flere ganger. Et eksempel på dette er $3 \cdot 5 = 15$. Vi sier at vi skal legge sammen tallet 3 fem ganger, eller at vi skal ta tallet 5 og addere dette med seg selv 3 ganger. Svaret i et multiplikasjonsstykke kalles produkt, som i dette tilfellet er 15. Tallene 3 og 5 som skal multipliseres kalles faktorer (Vatne, 2016). Produktet blir det samme uansett hvilken rekkefølge en multipliserer. $3 \cdot 5 = 15$ og $5 \cdot 3 = 15$.

faktor · faktor = produkt

Jeg vil nå gå nærmere inn på regneregler om den kommutative, assosiative og distributive lov ved multiplikasjon og addisjon. Årsaken til at jeg også vil gå inn på addisjon er fordi jeg observerte at noen av elevene forvekslet disse regneartene. Dette vil jeg gå nærmere inn på i analysekapittelet.

Den *kommutative lov* handler om at faktorenes rekkefølge er likegyldig. Den kommutative lov for addisjon sier at hvis vi skal addere to elementer, spiller addendenes rekkefølge ingen rolle. Altså sier regneregelen at: $a + b = b + a$. Tilsvarende gjelder for multiplikasjon. Skal vi multiplisere to faktorer, spiller faktorenes rekkefølge ingen rolle. Regneregelen kan vises slik:

$a \cdot b = b \cdot a$ *(Aarnes, 2005-2007b)*. Det vil si at både ved addisjon og multiplikasjon spiller det ingen rolle hvilke tall vi enten adderer eller multipliserer først. Den kommutative lov gjelder derimot ikke for subtraksjon eller divisjon.

Videre har vi den *assosiative lov*. Den assosiative lov for addisjon sier at hvis vi skal addere tre addender, spiller det ingen rolle hvilke to vi adderer først. Resultatet vil bli det samme uansett. Dette kan vises slik: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Likeledes er det for multiplikasjon, hvis vi skal multiplisere tre faktorer spiller det ingen rolle hvilke to faktorer vi multipliserer først. Uansett vil produktet bli det samme. Dette kan vises slik: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Aarnes, 2005-2007a)

Til slutt har vi den *distributive lov*, som er en algebraisk relasjon som knytter sammen addisjon og multiplikasjon. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Vi sier at multiplikasjon er distributiv med hensyn til addisjon (Aubert, 2009; Aarnes, 2005-2007c).

2.5.2 Posisjonssystemet

Noen av problemløsningsoppgavene hadde fokus på sifrenes plassering og verdi i multiplikasjonsstykker. Derfor var ikke det å finne produktet ment som utfordringen ved oppgavene, men derimot å kjenne til egenskaper ved multiplikasjon og klare å benytte seg av disse.

Vårt tallsystem kalles titallsystemet, og dette er et *posisjonssystem*. Det betyr at et siffers betydning, er avhengig av posisjonen. Våre sifre har verdier fra 0 til 9, altså ti forskjellige verdier. Sifferets plassering eller posisjon avgjør hvordan vi tolker verdien. Posisjonssystemets egenskaper er at alle tall kan skrives i form av oppbygningen av 10'er potenser, tallet ti er altså grunntallet (Aubert, 2005-2007). Dette kan eksemplifiseres ved tallet 2469, som i titallsystemet står for $2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$, det vil si 2000 + 400 + 60 + 9. Tall med desimaler så representerer det første tallet etter komma tideler, det andre hundredeler og så videre slik at 0,382 står for $3 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$.

3.0 Metode

I dette kapittelet gjøres det rede for metodene som er valgt i studien. Videre vil det bli redegjort for forskningsdesign, datainnsamling, reliabilitet og validitet, samt noen aktuelle etiske betraktninger. Kapittelet avsluttes med en introduksjon av kategoriene jeg har delt funnene inn i og som utgjør grunnlaget for videre analyse.

3.1 Forskningsdesign

Bryman (2012) definerer forskningsdesign som den overordnede planen for hvordan man går frem for å besvare en problemstilling. Et godt forskningsdesign skal ideelt sett skape koherens mellom metodiske valg, strategier og tidshorisont, og videre omforme problemstillingen til et forskningsprosjekt (Bryman, 2012).

Denne studien er en kvalitativ case-studie. Kvalitativ studie betoner det spesielle. Case kommer fra det latinske ordet *casus* og betyr tilfelle, det vil altså si at jeg har undersøkt noen få tilfeller, i min studie 10 elever (Bryman, 2012; Christoffersen & Johannessen, 2012). Jeg har gjennomført et case-studie for å besvare de aktuelle spørsmålene som stilles i oppgaven. Et kvalitativt case-studie er en strategi for å innhente mye data fra et bestemt område - i denne studien elevers resonnement under smågruppearbeid med problemløsningsoppgaver. I en undersøkelse er målet å fastslå hvordan ting er, sammenliknet med hvordan de kan være. Når det gjelder case-studier, kan imidlertid funnene godt være representative i andre tilfeller, men metoden har ikke som formål å generalisere (Thomas, Nelson, & Silverman, 2005). Metode omhandler hvordan man skal opptre for å samle kunnskap og betyr «veien til målet» (Kvale, 2005). Ulike metoder egner seg i ulike sammenhenger, derfor må en velge en metode som er passende for spørsmålet det ønskes svar på.

Hensikten med denne undersøkelsen er å gi en bredere forståelse for hvordan elever på 9.trinn resonnerer under arbeid med problemløsningsoppgaver. Siden jeg ønsker å belyse elevenes tankegang og strategibruk under arbeid med problemløsningsoppgaver i smågrupper, har jeg på bakgrunn av problemstillingen basert innsamlingen på observasjoner og individuelle intervju.

Det første *metodiske* valget man tar ved utarbeidelse av forskningsdesign, er knyttet til valget av en kvalitativ, kvantitativ eller kombinert metode. Målet med denne oppgaven var å se på elevresonnement i møte med problemløsningsoppgaver. Forskningen kommer av en interesse for å lære mer om elevers tankemåter ved problemløsning i matematikk, og hvordan det er å løse slike oppgaver i smågrupper. Kvalitative metoder grunner i mønster basert på kunnskap, der meninger og intensjoner er sentrale. De kvalitative metodene omfatter mange ulike strategier for organisering, innsamling og fortolkning av data som er samlet inn fra observasjon, samtale eller skriftlig materiale.

Som tidligere nevnt kan denne studien beskrives som et kvalitativt case-studie, hvor observasjon og intervjuer utgjør grunnlaget for datainnsamlingen. Bakgrunnen for dette er ønsket om å innhente data vedrørende elevers resonnement, noe som ikke så lett direkte kan måles i tall og statistikk. Kjennetegnet på kvalitative undersøkelser er at de går i dybden på komplekse fenomen heller enn å etterstrebe generalisering. Forskeren begynner med spesifikke observasjoner, for så å la analysen springe ut fra datamaterialet mens studien pågår (Bryman, 2012).

3.2 Gjennomføring

3.2.1 Forberedelser

Observasjonene og intervjuene er foretatt på enkelt elever på 9.trinn ved en ungdomsskole på Sørlandet. I samråd med veileder og i henhold til oppgavens omfang, fant vi ut at ti informanter, bestående av to grupper på fem elever var en hensiktsmessig ramme. Ryen (2002) peker på at antallet i det kvalitative utvalget skal være stort nok til å representere bredden og at disse skal gi tilstrekkelig informasjon til studiens formål. Jeg gjorde utvalget av elever i samråd med matematikklærerne på 9.trinn. Den ene gruppen bestod av høytpresterende elever mens den andre gruppen bestod av lavtpresterende elever. Denne gruppeinndeling gjorde på bakgrunn av Bjulands (2002) argumenter om at det kan være hensiktsmessig å dele smågrupper inn etter faglig nivå. Han forteller at en slik organisering kan være hensiktsmessig for en god diskusjon elevene imellom (Bjuland, 2002a).

Matematikklærerne fikk hovedansvaret for å velge ut informantene. Begrunnelsen for dette var at de kjente elevene godt og dermed kunne gjøre et hensiktsmessig utvalg av elever. Jeg ga lærerne noen kriterier for utvalget av informantene som skulle delta i forskningen. Det første var at elevene måtte være muntlig aktive, uavhengig av ferdigheter i matematikk. Dette var viktig da jeg skulle observere de under arbeid med problemløsningsoppgaver i smågrupper, og var interessert i elevenes resonnementer under arbeidet. Kvalitative studier tar utgangspunkt i strategisk valgt utvalg, som vil si at man velger ut informanter som kan svare på problemstillingen (Ryen, 2002). I tillegg ga jeg matematikklærerne to andre kriterier. Jeg ønsket en gruppe med lavtpresterende elever og en gruppe med høytpresterende elever i matematikk. Matematikklærerne gjorde utvalget av informanter ut i fra deres oppfatning av elevenes ferdigheter i matematikk i samsvar med elevenes prestasjoner i matematikk (altså karakter), i tillegg til at de måtte ta hensyn til respondentenes muntlige aktivitet. I følge Bjuland (2002) kan elevene i gruppen gjerne skilles fra lavt til middels faglig nivå, eller fra middels til høyt faglig nivå (Bjuland, 2002a). Elevene som ble delt inn i den lavtpresterende gruppen var i følge matematikklærerne faglig svake. Elevene strevde med matematikk i skolen, og viste liten måloppnåelse i faget. Karaktermessig lå disse elevene rundt 2-3. Gruppen med de høytpresterende elevene var faglig sterke i følge lærerne. De viste god kompetanse og forståelse for matematikkfaget, og hadde høy måloppnåelse i faget. Disse elevene lå rundt karakterene 4-6. Studiens formål ble presisert for informantene før datainnsamlingen fant sted.

3.2.2. Datainnsamlingen

Hver gruppe samarbeidet og diskuterte rundt seks ulike problemløsningsoppgaver. Det var naturlig å legge hovedvekt på observasjon som metode, da denne studien har som hensikt å se på resonnementene til elever. I følge Johannessen og Christoffersen (2012) egner observasjon seg som metode når forskeren ønsker direkte tilgang til det han vil undersøke. Under observasjonen ble det foretatt feltnotater samt video –og lydopptak.

Jeg valgte å være åpen om hva jeg så etter, slik at elevene kjente til hensikten med studien. Dette for å gjøre elevene bevisst på at jeg var interessert i å høre hvordan de resonnerte seg frem, slik at jeg ikke kun fikk høre løsningen deres. Min observatørposisjon kan sies å være til dels vekslende mellom aktiv og passiv. Målet var å ha en relativt passiv observatørposisjon i den grad dette lot seg gjøre. Jeg hadde i forkant lagt en del føringer for hva som skulle observeres i og med at jeg hadde utarbeidet problemløsningsoppgavene som elevene skulle arbeide med, og forklart hva de skulle gjøre. Basert på dette kan det sies at min observatørrolle var aktiv. I tillegg oppstod det enkelt situasjoner der jeg valgte å gripe inn og dermed gikk over til en mer aktiv observatørrolle. Det er, ifølge Johannessen og Christoffersen (2012) ikke uvanlig å variere mellom å være observerende deltaker og tilstedeværende observatør. Dette skjedde særlig da jeg observerte elevgruppen med de lavtpresterende elevene. Til tider slet de med å komme i gang med problemløsningsoppgavene, dermed stilte jeg spørsmål som hjalp de i gang med arbeidet. I tillegg visste jeg at en av elevene hadde dysleksi så jeg valgte dermed å lese oppgaveteksten høyt. Likevel vil jeg påstå at jeg i hovedsak hadde en passiv, tilstedeværende observatørrolle, men altså noe mer aktiv på gruppen med de faglig svake elevene.

Etter gruppearbeidet intervjuet jeg elevene individuelt, slik at jeg fikk mulighet til å spørre om det jeg hadde observert, mens de løste problemløsningsoppgavene. Grunnen til at jeg valgte å ha individuelle intervju i etterkant av gruppearbeidet var at jeg da hadde mulighet til å spørre elevene individuelt hvordan de resonnerte seg frem til løsningen. Dette var hensiktsmessig med tanke på å få frem enkeltelevenes isolerte resonnementer rundt problemløsningsoppgavene. Postholm og Jacobsen (2013) hevder at vi slik kan bruke språket til å fremme opplevelser og hendelser, eller gi uttrykk for følelser, intensjoner og holdninger (Ryen, 2002). På forhånd hadde jeg utformet noen generelle spørsmål til intervjuene som omhandlet problemløsning. Dette brukte jeg som en innledning, samtidig som det var interessant å høre hva elevene syntes om slike oppgaver etter å ha arbeidet med dem. Med bakgrunn i dette utformet jeg spørsmål for hver enkelt problemløsningsoppgave. Intervjuene fulgte en felles intervjuplan, slik at svarene kunne analyseres opp mot hverandre. I tillegg brukte jeg feltnotatene mine fra observasjonen og spurte elevene om det jeg hadde observert. Spørsmålene gikk hovedsakelig ut på hva de tenkte når de skulle løse oppgavene og hvordan de resonnerte seg frem til de ulike strategiene for å løse oppgavene. Under vil jeg presentere en mer strukturert oversikt over innsamlet empirisk materiale:

Oversikt over innsamlet empirisk materiale		
Tidspunkt	**Hva**	**Hvilken form**
Før observasjonen (januar)	Samtale med matematikklærerne	Muntlig, utenom undervisning
	Samtale med informantene/elevene	Muntlig, individuelt
Observasjon 17. februar klokken 08.15-09.00	Observasjon av den høytpresterende gruppen som arbeidet med problemløsningsoppgavene	Gruppearbeid
Intervjuer 17. februar klokken 09.15-11.00	Intervvjuet hver enkelt elev fra den høytpresterende gruppen for å få frem deres isolerte resonnementer rundt problemløsningsoppgavene	Individuelle intervjuer
Etterarbeid	Transkribering av alt datamateriell fra både observasjonen og de individuelle intervjuene av de høytpresterende elevene	Transkribering
Observasjon 16. mars klokken 08.15-09.00	Observasjon av den lavtpresterende gruppen som arbeider med problemløsningsoppgavene	Gruppearbeid
Intervjuer 16. mars klokken 09.15-11.00	Intervvjuet hver enkelt elev fra den lavtpresterende gruppen for å få frem deres isolerte resonnementer rundt problemløsningsoppgavene	Individuelle intervjuer
Etterarbeid	Transkribering av alt datamateriell fra både observasjonen og de individuelle intervjuene av de lavtpresterende elevene	Transkribering

Tabell 1: Oversikt over innsamlet empirisk materiale.

3.2.3 Etterarbeid

Like etter datainnsamlingen startet jeg å transkribere gruppearbeidet og alle intervjuene. Dette var et omfattende arbeid, men jeg valgte å transkribere alt da jeg var litt usikker på hvordan jeg skulle kategorisere funnene mine. Under transkriberingen la jeg merke til at noen av strategiene som elevene benyttet, samsvarte med forskningslitteraturen jeg hadde satt meg inn i. Videre etter transkriberingen kodet jeg materialet. Her er det viktig å nevne to ulike former for koding som jeg benyttet. Først brukte jeg en *åpen koding*, som Strauss og Corbin beskriver som å bryte ned, utforske, sammenligne, konseptualisere og kategorisere data (Bryman, 2012). Dette hjalp meg i neste omgang til å gruppere kategoriene i forhold til min problemstilling. Videre brukte jeg en *fokusert og selektiv koding*. Charmaz omtaler intensjonen bak en slik koding som det å undersøke de mest vanlige fenomenene, og som dermed oppleves som mest dekkende og avslørende for datamaterialet (Bryman, 2012). Det var viktig for meg å velge ut de komponentene og delene av datamaterialet som hadde potensiell teoretisk betydning for det jeg ønsket å studere. På bakgrunn av kodingen identifiserte jeg noen begrep som jeg tok i bruk for å strukturere resultatene mine. Dette dannet videre kategorier for ulike strategier som jeg anså som de elevene benyttet mest hyppig for å løse problemløsningsoppgavene.

3.2.4 Analysen

Dataene jeg samlet inn, har jeg sammenliknet med relevant litteratur, og de er presentert i kapittel 4. Resultatene vil bli drøftet ut i fra de ulike læringsstrategier som jeg observerte at hyppigst ble tatt i bruk under arbeid med problemløsningsoppgavene. Det er valgt ut og presentert sitater fra observasjonene og intervjuene som er relevante for oppgaven.

3.3 Valg av problemløsningsoppgaver

Jeg valgte å benytte problemløsningsoppgaver fra matematikksenteret sine nettsider (Matematikksenteret.no). Disse oppgavene omhandlet det jeg ønsket å se på – problemløsningsoppgaver med multiplikasjon. Grunnen til at jeg valgte temaet multiplikasjon, er fordi dette er en av de fire regneartene. Multiplikasjon er som tidligere nevnt grunnleggende for elevenes videre forståelse i matematikk, i tillegg til at dette er et område som er kjent for både de høytpresterende og lavtpresterende elevene fra før. Selv om oppgavene jeg benytter altså hovedsakelig kun fordrer kjennskap til multiplikasjon for å kunne løses, så er det å oppdage at multiplikasjon kan benyttes vel så vesentlig. Oppgavene er ikke «tradisjonelle» multiplikasjonsoppgaver, men oppgaver som bærer preg av problemløsning hvor koblingen til multiplikasjon ikke alltid er like opplagt.

En bemerkning til valget mitt av oppgaver, kan være det at de kunne nok ha vært noe mer avanserte, med tanke på de høytpresterende elevene. Der kunne det ha vært interessant og gitt mer åpne oppgaver, gjerne med mer tekst, og sett hvordan de hadde resonnert rundt disse. Men siden jeg ville se på en elevgruppe med høytpresterende elever og en elevgruppe med lavtpresterende elever, valgte jeg problemløsningsoppgaver som passet for begge gruppene. Jeg ønsket like oppgaver på begge gruppene, slik at jeg hadde mulighet til å sammenlikne gruppenes resonnementer. Dette lå til grunn for mitt valg å bruke problemløsningsoppgavene fra matematikksenteret.

3.3.1 Anvendte problemløsningsoppgaver

Nå vil jeg legge frem de anvendte problemløsningsoppgavene fra datainnsamlingen. Elever kan utvikle forståelse i et matematikktema ved å arbeide med mer sammensatte problemløsningsoppgaver. Sammenhenger kan blir mer synlige for elever, når de arbeider med oppgaver med ulike tilnærming og med forskjellig vanskelighetsgrad innen samme tema, som i dette tilfellet er multiplikasjon. De oppgavene jeg skal presentere nå han noe utradisjonell vinkling, det er flervalgsoppgaver med fem alternativer hvor ett av dem er korrekt. Problemløsningsoppgavene har fokus på sifrenes plassering og verdi i multiplikasjonsstykker. Det som kan være utfordrende her er at elevene må kjenne til begreper og egenskaper ved multiplikasjon. Elevene må blant annet være klar over at svaret i et multiplikasjonsstykket kalles produkt, og tallene som multipliseres sammen kalles faktorer. I tillegg må elevene ha kunnskap om den kommutative lov, som handler om at rekkefølgen på faktorene er likegyldig, og påvirker ikke produktet.

Introduksjonsoppgave

Lag to tosifrede tall av sifrene 5, 6, 7 og 8 og plasser sifrene slik at produktet:

A) blir størst mulig
B) blir minst mulig
C) får sifferet 8 på enerplassen
D) blir så nærme 4000 som mulig

Ved denne oppgaven kan det være nyttig å ha kjennskap til den kommutative lov, samtidig som en må være bevist at sifferets betydning er avhengig av posisjonen. Titallssystemet vårt er konstruert slik at alle tall kan skrives i form av 10´er potenser. Jeg skal nå vise hva jeg mener, ved å løse oppgave a. For å få et størst mulig produkt, må man være bevisst at sifferets betydning avhenger av posisjonen. Det vil si at for å få et størst mulig produkt, må de to største tallene, 7 og 8, plasseres på tierplassen, mens de to minste må plasseres på enerplassen. En får da to mulig kombinasjoner: **8**5 · **7**6 eller **8**6 · **7**5. Disse to kombinasjonene får et produkt med ti i differanse, altså får den førstnevnte produktet 6460, mens den andre blir 6450. Her vil jeg anta at noen av elevene kan tro at produktet blir det samme, og dermed kanskje bare prøver ut en av kombinasjonene. Eller en annen mulighet kan være at elevene tror at disse får det samme produktet, fordi de forveksler det med addisjon. Ved addisjon ville nemlig svaret blitt det samme: 85 + 76 = 161 og 86 + 75 = 161. Dette er kun antakelser fra min side om hvilke utfordringer noen av elevene muligens kan treffe på, under arbeid med introduksjonsoppgaven.

Oppgave 1

Hvilket tall skal stå i den tomme ruta?

142 · $\square$ = 852

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Ved oppgave 1 kan det vært nyttig for elevene å ha kjennskap til at multiplikasjon og divisjon er motsatte eller inverse regneoperasjoner. Divisjon er en regneoperasjon hvor kvotienten er det tallet som ganget med divisoren gir dividenden. Altså ganger man et tall med et annet, og deretter deler tallet med det samme som vi ganget med, kommer vi tilbake til det opprinnelige tallet. For eksempel 2 · 5 = 10 og 10 : 5 = 2. Ved denne oppgaven kan elevene bruke kjennskapen om at multiplikasjon og divisjon er invers regneoperasjoner, og dermed dele 852 på 142, da vil de komme frem til det tallet som mangler. En annen mulighet kan være at elevene prøve seg frem, siden de har fem alternativer til svar. Altså $142 \cdot 1 = 142$, $142 \cdot 3 = 426$ og så videre oppover helt til de finner det tallet som de må gange 142 med for å få produktet 852.

Oppgave 2
De svarte boksene dekker ett tosifret og ett ensifret tall som skal multipliseres. Samme siffer skjuler seg bak alle de tre boksene.

$$\boxed{}\boxed{} \cdot \boxed{} = 176$$

Hvilket siffer må det være dersom denne multiplikasjonen skal være riktig?

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 4

Denne oppgaven handler egentlig om å prøve seg frem. Det som kan være interessant her er å se om elevene resonnerer logisk over hvilke tall de prøver. Elevene viser for eksempel begrenset forståelse for multiplikasjon om de prøver ut tallet 9. De burde se at $99 \cdot 9$ får et mye større produkt enn 176. Bruk av overslag kan være hensiktsmessig på denne oppgaven, for å se omtrentlig hva produktet blir. Det vil bli interessant å se om dette er noe elevene muligens benytter seg av.

Oppgave 3
Du har fire tall: 3, 4, 5 og 6. Når disse multipliseres med hverandre får du 360. Du skal gjøre ett av tallene 1 mindre.

Hvilket av de fire tallene må du gjøre 1 mindre for at produktet skal bli minst mulig?
(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) Spiller ingen rolle

Denne oppgaven kan elevene fint løse ved å prøve seg frem. De kan for eksempel starte med å gjøre det minste tallet én mindre, deretter gjøre 4 om til 3, også 5 om til 4 og 6 om til 5, slik: $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 240$, $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = 270$, $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 288$ og $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 300$. Det som muligens kan bli interessant å se på elevenes resonnementer, er om de legger merke til et mønster, og om de kanskje evner å komme opp med en hypotese. Antakelig vil en få et innblikk i om elevene har noen misoppfatninger rundt egenskapene ved multiplikasjon og den kommutative lov. Det kan bli interessant å se om de har forstått at faktorenes plassering er likegyldig.

Oppgave 4
Paul ønsket å multiplisere et helt tall med 301, men han glemte 0 og multipliserte med 31 i stedet. Han fikk svaret 372.

Hvilket resultat skulle han egentlig ha fått?
(A) 3010 (B) 3612 (C) 3702 (D) 3720 (E) 30720

Denne oppgaven handler òg om at multiplikasjon og divisjon er motsatte eller inverse regneoperasjoner, slik som oppgave 1. Likevel vil oppgave 4 trolig være noe mer utfordrende for elevene, da elevene må gjøre flere regneoperasjoner før de klarer å besvare spørsmålet. Det er også en del informasjon, dermed vil antakelig noen av elevene streve med å forstå hva de skal gjøre eller hvordan de skal ta for seg problemet. En mulig fremgangsmåte for å løse dette problemet er å dividere 372 på 31, da får man 12. Da har man funnet det hele tallet som Paul ønsket å multiplisere med 301. Videre kommer man frem til hvilket resultat han egentlig skulle fått, altså $301 \cdot 12 = 3612$. Den største utfordringen for elevene på denne oppgaven vil muligens være å forstå hva de skal gjøre, og hvilken metode de skal benytte for å løse oppgaven, mens selve regnestykket vil trolig gå greit for elevene.

Oppgave 5
Ti kort nummerert fra 0 til 9 lå på et bord. Jon trakk tre kort, George fire og Ann tre. Jon ganget tallene på kortene sine med hverandre. Det samme gjorde George og Ann. Jon fikk da 0, George fikk 72 og Ann fikk 90. Jon legger sammen tallene sine.

Hvilket tall får Jon da?
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Denne oppgaven er definitivt det mest komplekse problemet, med betraktelig mer informasjon enn de andre problemene. Her vil muligens noen av elevene møte på utfordringer med å forstå hva oppgaven spør om, og det kan muligens være utfordrende for noen av elevene å trekke ut den viktigste informasjonen i oppgaven. Trolig vil noen av elevene streve med å finne ut hvilken metode de skal benytte for å løse oppgaven. En mulig måte å finne ut hvilket tall Jon får, er å starte med å finne ut hvilke kort George, Ann og Jon trekker. Dette kan man blant annet finne ut ved å prøve seg frem. For eksempel vet en at George trakk fire kort, da kan man forsøke å multiplisere fire av tallene og se om man kommer frem til produktet 72. En annen mulighet kan være å ta $72 : 4 = 18$, og dermed finne faktorer av 18 igjen. Altså kan 18 skrives som $9 \cdot 2$. Da har vi kommet frem til faktorene 4, 9 og 2, og mangler dermed et tall. Siden $4 \cdot 9 \cdot 2 = 72$, må man benytte 1. Da får en $4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 1 = 72$. Dette er en mulighet for hvilke tall George har trukket, det finnes flere muligheter. Videre må en gjøre det samme med Ann og Jon. Det kan være systematisk å krysse ut de kortene som er benyttet, slik at man ikke bruker det samme kortet flere ganger. Til slutt vil en komme frem til at Jon har trukket kortene 0, 7 og 8. Kortet med 0 kan en anta fra starten at han har trukket, da oppgaveteksten sier at Jon multipliserte tallene sine og fikk 0. Avslutningsvis må man legge sammen kortene til Jon, og man kommer da frem til 15.

3.4 Vurdering av studien

Det er hovedsakelig to faktorer som påvirker troverdigheten til et forskningsprosjekt, dette er reliabilitet og validitet. De påfølgende avsnittene evaluerer de valgte metodene i forhold til disse to perspektivene. Videre vil jeg avslutte med noen etiske betraktninger.

3.4.1 Studiens reliabilitet

Reliabilitet handler om hvor pålitelige empirien er, og om uavhengige observasjoner og målinger av ett og samme fenomen gir samme eller tilnærmet likt resultat (Everett & Furuseth, 2012). Påliteligheten til dataene er vesentlig i all forskning da dette handler om i hvilken grad man kan stole på de funn forskeren har gjort seg i sin undersøkelse (Postholm & Jacobsen, 2013). For å styrke reliabiliteten i studien er gruppearbeidet og alle intervjuene tatt opp på bånd, og deretter er de transkribert inn i hvert sitt dokument. Denne studien benytter seg av observasjon og semi-strukturerte intervjuer som følger av at man utforsker et komplekst tema. Denne metoden representerer selve styrken i studie, da det hadde vært vanskelig å oppnå tilsvarende kunnskap ved bruk av andre metoder. Reliabilitet kan ikke kalkuleres presist, men er en nøkkelfaktor for å oppnå høy grad av kvalitet i studien (Everett & Furuseth, 2012). Det er imidlertid et grunnleggende reliabilitetsproblem i denne metoden å gjennomføre forskning på, da man studerer virkeligheten innenfor et kort tidsrom og kun med et utvalg informanter. Likevel var det flere elementer i min forskning som bidro til å styrke studiens reliabilitet. Først og fremst betraktet jeg problemløsningsoppgavene kritisk. Jeg søkte etter oppgaver som kunne besvare min problemstilling best mulig, og som kunne belyse elevenes resonnementer. I samråd med min veileder, ble vi enige om at problemløsningsoppgavene på matematikksenteret tilfredsstilte mine krav, og var tilfredsstillende for å kunne ivareta reliabiliteten i studien. I intervjusesjonen etterstrebet jeg å behandle informantene relativt likt, og derfor hadde jeg utarbeidet en intervjuguide på forhånd. Likevel forekom det noen forskjeller i de semi-strukturerte intervjuene på grunn av elevenes ulike faglige ståsted og forståelse av oppgaven. Et annet moment som kan være med på å styrke reliabiliteten til denne studien kan være den teoretiske forankringen jeg har valgt for å underbygge datamaterialet jeg har fremstilt i min analyse. Jeg har etterstrebet å benytte flere forskere som kunne underbygge de ulike funnene mine. I noen av kategoriene var dette mulig, men noen steder fant jeg bare en teoretisk forankring til funnene.

3.4.2 Studiens validitet

Validitet betyr relevans og handler om hvor gyldig dataene vi har valgt ut er med tanke på det vi ønsker å undersøke (Christoffersen & Johannessen, 2012). Validitet handler om hvordan man velger ut og samler inn data, og i hvilken grad forskningen måler de faktiske forhold man har til hensikt å måle (Everett & Furuseth, 2012). En skiller ofte mellom indre og ytre gyldighet. *Indre gyldigheten* handler om vi har dekning til å si at noe henger sammen som virkning og årsak (Postholm & Jacobsen, 2013). Jeg tok høyde for at elevenes dagsform og ytre påvirkninger kan ha innvirkning på elevenes resonnement og løsningsstrategier. Videokameraet og lydopptakeren kan blant annet være faktorer som forstyrret elevene. Derfor har jeg i analysedelen måtte være bevisst at elevenes strategibruk og resonnementer rundt oppgavene kan være påvirket av flere faktorer. Det må i tillegg tas høyde for at elevene ikke var særlig vant til slike problemløsningsoppgaver. Dette kan derfor ha begrenset elevenes resonnement og muligens påvirket deres strategibruk. Videre handler *ytre gyldighet* om hvorvidt jeg kan generalisere funnene mine til en gruppe (Postholm & Jacobsen, 2013). Da jeg kun har observert og intervjuet ti elever som brer seg ut over et faglig presterende spekter, har jeg ikke grunnlag til å generalisere. Det er verdt å merke seg at jeg med kvalitativ observasjon og intervju ikke har mulighet til å velge ut eller tolke informantenes svar uten en form for subjektiv innvirkning. Funnene er derfor mine forslag basert på det jeg oppfatter som logiske slutninger og ikke en generaliserbar viten. Likevel kan andre forskere lese studien, betrakte funnene og de analysene og slutningene jeg har trukket.

3.4.3 Etiske betraktninger

Denne studien er godkjent av Norsk senter for forskningsdata (NSD) (Vedlegg 8.1). I første omgang vil jeg påpeke at det er mine tolkninger av resultatene som danner grunnlaget for analysen, og det må dermed tas høyde for at andre kunne tolket datamaterialet annerledes. Et annet aspekt som må tas i betraktning er at gjennom min koding av datamateriale, der jeg har hatt til hensikt å plukke ut vesentlige fenomener, kan jeg ha risikert og mistet betydninger på grunn av at fremstillingen er for snever (Bryman, 2012).

Alle sitater som foreligger i oppgaven foreligger også som rådata, men vil i etterkant av studien bli slettet. Dette skjer i tråd med krav fra Norsk senter for forskningsdata (NSD) for å sikre etisk forsvarlig behandling av respondentene. Av etiske grunner er transkripsjonen av observasjonene og intervjuene anonymisert, og informantene ble før intervjuet informert om formålet med studien, om deres rolle, om retten til å være anonym. Elevene og deres foresatte måtte samtykke i forespørsel om deltakelse i forskningsprosjekt (Vedlegg 8.2).

3.5 Funn-kategoriene

Jeg har valgt å dele kapittel 4 inn i fem kategorier. Disse er: prøve og feile metoden, logisk resonnement, monitorerende strategi og monitorerende spørsmål, å stille spørsmål, og forklare gruppen når de andre ikke forstår. Disse har jeg utformet fra min egen observasjon av elevene under datainnsamlingen, samt fra forskning som omhandler resonnement og strategier. Den avsluttende kategorien, «forklare når de andre ikke forstår», er ikke basert på teori om resonnement og strategier. Denne kategorien er konstruert med tanke på det jeg observerte, i tillegg til at den henger nøye sammen med mitt overordnede teoretiske bakteppe, det sosiokulturelle læringssynet. Jeg vil nå ta for meg de ulike kategoriene, og forklare hva jeg legger i de, samt presentere teorien som ligger bak kategoriene. Videre i analysekapittelet vil jeg benytte disse kategoriene for å analysere empirien.

3.5.1 Prøve og feile metoden

Den første kategorien jeg har delt elevenes strategier inn i, er *prøve og feile metoden*. Det jeg legger i denne kategorien er at elevene forsøker, gjennom kvalifisert gjetning å komme frem til hypoteser som de senere må forsøke å bevise eller motbevise. Prøve og feile metoden er en velkjent metode innen matematikk. Denne metoden er like matematisk riktig som andre metoder, men den kan være tidkrevende før en har laget seg en metode for hvordan det er lurt å angripe problemet (Utdanningsdirektoratet, 2015). Derfor kan det være lurt å være systematisk når en bruker denne prøve og feile metoden. Jeg observerte flere ganger at elevene ikke jobbet systematisk når de benyttet denne metoden, og dermed brukte mye unødvendig tid. En systematisk måte å bruke denne metoden kan for eksempel være å skrive opp forsøkene underveis og resonnere seg frem til hva som er lurt å prøve neste gang (Utdanningsdirektoratet, 2015)

3.5.2 Logisk resonnement

Den andre kategorien jeg benytter i analysekapittelet er *logisk resonnement*. Dette er en vid kategori, som jeg blant annet fikk inspirasjon til gjennom Schoenfelds (1992) forståelse av matematisk tenkning. I denne studien forståes logiske resonnement som at elevene tegner eller lager modeller, de forsøker å finne mønstre eller komme frem til hypoteser ved hjelp av logisk resonnement. Matematikk handler om å oppdage mønstre, gjennomføre resonnementer, finne mot eksempler og argumentere logisk. Matematikk er en måte å tenke på, og en aktivitet som er både kreativ og utfordrende. Logikk handler om å utforske regler, prinsipper, lover og begreper som er forutsatt i korrekte og holdbare resonnementer, slutninger og bevis (Alnes, 2015). Logisk resonnering kort fortalt handler om at elevene trekker logiske slutninger (Schoenfeld, 1992).

Det å uttrykke seg presist i matematikk er vesentlig. I motsetning til dagliglivet hvor ord kan ha forskjellig mening og utsagn kan tolkes på ulike måter, må matematiske begreper ha klare og utvetydige definisjoner. Ved problemløsningsoppgaver må man ofte gjøre mer enn en enkeltstående utregning for å komme frem til svaret. Det kan derfor være nødvendig med et matematisk resonnement, bestående av logiske argumenter (Schoenfeld, 1992).

Samarbeid mellom elevene når de skal løse problemløsningsoppgaver kan ha positiv virkning. Både elevene kan stille hverandre undrende spørsmål, men også læreren kan komme med spørsmål. Å stille spørsmål kan blant annet føre til nye ideer. Dette kan sees i sammenheng med Mason, Burton og Staceys (1982) modell over problemløsningsprosessen. Denne modellen består av tre faser hvor første fasen *oppføringsfasen* innebærer å stille spørsmål som «hva vet jeg, og hva vil jeg?» og «hva kan jeg introdusere?» Bjuland (2002) mener at en problemløsningsstrategi hvor en stiller åpne spørsmål kan bidra til å komme frem til et overbevisende logisk argument om et problem. Jeg stilte blant annet elevene oppfølgingsspørsmål for å utfordre de til og begrunne resonnementene sine. Da måtte elevene begrunne dere logiske slutninger ved hjelp av begreper og logiske resonnement. Dette kan i følge Cestari (1997) stimulere til begrepsendring og gi støtte for elevenes nyskapning.

3.5.3 Monitorerende strategi og monitorerende spørsmål

Videre har jeg tatt i bruk kategorien *monitorerende strategi og monitorerende spørsmål* for å analysere min empiri. Det jeg legger i monitorerende strategi er at elevene går tilbake til teksten for å verifisere at de har forstått problemet riktig. Monitorerende spørsmål kan bidra til å kvalitetssikre løsningsforslagene. Gjennom denne typen spørsmål må elevene argumentere for at funnene de har gjort, og beregningene de har foretatt er nødvendige og korrekte. Som nevnt tidligere i teorikapittelet handler monitorering i følge Schoenfeld (1992) om at man i løpet av problemløsningsprosessen går tilbake til det opprinnelige problemet for å kontrollere at man har forstått det, eller at man går tilbake for å sjekke om man har tatt de riktig avgjørelsene (Schoenfeld, 1992).

Denne kategorien kan likne noe på kategorien logisk resonnement. Det er noen fellestrekk her, men det som særpreger monitorerende strategi og monitorerende spørsmål er at det er en metakognitiv atferd hvor elevene er kritiske til det de gjør, i løpet av problemløsningsprosessen går elevene tilbake til det opprinnelige problemet for å kontrollere at de har forstått det, eller at elevene går tilbake for å sjekke om de har tatt de riktig avgjørelsene. Flere studier viser at monitorering og selvregulering er metakognitiv atferd som har en avgjørende betydning for vellykket problemløsning i matematikk. Den heuristiske strategien om *monitorering* og *se tilbake på løsningen* kan knyttes til Schoenfelds (1992) tredje komponenten i hans rammeverk (monitorering og kontroll) og Polyas (1957) fjerde steg (se tilbake) i hans modell over problemløsningsprosessen.

3.5.4 Forklare gruppen når de ikke forstår

Den avsluttende kategorien jeg har konstruert har jeg kalt *forklare gruppen når de ikke forstår*. Denne kategorien er noe annerledes enn de andre kategoriene. Kategorien er ikke basert på teori om resonnement og strategier, men derimot basert på det overordnede teoretiske bakteppet til studien, nemlig det sosiokulturelle læringssynet. Denne kategorien kan sees i sammenheng med Vygotskys teori om den nærmeste utviklingssone. Han argumenterer om at det eleven kan her og nå er det aktuelle utviklingsnivået. Innenfor dette området kan eleven løse problemer uten hjelp, men eleven lærer ikke noe nytt (Lyngsnes & Rismark, 2010). Elevene i smågruppene er avhengig av en med supplerende kompetanse for å klare å løse oppgaven, hvis de ikke får den til eller forstår den. Da kan en eller flere av elevene på gruppen virke som den med supplerende kompetanse. Dette observerte jeg opptil flere ganger under gruppearbeidet, elevene måtte forklare hverandre hva oppgaven gikk ut på, hvis det var noen på gruppen som ikke forstod. Samtlige av elevene måtte forklare ulike matematiske begreper, i tillegg til at de måtte forklare hverandre hvordan de løste problemet. Dette kan være en positiv faktor ved å bruke smågrupper når man skal løse problemløsningsoppgaver.

Det er dette Vygotsky kaller for den nærmeste utviklingssonen. I denne sonen kan ikke eleven løse et problem alene, men eleven kan klare det ved hjelp av andre med mer kompetanse. Dette kan blant annet være en medelev eller læreren. Elever kan ha ferdigheter i forskjellige temaer i matematikk, og dermed kan arbeid i smågrupper være ideelt slik at de kan hjelpe hverandre.

4.0 Analyse av empiri

I dette kapittelet vil jeg legge frem relevante funn fra datainnsamlingen. Jeg har valgt å dele dem inn i de overnevnte kategorier ut ifra elevenes resonnementer og strategier når de løste problemløsningsoppgavene. Kategoriene er altså: 4.1 prøve og feile metoden, 4.2 logisk resonnement, 4.3 monitorerende strategi og monitorerende spørsmål og 4.4 forklare gruppen når de andre ikke forstår. Videre vil analysen bli sett i lys av relevant teori og diskuteres i kapittel 5.

Som tidligere nevnt, utførte jeg datainnsamlingen i to elevgrupper. Den ene elevgruppen bestod av fem høytpresterende elever i matematikk. Dette er elevene med navnene Marte, Tobias, Jon, Eric og Nina. Den andre gruppen bestod av fem lavtpresterende elever i matematikk med navnene Ester, Kristine, Niklas, Martin og Alex. Eksemplene under vil bære preg av en ujevn fordeling mellom de høytpresterende elevene og de lavtpresterende elevene. Dette fordi de høytpresterende elevene var selvstendig og viste gode resonnementer rundt problemløsningsoppgavene ved alle tre problemløsningsstrategiene. Derimot var de lavtpresterende elevene lite selvstendige, de strevde med oppgavene, og deres resonnementer bærer preget av dette. Det vil si at jeg har mer empiri som bekrefter elevene strategibruk fra de høytpresterende elevene enn fra de lavtpresterende elevene.

4.1 Prøve og feile metoden

Eksempel 4.1.1

I observasjonen og samtalene med elevene kom det frem at de stadig brukte prøve og feile strategi (omtalt i avsnitt 3.6.1) for å løse oppgavene. Dette vises blant annet i oppgave 1, der elevene skal finne ut hvilket tall som skal stå i den tomme ruta?

$142 \cdot \square = 852$

Tobias:	Begynner med 5 da, da blir det 500 foran også 5 · 40 det er 200, så det er 700.
Nina:	Er det ikke 852 delt på 142?
Eric:	Kan jo bare ta å gange det oppover kanskje.
Jon:	Det må være 6 tror jeg... Ja det er 6!
Meg:	Hvordan kom du frem til det, Jon?
Jon:	Jeg tenkte bare, jeg så bare litt på tallene. Først tenkte jeg det var 3. Men så tenkte jeg meg litt om, og det blir jo sånn da. 500-600. Så da bare nei den der tar jeg ikke. Så prøvde jeg meg på 5. Fant ut at det ikke var riktig svar. Så da tok jeg 6 også fant jeg ut at det var 852.

Her bruker både Tobias, Eric og Jon den samme strategien. Elevene forsøker, gjennom kvalifisert gjetning å komme frem til hypoteser som de senere må forsøke å bevise eller motbevise. I dette tilfellet hvilket tall de må multiplisere med 142 for å få produktet 852. Tobias beviste dette gjennom å bruke en kombinasjon av prøving og feiling, samtidig som han brukte overslag for å regne kjapt ut om det stemte. Nina derimot resonnerte seg logisk frem til hvordan de kunne løse oppgaven. Siden elevene fikk beskjed om ikke å bruke kalkulatoren, og 852 : 142 kan være vanskelig å regne i hodet, resonnerte de seg heller frem til svaret ved hjelp av å prøve seg frem, og multiplisere 142 med ulike tall. Dette ser vi Tobias uttrykker i første linje i transkriberingen: «Begynner med 5 da, da blir det 500 foran også 5 · 40 det er 200, så det er 700.» Her prøver Tobias seg frem ved å multiplisere 142 med 5, og finner ut at det ikke stemmer. Videre sier Eric at de kan jo bare gange det oppover. Dette kan tolkes som at han vil prøve ut hva for eksempel $142 \cdot 4$ er, for deretter å finne ut hva $142 \cdot 5$ er, også videre, helt til han kommer frem til løsningen. Jon brukte også prøve og feile metoden, dette kan vi se ved utsagnet hans: «Jeg tenkte bare, jeg så bare litt på tallene. Først tenkte jeg det var 3. Men så tenkte jeg meg litt om, og det blir jo sånn ca. 500-600. Så da bare nei den der tar jeg ikke. Så prøvde jeg meg på 5. Fant ut at det ikke var riktig svar. Så da tok jeg 6 også fant jeg ut at det var 852.» Jon forteller at han prøvde seg frem med ulike tall, i tillegg til at han brukte overslag for å finne ut om de ulike mulighetene stemte eller ikke. Ved hjelp av prøving og feiling, kom elevene frem til at 142 måtte multipliseres med 6 for å få 852. Elevene jobbet systematisk med denne oppgaven, og dermed fungerte prøve og feile metoden og det var lite tidkrevende for dem.

Eksempel 4.1.2

Gruppen med de lavtpresterende elevene benyttet prøve og feile metoden gjentatte ganger. Her er et eksempel på deres bruk av strategien:

Niklas:	Ja, okei. Vi kan bare prøve ut da.
Alex:	Det minste jeg fikk var 180. (...) Eh jeg gjorde 6 om til 3.
Meg:	Ja, men du skal gjøre tallet én mindre, så skal du gjøre 6 én mindre, så blir det 5.
Alex:	Da blir det 300, hvis 6 er én mindre.
Kristine:	Hvis vi gjør 5 til 4 så blir det 288.
Meg:	Mhm, så det blir enda mindre.
Ester:	Hvis du tar, eh 4 til 3, så blir det 270.
Martin:	Eh hvis du tar 3 mindre, så får du 240.
Ester:	Da er det 3 du må gjøre én mindre.

Denne gruppen trengte hjelp til å forstå oppgaven, men når jeg hadde forklart den kom Niklas med ideen om å prøve seg frem. Likevel deltok han ikke videre i oppgaven. Alex hadde ikke forstått informasjonen i oppgaven, da han sa han gjorde 6 om til 3 og fikk produktet 180. Oppgaven lyder som følger: «Du har fire tall: 3, 4, 5 og 6. Når disse multipliseres med hverandre får du 360. Du skal gjøre ett av tallene 1 mindre. Hvilket av de fire tallene må du gjøre 1 mindre for at produktet skal bli minst mulig?» Det kan tenkes at Alex ikke fikk med seg at tallet skulle gjøres én mindre, og da er egentlig hans resonnement om å gjøre 6 om til 3 for å få minst mulig produkt ganske logisk. En bør merke seg at Alex har dysleksi, og at det da kan være utfordrende med mye tekst i oppgavene. Videre forklarte jeg at om han skulle gjøre 6 én mindre, så ble det 5. Da viste Alex ved utsagnet «da blir det 300, hvis 6 er én mindre» at han hadde forstått oppgaven, hvorpå han videre foretok en korrekt utregning av produktet. Videre forsøkte samtlige elever, gjennom kvalifisert gjetning å finne ut hvilket tall som måtte være én mindre for å få lavest produkt. De kom frem til at 3 var det aktuelle tallet. Dette kommer frem ved sitatet fra Martin: «Eh hvis du tar 3 mindre, så får du 240.» etterfulgt av Esters tilføyelse «Da er det 3 du må gjøre én mindre». Kristines aktivitetsnivå kunne tyde på at denne oppgaven appellerte til henne. I intervjuet i etterkant spurte jeg henne hva hun tenkte da hun løste oppgaven:

Kristine:	Jeg vet ikke hva jeg tenkte – jeg bare prøvde å komme frem til det minste. Så bare ganget jeg, tok først 6 til 5. Så prøvde jeg på de andre. Så så jeg at det var 3 til 2 som ble det minste tallet.
Meg:	Hm. Vet du hvorfor 3 er det som gjør at det blir det minste produktet?
Kristine:	Vet ikke. Kanskje det er fordi det er det minste tallet?
Meg:	Hm. Det er en god tanke.

Kristine jobbet seg systematisk gjennom de ulike mulighetene, og kom frem til at det minste tallet skulle gjøres én mindre, for å få minst mulig produkt. Det er ikke alle elever som jobber systematisk når de benytter seg av prøve og feile metoden. Da kan denne strategien bli tidkrevende og tungvint. Kristine derimot viste at hun kunne håndtere denne strategien. I første linje i utdraget over sier hun: «(...) tok først 6 til 5. Så prøvde jeg på de andre. Så så jeg at det var 3 til 2 som ble det minste tallet.» Hun jobbet systematisk med å prøve og gjøre tallet 6 én mindre, og fortsatte helt ned til tallet 3. Videre spurte jeg Kristine om hun visste hvorfor det var tallet 3 som måtte gjøres én mindre for å få minst produkt, hvor hun responderte: «Vet ikke. Kanskje det er fordi det er det minste tallet?» Hun makter altså ikke å begrunne dette og dermed har jeg ikke grunnlag for å hevde at hun forstår hvorfor det er slik. En kan spekulere i om hun kun gjetter dette, da hun ser at tallet 3 er lavere enn tallet 6, og i tillegg sier: «Vet ikke. Kanskje det er fordi (...)». Det burde nevnes at alle på denne gruppen jobbet seg systematisk nedover. De gjorde først 6 om til 5, så 5 om til 4 og videre nedover til 3 om til 2. De kom ikke frem til løsningen, før de hadde forsøkt alle tallene. På tross av systematisk utprøving kan det altså tyde på at elevene ikke umiddelbart oppdager noe mønster. Når de hadde forsøkt et par av tallene, innebar det et potensial for generalisering siden produktet ble mindre for hver gang. Til tross for dette fremsatte altså gruppen aldri en hypotese om at det minste tallet skulle anvendes, samt gjøres én mindre.

Den høytpresterende gruppen brukte også prøve og feile metoden på denne oppgaven, og i motsetning til den lavtpresterende gruppen la disse elevene merke til mønsteret. Dette kan vi se ved sitatene under:

Jon:	Hvis vi gjør 3 om til 2, hva blir det da? Ehh 240.
Eric:	Ja det blir det. Så hvis vi gjør 4 om til 3.
Tobias:	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$.
Eric:	Det blir 270. Så det ble lavere når du tok det høyere tallet. Kanskje vi skal prøve 6 da. Kanskje 6 blir enda lavere.
Tobias:	Nei, 6 blir enda høyere.
Jon:	Det skal jo bli minst mulig.
Marte:	Når man starter med et lavt tall, så blir det jo ganske lavt.
Jon:	Det er jo 3 som er minst.
Tobias:	Ja, det er 3 man må gjøre en mindre, er det ikke det Marte?
Marte:	Jo.

Jon, Tobias og Marte ble raskt enige om at det var det lavest tallet som måtte bli én mindre. De prøvde kun ut et par muligheter, og la dermed merke til mønsteret. Når Eric sier at produktet blir lavere når de tar et høyere tall, avkrefter Tobias dette som vist i utdraget over: «Nei, 6 blir enda høyere». Tobias viser en forståelse for at produktet blir høyt, hvis de velger å gjøre det største tallet én mindre. Jon forklarer Eric at produktet skal bli minst mulig. Det virker altså som at Tobias og Jon har sett noe av mønsteret siden de uttrykker at det ikke kan være 6. I form av utsagnet: «Når man starter med et lavt tall, så blir det jo ganske lavt», påstår Marte at produktet blir lavt om man anvender et lavt tall. Dette sitatet belyser flere aspekter. Det stemmer at produktet blir lavt, med et lavt tall, men Marte viser samtidig en misoppfatning knyttet til faktorenes betydning ved multiplikasjon. Dette sitatet kan nemlig gi uttrykk for at Marte ikke er klar over den kommutative lov for multiplikasjon ved utsagnet: «Når man starter med et lavt tall (...).» Resonnementet hennes kan oppfattes som at tallets plassering i et multiplikasjonsstykke har betydning for produktet. Dette samsvarer ikke med den kommutative lov som sier at faktorenes plassering er likegyldig, altså: $a \cdot b = b \cdot a$. Sett bort fra Martes misoppfatning, er det likevel interessant at elevene legger merke til mønsteret, og derfor kommer frem til hypotesen om at det minste tallet må gjøres én mindre. Dette kan bli forstått i sammenheng med at gruppen med de høytpresterende elevene muligens har lettere for å gjøre logiske resonnementer, enn gruppen med de lavtpresterende.

4.2 Logisk resonnement

Gruppen med de høytpresterende elevene utpreget seg ved denne kategorien. De formidlet en rekke eksempler som antydet en logisk resonnerende strategi (omtalt i avsnitt 3.6.2). Derimot viste de lavtpresterende elevene kun antydning til logiske resonnement ved et eksempel (4.2.2). Da de høytpresterende elevene viste en tendens til å bruke denne strategien aktivt under arbeidet med problemløsningsoppgavene, og i tillegg at denne kategorien er ganske vid, vil det bli noen flere eksempler fra denne kategorien enn fra de andre.

Eksempel 4.2.1

Tobias utpreget seg ved bruk av denne strategien. Introduksjonsoppgave a)lyder som følger: Lag to tosifrede tall av sifrene 5, 6, 7 og 8 og plasser sifrene slik at produktet blir størst mulig.

Tobias:	Det må jo bli sånn at første tallet er størst på begge sidene da. Sånn **8**6 · **7**5 eller noe. Fordi da ganger du med 10 i stedet for én. (...) Nei vent a, det er enten 86 · 75 eller 85 · 76.
Meg:	Hva tenkte du når du skulle løse denne?
Tobias:	Det var egentlig bare å prøve ut forskjellig, og tenke litt sånn hva er det som blir stort, i foran, og tiere og sånn. For å få produktet så høyt som mulig, må du ha de høyeste tallene på tier plassen liksom.

Her resonnerer Tobias seg frem til en hypotese ved hjelp av et resonnement knyttet til at de største tallene må stå først for å få et størst mulig produkt. Slik jeg oppfatter det viser Tobias med dette at han i høy grad ser hvordan multiplikasjon av heltall kan relateres til posisjonssystemet. Utsagnet «fordi da ganger du med 10 istedenfor én» tyder på forståelse for hvordan plasseringen av sifrene i posisjonssystemet, altså tierne, påvirker produktets verdi. Tobias sier først at de tallene som blir store må stå foran. Videre gjør han resonnementet sitt tydeligere, ved å si at de høyeste tallene må stå på tierplassen. For å få et størst mulig produkt, ønsker han altså å plassere de største tallene på tierplassen. Tobias' logiske resonnementet knyttet til tallenes plassering i posisjonssystemet og hvordan plasseringen påvirker produktet, blir ytterligere bekreftet gjennom Tobias' plassering av de laveste tallene på enerplassen (i transkripsjonens siste linje). Tobias gjør i tillegg et logisk resonnement ved å peke på to muligheter for å få et størst mulig produkt, i form av 86 · 75 = 6450 og 85 · 76 = 6460.

Om vi i en tilsvarende situasjon vender blikket mot den lavtpresterende gruppen, observerte jeg at elevene sa seg fornøyd med ett av alternativene. Oppgaven var i dette tilfellet: Lag to tosifrede tall av sifrene 5, 6, 7 og 8 og plasser sifrene slik at produktet blir lavest mulig. Under kommer et eksempel på dette.

Eksempel 4.2.2

Nå kommer et eksempel fra den lavtpresterende elevgruppen:

Niklas:	56 · 78. Blir 4368.
Martin:	Hva gjorde du Ester?
Ester:	Jeg tok 58 · 67.

Niklas:	Okei, greit.
Martin:	Og da ble svaret?
Ester:	3886.
Niklas:	Hva brukte du egentlig?
Ester:	58 · 67
Martin:	Og det var?
Niklas:	Det var 3886.

Elevene prøvde ut to muligheter i denne oppgaven. Det første tallet de fikk var 4368. Videre prøvde Ester en annen kombinasjon, 58 · 67 som er 3886. Elevene sier seg fornøyde med dette og ser ikke at det er en annen mulighet, altså 57 · 68 som er ti lavere. Slik jeg oppfatter det kan en forklaring på dette være at de ikke ser kombinasjon nummer to med tanke på de to «nesten like» alternativene. En andre mulighet kan være det jeg var inne på i eksempelet over, nemlig at de ikke ser at det blir forskjellige produkter av de to mulighetene. I eksempelet over var de to mulighetene 86 · 75 og 85 · 76, mens i dette tilfellet er det 58 · 67 og 57 · 68. Dette kan altså skyldes en oppfatning som kan relateres til den distributive lov. Den distributive lov sier at hvis vi skal multiplisere et tall med to ledd, så multiplisere først hver av addendene med tallet, og deretter adderes produktene [$a \cdot (b + c) = ab + ac$]. Ved addisjon ville disse elevenes resonnement gitt fullstendig mening. 57 + 68 vil være det samme som 58 + 67, men dette gjelder ikke for multiplikasjon. Tar vi i dette tilfellet (57+1) · (68-1) får vi altså, grunnet egenskaper ved den distributive lov, ikke samme produkt som ved 58 · 67 siden multiplikasjon er distributiv med hensyn på addisjon.

Eksempel 4.2.3

På introduksjonsoppgave c) foretok Tobias, fra den høytpresterende gruppen, en refleksjon som sorterer under kategorien «logisk resonnement». Her skulle elevene bruke de samme sifrene, 5, 6, 7 og 8 som faktorer for og få sifferet 8 på enerplassen i produktet.

Tobias:	Er det noe i 8-gangen som blir 8 bakerst. 8 og 6 bak og 5 og 7 foran kanskje?
Marte:	Hvis man ganger 8 med 6 så blir det jo 48, altså 8 på enerplassen.
Tobias:	Ja, 8 på enerplassen, så du må vi ha 8 bak og 6 bak. Fordi 7 · 5 det blir 35.

I stedet for å prøve og multiplisere sammen hele tallet, for eksempel 56 · 78, resonnerte Tobias og Marte seg logisk frem til at ved å plassere to tall på enerplassene som får et produkt med 8 på enerplassen, så vil også sluttproduktet ende på 8. Dette ser vi ved Tobias´ sitat: «Er det noe i 8-gangen som blir 8 bakerst. 8 og 6 bak og 5 og 7 foran kanskje?». I deres tilfelle blir dette eksemplifisert gjennom 6 · 8 = 48. Her forsøkte de å finne et mønster. Videre kom de frem med en hypotese. De fant ut at hvis de to tallene på enerplassen fikk et produkt med 8 på enerplassen, så ville produktet av hele multiplikasjonsstykket også få 8 på enerplassen. Videre sjekket Marte og Tobias at dette stemte. Det gjorde det i deres tilfelle, så da trakk de logiske slutninger. Denne generaliseringen er gyldig siden alle tall, uansett antall sifre, kan skrives som et produkt av 10 addert med siste siffer. Dette ligger i posisjonssystemets egenskaper i form av oppbyggingen av 10´er potenser. Dermed kan en sette opp to gitte tall med sluttsifrene a og b slik, på generell form: $(10n + a) \cdot (10m + b) = 100nm + 10nb + 10ma + ab$. De tre første leddene her er alle delelige på 10, så uansett hvor stort tallet er, så vil sluttsifferet bli ab's sistesiffer. Så hvis ab = 48 (som i elevenes tilfelle over), legges «40» til tierne foran, slik at siste sifferet blir 8. Dette handler altså om hvordan posisjonssystemet er oppbygd. Det som kunne vært interessant her, er om elevene hadde gått videre med problemet, og testet om hypotesen deres stemte uansett hvilke tallkombinasjoner som ble brukt. Deretter kunne det ha vært interessant og sett om de videre maktet å begrunne dette i form av liknende resonnement som over.

Eksempel 4.2.4

Elever kan ha en tendens til å godta løsninger og ikke være kritiske og fundere over hvorfor matematikken blir slik. Hensikten med problemløsningsoppgaver er at det skal få en til å bli nysgjerrig over matematikken, og prøve ut andre tilfeller, komme med hypoteser, og arbeide videre med oppgaven etter å ha funnet løsningen. Det var ikke disse elevene vant til, men jeg prøvde å utfordre de på det. Under intervjuet med Marte fra den høytpresterende gruppen utfordret jeg henne på spørsmålet:

Meg:	Hva tror du gir størst produkt av $86 \cdot 75$ eller $85 \cdot 76$?
Marte:	Det er noe av det som fikk meg litt til å tenke i stad. Jeg lurer på om det var $85 \cdot 76$.
Meg:	Mhm, det stemmer, det er ti mer. Men vet du hvorfor?
Marte:	Eh jeg er ikke helt sikker, det er bare, de er liksom lenger i fra hverandre (peker på $86 \cdot 75$). Eller de er jevnere enn det. Og at det da gir høyere.

Det var litt interessant at Marte stusset over akkurat dette tilfellet om hvilke av tallkombinasjonene som gir størst produkt av $86 \cdot 75$ eller $85 \cdot 76$, da jeg på forhånd hadde planlagt å spørre elevene om dette. Hun sier selv under observasjonen at hun ikke forstår hvorfor den ene blir ti mer enn den andre. De andre elevene ga ikke uttrykk for at de tenkte noe over dette, mens Marte ble stående ved dette og stusse over det. I intervjuet uttaler hun at «Det er noe av det som fikk meg litt til å tenke i stad. Jeg lurer på om det var $85 \cdot 76$.» Det er akkurat dette en ønsker at skal skje, når elevene jobber med problemløsningsoppgaver. Mason og Davis (1991) legger vekt på at et problem er først et problem, når det er et problem for den som skal løse det. Et problem er noe som går inni deg, det opptar deg og ønsker å bli løst (Mason & Davis, 1991). Det var slik jeg oppfattet at introduksjonsoppgaven føltes for Marte. Det var noe der som pirret ved nysgjerrigheten hennes, og hun fikk lyst til å finne ut av det.

Ved spørsmålet om hun vet hvorfor forteller hun: «Eh jeg er ikke helt sikker, det er bare, de er liksom lenger i fra hverandre (peker på $86 \cdot 75$). Eller de er jevnere enn det. Og at det da gir høyere.» Marte har et interessant resonnement om hvorfor det ene produktet blir 10 mer. Hun påstår at den med lavest differanse mellom faktorene ($85 \cdot 76$ har 9 i differanse) får høyest produkt, mens den med høyest differanse mellom faktorene ($86 \cdot 75$ har 11 i differanse) får lavest produkt. Marte kommer altså opp med en slags hypotese. Dette kan generaliseres ved hjelp av å skrive $c = a \cdot (a + 9)$ og $d = (a - 1) \cdot (a - 1 + 11)$ som er en generell notasjon for den type tall det her er snakk om. $c = a \cdot (a + 9)$ står da for faktorene $85 \cdot 76$ som har 9 i differanse og $d = (a - 1) \cdot (a - 1 + 11)$ står for $86 \cdot 75$, som har 11 i differanse. En kan ut ifra dette vise algebraisk, at d er 10 lavere enn c (altså at $d = c - 10$) fordi $d = 2a - a + 11a - a + 1 - 11 = 11a - 10$. Videre får en at $c = 2a + 9a = 11a$. Altså er $d = c - 10$. Marte kom noen skritt lenger enn bare å løse problemet, og ved logisk resonnement kom hun frem til en hypotese. Hun var nysgjerrig og ønsket å finne ut av problemet. Det kunne vært interessant og sett om hun hadde evnet og gått videre med problemet og bevist hypotesen sin generelt slik som over.

Eksempel 4.2.5

Jeg synes det var utfordrende at elevene ikke var vant til å arbeide med problemløsningsoppgaver. De sa seg ofte ferdig med oppgavene, etter å ha kommet frem til løsningen. Derfor spurte jeg de oppfølgingsspørsmål for å «tvinge» de til å tenke logisk. Jeg forsøkte å utfordre Jon fra den høytpresterende gruppen med samme spørsmål som Marte i eksempelet over, for å få innsyn i resonnementet hans:

Meg:	Hva tror du gir størst produkt av 86 · 75 eller 85 · 76?
Jon:	85 og 76.
Meg:	Mhm, hvorfor tror du det?
Jon:	Jeg vet ikke, lurespørsmål!
Meg:	Hehe nei, men det stemmer. Den er 10 større. Tippet du, eller tenkte du logisk?
Jon:	Eh, jeg tenkte, jeg har jo sett noen sånne oppgaver før. Så tenkte jeg bare at det var noen sånne greier. Men det er kanskje fordi hvis du ganger 6 · 8 og 5 · 8. Så ser du jo at 6 · 8 (altså 85 · 76) er større enn 5 · 8 (altså 86 · 75). Så det var vel litt sånn jeg tenkte.

Når jeg spurte Jon hvilke av tallkombinasjonene som ga størst produkt, responderte han ved sitatet: «Jeg vet ikke, lurespørsmål!» Det kan virke ut som at Jon ikke er vant til slike spørsmål, og heller ikke er vant til å fundere over matematikken. Bjuland (2002) mener at en problemløsningsstrategi hvor en stiller åpne spørsmål kan bidra til å komme frem til et overbevisende argument om et problem. Jon gjør noen resonnementer rundt spørsmålet. Dette ser vi ved sitatet: «Det er kanskje fordi hvis du ganger 6 · 8 og 5 · 8. Så ser du jo at 6 · 8 (altså 85 · 76) er større enn 5 · 8 (altså 86 · 75). Så det var vel litt sånn jeg tenkte.» Jon sine resonnementer kan muligens forståes som at **85** · **76** er størst fordi 6 · 8 blir større enn 5 · 8, som kommer fra **86** · 7**5**. Dessverre stemmer ikke hypotesen hans ved alle tilfeller. Hvis en prøver å spesialisere og prøve ut dette med andre tilfeller og tar andre tall 1, 2, 3 og 4. Så stemmer hypotesen til Jon den ene veien, altså **42** · **31** og **41** · **32**. Denne hypotesen strider imot den kommutative lov ved multiplikasjon, altså at $a \cdot b = b \cdot a$. Hvis en flytter om på faktorene slik at du får **31** · **42** og **32** · **41**, så stemmer ikke Jons hypotese. I følge hypotesen til Jon skal da 31 · 42 bli størst, fordi 3 · 2 er større enn 3 · 1. Dette stemmer ikke. Det kunne likevel vært interessant for elevene å arbeide videre med denne hypotesen, for å oppleve en misoppfatning, for så å prøve å finne en ny hypotese. Det kunne bidratt til en større forståelse for multiplikasjon og den kommutative loven.

4.3 Monitorerende strategi og monitorerende spørsmål

Eksempel 4.3.1

Monitorerende spørsmål (omtalt i avsnitt 3.6.3) kan bidra til å kvalitetssikre løsningsforslagene. Gjennom denne typen spørsmål må elevene argumentere for at funnene de har gjort, og beregningene de har foretatt er nødvendige og korrekte. Årsaken til at jeg ville ha med denne kategorien er fordi dette er en strategi som er viktig ved problemløsning. Under gruppearbeidet observerte jeg at begge elevgruppene var lite kritiske og hadde mangel på bruk av monitorerende strategi. Flere studier viser at monitorering og selvregulering er metakognitiv atferd som har en avgjørende betydning for vellykket problemløsning i matematikk. Den høytpresterende gruppen viste antydning til en monitorerende strategi på oppgave 5. Dette var den mest komplekse oppgaven med en del informasjon i oppgaveteksten. Oppgaven lyder som følger: Ti kort nummerert fra 0 til 9 lå på et bord. Jon trakk tre kort, George fire og Ann tre. Jon ganget tallene på kortene sine med hverandre. Det samme gjorde George og Ann. Jon fikk da 0, George fikk 72 og Ann fikk 90. Jon legger sammen tallene sine. Hvilket tall får Jon da?

	(...)
Tobias:	0, 7 og 8 på Jon da.

Jon:	Jon da? Så Jon hadde 7 og 8.
Tobias:	15!
Jon:	Ja det er 15.
Eric:	Men hva hadde Ann?
Marte:	$6 \cdot 5 \cdot 3$. Så da hadde Jon 0, 7 og 8.
Tobias:	Ja som er 15.

Jon, dobbeltsjekker at alle tallene stemmer i forhold til informasjonen:

Jon:	Hvis vi tar $7 \cdot 8 \cdot 0$. Også $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$. Det var det George hadde. Også hadde Ann 90. Det er $5 \cdot 6 \cdot 3$.
Marte:	Blir det 15 da?
Tobias:	Ja.
Jon:	Jeg fikk også det!
Meg:	Da kom dere frem til?
Alle:	15!

I de fire første linjene her kommer Tobias og Jon frem til hvilke kort Jon har trukket. Dette uttrykker Tobias: «0, 7 og 8 på Jon da.(...) 15!» Tobias kommer frem til hvilke kort Jon får og hva summen blir når han legger dette sammen. Her har elevene løst oppgaven, og er egentlig ferdig med den. Likevel spør elevene hverandre spørsmål for å kvalitetssikre at de har løst oppgaven korrekt. Dette ser vi blant annet ved sitatet til Eric: «Men hva hadde Ann?» Marte svarer med sitatet: «$6 \cdot 5 \cdot 3$. Så da hadde Jon 0, 7 og 8.» Videre supplerer Tobias: «Ja som er 15». I stedet for å si seg ferdig med oppgaven, diskuterer elevene svarene for å se at alle er enige og at det stemmer. Dette tyder på en monitorerende strategi blant elevene. De stiller hverandre monitorerende spørsmål, som kan bidra til å kvalitetssikre løsningsforslagene. Gjennom denne typen spørsmål må elevene argumentere for at funnene de har gjort, og beregningene de har foretatt er nødvendige og korrekte. Monitorering handler om at man i løpet av problemløsningsprosessen går tilbake til det opprinnelige problemet for å kontrollere at man har forstått det, eller at man går tilbake for å sjekke om man har tatt de riktig avgjørelsene (Schoenfeld, 1992). Videre fortsetter Jon å dobbeltsjekke alle tallene, dette ser vi ved sitatet: «Hvis vi tar $7 \cdot 8 \cdot 0$. Også $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$. Det var det George hadde. Også hadde Ann 90. Det er $5 \cdot 6 \cdot 3$.» Det kommer tydelig frem at Jon går tilbake til oppgaveteksten og sjekker at alle tallene stemmer, i forhold til informasjonen de har fått. Videre spør Marte: «Blir det 15 da?» Hun viser at hun også lurer på om det de har kommet frem til stemmer. Tobias svarer ja, og Jon bekrefter med sitat: «Jeg fikk også det» Elevene viste en tydelig monitorerende strategi på denne oppgaven, og de stilte hverandre monitorerende spørsmål for å kontrollere at de hadde tatt riktige avgjørelser.

4.4 Forklare gruppen når de ikke forstår

Eksempel 4.4.1

Jeg observerte at Eric og Tobias måtte forklare Jon og de andre på den høytpresterende gruppen (denne strategien er omtalt i avsnitt 3.6.4). Dette kan være en positiv virkning av det å arbeide i smågrupper. Jeg vil nå se på et eksempel hvor dette forekommer:

Eric:	Så til venstre tar vi største tallet.
Jon:	Sånn (peker) 87?

Tobias:	Nei, hvor du må ha det største tallet på den motsatte siden (peker på faktoren til høyre for multiplikasjonstegnet). Fordi da ganger du med 10 i stedet for én. Så jeg tror det er 86 og så 75.
Jon:	$86 \cdot 75$.
Tobias:	Ja, fordi du skal lage to tosifrede tall.

Eric prøver å forklare Jon hva han skal gjøre på oppgaven ved utsagnet: «Så til venstre tar vi største tallet». Det er en vag forklaring av Eric, og dette ser vi ved Jons svar på utsagnet: «87?». Erics forklaring kan forståes som at det største tallet skal plasseres til venstre for multiplikasjonstegnet. Det kan virke som at det er slik Jon forstår Eric. Da supplerer Tobias: «Nei, hvor du må ha det største tallet på den motsatte siden. Fordi da ganger du med 10 i stedet for én. Så jeg tror det er 86 og så 75.» Tobias prøver å forklare at det største tallet skal stå til venstre i hver faktor for at produktet skal bli størst mulig. Han beskriver dette ved hvordan plasseringen av sifrene i posisjonssystemet påvirker produktets verdi, ved sitatet: «(...) fordi da ganger du med 10 i stedet for én». I tillegg gir han et eksempel for å utdype sin muntlige forklaring. Her virker både Eric og Tobias som supplerende kompetanse for Jon og de andre medelevene på gruppen. Dette tilfellet kan sees i sammenheng med Vygotskys teori om den nærmeste utviklingssone. Her hjelper elevene hverandre. Dette kan være nyttig for begge parter, både for den som får hjelp eller blir forklart noe, men også for den som forklarer. Det kan være lærerikt for elever når de må sette ord på deres forståelse, og det kan bidra til å gjøre de mer bevisst på hvorfor de gjør som de gjør. Det Tobias og Jon forsøker å hjelpe Eric med er at sifrenes plassering i faktorene spiller en rolle for produktets verdi, på grunn av titallsystemets oppbygging. Det betyr at et siffers betydning avhenger av posisjonen (Aubert, 2005-2007). En kan se på dette i sammenheng med elevenes forslag. 86 og 75 kan skrives som $8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$ og $7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. Jeg tolker at det er dette Tobias mente med sitt resonnement: «Nei, hvor du må ha det største tallet på den motsatte siden (...) fordi da ganger du med 10 i stedet for én. Så jeg tror det er 86 og så 75.»

Eksempel 4.4.2

Elevene i smågruppene er avhengig av en med supplerende kompetanse for å klare å løse oppgaven, hvis de ikke får den til eller forstår den. Her kommer en observasjon av at en elev på den høytpresterende gruppen må forklare et begrep for en medelev:

Eric:	Så skal det bli minst mulig også. Er det sånn at vi kan ta å velge mellom om vi skal gange eller plusse de? Det står produkt?
Marte:	Produkt, det er jo liksom sånn at man har ganga. Så svaret til et gangestykke.

Eric viser at han har en misoppfatning om begrepet produkt, dette kan vi se ved sitatet: «Er det sånn at vi kan ta å velge mellom om vi skal gange eller plusse de? Det står produkt?» Eric viser at han ikke er klar over hva det matematiske begrepet betyr, og er dermed avhengig av en med supplerende kompetanse for å klare å løse oppgaven. I følge Vatne (2016) kalles svaret i et multiplikasjonsstykke for produkt. Marte forsøkte å forklare Eric dette ved utsagnet: «Produkt, det er jo liksom sånn at man har ganga. Så svaret til et gangestykke.» Marte fungerte som den med tilførende kompetanse i dette tilfellet. Hun forklarte begrepet på en enkel, men korrekt måte. Mest sannsynlig er det like lærerikt for Marte å forklare det matematiske begrepet produkt, som det er for Eric å få kunnskap om begrepet. Elever lærer gjennom samhandling med andre, og ved å bruke språket som et medierende verktøy. Dette tilfellet er et eksempel på læring i et sosiokulturelt perspektiv. Schoenfeld (1992) beskriver problemløsning og tenking som en sosial prosess.

Eksempel 4.4.3

Under er et eksempel fra den lavtpresterende gruppen.

Martin:	Han George fikk 72.
Niklas:	Jeg prøvde å dele, men det gikk ikke. Hva var det du gjorde når du fikk 72 Martin?
Martin:	12 gange 6.
Ester:	12?
(...)	
Meg:	Dere har bare kortene 0 til 9. Så det dere vet er at George trakk fire kort og til sammen fikk George 72.
Ester:	Så da trakk George fire kort og da var de borte, også trakk Ann tre. (...) Hvis du tar 1 · 3 · 4 · 6. Det var det han som trakk fire, trakk.
Niklas:	Hæ, hva gjorde du for å finne ut det?
Ester:	Jeg bare ganga (...) Ann trakk, hva var det jeg tok nå! 5 gange 7. Nei. Ehm, 9 · 5 · 2.
Niklas:	Og da fikk Jon 0, 7 og 8.

Elevene samarbeidet og stilte hverandre spørsmål når de lurte på noe. Dette kan en se ved utsagnet: «Jeg prøvde å dele, men det gikk ikke. Hva var det du gjorde når du fikk 72 Martin?» Her deler Niklas sine ideer med gruppen, og forteller at han ikke fikk det til slik. Dermed spør han Martin om råd, for å klare og arbeide videre med oppgaven. Elevene i smågruppene er avhengig av en som har mer kompetanse for å klare å løse oppgaven, hvis de ikke får den til eller forstår den. Da kan en eller flere av elevene på gruppen virke som den med supplerende kompetanse. Niklas spør Martin om hjelp. Ester rettleder Martin da han uttrykker at han multipliserte 12 med 6, ved sitatet: «12?». Her svarer Ester kritisk til Martins forslag.

Etter det, kom ikke elevene noen vei, derfor supplerte jeg ved å forklare at de hadde kortene 0 til 9, og at de vet at George trakk fire kort, og til sammen fikk han 72. Deretter resonnerer Ester slik: «Så da trakk George fire kort og da var de borte, også trakk Ann tre (...) Hvis du tar 1 · 3 · 4 · 6. Det var det han som trakk fire, trakk. » Det kan virke ut som at Ester først resonnerer over hva George og Ann gjorde, for å få en forståelse videre for hva hun skulle gjøre. Deretter kommer hun opp med et forslag til hva George kan ha trukket av kort. Niklas responderer med sitatet: «Hæ, hva gjorde du for å finne ut det?» Niklas henger ikke med, og trenger hjelp for å komme seg videre. Ester virker nå som den med supplerende kompetanse, som kan hjelpe elevene i den nærmeste utviklingssonen. Uten Esters hjelp, eller de andre medelevene, ville Niklas mest sannsynlig ikke kommet videre i oppgaven. Ester forklarer at hun multipliserte, og fortalte at Ann fikk kortene 9 · 5 · 2. Da kom Niklas frem til at Jon måtte få kortene 0 ,7 og 8.

Det jeg ønsker å vise ved dette eksempelet er at elevene rettleder og hjelper hverandre når de står fast. Dette ser vi blant annet ved Ester som forklarer til Niklas at han må multiplisere fire tall for å finne ut hvilke kort George fikk. Oppgaveteksten sier at Jon ganget tallene på kortene sine sammen og at Ann og George også gjorde det samme, og da fikk George 72. Likevel kan det virke ut som at Niklas ikke har forstått dette, men når Ester forklarer det kommer Niklas opp med forslaget om at Jon må ha fått kortene 0, 7 og 8. Det kan antydes som at Ester klarer å formidle hensikten med oppgaven på en god måte til Niklas, siden han kommer opp med løsningen rett etterpå. Samtlige av elevene skjønner deler av oppgaven og dermed kan de bidra på ulike stedet i oppgaven, og sammen klarte de å løse den ved samarbeid og ved hjelp av språket. Ved diskusjon rundt problemet vil elevgruppen bidra med ulike perspektiver, i tillegg til at de får øvd seg på å sette ord på tanker og ideer, samt aspekter de er usikre på rundt problemet. Arbeid med problemløsning i smågrupper kan sees i lys av et sosiokulturelt læringssyn (Carlsen, 2008). Her vil medierende verktøy spille en vesentlig rolle for læring. I dette tilfellet er medelevene og språket elevenes viktigste medierende verktøy.

5.0 Diskusjon

Målet med denne studien har vært å undersøke elevers resonnement under arbeid med problemløsningsoppgaver. Den overordnede problemstillingen lyder som følger: *Hvordan resonnerer elever på 9.trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon?* Med utgangspunkt i problemstillingen formulerte jeg to underspørsmål, som skulle styre arbeidet mitt underveis, samt bidra til å besvare problemstillingen. Derfor har jeg valgt å dele diskusjonen inn i disse to underspørsmålene: *1. Hvordan resonnerer elever og hvilke strategier benytter de?* og *2. Hvordan foregår problemløsning i smågrupper?* I dette kapittelet vil jeg forsøke å diskutere min analyse av empiri opp mot relevant teori og tidligere forskning, som jeg tok for meg i kapittel 2. I kapittel 6 vil jeg avslutte med en konklusjon, hvor jeg forsøker å besvare min overordnede problemstilling.

5.1 Hvordan resonnerer elever og hvilke strategier benytter de?

Under observasjonen av elevene i gruppe og i de individuelle intervjuene, fikk jeg et visst innsyn i elevenes resonnementer og tanker rundt problemløsningsoppgavene. Videre utfordret jeg elevene til å formidle hvordan de tenkte, resonnerte og satte ord på hvilke strategier de benyttet seg av. Jeg vil i dette avsnittet prøve å besvare underspørsmål 1: *hvordan resonnerer elever og hvilke strategier benytter de?* Når elevene arbeidet i grupper med problemløsningsoppgaven, observerte jeg at elevene i hovedsak benyttet tre ulike strategier. Disse var, som nevnt tidligere i kapittel 4, (1) prøve og feile metoden, (2) logisk resonnement og (3) monitorerende strategi og monitorerende spørsmål. Gjennom elevenes arbeid fikk jeg innblikk i elevenes strategivalg og jeg fant eksempler fra alle kategoriene blant de høytpresterende elevene. Den lavtpresterende gruppen viste at de benyttet prøve og feile metoden og logisk resonnement. Kategorien monitorerende strategi og monitorerende spørsmål er kun eksemplifisert fra den høytpresterende elevgruppen, dette fordi den lavtpresterende gruppen viste ingen antydninger til det. Dette vil jeg gå dypere inn på under avsnitt 5.1.3. Jeg vil nå ta for meg hver enkelt strategi.

5.1.1 Prøve og feile metoden

I observasjonen og samtalene med elevene kom det frem at både de høytpresterende elevene og de lavtpresterende elevene benyttet prøve og feile metoden. Eksempel 4.1.2 illustrerer at begge elevgruppene på en konstruktiv måte håndterte denne metoden. Her skulle elevene finne ut hvilke av tallene 3, 4, 5 og 6 som måtte gjøres én mindre, for at produktet skulle bli minst mulig. Det kan være interessant å sammenlikne de høytpresterende elevenes resonnementer i dette eksempelet, med de lavtpresterende elevenes resonnementer. Jeg vil derfor ta for meg begge gruppene.

De høytpresterende elevene kom frem til at det var tallet 3 som måtte gjøres én mindre for å få minst mulig produkt. Dette mener jeg å se i utsagnet til Marte: «Når man starter med et lavt tall, så blir det jo ganske lavt.» Sett bort i fra Martes antydning om en misoppfatning av faktorenes betydning ved multiplikasjon, så er det interessant at elevene legger merke til mønsteret i denne oppgaven når de prøver seg frem. Derfor prøver de kun et par tilfeller før de kommer opp med hypotesen om at det er det minste tallet som må gjøres én mindre. Det kommer frem at disse to elevgruppene, de høytpresterende elevene kontra de lavtpresterende elevene, befinner seg på ulike stadier i læringsprosessen.

De høytpresterende elevene viser en tendens til å gå inn i den matematiske problemløsningsprosessens ulike stadier. En kan se dette i sammenheng med blant annet Polyas (1957) firetrinnsmodell, hvor første stadiet er *å forstå problemet.* Dette stadiet har nært samsvar med første fasen til Mason, Burton og Staceys (1982) tretrinnsmodell, som er *oppfølgingsfasen*. Aktiviteten i denne fasene handler om å stille seg spørsmål som «hva vet jeg, og hva vil jeg» og «hva kan jeg introdusere». Denne prosessen kalles *spesialisering*, som er et begrep som er videreutviklet av Mason og Davis (1991). Spesialisering handler om å prøve ut spesielle tilfeller eller handlinger av forenkling, for å være i stand til å manipulere objekter, diagrammer og tallmønstre (Boesen, 2006; Mason & Davis, 1991). Derfor kan en muligens kun delvis si at de høytpresterende elevene spesialiserer. De prøver ut med de gitte tallene fra oppgaven og ikke enkelt tilfeller, og legger dermed merke til mønsteret. Mason og Davis (1991) understreke at spesialisering, handler om å være på jakt etter et enklere eksempel, eller en enklere oppgave. Ved å gjøre problemet lettere kan en oppdage mønstre som er felles for flere eksempler. Det så ikke ut til at de høytpresterende elevene forsøkte å gjøre dette problemet til et enklere eksempel, men de gjorde problemet enklere ved å prøve ut ulike tilfeller fra det opprinnelige problemet. Dette kommer frem i Jons utsagn: «Hvis vi gjør 3 om til 2 (...)», videre supplerer Eric: «(...) Så hvis vi gjør 4 om til 3». En kan se at elevene går inn i problemstillingen og forenkler det ved å prøve ut ulike tilfeller. Dette gjør det letter for de å oppdage mønsteret ved at de prøver ut ulike kombinasjoner.

Etter at elevene har spesialisert problemet, går de videre til neste fase som Mason et al. (1982) omtaler som *angrepsfasen.* Denne fasen består av de to matematiske prosessene *conjecturing* og *convincing.* Mason og Davis (1991) forklarer conjecturing fasen som en prosess med bevegelig testing, og å modifisere de antakelser man kommer opp med. Dette kan altså forståes som å lage hypoteser. Dette gjør de høytpresterende elevene i noen grad, selv om de muligens ikke er klar over det. Martes utsagn «Når man starter med et lavt tall, så blir det jo ganske lavt.» kan tolkes som en hypotese. Elevenes resonnement om at det er det minste tallet som må gjøres én mindre for å få et minst mulig produkt, kan oppfattes som en hypotese i følge Mason og Davis (1991). Videre «lukter» elevene så vidt på tredje fasen til Mason og Davis (1991) – *convincing.* Denne prosessen er preget av å begrunne de antakelser man gjør ved å forklare hvorfor et utsagn er sant eller holder (Mason & Davis, 1991). Denne aktiviteten med å forklare hvorfor, inneholder tre stadier: overbevise seg selv, overbevise en venn, og overbevise en fiende eller skeptisk kollega (Mason et al., 1982). Etter at de har kommet frem til at det er det minste tallet som må gjøres én mindre, forklarer elevene for hverandre at det altså er tallet 3 som må gjøres én mindre. Dette kommer frem gjennom uttalelsen til Jon: «Det er jo 3 som er minst» og videre supplerer Tobias: «Ja, det er 3 som må gjøres én mindre.» Når en skal overbevise gjøres dette ofte ved å prøve ut et annet tilfellet eller gjør annen utregning som skal overbevise om at hypotesen stemmer. Dette gjør ikke de høytpresterende elevene.
En mulig forklaring på dette kan være at de høyt presterende elevene forstod problemet, og at de derfor ikke så noen nødvendighet med å prøve ut et annet eksempel? Det er en mulig forklaring, men det kan allikevel i følge Mason og Davis (1991) sees som hensiktsmessig å gå igjennom stadie 3 for å bekrefte antakelsen.

Elevene var som tidligere beskrevet ikke vant til å arbeide med problemløsningsoppgaver i matematikkundervisningen. Likevel kan en forsiktig anslå, ut i fra de høytpresterende elevenes resonnementer, at det tyder på at de har et godt utgangspunkt for videre læring i problemløsning. Disse elevene var ikke kjent med problemløsning, likevel viser de en viss forståelse for det. En mulighet for at de høytpresterende elevene gir seg når de kommer frem til løsningen kan sees i lys av Schoenfelds (1992) påstander om rutinearbeid i skolen. Elever har i følge Schoenfeld (1992) lært gjennom skolegangen å arbeide med tusenvis av matematiske «problem» som i bunn og grunn har vært rutineoppgaver. Elevene har blitt lært en fremgangsmåte for hvordan disse oppgaven skal løses, for deretter å sette i gang å løse flere like oppgaver, som krever samme fremgangsmåte. Dette gir elevene et inntrykk av at de mestrer å løse en bestemt oppgavetype, så sant den løses innenfor en viss tidsramme (Schoenfeld, 1992). Dette bør tas i betraktning til en mulig forklaring på hvorfor elevene ikke oppnår alle stadiene i blant annet Mason og Davis (1991) firetrinnsmodell over problemløsningsprosessen. I lys av Schoenfelds (1992) teori kan det virker hensiktsmessig for elevene å komme frem til løsningen, for så å gå videre til neste oppgave.

De lavtpresterende elevene benyttet også prøve og feile metoden. Kristine resonnerte seg frem til løsningen slik: «(...) så bare ganget jeg, tok først 6 til 5. Så prøvde jeg på de andre. Så så jeg at det var 3 til 2 som ble det minste tallet.» Gjennom kvalifisert gjetning kom de lavtpresterende elevene frem til at det var 3 som måtte gjøres én mindre, men hvorfor det var akkurat det tallet som måtte gjøres én mindre, viste elevene liten forståelse for. Dette illustrerte Kristine ved utsagnet: «Jeg vet ikke hva jeg tenkte – jeg bare prøvde å komme frem til det minste.» De lavtpresterende elevene kom ikke frem til løsningen før de hadde forsøkt alle tallene. På tross av systematisk utprøving kan det altså tyde på at elevene ikke umiddelbart oppdaget noe mønster, slik den høytpresterende gruppen gjorde. De lavtpresterende fremsatte aldri noen hypotese, de kom frem til en løsning ved at de prøvde og feilet helt til de kom frem til korrekt løsning.

Hvis en skal se disse elevenes resonnementer i sammenheng med problemløsningsprosessen, så kan en anta at elevene muligens ikke var i noen av disse problemløsningsstadiene. Det første stadiet i Polyas (1957) firetrinnsmodell heter *å forstå problemet*. De lavtpresterende elevene trengt hjelp for å komme i gang med hver problemløsningsoppgave, de ga uttrykk for at de ikke forstod hva problemene spurte om, i tillegg til at de trengt hjelp til begrepsavklaringer. Jeg måtte forklare alle oppgavene for dem, gjerne flere ganger. Dette kan en se av sitatene fra mine forklaringer: «Skjønner dere hva oppgaven spør om?» Da responderte Niklas med å si nei. Dermed forklarte jeg oppgaven for elevene: «Dere har fire tall og det er 3, 4, 5 og 6. Og dere skal gange de sammen, og når dere ganger $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ så får dere 360. Også skal dere gjør et av de tallene én mindre, hvilke av de tallene som du gjør én mindre, gjør at produktet blir minst mulig, altså at svaret blir minst mulig. At du skal gjøre 3 om til 2, eller 4 om til 3 og lignende. Hva gjør at det blir minst mulig?» Her forklarte jeg oppgaven, samt at jeg forklarte begrepet produkt, i tillegg til at jeg eksemplifiserte hva gjøre tallet «én mindre» betydde. Likevel responderte Alex slik: «Det minste jeg fikk var 180 (...) Eh, jeg gjorde 6 om til 3.» Med bakgrunn i dette sitatet og observasjonen av elevene mener jeg å kunne antyde at elevene strevde med å forstå oppgaven, og av den grunn er det mulig elevene ikke befant seg i første stadiet i Polyas (1957) modell.

De lavtpresterende elevene viste liten tilnærming til problemløsning i multiplikasjon. De hadde vansker med å komme i gang med oppgavene, da de ikke forstod problemene. Elevene ga ingen antydning til at de kom frem til løsningen, før de hadde forsøkt alle tallene. Det positive at de gjorde en systematisk prøving av tilfellene, da det kan bli tidkrevende hvis en ikke arbeider systematisk med prøve og feile metoden (Utdanningsdirektoratet, 2015). Derimot kan det tyde på at elevene ikke umiddelbart oppdaget noe mønster. Når de hadde forsøkt et par av tallene, innebar det et potensiale for generalisering siden produktet ble mindre for hver gang. Til tross for dette fremsatte gruppen aldri en hypotese om at det minste tallet skulle anvendes, samt gjøres én mindre. Dette understreker muligens min antakelse om at elevene viste liten tilnærming til problemløsning. Deres resonnementer kan tyde på at de befinner seg på et annet stadiet enn de høytpresterende elevene. På tross av de lavtpresterende elevenes begrensede tilnærming til problemløsning, kan det likevel tenkes at de vil ha et potensiale for læring ved bruk av problemløsning.

De lavtpresterende elevenes noe begrensede tilnærming til problemløsning, kan sees i tråd med den tidligere PISA undersøkelsen fra 2012 som testet elevenes evne og vilje til å løse problemer. Undersøkelsen viste at det er en sterk sammenheng mellom prestasjoner i matematikk, lesing og naturfag og prestasjoner i problemløsning. Elevene som skåret høyt på matematikk, lesing og naturfag i PISA undersøkelsen, var også generelt gode til å løse problemer (NOU 2014: 7, 2014; Utdanningsdirektoratet, 2014).

5.1.2 Logisk resonnement

Logisk resonnement var den mest fremtredende strategien hos de høytpresterende elevene. De viste god tilnærming til problemløsning, og benyttet denne strategien i oppgaveløsningen. Jeg vil nå ta for meg eksempel 4.2.3, hvor de høytpresterende elevene viste tydelige logiske resonnementer. Her skulle elevene bruke sifrene 5, 6, 7 og 8 og lage to faktorer for å få sifferet 8 på enerplassen i produktet. Marte og Tobias resonnerte seg logisk frem til at ved å plassere to tall på enerplassen som får et produkt med 8 på enerplassen, så vil også sluttproduktet ende på 8. Tobias viser tydelig logisk resonnement ved sitatet: «Er det noe i 8-gangen som blir 8 bakerst. 8 og 6 bak og 5 og 7 foran kanskje?» Dette sitatet kan tolkes som at Tobias sannsynligvis er klar over sifrenes betydning. Det kan virke som at han er bevisst posisjonssystemets egenskaper i form av oppbyggingen av 10´er potenser. Videre bekrefter Marte Tobias´ påstand: «Hvis man ganger 8 med 6 så blir det jo 48, altså 8 på enerplassen».

Hvis en skal se Marte og Tobias problemløsningsprosess i sammenheng med Mason og Davis´ (1991) firetrinnsmodell over problemløsningsprosessen, så kan en muligens anta at Marte og Tobias *spesialiserte* problemet. De tok utgangspunkt i to av sifrene, fremfor alle fire, som kan tyde på at de gjorde problemet enklere eller mer spesielt. Videre kan en anta at elevene kom opp med en *hypotese* (conjecture) om at hvis tallene på enerplassen i faktorene fikk 8 på enerplassen i produkt, så ville produktet av hele tallet også få 8 på enerplassen. Deretter observerte jeg at elevene forsøkte om dette stemte med tallene fra oppgaveteksten, og dermed sa de seg ferdig. Marte og Tobias kom opp med en interessant hypotese, og hvis de skulle fortsatt å jobbe med problemet slik Mason og Davis (1991) foreslår, så kunne de videre forsøkt om dette stemte med andre tall. Da ville de beveget seg inn i den tredje kategorien convincing, som omhandler å overbevise. Dette kan blant annet gjøres ved å vise at hypotesen deres stemmer ved flere andre tilfeller. Til slutt er det siste steget i problemløsningsprosessen til Mason og Davis (1991) generalisering. Det hadde vært veldig interessant og sett om elevene maktet å generalisere dette problemet. Muligens er dette noe avansert for elevene, men ved trening kunne de blitt stødige på dette. Marte og Tobias kunne bevist sin hypotese slik, på generell form: $(10n + a) \cdot (10m + b) = 100nm + 10nb + 10ma + ab$. Ved regelmessig arbeid med problemløsningsoppgaver, kan det muligens tenkes at de høytpresterende elevene i større grad hadde evnet å arbeide slik med problemer.

Eksempelet (4.2.3) over med de høytpresterende elevene, samt eksempelet (4.2.2) som jeg skal gjøre rede for nå, illustrerer tydelig forskjell på de to gruppenes logiske resonnementer rundt problemløsningsoppgavene. De lavtpresterende elevene viste en mulig antydning til logisk resonnement ved et tilfelle, i eksempel 4.2.2. Elevene skulle bruke sifrene 5, 6, 7 og 8 og lage to tosifrede tall og plassere sifrene slik at produktet ble lavest mulig. Elevene prøvde ut to muligheter, først fikk de produktet 4368. Videre forsøkte Ester en annen kombinasjon: «Jeg tok 58 · 67. (...) 3886». Etter at elevene fant disse to mulighetene, sa de seg ferdig med oppgaven. Dermed har en egentlig ikke grunnlag til å si at elevene benyttet logisk resonnement her, men det kan være at Ester resonnerte logisk, da hun plasserte de to laveste tallene på tierplassen. Derimot la ikke de lavtpresterende elevene merke til at det var en «nesten» lik kombinasjon, 57 · 68, som ga ti mindre i produkt. Eller så kan det være at siden elevene fikk et høyt produkt ved den første kombinasjonen, så antok de at den andre muligheten var minst, siden produktet var mindre enn ved første muligheten. Det er kun antakelser for en mulig årsak til at elevene godtok løsningen så fort, jeg har ikke empiri som bekrefter denne påstanden.

Hvis en skulle sett på de lavtpresterende elevenes problemløsningsprosess i lys av Mason og Davis (1991) sin firetrinnsmodell, så kan en formodentlig si at elevene har en antydning til å spesialisere. De prøver ut et par tilfeller med sifrene som er oppgitt i problemet, men de gjør det ikke til et enklere eller et spesielt tilfelle, for å lettere se mønster. Elevene prøver ut et par tilfeller, også sier de seg ferdig med oppgaven. Dette kan tyde på at elevene bare så vidt er innom første steget i Mason og Davis´ (1991) firetrinnsmodell. Ved hjelp av modellen til Mason og Davis (1991) over problemløsningsprosessen, mener jeg at en kan se en viss forskjell på de høytpresterende elevene kontra de lavtpresterende elevene. De førstnevnte elevene er innom flere av stegene i modellen, og viser at de har potensiale til å muligens klare flere av stegene ved trening. De lavtpresterende elevene viser liten antydning til å være innom noen av stadiene i prosessen, og vil dermed muligens ha en utfordring med å være innom alle fasene i problemløsningsprosessen, selv ved trening.

5.1.3 Monitorerende strategi og monitorerende spørsmål

De høytpresterende elevene viste liten grad av monitorerende strategi. Denne strategien kjennetegnes ved at elevene går tilbake til teksten for å verifisere at de har forstått problemet riktig. Likevel var det kun på den høytpresterende gruppen jeg observerte bruk av denne strategien. Disse elevene viste antydning til monitorerende strategi, ved et enkelt tilfelle. Jeg vil nå gå dypere inn i de høytpresterende elevenes antydning til monitorerende strategi ved hjelp av eksempel 4.3.1, som er problemløsningsoppgave 5. Denne lyder som følger: Ti kort nummerert fra 0 til 9 lå på et bord. Jon trakk tre kort, George fire og Ann tre. Jon ganget tallene på kortene sine med hverandre. Det samme gjorde George og Ann. Jon fikk da 0, George fikk 72 og Ann fikk 90. Jon legger sammen tallene sine. Hvilket tall får Jon da?

Elevenes arbeid med denne oppgaven skilte seg noe fra de andre oppgavene. Når de kom frem til løsningen her, så sa de seg ikke ferdig. Etter utsagnet til Tobias om: : «0, 7 og 8 på Jon da.(...) 15!» så sier ikke elevene seg ferdig slik de gjorde på de andre problemløsningsoppgavene. Elevene stiller hverandre spørsmål for å kvalitetssikre at de har løst oppgaven korrekt. Gjennom denne typen spørsmål må elevene argumentere for at funnene de har gjort, og beregningene de har foretatt er nødvendige og korrekte (Lester, 2007). Det kan være lærerikt for elevene å måtte begrunne løsningene sine. Dette kan også sees i lys av et sosiokulturelt læringssyn. Vi bruker språket til å kommunisere med andre og slik utvikles tenkningen videre gjennom språklig samhandling. Det sosiokulturelle perspektivet bygger altså på en antakelse om at læring skjer gjennom bruk av språk og deltakelse i et sosialt fellesskap (Lyngsnes & Rismark, 2010).

Dette ser vi blant annet ved sitatet til Eric: «Men hva hadde Ann?» Marte svarer med sitatet: «6 · 5 · 3. Så da hadde Jon 0, 7 og 8.» Videre supplerer Tobias: «Ja som er 15». I stedet for å si seg ferdig med oppgaven etter Tobias sitt utsagn, diskuterer elevene svarene for å se at alle er enige og at det stemmer med det opprinnelige problemet. Flere studier viser at monitorering og selvregulering er metakognitiv atferd som har en avgjørende betydning for vellykket problemløsning i matematikk. Derfor vil jeg anta at det er viktig at elevene klarer å håndtere denne strategien, med tanke på elevenes videreutvikling i problemløsning. Elevenes strategi ved dette eksempelet kan knyttes til Schoenfelds (1992) tredje komponent i hans rammeverk *kontroll og monitorering*, og Polyas (1957) fjerde trinn, *se tilbake*. Disse komponentene involverer refleksjon, som er avgjørende for å gjøre matematikk. Polya (1957) påpeker at elevene kan forsvare sin kunnskap når de ser tilbake på en løsning ved å revurdere og re-undersøke resultatet og løsningsprosessen. Det å se tilbake kan gi elevene et innblikk i etableringen av antagelser, og det kan være med på å utvikle utsikten om at hvordan man kommer opp med løsninger er mer avgjørende enn selve løsningen.

Det kan antas at årsaken til at de lavtpresterende elevene ikke hadde monitorerende resonnementer og de høytpresterende elevene kun viste antydninger til dette, var på grunn av at de ikke er vant til å arbeide med problemløsningsoppgaver. Monitorering handler i følge Schoenfeld (1992) om at man i løpet av problemløsningsprosessen går tilbake til det opprinnelige problemet for å kontrollere at man har forstått det, eller at man går tilbake for å sjekke om man har tatt de riktige avgjørelsene (Schoenfeld, 1992). Elevene viste liten antydning til å være kritiske. Trolig kan elevenes mangel på monitorerende strategi ha en sammenheng med Schoenfelds (1992) påstander om at elever blir satt til å løse drøssevis av like oppgaver i skolen, som krever samme fremgangsmåte. Dette kan i følge Schoenfeld (1992) gi elevene et inntrykk av at de mestrer å løse en oppgave, hvis den løses innenfor en viss tidsramme. Hvis elevene sitter inne med denne erfaringen om matematikkoppgaver, vil de naturlig tenke at oppgaven skal løses raskt.

Under observasjonen av begge elevgruppene fikk jeg inntrykket av at de var preget av Schoenfelds antakelser om elevers inntrykk av at de mestrer å løse en oppgave, og da spesielt av den lavtpresterende gruppen. Denne gruppen viste liten grad av å arbeide monitorerende med problemløsningsoppgavene. Slik jeg oppfattet det, viste elevene liten antydning til å være kritiske, og godtok løsninger raskt. På introduksjonsoppgaven hvor elevene skulle lage to tosifrede tall av sifrene 5, 6, 7 og 8 og plassere sifrene slik at produktet ble størst mulig, kom Niklas med forslaget: «Okei, da kan vi ta 87 pluss 68.» Videre supplerte Ester med å si at det måtte være 65 og ikke 68. Deretter la elevene sammen tallet 87 + 65 og kom frem til svaret 152, og sa seg fornøyd med oppgaven. En kan anta ut ifra elevenes sitater at de viste liten antydning til å være kritiske ved dette tilfellet. Elevene bare godtok svaret, selv om jeg hadde forklart dem at produkt var svaret til et gangestykke. I tillegg fant de heller ikke de to største faktorene. De satte sammen to tall og dermed virket de fornøyd. Dette eksempelet viser at elevene ikke viste antydning til å gå tilbake til det opprinnelige problemet for å kontrollere at de hadde forstått det, eller for å sjekke at de hadde tatt de riktig avgjørelsene slik Schoenfeld (1992) forklarer monitorerende strategi.

5.2 Hvordan foregår problemløsning i smågrupper?

Jeg vil i dette avsnittet prøve å besvare underspørsmål 2: *Hvordan foregår problemløsning i smågrupper?* Under observasjonen av elevene fikk jeg innblikk i hvordan elevene arbeidet med problemløsningsoppgavene i smågruppene. Det var tydelige forskjeller mellom de høytpresterende elevene og de lavtpresterende elevene, derfor blir det naturlig å sammenlikne disse to gruppene. Videre vil dette bli sett i lys av et sosiokulturelt perspektiv. Derfor vil jeg komme inn på den fjerde kategorien fra analysen som heter *forklare når de andre ikke forstår.* Til slutt vil jeg forsøke å diskutere om problemløsning er hensiktsmessig.

5.2.1 Den høytpresterende elevgruppen

Nå vil jeg ta for meg underspørsmål 2. Dette handler om hvordan problemløsning foregår i smågrupper. Jeg observerte en vesentlig forskjell mellom gruppene, den høytpresterende gruppen var selvstendige, og trengte minimalt med hjelp. Et eksempel (4.2.3) på det kan være Tobias´ utsagn rett etter at elevene hadde lest oppgaveteksten: «Er det noe i 8-gangen som blir 8 bakerst. 8 og 6 bak og 5 og 7 foran kanskje?» Her viser Tobias at han har forstått essensen ved problemet, og gjør logiske slutninger med en gang. Dette var typisk for denne gruppen. De kom fort i gang med problemløsningsoppgavene, og viste forståelse for problemene. Av og til kom jeg med oppfølgingsspørsmål til denne gruppen, for å utfordre elevene, og for å få en større innsikt i deres resonnementer. Dette illustreres blant annet i eksempel 4.1.1 hvor jeg spør: «Hvordan kom du frem til det, Jon?», rett etter at han hadde kommet opp med løsningen. Dette gjorde jeg for å «tvinge» elevene til å tenke over de matematiske slutningen de foretok, men også for å utfordre de til å gå dypere inn i problemløsningsprosessen.

Ellers var de høytpresterende elevene selvstendige, og samarbeidet fungerte bra elevene i mellom. For at problemløsning skal ha en hensikt i smågrupper, er en avhengig av at elevene er aktive deltakere i følge Bjuland (2002). Alle elevene på gruppen med de høytpresterende elevene deltok, men i ulik grad. Jeg observerte at en positiv virkning med problemløsning i smågrupper, var at elevene deltok på ulike områder, slik at de var med og på å «dra» hverandre.

Et eksempel på dette var at Eric og Tobias forklarte Jon og samtlige på gruppen hvordan de kunne få størst mulig produkt, ved hjelp av posisjonssystemets egenskaper (omtalt i eksempel 4.4.1). Dette kan sees i sammenheng med Bjulands (2002) påstander om at ved diskusjon rundt problemer vil elevgruppen bidra med ulike perspektiver, i tillegg til at de får øvd seg på å sette ord på tanker og ideer, samt aspekter de er usikre på rundt problemet. Både Eric og Tobias fungerte som supplerende kompetanse for Jon og de andre medelevene på gruppen. Problemløsning i smågrupper kan sees i lys av et sosiokulturelt læringssyn. I dette tilfellet var Jon avhengig av en mer kompetent for å klare å løse problemet. En kan si at dette problemet lå utenfor Jons aktuelle utviklingsnivå. Innenfor dette området klarer Jon alene å løse problemer uten hjelp, men vil mest sannsynlig ikke ha et optimalt læringsutbytte (Dysthe, 2001; Lyngsnes & Rismark, 2010). Derimot hvis Jon får hjelp av for eksempel medelever, kaller Vygotsky dette for den nærmeste utviklingssone. Ved problemløsning i smågrupper vil elevene være i samhandling med andre, og slik kan de utvikle sine resonnementer og strategier ved at medelevene, i dette tilfellet Eric og Tobias, forklarer slik at Jon forstod hva han skulle gjøre. Dette er en positiv virkning ved å la elever jobbe i smågrupper kontra at elevene jobber individuelt. Ved individuelt arbeide vil elevene ikke ha mulighet til å få hjelp like hyppig, som ved gruppearbeid, samtidig som de ikke vil få muligheten til å diskutere med medelevene. Elever lærer i samhandling med andre og gjennom å bruke språket i følge et sosiokulturelt læringsperspektiv.

5.2.2 Den lavtpresterende elevgruppen

Derimot trengte den andre gruppen med de lavtpresterende elevene mer hjelp. Jeg måtte forklare hver oppgave for dem, opptil flere ganger. Videre trengte de rettledning og veiledning underveis. Dette kommer frem i eksempel 4.1.2. Jeg startet med å forklare oppgaven for elevene, i tillegg til at jeg forklarte hva de ulike begrepene betydde og eksemplifisert hva én mindre betyr. Da responderte Alex med: «Det minste jeg fikk var 180 (...) Eh jeg gjorde 6 om til 3.» Her viser Alex at han hadde misforstått oppgaven. Derfor forsøkte jeg å veilede han med forklaringen: «Ja, men du skal gjøre tallet én mindre, så skal du gjøre 6 én mindre, så blir det 5.»

Slik forgikk det på alle problemløsningsoppgavene. Ut i fra det antar jeg at problemløsning i smågrupper foregikk noe annerledes ved den lavtpresterende gruppen. De viste liten selvstendighet, de forstod ikke problemene, og det kunne virke ut som de strevde med å finne en strategi for å løse problemløsningsoppgavene. Vil det være funksjonelt å arbeide i smågrupper for lavtpresterende elever, hvis gruppene er delt opp etter faglig nivå? Jeg har ikke nok grunnlag til å generalisere dette, men ut ifra mine observasjoner antar jeg at det kan være utfordrende. Likevel kjennetegner Schoenfeld (1992) problemløsing og tenking som en sosial prosess. Elevene vil antakelig få et læringsutbytte, fordi de kan hjelpe hverandre noe i gruppen, kontra hvis de skulle arbeidet individuelt. Likevel vil elevgruppen trolig være relativt avhengig av en med mer kompetanse for å klare å løse oppgavene. I en undervisningssituasjon er ofte læreren alene, og det kan være utfordrende å klare å tilfredsstille alle elevenes behov, både i en tradisjonell undervisningssituasjon, men også ved gruppearbeid. Vell og merke kan det positive med gruppearbeid være at elevene kan hjelpe hverandre, slik at trykket på læreren blir noe mindre.

Kristine fra den lavtpresterende gruppen uttrykte i intervjuet at hun foretrekker å samarbeide i matematikk, i tillegg til at hun liker å jobbe med andre type oppgaver enn de i matematikkboka:

Meg:	Hva synes du om sånne oppgaver som du løste nå, sånne problemløsningsoppgaver?
Kristine:	Eh... Det er gøy, men det er ikke så gøy når man gjør det alene. Gøyere når man samarbeider.
Meg:	Ja. Så du liker å samarbeide? Hvorfor det?
Kristine:	Fordi, da kan man liksom samarbeide om – det å snakke sammen. Synes det er litt kjedelig å sitte helt alene å jobbe. (...) Da kan det hende at hvis ikke jeg kan noe, så kan kanskje den andre noe.

Det kommer tydelig frem i siste sitatet av Kristine ovenfor, at hun synes det er lærerikt å samarbeide. En må ikke glemme at disse elevene har et annet utgangspunkt enn den høytpresterende gruppen. Derfor vil de mest sannsynlig vise mindre forståelse for problemene, og streve med å klare å løse de, men derimot kan det fortsatt være lærerikt for elevene å arbeide i smågrupper med problemløsningsoppgaver. Hvis disse elevene skulle arbeidet individuelt med disse oppgavene, hadde de ikke hatt mulighet til å få samme hjelpe slik Kristine uttrykker: «Da kan det hende at hvis ikke jeg kan noe, så kan kanskje den andre noe.» Dette står i samsvar med Schoenfelds (1992) påstand om at det er blitt en voksende forståelse for at matematisk tenkning gjøres best sammen med andre. I tillegg til at det også støttes av det sosiokulturelle perspektivet. I følge Vygotsky bruker vi språket til å kommunisere med andre og slik utvikles tenkningen videre gjennom språklig samhandling. Det sosiokulturelle perspektivet bygger altså på en antakelse om at læring skjer gjennom bruk av språk og deltakelse i sosial praksis (Dysthe, 2001; Säljö, 2010), og dermed støtter denne teorien Kristines påstander.

6.0 Konklusjon

Dette er en kvalitativt case-studie, dermed er det vanskelig å generalisere på bakgrunn av det innsamlede materialet. Likevel er det gjort interessante funn som kan implisere til videre forskning. Først vil jeg starte med å gjenta problemstillingen min: *Hvordan resonnerer elever på 9.trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon?* For å svare på problemstillingen, definerte jeg to underspørsmål: 1. *Hvordan resonnerer elever og hvilke strategier benytter de?* 2. *Hvordan foregår problemløsning i smågrupper?* Jeg ønsker nå å oppsummere de tendensene jeg mener å ha funnet i studien.

Under observasjonen av elevene og i de individuelle intervjuene, fikk jeg innsyn i elevenes resonnementer og tanker rundt problemløsningsoppgavene, og hvilke strategier de benyttet for å løse problemene. Disse strategiene var, prøve og feile metoden, logiske resonnement og monitorerende strategi og monitorerende spørsmål. Det ble observert store forskjeller mellom de to elevgruppene. Den høytpresterende gruppen viste gode resonnementer rundt problemene, og de klarte til dels å arbeide med problemene slik problemløsningsprosessen fremlegges av blant annet Polya (1957) og Mason og Davis (1991). De viste at de håndterte å bruke alle de tre problemløsningsstrategiene, noen av strategien mer hensiktsmessig enn andre. Den høytpresterende gruppen viste liten grad av monitorerende strategi og monitorerende spørsmål. Elevenes resonnementer var preget av rutinearbeid, hvor det var om å gjøre og komme raskest mulig frem til løsningen.

Den lavtpresterende gruppen derimot strevde med å komme i gang med problemløsningsoppgavene, samtidig som de gjorde få logiske slutninger underveis. De viste tydelig at de var preget av rutinearbeid, ved at de var lite kritiske til løsningene sine, og stilte ingen monitorerende spørsmål rundt problemene. De lavtpresterende elevene syntes å vise en begrenset bruk av de ulike strategiene.

Det virker å være en voksende enighet om at matematisk tenkning er nødvendig for å kunne drive med problemløsning (Schoenfeld, 1992). I følge Schoenfeld (1992) består matematisk tenkning av følgende fem aspektene av kognisjon: Kunnskapsbase, problemløsningsstrategier, kontroll og monitorering, oppfatninger og følelser, og praksis.

De høytpresterende elevene viste at de hadde gode *kunnskaper* og ferdigheter i matematikk. Ethvert problem krever at eleven har basiskunnskap for å kunne komme videre (Schoenfeld, 1992). Elevene viste også at de håndterte ulike *problemløsningsstrategier* for å løse de matematiske problemløsningsoppgavene. Hvis elevene fortsetter arbeid med slike oppgaver, vil de muligens tilegnet seg et større repertoar av problemløsningsstrategier. De høytpresterende elevene viste i tillegg antydning til *kontroll og monitorering*. I følge Polya (1957) kreves det trening for å bli god i dette. Disse elevene viste allerede tilfredsstillende ferdigheter i å løse problemer, selv om de ikke var trent i dette. Dermed kan en anta at de høytpresterende elevene fint kunne tilegnet seg problemløsningsprosessen, og derav lære seg å ha en monitorerende strategi ved problemløsning. Det fjerde aspektet *oppfatning og følelser* handler om at elevene for eksempel er klar over at de er flinke i matematikk, og at elevene har kunnskap om hvordan de lærer. Det siste aspektet, *praksis*, handler om at eleven har erfaring med problemløsning. Det jeg vil frem til ved dette, er at i følge Schoenfeld (1992) så er matematisk tenkning nødvendig for å kunne drive med problemløsning. De høytpresterende elevene viste altså at de har gode forutsetninger for de fem aspektene av kognisjon ved matematisk tenkning, som er nødvendig ved problemløsning.

Derimot viste den lavtpresterende gruppen i større grad at de strevde med matematikk. De slet med å forstå oppgaveteksten, og det kan muligens være et signal om at elevene ikke hadde basiskunnskapen for å komme videre. Den eneste strategien de lavtpresterende elevene viste at de håndterte var prøving og feiling. Her observerte jeg at årsaken til at de kom frem til løsningen var mest sannsynlig fordi de prøvde ut alle mulighetene, og dermed så hvilken løsning som stemte. Her kom tydelig forskjellen på de to gruppene frem. De høytpresterende elvene hadde ikke behov for å prøve ut så mange muligheter, de la merke til mønsteret, gjorde logiske slutninger og kom videre opp med en hypotese. Jeg mener å kunne se at de lavtpresterende elevene i liten grad mestret de ulike problemløsningsstrategiene. Elevene viste heller ingen antydning til kontroll og monitorering. I følge Schoenfeld (1992) er matematisk tenkning nødvendig for å kunne drive med problemløsning. De lavtpresterende elevene viste manglende forutsetninger for aspektene av kognisjon ved matematisk tenkning, som er nødvendig ved problemløsning.

Hvordan de ulike elevgruppene kom til å resonnere under arbeidet med problemløsningsoppgavene var forventet med tanke på PISA undersøkelsen fra 2012, som jeg presenterte innledningsvis i studien. Undersøkelsen viste at det er en sterk sammenheng mellom prestasjoner i matematikk, lesing og naturfag og prestasjoner i problemløsning. Det betyr at elever som skårer høyt på matematikk, lesing og naturfag i PISA, generelt også er gode til å løse problemer (NOU 2014: 7, 2014; Utdanningsdirektoratet, 2014). Dette kan sees i sammenheng med mine funn. Gruppen med de høytpresterende elevene var selvstendige og arbeidet godt med problemløsningsoppgavene, de viste gode resonnementer og benyttet ulike strategier når de løste problemløsningsoppgavene. Derimot strevde de lavtpresterende elevene med problemene. De hadde store utfordringer med å forstå teksten, og forstå hva problemet spurte om. Elevene viste liten selvstendighet, de viste liten grad av logiske resonnementer, i tillegg til at de hadde mangel på strategier for å løse oppgavene. Dermed vil jeg påstå at mine funn samsvarer godt med PISA undersøkelsen fra 2012. Likevel må en huske at dette er en liten kvalitativ studie, og det er derfor vanskelig å generalisere på bakgrunn av det innsamlede materialet.

Hvordan foregår problemløsning i smågrupper? Jeg observerte en vesentlig forskjell mellom gruppene. Den høytpresterende gruppen var selvstendige, og trengte minimalt med hjelp, mens den lavtpresterende gruppen trengte mye hjelp da de strevde med å forstå oppgaven og hvordan de skulle løse den. Likevel var samarbeidet på begge gruppene godt. En må ikke glemme at den lavtpresterende gruppen har et annet utgangspunkt og en annen kunnskapsbase enn den høytpresterende gruppen, men det vil ikke si at det ikke er lærerikt for de å arbeide i smågrupper av den grunn. Kristine uttrykte dette så fint i intervjuet: «Da kan det hende at hvis ikke jeg kan noe, så kan kanskje den andre noe.» Dette står i samsvar med Schoenfelds (1992) påstand om at det er blitt en voksende forståelse for at matematisk tenkning gjøres best sammen med andre. En positiv virkning av arbeid med problemløsning i grupper som jeg observerte, var at elevene hjalp hverandre med ulike innfallsvinkler. I følge Carlsen (2008) vil elevgruppen bidra med ulike perspektiver ved diskusjon, i tillegg til at de får øvd seg på å sette ord på ideer, samt aspekter de er usikre på rundt problemet. Arbeid i smågrupper kan altså sees i lys av et sosiokulturelt læringssyn, hvor medierende verktøy spiller en vesentlig rolle. I dette tilfellet var medelevene og språket de to viktigste medierende verktøyene for elevenes læring. Det sosiokulturelle perspektivet bygger altså på en antakelse om at læring skjer gjennom bruk av språk og deltakelse i sosial praksis (Dysthe, 2001). Med all ydmykhet for at dette er en kvalitativ case-studie, tillater jeg meg likevel å trekke den oppsummerende konklusjonen at det kan være lærerikt for både lavtpresterende og høytpresterende elever å arbeide med problemløsningsoppgaver i smågrupper i matematikk.

6.1 Videre forskning

Dette er en kvalitativ case-studie som strekker seg over en kort tidsperiode – en arbeidsøkt med problemløsning. Det kunne derfor vært interessant og forsket på hvilke fordeler elever kan ha av å arbeide med problemløsning i smågrupper regelmessig over en lengre periode. En kan ved en slik studie få innblikk i fordeler og ulemper ved kontinuerlig bruk av problemløsning i undervisning.

Det finnes en del forskning knyttet til problemløsningsprosessen. Likevel har jeg ikke funnet betraktelig mye forskning om det å bruke problemløsning i *undervisning* i grunnskolen. Noe jeg synes er veldig interessant, og som jeg gjerne skulle hatt mer kunnskap om er hensiktsmessig bruk av dette i undervisning.

6.2 Implikasjoner

Formålet med denne studien var å undersøke hvordan elever resonnerer under arbeid med problemløsningsoppgaver. Tilegnelse av kunnskaper om elevers resonnement ved problemløsning, kan bidra til hensiktsmessig bruk av dette i undervisning. Denne studien har bidratt med hvordan elever resonnerer og hvilke strategier de benytter seg av ved problemløsning. Konsekvensen av funnene er at en burde vie mer tid til problemløsning slik at elevene kan tilegne seg mer hensiktsmessig strategier. Man skal ikke dra konklusjoner av bare en studie, men med bakgrunn av teorien fra denne studien, virker det hensiktsmessig for lærere å fokusere mer på problemløsning og problemløsningsstrategier i matematikkundervisningen, selv om mer kunnskap behøves.

7.0 Referanser

Alnes, J. H. (2015). Logikk. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/logikk

Aubert, K. E. (2005-2007). Tallsystem. Retrieved from https://snl.no/tallsystem

Aubert, K. E. (2009). Ring. - matematikk. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/ring.%2Fmatematikk

Bjuland, R. (2002a). *Problem solving in geometry: Reasoning process of student teachers working in small groups: A dialogical approach.* (Doktoravhandling), University of Bergen, Norway.

Bjuland, R. (2002b). *Problem solving in geometry: Reasoning processes of student teachers working in small groups: A dialogical approach.* Universitetet i Bergen, Bergen, Norge.

Björkqvist, O. (2007). Matematisk problemløsning. In B. Grevholm & A. B. Fuglestad (Eds.), *Matematikk for skolen : Innledning* (pp. 51-70). Bergen: Fagbokforl., cop. 2003.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact.* (Doktoravhandling), Umeå university, Umeå Sverige.

Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 2*, 6-35.

Brekke, G. (1995). *Kartlegging av matematikkforståelse: Introduksjon til diagnostisk undervisning*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Carlsen, M. (2008). *Appropriating mathematical tools through problem solving in collaborative smallgroup settings.* (Doctoral Dissertations at University of Agder 7), Universitetet i Agder, Universitetet i Agder, Kristiansand.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt forlag.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). *On different facets of mathematical thinking.* .

Dysthe, O. (2001). *Mappemetodikk med sosiokulturell forankring: Dialog samspel og læring*. Oslo: Abstrakt forlag.

Everett, E. L., & Furuseth, I. (2012). *Masteroppgaven: Hvordan begynne - og fullføre*. Oslo: Universitetsforlaget.

Gadamer, H. G. (1989). *Truth and method*. New York: Continuum.

Gjone, G., & Brekke, G. (2001). *Matematikk, i: Fagdebatikk*. Oslo: Gyldendal Akademiske.

Grønmo, L. S., & Throndsen, I. S. (2006). *Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Universitetsforlaget.

John-Steiner, V., & Mahn, H. (1996). Sociacultural approaches to learning and development: A Vygotskian framework. *Educational Psychologist, 31*(3-4), 191-206. Retrieved from doi:10.1080/00461520.1996.9653266

Kvale, S. (2005). *Det kvalitative forskningsintervju* (Vol. 7). Oslo: Gyldendal akademiske AS.

Lester, F. K. (Ed.) (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lithner, J. (2005). *A framework for analysing qualities of mathematical reasoning: Version 3*. Umeå, Sverige: Umeå universitet.

LK06. (2011). *Læreplanverket for kunnskapsløftet: Prinsipper for opplæringen*. Retrieved from http://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/prinsipper_lk06.pdf.

Lyngsnes, K., & Rismark, M. (2010). *Didaktisk arbeid 2.utgave*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS 2007.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.
Mason, J., & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Victoria: Deakin University Press.
Matematikksenteret.no. Multiplikasjon. *Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen.* Retrieved from http://www.matematikksenteret.no/content/5675/Multiplikasjon
Meld. St. nr. 30. (2003-2004). *Kultur for læring*. Retrieved from https://www.regjeringen.no/contentassets/988cdb018ac24eb0a0cf95943e6cdb61/no/pdfs/stm200320040030000dddpdfs.pdf.
NOU 2014: 7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole - Et kunnskapsgrunnlag*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.
Polya, G. (1957). *How to sove it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2013). *Læreren med forskerblikk: Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*: Høyskoleforlaget.
Ryen, A. (2002). *Det kvalitative intervjuet*. Fagbokforlaget.
Røsseland, M. (2008). Læringsstrategier i matematikk. *Matematikksenteret*. Retrieved from http://www.matematikksenteret.no/content/2382/Laringsstrategier-i-matematikk
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In F. K. Lester & M. National Council of Teachers of (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : Vol. 2* (pp. 334-370). Charlotte, N.C: Information Age.
Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). *Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum*.
Svendsen, L. F. H. (2009). Resonnement. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/resonnement
Säljö, R. (2010). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademiske forlag.
Thomas, J. R., Nelson, J. K., & Silverman, S. J. (2005). *Research Methods in Physical Activity*. Champaign, IL: Human Kinetics.
Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag: Grunnleggende ferdigheter*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.
Utdanningsdirektoratet. (2014). PISA 2012: Norske elevers kompetanse i problemløsing. Retrieved from http://www.udir.no/Tilstand/Forskning/Rapporter/Universitetet-i-Oslo-ILS/PISA-2012-Norske-elevers-kompetanse-i-problemlosing-/
Utdanningsdirektoratet. (2015). *Regning i matematikk: Rekning som grunnleggjande ferdigheit i matematikk*. Retrieved from http://www.udir.no/Utvikling/Ungdomstrinnet/Regning/Undervisningsopplegg-til-regning-i-ulike-fag/regning-i-matematikk/.
Vatne, J. E. (2016). Multiplikasjon - matematikk. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/multiplikasjon%2Fmatematikk
Aarnes, J. F. (2005-2007a). Assosiative lov. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/assosiative_lov
Aarnes, J. F. (2005-2007b). Den kommutative lov. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/den_kommutative_lov
Aarnes, J. F. (2005-2007c). Distributive lov. *Store norske leksikon*. Retrieved from https://snl.no/distributive_lov

8.0 Vedlegg

8.1 Bekreftelse for studien av NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Hans Kristian Nilsen
Institutt for matematiske fag Universitetet i Agder
Serviceboks 422
4604 KRISTIANSAND S

Vår dato: 31.03.2016 Vår ref: 47521 / 3 / BGH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 21.02.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

47521	*Problemløsningsoppgaver*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Agder, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Hans Kristian Nilsen*
Student	*An-Magritt Leistad*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 20.05.2016, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Belinda Gloppen Helle

Kontaktperson: Belinda Gloppen Helle tlf: 55 58 28 74
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / *District Offices*:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

8.2 Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Problemløsning i matematikk»

Bakgrunn og formål
Mitt navn er An-Magritt Leistad og jeg tar master i matematikkdidaktikk ved UiA. I løpet av denne våren skal jeg skrive en masteroppgave om problemløsning i matematikk. I forbindelse med dette ønsker jeg å gjøre min datainnsamling ved xxxxx skole. Det jeg ønsker å forske på er: ***Hvordan resonnerer elever på 9.trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk?***

Hva innebærer deltakelse i studien?
Jeg har lyst til å forske på resonnementene til lavtpresterende elever i matematikk i en gruppe, og høytpresterende elever i matematikk i en annen gruppe, når de samarbeider om å løse problemløsningsoppgaver. Videre vil jeg intervjue elevene individuelt slik at jeg får deres isolerte tanker og resonnementer. For å kunne analysere min data ordentlig, ber jeg om tillatelse til å gjennomføre lydopptak og/eller videoopptak.

Ved forespørsel kan foreldre/foresatte få se intervjuguide og lignende, hvis det skulle være av interesse.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Kun veileder og jeg vil ha tilgang til dataene. Disse lyd/videoopptakene vil i hovedsak være i form av intervjuer som jeg gjennomfører og samtaler som elevene har seg imellom når de løser oppgaver. Behandlingen og bruken av innsamlede data vil bli fullstendig anonymisert og det vil være umulig å knytte til enkeltindivider. Prosjektet skal etter planen avsluttes 18. mai 2016. Alt av lyd/videoopptak vil da bli slettet.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, er det bare å kontakte meg på tlf. 91 83 49 43.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

8.3 Intervjuguide

Intervjuguide

Problemstilling: ***Hvordan resonnerer elever på 9.trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk?***

Spørsmål til elevene

1. Innledning

- Hvilket fag er ditt favorittfag på skolen? Hvorfor?
- Hva synes du om faget matematikk?
- Synes du matematikk er interessant? Har du noen interesse for å lære deg det?
- Synes du det er vanskelig, evnt. hvorfor?
- **Synes du multiplikasjon er vanskelig? Hvorfor?**
- Får du hjelp med matematikkleksene hjemme?

2.Problemløsningsoppgaver

- Hva synes du om slike oppgaver som du har løst nå (problemløsningsoppgaver)?
- Var det vanskelig å komme i gang?
- Hvordan var de oppgavene i forhold til de du pleier å gjøre i matematikktimene?
- Hva er forskjellen på disse oppgavene i forhold til de du er vant til å løse på skolen/i lekse?
- Synes du at du lærte noe av å jobbe med slike oppgaver? Evnt hvorfor?

Oppgave Introduksjonsoppgave:

- Hva tenkte du, da dere løste oppgave 1?
- Hva oppfattet du som utfordrende med denne oppgaven?
- Hvorfor var det vanskelig?
- Hva tror du gir størst produkt av $86 \cdot 75$ og $85 \cdot 76$? Hvorfor?

Oppgave 1:

- Hvordan tenkte du/dere når dere skulle finne ut hvilket tall som manglet? Hvorfor?
- Hva synes du var utfordrende med denne oppgaven?

- Klarte du å løse oppgaven uten å bruke kalkulatoren?

Oppgave 2:
- Hvordan tenkte du her?
- Brukte du overslag for å komme frem til svaret?

Oppgave 3:
- Hvordan tenkte du her?
- Kom dere frem til det som stemte før dere tok i bruk kalkulatoren? Hvordan? Var det utfordrende?

Oppgave 4:
- Hvordan tenkte du her?
- Hvilke metoder brukte du for å komme frem til svaret?
- Hva synes du om denne oppgaven? Hva var utfordrende?
- Klarte du å løse den uten å bruke kalkulatoren?

Oppgave 5:
- Hvordan resonerte dere dere frem til svaret her?
- Hvilke metoder tok dere i bruk for å løse oppgaven?
- Hva gjorde dere for å komme i gang?
- Var den utfordrende? Hva da?

8.4 Transkripsjons koder

...	Pause, høyst 3 sekunder
(Stillhet)	Pause i minst 3 sekunder
(Tekst i parentes)	Redegjørelse for nonverbal handling, kommentere ytringer eller lagt ord
(...)	Utelatte ytringer
(Uforståelig)	Et eller flere ord utelatt fordi det ikke er mulig å forstå