UNIVERSITETET I AGDER

Statistikk og sannsynlighetsregning - en skisse av det statistiske miljø i Norge fra ca. 1850 og emnenes plass i den norske skolen i nyere tid

Øyvind Leland

Veileder
Reinhardt Siegmund-Schulze

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2011

Fakultet for teknologi og realfag

Institutt for matematiske fag

Forord

Med denne oppgaven avslutter jeg mitt toårige masterstudium i matematikkdidaktikk ved UiA. Det har vært noen lærerike år, og jeg ser nå frem til å starte i jobben som matematikklærer på Byremo ungdomsskole. Masteroppgaven har bydd på mange utfordringer underveis, men det har vært en lærerik prosess på flere måter.

Først og fremst vil jeg takke veileder Reinhard Siegmund-Schultze som har bidratt med konstruktive innspill underveis i arbeidet. Jeg vil også rette en takk til de ansatta ved biblioteket på UiA som har vært behjelpelige med å skaffe nødvendig litteratur. Tom Lindstrøm og Kristian Ranestad tatt seg tid til å bli intervjuet i forbindelse med oppgaven for, noe jeg er taknemmelig for.

Ingrid, Linda, Erling, Jøran og Marius har vært mine medstudenter i løpet av masterstudiet og har bidratt til et bra studiemiljø og gode arbeidsforhold. Jeg vil også takke min søster Solveig, som har vært behjelpelig med korrekturlesning og ellers generelle tips.

Sammendrag

Temaet for denne oppgaven er statistikk og sannsynlighetsregning i Norge. Problemstillingen lyder: Hvilken plass har statistikk og sannsynlighetsregning hatt i Norsk skole og hvordan har det statistiske miljøet i Norge utviklet seg fra midt på 1800-tallet?

Innledningsvis gis det et historisk overblikk over hvordan statistikkmiljøet har utviklet seg i Norge fra ca. 1850 og hovedsakelig frem til 1960-1970-tallet. Her vil blant annet Statistisk sentralbyrå (1876), Den norske aktuarforening (1904), Norsk matematisk forening (1918) og Norsk statistisk forening (1936) være sentrale. Det vil også bli gitt en oversikt over hvordan utdannelsen i matematisk statistikk ble opprettet som hovedfag i 1956, samt aktuarutdannelsen som etter hvert ble en universitetsutdannlese på begynnelsen av 1900-tallet. En nasjonal debatt om invalideforsikring i Norge på slutten av 1800-tallet og begynnelsen av 1900-tallet er også beskrevet. Dette er interessant i forbindelse med *den representative undersøkelses metode*, en forgjenger til det som i dag kalles sampling. En nordmann ved navn Anders Nicolai Kiær var trolig den første til å ta i bruk denne metoden, og den ble brukt i innsamlingen av opplysninger til invalideforsikringen. I forbindelse med denne debatten kom aktuarene på banen, og argumenterte mot Kiærs bruk av metoden, blant annet ved noen matematiske utregninger hadde likhetstrekk med det som i dag kalles konfidensintervall.

Statistikkens og sannsynlighetsregningens plass i den norske skolen er den største delen av oppgaven. Denne delen gjelder både grunnskolen og videregående skole. Her vil læreplaner være aktuelle kilder, hovedsakelig konkrete læreplanmål som forteller om innhold av statistikk og sannsynlighetsregning i skolen, samt lærebøker og eksamnesoppgaver.

Det første skikkelige spor av statistikk og sannsynlighetsregning er funnet i et forslag til læreplan fra 1964. Dette forslaget ble ikke vedtatt, og i den nye læreplanen som kom i 1976, fantes disse emnene i liten grad; kun litt deskriptiv statistikk, samt et valgfag som inneholdt relativt stort omfang av statistikk og sannsynlighetsregning. I grunnskolen finnes litt deskriptiv statistikk først i læreplanen fra 1974 og omfanget øker i neste læreplan i 1986. Da kommer også sannsynlighetsregning skikkelig inn i læreplanen for grunnskolen. Ved neste læreplan i 1997 øker igjen omfanget av statistikk og sannsynlighetsregning, og sannsynlighetsregning kommer inn i læreplanen for barneskolen. I Kunnskapsløftet fra 2006 er det ikke store forskjeller fra planen fra 1997.

Tilfeldighetsbegrepet innføres i skolen i følge det man kan lese av læreplanene stort sett på slutten av barnaeskolen. Ved en gjennomgang av noen aktuelle skolebøker for siste trinn på barneskolen finner man at tilfeldighet eller sannsynlighet ofte blir introdusert ved bruk av terningkast, myntkast og lignende.

I videregående skole kom statistikk og sannsynlighetsregning for alvor inn i læreplanen ved Reform 94 (1994), etter påtrykk fra myndigheter og statistikkmiljøet. Reform 94 ble revidert etter at den nye planen for grunnskolen trådte i kraft i 1997, med noen små justeringer innenfor statistikk og sannsynlighetsregning. Når Kunnskapsløftet kom i 2006, var omfanget av statistikk og sannsynlighet mindre. Trolig har det hatt sammenheng med et forsøk på å forbedre matematikkfaget generelt. Fremstillingen av sannsynlighetsteori og statistikk fra videregående viser at elementær sannsynlighetsregning blir fremstilt nokså likt i flere ulike læreverk, ofte ved hjelp av enkle eksempler som dreier seg om terinngkast, myntkast og lignende. Når det kommer til matematisk statistikk er det større forskjeller, både med tanke på omfang og fremstillling av emnene. Litt mer komplisert sannsynlighetsteori, som for eksempel store talls lov eller sentralgrensesetningen blir ofte formulert på et intuitivt plan.

English summary

The topic of this thesis is statistics and probability theory in Norway. The research question is: Which position has statistics and probability theory had in the Norwegian school, and how has the statistics environment developed in Norway from the middle of the 18th century?

First, I will provide a historical overview of how the statistics environment has developed in Norway from around 1850 and until 1960s-1970s. Statistisk sentralbyrå (1876), Den norske aktuarforening (1904), Norsk matematisk forening (1918) and Norsk statistisk forening (1936) will be central. I will also provide an overview of how the education in mathematical statistics culminated in the establishment of a university major ("hovedfag") in 1956, as well as how the actuary-education eventually became a university education in the beginning of the 19th century. A national debate about disability-insurance in Norway at the end of the 18th century and the beginning of the 19th century is also described. This is interesting in relation to *den representative undersøkelsesmetoden*, which was a predecessor of today's sampling. A Norwegian named Anders Nicolai Kiær was probably the first to use this method, and it was used in the collection of information for the disability-insurance. In connection with this debate, the actuaries became involved, and argued against Kiær's use of the method, using mathematical calculations, similar with what we today call confidence intervals.

The statistics and probability theories' place in the Norwegian School is the largest part of the thesis. This part is both about the primary school and the secondary school. Curricula will be important sources, mainly the concrete goals in the curriculum which describe the content of statistics and probability teaching at school, and also textbooks and exams.

The first real sign of statistics and probability theory is found in a suggestion to a curriculum from 1964. This suggestion was not adopted, and in the new curriculum which came in 1976, these subjects were only represented at a small scale. Only some descriptive statistics was included, along with elective subjects which contained statistics and probability theory of a relatively broad range. There is some descriptive statistics in the curriculum from 1974 and this content has increased in the curriculum in 1986. Probability theory is also represented in a proper way for the first time in that curriculum. In the next curriculum in 1997, the portion of statistics and probability theory within the total content again increases, and probability is also represented in the curriculum in the lower primary school. In Kunnskapsløftet from 2006, there are minor differences from the curriculum of 1997.

The concept of chance is introduced in the school, according to the curriculum, normally towards the end of the lower primary school. By reviewing some books for the last grade of the lower primary school, I have found that chance or probability are often introduced by using examples of throwing dice, coin, etc.

In the secondary school, statistics and probability theory first appeared in the curriculum in 1994 in a comprehensive way, after pressure from the authorities and the statistical environment. R94 was revised when the curriculum for the primary school took effect in 1997, with small adjustments within statistics and probability theory. When Kunnskapsløftet came in 2006, the scope of statistics and probability theory were smaller. This is probably connected with an attempt to improve the mathematics subject in general. The books from secondary school show that basic probability theory is presented fairly equally in several different textbooks, often with the use of examples as throwing dice, coin etc. When it comes to mathematical statistics, there are bigger differences both in relation to the scope and presentation of the subjects. Probability theory of a more complicated kind, as for example the law of large number and the central limit theorem, is often formulated in an intuitive way.

Innhold

Forord ... iii
Sammendrag ... v
English summary ... vi
1. Innledning ... 1
2. Historisk bakgrunn ... 3
  2.1 Før midten av 1800-tallet ... 3
  2.2 Ca. 1850→ ... 3
  2.3 Statistisk Sentralbyrå ... 4
  2.4 Den representative undersøkelse - røtter i Norge ... 5
  2.5 Kritikk av undersøkelsesmetoden; nasjonalt og internasjonalt ... 7
  2.6 Den norske aktuarforening ... 9
  2.7 Aktuarutdannelsen ... 9
  2.8 Norsk Matematisk Forening og Norsk Matematisk Tidsskrift ... 11
  2.9 Norsk Statistisk Forening ... 13
  2.10 Statistikkutdanning på universitetsnivå ... 14
  2.11 Statistisk Sentralbyrå i nyere tid ... 15
3. Teoretiske perspektiver på analysen av læreplaner ... 17
4. Metode ... 21
5. Grunnskolen ... 23
  5.1 Læreplaner Grunnskolen ... 23
    5.1.1 Mønsterplan for grunnskolen 1974 ... 23
    5.1.2 Mønsterplanen for grunnskolen 1987 ... 24
    5.1.3 Reform 97 ... 25
    5.1.4 Kunnskapsløftet 2006 ... 25
    5.1.5 Kommentarer til utviklingen i grunnskolen ... 26
  5.2 Lærebøker i grunnskolen ... 27
    5.2.1 M87-Matteboka ... 27
    5.2.2 L97-Pluss ... 29
    5.2.3 K06-Abakus ... 30
    5.2.4 Oppsummering lærebøker ... 31
6 Videregående skole ... 33
  6.1 Læreplaner ... 33
    6.1.1 Bakgrunnsmateriale ... 33
    6.1.2 Forslag til læreplan i 1964 av Gymnas-utvalget ... 33
    6.1.4 Læreplan 1976 ... 34
    6.1.5 R94 versjon 1994 ... 36

6.1.6 R94 versjon 2000 ... 39
6.1.7 Betraktninger på R94 ... 41
6.1.8 Kunnskapsløftet ... 41
6.1.9 Betraktinger på K06 ... 44
6.2 Lærebøker ... 44
6.2.1 Lærebøker fra R94 versjon 1994 ... 44
6.2.2 R94 versjon 2000 ... 54
6.2.3 K06 ... 64
6.2.4 En drøfting av lærebøkene i videregående skole ... 76
6.3 Eksamensoppgaver ... 77
6.3.1 Eksamensoppgaver for R94 versjon 1994 ... 77
6.3.2 Eksamensoppgaver for R94 versjon 2000 ... 79
6.3.3 Eksamensoppgaver i fra K06 i S2 ... 80
6.3.4 Drøfting av eksamensoppgaver ... 82
7 Konklusjon ... 85
7.1 Oppsummering og funn ... 85
7.2 Oppgavens begrensninger og forslag til videre forskning ... 87
Kilder ... 89
Vedlegg ... 93
Vedlegg 1: R94 versjon 1994 ... 93
Vedlegg 2: Læreplan for videregående skole R94 versjon 2000 ... 94
Vedlegg 3: Læreplan for vidergående skole kunnskapsløftet 2006 ... 97
Vedlegg 4 Mønsterplan for grunnskolen 1987 ... 98
Vedlegg 5 Læreplan for grunnskolen 1997 ... 99
Vedlegg 6 Læreplan for grunnskolen Kunnskapsløftet 2006 ... 101
Vedlegg 7 Intervju med Tom Lindstrøm ... 102
Vedlegg 8 Intervju Kristian Ranestad ... 103

1. Innledning

Tema for oppgaven har jeg valgt av flere grunner. Statistikk og sannsynlighetsregning var et emne som jeg syntes skilte seg en del ut fra de andre emnene når jeg gikk på videregående, og det var relativt vanskelig. Likevel er det emner jeg alltid har synes er interessante i forbindelse med ulike spill, som for eksempel fra Norsk Tipping. Da jeg var i praksis som lærer på videregående skole i mitt år på Praktisk-pedagogisk utdanning, var sannsynlighet det emnet jeg hovedsakelig underviste i. Jeg skrev en oppgave om denne undervisningen i forbindelse med den fagdidaktiske delen av studiet, og fra mitt perspektiv som lærer fant jeg dette emnet interessant.

Jeg har valgt å fokusere min oppgave rundt statistikk og sannsynlighetsregning. Det vil si hvordan det statistiske miljø har utviklet seg i samfunnet og hvordan det har utviklet seg i skolen. Jeg har falt ned på følgende problemstilling:

Hvilken plass har statistikk og sannsynlighetsregning hatt i Norsk skole og hvordan har det statistiske miljøet i Norge utviklet seg fra midt på 1800-tallet?

Problemstillingen kan deles i to, der statistikkens og sannsynlighetsregningens stilling i norsk skole er den ene delen, mens utviklingen av statistikkmiljøet i Norge fra midt på 1800-tallet er den andre. Hovedvekten i problemstillingen ligger på statistikk og sannsynlighetsregning i norsk skole. Både grunnskolen og videregående skole er aktuelle, men siden emnene har klart størst omfang i videregående skole, ligger hovedtyngden av oppgaven her. I forbindelse med norsk skole vil studiet av læreplaner og konkrete læreplanmål være essensielle. Læreplanen foreligger som dokument, og dette vil være sentralt, men også hvordan læreplanen oppfattes av ulike aktører, blant annet lærebokforfattere, vil være sentralt. Det vil si hvordan læreplanen kommer til syne i ulike lærebøker fra lærebokforfatternes perspektiv. Tittelen på oppgaven forteller at det dreier seg om statistikk og sannsynlighetsregning i norsk skole i nyere tid. Grunnen er at det ikke finnes noe særlig statistikk og sannsynlighetsregning i eldre utgaver av læreplanen.

Den andre delen av problemstillingen handler om å gi en skisse av utvikllingen av det statistiske miljø i Norge. Her vil statistiske og matematiske foreninger og institusjoner samt enkeltpersoner være sentrale. Denne delen av problemstillingen gir et oversiktsbilde av hvordan emnene etter hvert har blitt innført i disse miljøene, og hvordan universitetsutdannelsen innenfor statistikk etter hvert har blitt til. Disse momentene vil bli også bli sett i lys av hvordan de impliserer innføring av statistikk og sannsynlighetsregning i grunnskole og videregående skole. Oppgaven tar først for seg den andre delen av problemstillingen, altså hvordan det statistiske miljø har utviklet seg, i kapittel 2. Dette vil hovedsakelig være en beskrivende del, der sentrale institusjoner, foreninger og personer vil være viktige kilder. Et eksempel på dette er Statistisk sentralbyrå. Oversikten vil i hovedsak dreie seg om tiden fra ca. 1850 og frem til ca. 1960-1970.

I kapittel 3 vil didaktiske, pedagogiske og matematiske perspektiver bli presentert. Dette må sees i sammenheng med den delen av problemstillingen som handler om statistikk og sannsynlighet i skolen, og er perspektiver til bruk i analysen av læreplaner, lærebøker og eksamensoppgaver. De didaktiske perspektivene er hentet fra ulike kilder som tar for seg ulike sider ved problemstillingen. Et matematisk perspektiv som vil bli drøftet er ulike problemstillinger man finner i bøkene. Sannsynlighetsregningen vokste frem som følge av problemer relatert til spill. Kjennskap til matematikkens historiske utvikling er dessuten et mål man finner igjen i flere læreplaner, og i så måte vil det være interessant å se på hvilke problemstillinger som behandles i sammenheng problemstillingene som var opphavet til sannsynlighetsregningen. Dette vil altså bli nærmere redegjort for i kapitel 3.

Metodene som er brukt for å finne svar på problemstillingen er gjort rede for i kapittel 4. Med tanke på at del 2 i problemstillingen handler om å gi en skisse av det statistiske miljø, vil dette hovedsakelig baseres på studier av historiske kilder. Kapittelet om metoder dreier seg i all hovedsak om metodene brukt i andre del av problemstillingen.

Læreplaner og lærebøker fra grunnskolen vil bli behandlet i kapittel 5. Her vil læreplaner dokumenteres, og det vil bli foretatt et utvalg på bøker som vil bli analysert. Avslutningsvis vil kapitelet inneholde en drøfting av læreplaner og lærebøker.

I kapittel 6 er videregående skole tema. Her vil læreplaner bli dokumentert og drøftet. Det vil også bli gjort et utvalg av skolebøker og eksamensoppgaver som vil bli analysert. Hovedvekten i oppgaven vil ligge på videregående skole, siden pensum i statistikk og sannsynlighetsregning er mye mer omfattende her enn i grunnskolen. Kapittel 7 inneholder en konklusjon som dreier seg om viktige funn, begrensninger og betraktninger omkring videre forskning.

Læreplanmålene som handler om statistikk og sannsynlighet i de forskjellige læreplanene er vedlagt. Oppgaven inneholder også to intervjuer. Disse er foretatt ved skriftlig korrespondanse, og finnes også blant vedleggene.

Som nevnt er flere læreplaner dokumentert og analysert i oppgaven. Disse blir ofte omtalt i forenklede termer, noe de vil bli også i denne oppgaven. Forkortelsene for planene er som følger:

Grunnskolen:

Mønsterplan for grunnskolen fra 1974: M74

Mønsterplan for grunnskolen fra 1987: M87

Læreplan for den tiårige grunnskolen fra 1997: L97

Kunnskapsløftet 2006: K06

Videregående skole:

Reform 94 fra 1994: R94

Kunnskapsløftet 2006: K06

2. Historisk bakgrunn

2.1 Før midten av 1800-tallet

Einar Lie (2001) gir i "Faktisk talt" en beskrivelse av utviklingen av statistikk i Norge. Han beskriver tre hovedtyper statistikk, blant annet en tysk/dansk tradisjon som bestod av verbale fremstillinger av stater, grenser, styreform, kultur og naturlandskap. Denne statistikken inneholdt lite tall og kvantitative opplysninger, og ut fra den beskrivelsen Lie gir av denne typen statistikk, virker det som det er lite sammenheng med det vi i dag omtaler som statistikk. I Norge var det denne typen statistikk som dominerte fra tiden før midt på 1800-tallet. I denne oppgaven vil jeg ikke gå så mye nærmere inn på denne typen statistikk, annet enn å nevne at noen få statistiske arbeider beveget seg gradvis i retning av mer systematisering og standardisering rundt behandlingen og innsamlingen av statistiske data, fra siste halvdel av 1700-tallet til ca. 1850.

En mann som bør nevnes i denne perioden er Anton Martin Schweigaard (1808-1870), som var Norges første professor i statistikk. Han gav i 1840 ut Norges statistikk. Denne boken var i følge Lie (2001) også preget av verbale beskrivelser, men den inneholdt i tillegg tallmateriale og noen få tabeller som ble kommentert. Schweigaard var dessuten en politisk aktiv mann, og i følge Skarpenes (2004) var han den som satte i fart i debatten rundt matematikk som skolefag på 1800-tallet. Han var forkjemper for matematikk i skolen. Det er likevel ingen grunn til å tro at hans kamp for matematikken på noen måte skulle være relatert til hans arbeid med statistikk, ettersom Schweigaards forhold til statistikk ikke hadde noen relasjon til matematikk.

2.2 Ca. 1850→

Eilert Sundt(1817-1875) er den som ser ut til å få æren for bruddet med den gamle statistiske tradisjonen. Sundt skilte seg fra tidligere statistikere ved blant annet å forklare endring i befolkningsvekst på andre måter enn det som tidligere hadde blitt gjort. Det er mye som tyder på at Eilert Sundt var inspirert av teoriene til belgieren Adolphe Quetelet (1796-1874). For eksempel argumenterer Lie (2001) med at Sundt noen steder i hans tekster formulerer seg nesten ordrett etter Quetelet.

Det kan i denne sammenhengen være verdt å gi en kort beskrivelse av Quetelet og hans arbeide. Quetelet var, i tillegg til å være opptatt av sosiologi, også opptatt av matematikk, astronomi og statistikk.

Quetelet brukte normalfordelingskurven i sitt arbeid. Normalfordelingskurven blir ofte kalt gausskurven, etter Carl Friedrich Gauss (1777-1855) som brukte den i sitt arbeid med å studere astronomi. Selv om kurven er oppkalt etter Gauss, hadde Abraham De Moivre (1667-1754) studert normalfordelingen før ham. Grunnen til at Gauss likevel har fått denne oppkalt etter seg, er hans arbeid med å anvende normalfordelingskurven. Gauss utviklet også minste kvadraters metode, for å kunne beregne banen til asteroiden Ceres. I tillegg beviste Jakob Bernoulli (1654-1705) Bernoullis teorem, trolig mellom 1688 og 1690 (Hundeland, 1996, s. 21), som også er kjent som de store talls lov, og Pierre Simon Laplace (1749-1827) utviklet det som i dag kalles sentralgrenseteoremet. Disse metodene ble i all hovedsak utviklet i forbindelse med studier av naturlige fenomener, der det dreide seg om observasjoner og målinger av naturlige fenomener, mens Quetelet nå begynte å bruke dette til studier innen sosiologi.

Quetelet brukte normalfordelingskurven til å utvikle den såkalte "homme type". "Homme type" var hvordan et gjennomsnittsmenneske innenfor en rase egentlig var, og avvik fra dette gjennomsnittsmennesket skyldtes en form for feil (Lie et al., 2001). Quetelet trodde ikke på tilfeldigheter, verken når det gjaldt sosiale forhold eller spill. Han mente at problemet var å få kontroll over alle faktorene som spilte inn på et myntkast, og dette var også problemet på det sosiale plan. Teorien og tankene hans omkring dette var i nærheten av totaldeterministiske, i og med at "homme type" hadde bestemte egenskaper, kom til å få et visst antall barn og ha en viss levetid. Avvikene ville jevnes ut over tid og ved store tall. Schweder gjør et poeng ut av gjennomsnittsmennesket til Quetelet, og nevner at Quetelet ikke tar hensyn til kjønn i forbindelse med dette. Dette er et bra poeng med tanke på menns og kvinners ulike fysiske forutsetninger. I dag er normalfordelingskurven viktig i statistisk og sannsynlighetsteori. I læreplanen for videregående skole er den anvendt i forbindelse å regne sannsynligheter, noe som vil bli beskrevet nøyere senere i oppgaven.

Einar Lie (2001) mener at selv om Sundt nok var inspirert av Quetelet, er det likevel vesentlige forskjeller i deres arbeider. Sundt anerkjente blant annet ikke gjennomsnittsmennesket til Quetelet, og Quetelet's deterministiske syn, som baserte seg på naturskapte forskjeller. Sundt var mer opptatt av de sosiale forskjellene.

Eilert Sundt er en av de viktigste personene i forhold til statistiske undersøkelser som tok for seg nasjonen som helhet. I undersøkelsen *Om Ædruskapsforholdene i Norge* fra 1859, ble innsamlingen organisert av opplysninger ved at skolelærerne i forskjellige distrikter ble bedt om å fylle ut skjemaer der antallet gifte menn og enkemenn i distriktet skulle registreres. Lærerne skulle også, etter skjønn, angi i hvilken grad disse mennene var alkoholiserte. I forbindelse med denne undersøkelsen diskuterte Sundt omkring metodene for innsamlingen. Lærerne som stod for innsamlingen kom for eksempel fra ulike sosiale klasser, og la ulik grad av nøyaktighet ned i arbeidet. Blant annet ville skjønnet lærerne ble bedt om å utvise, variere meget fra lærer til lærer. Sundt hadde tidligere påpekt at man ikke burde sammenligne skjønn fra forskjellige personer. Siden alternativet var å ikke få inn noen opplysninger i det hele, måtte Sundt bruke disse opplysningene, men på en kritisk måte. Dette gjorde Sundt, ved å foreta parvise undersøkelser av tallene. Denne måten å sortere opplysninger på var Sundt en foregangsmann på i Norge. Denne parvise sammenligningen førte til at han kunne sammenligne gjennomsnittsverdier, og når disse varierte lite fra hverandre, mente Sundt opplysningene var pålitelige. Både Lie(2001) og Petter Laake (1986) peker på at Sundt i sitt arbeid var redd for systematiske feil i sine konklusjoner. Dette var også noe ingen før ham i Norge hadde gjort på samme måte. De systematiske feilene han var redd for var blant annet lærerenes bruk av skjønn, og kan eksemplifiseres med at Sundt skrev følgende: *"(…) jo bedre tilstanden monne være, desto slettere bliver den kanske fremstillet, og jo gunstigere tallene for et distrikt synes at være, desto værrestår det måske til i virkeligheden. Skulle dette være tilfælde, så var det naturligvis forbi med alle disse undersøkelser"* (Laake, 1986, s. 78)

2.3 Statistisk Sentralbyrå

Statistisk sentralbyrå ble stiftet 1. juli 1876 i Christiania. Det hadde sin forløper i det statistiske kontor i "departementet for det indre" som igjen hadde sin forløper i Tabellkontoret fra 1832. Det statistiske kontor gjorde seg først skikkelig bemerket i 1837. Personalet gikk fra å bestå av 3 personer, til å bestå av 10, og nå begynte statistiske tabeller å bli offentliggjort på regelmessig basis. Denne utvidelsen kom i stand fordi Regjeringen og Stortinget så behovet for statistikk angående viktige områder innen næringslivet (*Statistisk sentralbyrå 100 år : 1876-1976*, 1976)

I 1843 ble det bestemt ved "kongelig resolution" eller av kongen i statsråd at det skulle opprettes en stilling som byråsjef, og dette ble vedtatt i Stortinget i 1845. I 1846 ble det daværende Tabellkontoret underlagt det nyopprettede og ovennevnte "departementet for det

indre”.
I 1867 ble Anders Nicolai Kiær (1838-1919) sjef for det statistiske kontor, og allerede i 1868 sørget han for at Tabellkontoret skiftet navn til Det statistiske kontor. I løpet av 60-årene utviklet Det statistiske kontor seg fra å drive med presentasjon av statistikk gjennom tabeller, til å drive med forskning, og nye felter for anvendelser ble oppdaget. En del av æren for denne utviklingen får nettopp Kiær.
I 1875 ble det fremmet forslag om at Det statistiske kontor skulle få en mer selvstendig rolle. Stortinget hadde tidligere flere ganger ønsket et budsjett over hvor mye den produserte statistikken kostet staten. Kiær mente dette ikke lot seg gjøre, og brukte dette som argument for å selvstendiggjøre Det statistiske kontor, da ville nemlig budsjettet over statistikken være underlagt kun Det statistiske kontor. Kontoret ville også få mer vitenskapelig troverdighet, dersom den hadde mindre tydelig tilknytning til regjeringen (Statistisk sentralbyrå 100 år : 1876-1976, 1976).

Fra 60-årene ble det publisert mer og mer offisiell statistikk, og Statistisk Årbok, under navnet ”Annuaire Statistique de la Norvège”, ble gitt ut i 1879 for første gang på fransk. I 1882 ble ”Meddelelser fra det Statistiske Centralbyrå” utgitt. Dette ble utgitt månedlig, og inneholdt månedlige statistiske oppdateringer og andre opplysninger og avhandlinger. Serien har siden den gang skiftet navn flere ganger. Frem til 1998 ble den utgitt på papir, men gikk da over til bare å bli publisert på internett, under navnet ”Statistisk månedshefte” (Statistisk sentralbyrå 100 år : 1876-1976, 1976). I 2009 ble statistisk månedshefte erstattet av tabeller i Statistikkbanken, og del 1 av magasinet blir fortsatt utgitt som Konjunkturindikatorer for Norge.
I 1889 deltok sjefene fra Danmark, Sverige og Norges statistiske sentralbyrå på et felles nordisk statistisk møte. I årene som fulgte, fortsatte disse møtene i de forskjellige lands hovedsteder. Norge hadde tidligere ofte vært representert på internasjonale statistiske møter. Dette fortsatte også etter 1885, da det internasjonale statistiske institutt ble dannet, og begynte å holde møter. I 1899 ble møtet første gang avholdt på norsk jord i Oslo, eller Kristiania som det het den gang.
I 1880- og 1890-årene fikk statistisk sentralbyrå ansvar for flere og flere statistiske områder, både innenfor bankvesen, sosialstatistikk, og rettsvesen.
Statistisk sentralbyrå, som i 1901 hadde 23 fast ansatte, ble fratatt en del oppgaver i starten på 1900-tallet. Blant annet mistet byrået ansvaret for fiskeristatistikken og næringsstatistikken i 1900, og i 1907 og 1913 mistet de henholdsvis ansvaret for statistikken over Stortingsvalgene og sosialstatistikken. Sistnevnte fikk byrået tilbake ansvaret for i 1919. Etter denne tid, ble imidlertid flere statistiske ansvarsområder ført tilbake til Statistisk sentralbyrå, og på 1920-tallet overtok også byrået ansvaret for mange andre områder. Det kan blant annet nevnes industristatistikk i 1922 og finansstatistikk i 1925 (Statistisk sentralbyrå 100 år : 1876-1976, 1976).

2.4 Den representative undersøkelse - røtter i Norge

Det kommer frem av flere historiske kilder at den representative undersøkelsen har røtter i Norge. Det vil i denne oppgaven gis en oversikt over denne historien; hvem som stod bak, og hvorfor metoden ble lagt til side i mange år. Dette er interessant, kanskje spesielt i forbindelse med metodens fall, der blant annet noen aktuarer brukte matematisk teori knyttet til statistikk og sannsynlighet, for å vise at metoden, slik den var brukt, hadde begrensninger. Historien om den representative undersøkelsen i Norge blir trukket frem i jubileumsskrifter fra både Norsk Statistisk forening (Thomsen, 1986), den norske aktuarforening (1929), og artikler og bøker som omhandler norsk statistikkhistorie. Den som synes å være hovedmannen bak denne metoden, var den første direktøren i statistisk sentralbyrå, Anders Nicolai Kiær.

I Norge ble utvalgsmetoder brukt i flere undersøkelser fra 1870-årene og frem mot 1900-tallet. J.N. Mohn var den første som benyttet seg av metoden, og på 1890-tallet var den i bruk i stor skala i Norge. Kiær skrev i 1897 boken *Den repræsentative undersøgelsesmetode*, og argumenterte for bruken av metoden under flere internasjonale statistikk-konferanser, første gang i Bern på et møte i det Internasjonale Statistiske Institutt(ISI) i 1895. I følge Lie (2001) er det lite som tyder på at det var andre internasjonale statistikere som hadde tatt i bruk denne metoden før Kiær, og den vant heller ikke internasjonal anerkjennelse på møtene til det Internasjonale Statistiske Institutt. En del andre kilder, blant annet Schweder (1980) og Seng (1951) gir også Kiær æren for denne metoden. Lie (2001) argumenterer videre for at grunnen til dens lunkne mottakelse kan være at dette var en ny metode, og internasjonale statistikere ville heller forholde seg til metoder og prinsipper de kjente til, og ikke kaste seg ut i noe ukjent. Etter 1903 ble ikke metoden diskutert videre, før i 1925, da den ble tatt opp under møtet til ISI i Roma. Som nevnt tidligere var det trolig Mohn som var mannen bak den første undersøkelsen som baserte seg på utvalg. Dette var en jordbruksundersøkelse, og han utførte i tillegg andre undersøkelser som blant annet en undersøkelse over husmennenes økonomiske forhold. Anders Nicolai Kiær gjennomførte også en del undersøkelser basert på representativ undersøkelse, og han gjorde også en god del for å fremme metoden i forskjellige fora. Prinsippet som lå bak den representative undersøkelsen var å lage et miniatyrbilde av virkeligheten. Schweder siterer Kiær på at skulle utvalgene være *"så vilkårlige og tilfeldige i forhold til populasjonen, at man kan anta at det virker på samme måte som et lotteri"* (2006, s. 10). Metoden som Kiær var først ute med har i senere tid blitt utviklet og kalles i dag sampling. I *The Basic Practice of Statistics* forklares sampling på følgende måte i forhold til en hel populasjon:

"The entire group of individuals that we want information about is called the population. A sample is a part of the population that we actually examine in order to gather information" (Moore, 2004, s. 178).

Denne formuleringen er lik Kiærs tankegang, altså at han ville kunne trekke slutninger om en hel populasjon basert på en *sample* eller *representativ undersøkelse* fra populasjonen.

Den kanskje viktigste undersøkelsen i forbindelse med metoden til Kiær, var en undersøkelse som omhandlet invalide i Norge. Den var viktig i den forstand at den førte til en så sterk kritikk av metoden, at den ikke lenger ble tatt i bruk i vesentlig grad i Norge etter 1903. Stortinget ville utrede et grunnlag for en invalid- og alderdomsforsikring. En av grunnene til dette kan være at den industrielle revolusjonen på dette tidspunktet hadde vart noen år, og trolig stod ikke sikkerheten i høysetet på mange fabrikker og arbeidsplasser. I komiteen som skulle utrede dette satt blant annet Kiær, som laget opplegg for undersøkelsene. Opplegget var at det skulle hentes inn opplysninger fra 80000 innbyggere, om inntekt, utdanning, familieforhold, helse og yrke. Av disse ble 60000 hentet fra landlige omgivelser og 20000 fra byer. Totalt antall innbyggere i Norge på denne tiden var i overkant av 2000000 (Hjemmehørende folkemengde 2009). Herredene i hvert amt ble sortert ettersom de var skogbruksbygder, fiskeribygder, fedriftsbygder eller andre kategorier. Det ble valgt ut to herred fra hvert fogderi, og for å få representasjon av alle næringsveier i amtet ble personsedler fra noen herred redusert og noen ble det tatt med flere fra. Deretter skulle tellerne gjøre et utvalg, og det ble påpekt at det var viktig å velge personer fra forskjellige økonomiske klasser. I byene skulle telleren innom hvert tredje, femte, sjette eller tiende hus, alt ettersom hvor store byene var. Tallene som kom inn, sammenlignet Kiær med tallene fra de totale folketellingene. For de store yrkesgruppene visste det seg at avviket på antallet yrkesutøvere i gruppen sjelden var over to prosentpoeng, mens det for noen mindre yrkesgrupper var litt større avvik. Kiær og komitéen mente disse tallene var pålitelige. De skulle vise seg senere at ikke alle var enige. Seng (1951, s. 217) mener at Kiær brukte stratifisering som metode når han delte inn sine utvalg. Stratifisering er også en type utvalgsundersøkelse og David Moore forklarer *stratified random sample* som følger: *"To select a stratified random sample, first divide the population into groups of similar individuals, called strata. Then choose a separate SRS in each stratum and combine these SRSs to form the full sample*" (2004, s. 184). I forbindelse med dette er der nødvendig å definere en *SRS* eller *simple random sample*: *"A simple random sample of size n consists of n individuals from the population chosen in such a way that every set of n individuals has an equal chance to be the sample actually selected"* (Moore, 2004). Lie (2001) mener i motsetning til Seng (1951) at å kalle Kiærs metode stratifisering vil være å gjøre han mer moderne en han var. Likevel finnes det en del likheter mellom metoden Kiær utførte invalide-undersøkelsen på, og definisjonen til Moore på *stratified random sample*.

2.5 Kritikk av undersøkelsesmetoden; nasjonalt og internasjonalt

Kiær holdt som nevnt flere innlegg om den representative undersøkelsesmetode på det Internasjonale Statistiske Institutt. Metoden ble kritisert på flere måter. Blant annet ble det hevdet at denne metoden ikke på noen måte kunne erstatte fullstendige tellinger, som ble regnet som "la statistique sérieuse", eller den virkelige statistikk. I tillegg ble det i forbindelse med Kiær sitt fremlegg fremhevet økende bruk av matematikk og sannsynlighetsregning i statistikken som gikk på bekostning av antall observasjoner. Dette var en tendens i resten av Europa, men for Kiær var det uforståelig at metoden han hadde fremlagt ble gjenstand for denne kritikken. Det lå nemlig ingen matematikk til grunn for metoden som var utviklet av Kiær og Mohn. Lie (2001) skriver at professoren som framsatte kritikken advarte mot at matematikk og beregninger i statistikk ikke måtte gå på bekostning av antall observasjoner. En grunn til at denne kritikken kom kan ha vært at Kiær sin metode hadde en likhet med bruken av matematikk og sannsynlighetsregning i statistikken. Fellesnevneren var at bruk av matematikk i statistikken også gikk på bekostning av antall observasjoner.

Tilhengere av en metode som ble kalt monografi, eller antropologisk metode, gav heller ikke Kiær sin støtte. Denne metoden gikk ut på å studere økonomiske eller sosiale forhold i små deler av samfunnet, som for eksempel en enkelt bygd eller by, for så å generalisere på bakgrunn av dette. I følge tilhengerne av denne metoden, benyttet Kiær for store utvalg i sine undersøkelser. Kiær mente utvalgsmetoden var en mellomting mellom den antropologiske metoden og fullstendige tellinger, men han var også av den oppfatning at den antropologiske metode ikke kunne gi noen god fremstilling av helheten.

I 1901 ble det fremsatt ny kritikk til utvalgsmetoden. På det Internasjonale Statistiske Institutt sitt møte i Budapest, argumenterte Ladislaus von Bortkiewicz (1838-1931) mot Kiærs undersøkelse fra 1897. Han hadde brukt en signifikanstest utviklet av den franske matematikeren og fysikeren Siméon Denis Poisson(1781-1840), på tallene til Kiær, og mente avvikene var for store til å være tilfeldige. For øvrig kan det nevnes at Poisson har fått en sannsynlighetsfordeling oppkalt etter seg, nemlig poissonfordelingen.

I Norge ble diskusjonen om utvalgsundersøkelsen hovedsakelig utløst som følge av statistikk over invalide. Jens Hjort, som var matematiker og forsikringsmann, var en av de sterkeste kritikerne til metoden. Kritikken fra Hjorth kom i av undersøkelsen som var utført i forbindelse med invalide- og aldersforsikringen. Hjorth mente undersøkelsen alene ikke var egnet å basere seg på. Han mente det burde gjøres observasjoner over lang tid, for å finne sannsynligheten for invaliditet i en bestemt yrkesgruppe. I forhold til det representative utvalg, kritiserte Hjorth det for ikke å være hensiktsmessig for invalide-forsikring. Han mente blant annet at det burde være inndeling av risikoklasser i arbeidslivet. Han påpekte blant annet at arbeidere ikke var én risikoklasse, ettersom jordbruksarbeidere og fabrikkarbeidere hadde ulik grad av risiko i forbindelse med arbeidet deres.

Hjorth benyttet seg også av beregninger for hvor store utvalgene burde være for at det skulle være 50 % sannsynlighet for at det kunne oppstå avvik på 10 prosent fra tallene som ble beregnet, og kom til at Kiær hadde for små tall i sine undersøkelser til å gi et riktig bilde av virkeligheten. I tillegg stilte Hjorth spørsmålet om hvor store man kan anta avvikene er, basert på tallene fra undersøkelsen. Lie beskriver hvordan Hjorth gikk frem.

"Hjorth regnet ut at man for en aldersgruppe med 16 invalider av et utvalg på 3606 personer (4,44 promille), kan slutte at "den søgte størrelse med 20/21 sannsynlighet lå mellom 2,2 og 6,6 promille og at den med 2/3 sannsynlighet lå mellom 3,3 og 5,6 promille og at den med 1/3 sannsynlighet lå mellom 3,7 og 5,2 promille."(2001, s. 176).

Det Hjorth her beregnet, er det vi i dag kaller konfidensintervaller. Koblingen mellom konfidensintervaller og utvalgsundersøkelser var ikke en anerkjent metode da Hjorth utførte disse beregningene. Bruk av konfidensintervall er en metode innen matematisk statistikk, og har vært pensum på videregående skole.

I 1906, på et møte i stats-økonomisk forening, innrømmet Kiær at tallene hans ikke var så gode som han først hadde antatt. Det statistiske Centralbureau hadde foretatt nye undersøkelser som strakte seg over lengre tid, og tallene fra disse undersøkelsene stemte dårlig med tallene fra den første utvalgsundersøkelsen om invaliditet som Kiær foretok.

Etter dette planla ikke Kiær flere undersøkelser med den representative undersøkelsesmetoden, trolig på grunn av nederlaget han led i forbindelse med invalide-forsikringen. Jens Hjorth er tildelt "hovedæren" for at metoden i liten grad ble tatt i bruk etter 1903. Men det er ikke nødvendigvis sikkert Hjorth ikke hadde tro på metoden. Ettersom han gjorde beregninger med sannsynlighet for at metoden skulle være treffsikker, kan det tenkes at det ikke var selve utvalgsmetoden han var kritisk til. Det kan heller tenkes at han var kritisk til Kiærs måte å anvende den på. Dette er et viktig poeng i forhold til sampling. I dag er sampling anvendt innenfor både deskriptiv og matematisk statistikk, men man vet mer om metodens treffsikkerhet og begrensninger enn man gjorde på Kiærs tid, ved hjelp av sannsynlighetsteori.

Jens Hjort og Karl Færden gir i Aktuarvirksomhet i Norge (1929) sin fremstilling av striden. Denne fremstillingen er mer opptatt av at aktuarenes kompetanse ble trukket i tvil. Blant annet kommer det frem en lite flatterende karakteristikk av aktuarer, fremsatt av Wollert Konow, som var formann for kommisjonen som skulle utarbeide loven om invaliditet- og alderdomsforsikring. Etter at Hjorth hadde fremsatt sin kritikk av det statistiske grunnlaget for kommisjonenes beregninger, skal Konow ha uttalt om aktuarer, eller forsikringsteknikere som han kalte dem:

"*En forsikringstekniker er en håndverker i faget; det er han som skal foreta utregninger på det gitte statistiske grunnlag. Men det er ikke sagt at han er rette mann til å opkonstruere eller utfinne de beste former for en forsikring. Heller ikke er det sagt, at han er den rette mann til å bedømme en statistikk*" (Færden & Hjorth, 1929, s. 3).

Boka gir videre en liten redegjørelse for møte i stats-økonomisk forening der Kiær innrømmet at metoden hadde svakheter. Deretter står det:

"*Dette var jo litt av en oppreising for forsikringsteknikerne. Man hadde vel nu også fått øie på sådanne dyrkere av håndverket som direktør Oscar Schjøll og professor O.J. Broch, om* *enn professor Søren Rasmusens ydelser i faget var glemt"* (Færden & Hjorth, 1929, s. 4). Både Schjøll (1845-1934) (Arntzen & Helle, 1999a), Broch (1818–1889) og Rasmusen (1768-1850) (Færden & Hjorth, 1929) var matematikere. Rasmusen blir sågar omtalt som Norges første aktuar (Færden & Hjorth, 1929, s. 20).

2.6 Den norske aktuarforening

Den norske aktuarforening ble stiftet 11. juli 1904 (Færden & Hjorth, 1929, s. 281). I et brev fra daværende administrerende direktør i Gjensidige, Thomas Fearnley, til Jens Hjorth, Arnfinn Palmstrøm og Johs Thrane, uttrykker Fearnley behovet for en forening, og argumenterer blant annet med at mange matematikere involverer seg i forsikring, og det er mange viktige spørsmål som er aktuelle. For å diskutere og eventuelt løse noen av disse spørsmålene, mente Fearnley det ville være viktig å kunne samles og diskutere dem. Så sent som året før hadde aktuarene vært svært lite organisert, og det fortelles blant annet om en invitasjon Norge fikk til en internasjonal aktuarkongress i USA. Invitasjonen ble sendt fram og tilbake mellom forskjellige departementer; ingen mente aktuarer var deres "ansvarsområde" (Færden & Hjorth, 1929).

Før stiftelsen hadde det eksistert forskjellige typer forsikringsvirksomhet. Blant annet noe som het den dansk-norske enkekasse som ble opprettet midt på 1700-tallet. Denne ble avløst av den norske enkekasse i 1814. Den gav utbetalinger til enker etter militærpersonell og statsansatte. Dødelighetstabellene som ble brukt i beregningene til enkekassen var utenlandske, og man kan anta at de ikke stemte godt overens med Norge, ettersom enkekassen i begynnelsen stort sett gikk med underskudd. Dette snudde ikke før Søren Rasmussen laget sammenligninger mellom utenlandske dødelighetstabeller og det som fantes av dødelighetsstatistikk. Den norske enkekassen var for øvrig forløperen til det som i dag kalles Statens pensjonskasse (Den Norske & Falk, 2004).

I starten var medlemsmassen dominert av aktuarer i høyere stillinger. Det var ingen formelle krav til utdannelse for å bli medlem, men medlemmene var stort sett aktuarutdannet. Møtene dreide seg om å diskutere spørsmål eller problemer, som noen av aktuarene hadde støtt på i sitt daglige virke. Temaene dreide seg ofte om livsforsikring og aktuarutdannelse. Etter hvert ble også temaer som dødelighet, statistikk, risikoteori, og demografi stadig hyppigere diskutert (Den Norske & Falk, 2004).

2.7 Aktuarutdannelsen

I 1904 ble det arrangert et forsikringsteknisk seminar for realfagstudenter, og tre år senere, i 1907, ble det første universitetskurset i forsikringsmatematikk startet opp (Den Norske & Falk, 2004, s. 23). Dette kurset skulle inneholde finansvitenskap, statsøkonomi og statistikk. Etter påtrykk fra aktuarforeningen ble det i 1913 opprettet et professorat i matematikk, for dr. Alf Guldberg, der det stiltes krav til at professoren måtte forelese aktuarmatematikk to ganger ukentlig. Alf Guldberg var initiativtaker til det forsikringstekniske seminar i 1904, hadde tidligere forelest forsikringsmatematikk og sannsynlighetsregning, og var en av i alt 14 personer som er regnet som stiftere av Den Norske Aktuarforening (Den Norske & Falk, 2004).

I 1916 ble et forslag til lov for ny aktuareksamen godkjent. Der var det bestemt at eksamen skulle bestå av en matematisk avdeling, som skulle omfatte sannsynlighetsregning, utjevningslære, interpolasjon, matematisk statistikk, livsforsikringsmatematikk, og alminnelig matematikk som var den matematikken som krevdes for matematisk naturvitenskapelig embetseksamen, alminnelig avdeling (Den Norske & Falk, 2004, s. 23). Den andre delen var sosialvitenskapelig, som skulle omfatte statsøkonomi og statsvitenskap. I tillegg skulle kandidatene gå opp til skriftlig prøve i bokholderi eller regnskapsføring (Færden & Hjorth, 1929, s. 269).

Etter hvert ble det opprettet et forsikringsteknisk seminar, og Arnfinn Palmstrøm ble leder for dette, og i 1917 ble det opprettet et ekstraordinært professorat for dette seminaret, ettersom undervisningen var arbeidskrevende. Palmstrøm tiltrådte da i stillingen. Noen år senere, i 1923, ble professoratet omdannet til et ordinært professorat, og Birger Meidell ble ansatt i stillingen (Færden & Hjorth, 1929, s. 271). Denne stillingen besatte Meidell frem til 1945. Meidell hadde for øvrig vært medlem av Nasjonal Samling under krigen, og var statsråd i regjeringen til Quisling. Han ble dømt til livsvarig tvangsarbeid for landssvik i 1946. Han ble i 1949 benådet grunnet sykdom (Arntzen & Helle, 1999b, s. 262).

I 1953 ble Erling Sverdrup ansatt i professorstillingen (Den Norske & Falk, 2004). Undervisningen i den matematiske delen av aktuarutdannelsen, hadde ikke holdt følge med fremskrittene innen statistisk metodelære som var gjort rundt om kring i verden. Sverdrup hadde tatt doktorgrad innenfor statistiske metoder, og var dermed blitt oppdatert innenfor den statistiske metodelære. Det var også gjort store fremskritt innen sannsynlighetsregning, og med bakgrunn i dette mente Sverdrup det var på tide med modernisering av aktuarutdannelsen. Dette fikk han ikke gjennomført uten diskusjon, og det gikk noen år før aktuarutdannelsen formelt ble endret. I 1961 ble det bestemt at aktuareksamen skulle bestå av ren matematikk, forsikringsmatematikk, statistisk metodelære og sosialøkonomi. Forskjellen fra det som hadde vært var ikke nødvendigvis stor på papiret, men utdanningen ble nå mer ordnet i forhold til de vitenskapelige fremskritt som var gjort internasjonalt (Den Norske & Falk, 2004, s. 24)

I slutten av 1960-årene ble embetseksamen for aktuarer igjen satt på dagsorden. Et forslag var å avskaffe embetseksamen for aktuarer, og heller la aktuarene ta hovedfag i matematisk statistikk, som for øvrig ble opprettet i 1956 av Sverdrup og Olav Reiersøl, som blir nærmere beskrevet senere i oppgaven. Sverdrup var en av de som mente aktuareksamen ikke burde være for yrkesrettet, men at aktuarene burde ha en utdannelse med et godt vitenskapelig grunnlag, så de kunne ta andre jobber enn bare aktuar, og ha et fundament til å tilegne seg kunnskap i ettertid av utdannelsen (Den Norske & Falk, 2004, s. 23). Forslaget ble ikke tatt til følge, men ti år senere ble det forandringer. Hovedfagene ble nå lagt opp etter en ny struktur, cand.scient.-strukturen. Det som før hadde vært aktuarutdannelsen, skulle nå være en egen studieretning innunder hovedfag i statistikk. Dette medførte blant annet en endring i utdannelsen, ved at man nå måtte skrive en hovedfagsoppgave, noe man ikke hadde trengt å gjøre før. Aktuarforeningen ville at cand.act., som var den tidligere graden til aktuarene, fortsatt skulle være beskyttet, men dette fikk de ikke gjennomslag for. I stedet fikk kandidater som hadde hovedfag med studieretning forsikringsmatematikk, godkjent aktuarkompetanse. Denne kompetansen var et kriterium for å kunne jobbe som ansvarshavende aktuar, og aktuarforeningen stilte det som krav for å bli medlem i foreningen (Den Norske & Falk, 2004, s. 25-26).

1990-tallet bar lite godt med seg i forhold til aktuarutdannelsen. Ved Universitetet i Oslo ble det forsket lite, og det var ingen personer som stod i bresjen for utdanningen slik Sverdrup hadde gjort. Det ble heller ikke drevet noe særlig forskning på området. I "Den norske aktuarforening 100 år" (2004, s. 26) står det at utviklingen internasjonalt innen aktuarfaget var stor i disse årene, spesielt ved teorien om finansielle derivater og bruk av datateknologi. Universitetet i Oslo greide ikke følge med på denne utviklingen og utdanningens kvalitet ble svekket. På 1990-tallet begynte også Universitetet i Bergen å utdanne aktuarer, og i dag, i 2010, er det fortsatt de to eneste utdanningsinstitusjonene i Norge som gjør det.

De siste årene har det skjedd en utvikling. Flere forsikringsselskaper og banker har fusjonert, og omtales ofte som finanskonsern. Aktuarer som jobber i disse selskapene jobber med produkter der finansiell risiko spiller en viktig rolle. Finansiell risiko er en viktig del av utdanningen både ved universitetet i Bergen og Oslo.

Det kan være verdt å nevne hvilke krav UiB og UIO stiller for å gi aktuarkompetanse. Man må ta tre obligatoriske emner:

Universitetet i Bergen:

- Stat 230 Livsforsikringsmatematikk
- Stat 231 Skadeforsikringsmatematikk
- Stat 240 Finansteori

I tillegg må man skrive en masteroppgave på minimum 30 studiepoeng med et tema som er relevant for forsikring eller finans. (UiB)[1]

Universitetet i Oslo:

- Mastergrad i Modellering og dataanalyse med studieretning finans, forsikring og risiko, fordypning i aktuarfag eller matematisk finans
- Bestått eksamen i emnene:
    - STK2520 - Problemer og metoder i aktuarfag
    - STK4500 - Finans og forsikring
    - STK4510 - Innføring i finansmatematiske metoder og teknikker
    - STK4540 - Skadeforsikring og risiko (UiO)[2]

2.8 Norsk Matematisk Forening og Norsk Matematisk Tidsskrift

Norsk matematisk tidsskrift var et organ for Norsk matematisk forening, som ble stiftet i 1918. Thomas Kalleberg (2004) beskriver i sin masteroppgave stiftelsen av foreningen, og det kommer fram at en av de sentrale skikkelsene i dette arbeidet var aktuar Arnfinn Palmstrøm. Palmstrøm var styremedlem og sekretær i Norsk Matematisk Forenings første styre. I tillegg til Palmstrøm var også aktuar Nils Solberg styremedlem og kasserer, mens aktuar Ivar Hesselberg var revisor. Jeg vil gi en liten redegjørelse for dette og nevne noen viktige personer i arbeidet med stiftelsen av Norsk Matematisk Forening, fordi flere aktuarer og livsforsikringsselskap har vært sentrale i denne prosessen. Et annet poeng i forhold til foreningen er at dens formål blant annet var å fremme studiet av matematikk, ved foredrag og diskusjoner av matematiske og matematikkpedagogiske emner, og gjennom utgivelse av norsk matematisk tidsskrift. Gjennom norsk matematisk tidsskrift kommer det etter hvert fram at statistikk og sannsynlighetsregning er et tema som blir drøftet av det matematiske miljøet i Norge.

Birger Meidell (1923) har skrevet en nekrolog om Arnfinn Palmstrøm. Her kommer det fram at han var utdannet innen matematikk og fysikk, og jobbet som lærer innen begge disse fagene. I 1901 begynte han sitt virke som aktuar i forsikringsselskapet Brage, i tillegg til

[1] http://www.mn.uio.no/math/studier/om/aktuarkompetanse/
[2] http://math.uib.no/adm/grupper/aktuar/aktuar.html

undervisningen. Fra 1902 holdt han kun på med forsikring. Palmstrøm holdt på med mye innenfor matematikken, og var spesielt interessert i tallteori, men som Meidell påpeker var det *"som aktuar og praktisk forsikringsmand at Palmstrøm kom til at gjøre sin beste indsats"* (1923, s. 4). I følge Meidell (1923) var det på grunn av Palmstrøms erfaring med pedagogikk og hans enestående kunnskaper innen forsikring som førte til at Palmstrøm ble lærer i forsikringsteknikk da aktuareksamen ble etablert. Arnfinn Palmstrøm var for øvrig far til Henrik Palmstrøm (1900-1998), som også var aktuar, og aktiv i det statistiske miljøet i Norge, blant annet som formann i Norsk Statistisk forening i to perioder.

En annen sentral aktør i oppstarten av Norsk matematisk forening var Alf Guldberg(1866-1936). Guldberg ble formann i foreningen i 1925 etter at han klaget på at det var for lite aktivitet i foreningen (Birkeland, 1999). Meidell (1936) har også skrevet en nekrolog om Guldberg. Guldberg hadde flere studieopphold i utlandet, der han studerte både matematikk, mekanikk, astronomi, geologi, geografi, zoologi og botanikk. I 1893 startet Guldberg studier i matematikk i Leipzig under Sophus Lie (1842-1899). I 1896 startet Guldberg sine studier i forsikringsmatematikk i København. Dette førte til at han begynte med arbeider innen både sannsynlighetsteori og statistikk. Meidell nevner blant annet at Guldberg lykkes med

" (…) *på en ydterst enkel måte å finne recursjonsformler for så vel de komplette som de ukomplette momentsummer for den binomiale fordelingslov og likeså for Pascals, Poissons og den hypergeometriske fordelingslov-en oppgave som inntil da hadde vært ansett for uhyre vanskelig*" (1936, s. 38)

Meidell (1936) skriver videre at Guldberg holdt mange foredrag, både i regi av Norsk matematisk forening og den Norske Aktuarforening, der han uttrykte sin store interesse for forsikringsmatematiske og matematikkstatistiske problem. Guldberg var en sentral skikkelse i opprettelsen av professorater og dosenturer ved Universitetet i Oslo, og spilte også en viktig rolle da det første professoratet i forsikringsmatematikk ble opprettet, som Arnfinn Palmstrøm som nevnt ble tildelt.

Kalleberg (2004) har i sin oversikt over viktige personer knyttet til stiftelsen av Norsk Matematisk Forening også nevnt Fredrik Lange-Nielsen. Han fungerte som referent og sekretær for Norsk Matematisk Forenings møter, og var også redaktør for Norsk Matematisk Tidsskrift i perioden 1924-1929, der han også var en flittig bidragsyter til innhold. I følge Norsk Biografisk Leksikon (1999c) var Lange-Nielsen utdannet innen matematikk ved Universitetene i Lund (1917) og Paris (1919-1920). Han jobbet i Statens Pensjonskasses forsikringstekniske kontor, og ble i 1920 sjef for De norske livsforsikringsselskapers statistiske kontor. Han ledet blant annet en undersøkelse om dødeligheten blant norske forsikringstakere, og disse undersøkelsene *"vakte berettiget oppsikt langt utover Norges grenser"* (Arntzen & Helle, 1999c, s. 446). I 1938 fikk han jobben som administrerende direktør i statens pensjonskasse. Denne stillingen mistet han under krigen, men fikk den tilbake i 1945. Det året ble han også administrerende direktør i livsforsikringsselskapet Norske Liv. Lange-Nielsen foreleste også ved både norske og utenlandske universiteter i både sannsynlighetsregning og forsikringsmatematikk i årene 1936-37, og var også sensor i både aktuarmatematikk (1945-1947) og teoretisk statistikk (1943-1957).

I forbindelse med stiftelsen av Norsk Matematisk forening, ble det søkt om økonomisk støtte, blant annet fra livsforsikringsselskapene. I sin historiske oversikt om Norsk Matematisk forening gjennom 25 år, skriver Olaf M. Thalberg (1943) at da foreningen holdt sitt konstituerende møte, opplyste Arnfinn Palmstrøm at det var med "godt håp om støtte fra forsikringsselskapene" (Thalberg, 1943, s. 66) Også Norsk Matematisk tidsskrift fikk støtte fra livsforsikringsselskapene, etter at tidsskriftet de første årene hadde generert underskudd, som igjen hadde ført til reduksjon i antall sider i bladet.

Kalleberg(2004) gir en oversikt over emner som har blitt publisert i Norsk matematisk tidsskrift. Statistikk og sannsynlighetsregning er bare i liten grad representert, og en kikk på oversikten til Kalleberg forteller at det er i alt bare 14 artikler av totalt 327 som tar for seg temaet sannsynlighetsregning og/eller statistikk. Av viktige bidragsytere kan nevnes Bj. Bjerke og Viggo Brun. Ragnar Frisch har også bidratt med en artikkel om sannsynlighetsregning.

2.9 Norsk Statistisk Forening

Norsk statistisk forening ble stiftet 28. april 1936. Opprinnelig eksisterte en statistikkforening som ble stiftet 7. januar 1919. Det finnes ikke mye kunnskap om denne foreningen. Man vet at Gunnar Jahn, som var direktør i Statistisk sentralbyrå fra 1920-1945, var formann i 1927. Grunnen til at Norsk statistisk forening ble stiftet, setter Jostein Lillestøl (1986) i forbindelse med at Norge, Sverige, Finland og Danmark arrangerte de nordiske statistikermøtene. Disse ble avholdt i Sverige i 1927 og Danmark i 1936. Når det etter dette var Norge sin tur til å arrangere, mener Lillestøl det er trolig at norsk statistisk forening ble stiftet, for at noen skulle ha ansvaret for arrangementet.

Lillestøl (1986) skriver også at i begynnelsen var det stort sett sosialøkonomer og stats-økonomer som var medlemmer av Norsk statistisk forening. Dette endret seg midt på 60-tallet, da flere statistikere med matematisk og naturvitenskapelig bakgrunn ble medlemmer. En årsak til dette kan ha vært det nokså nyopprettede hovedfaget i matematisk statistikk (1956), som er nærmere beskrevet i kapittel 2.10. Fra ca. midt på 60-tallet økte antall utdannede statistikere (Heuch, 1986), og flere statistikere ble sysselsatt rundt omkring i Norge i forskjellige bransjer, de arbeidet ikke lenger bare i Oslo for Statistisk sentralbyrå, som i følge Lillestøl (1986) frem til denne tid hadde vært vanlig. Ettersom flere av foreningens medlemmer ikke lenger bodde i umiddelbar nærhet til Oslo, ble det etter hvert behov for en reorganisering. I følge Lillestøl (1986) ble det i 1985 tillatt å opprette lokalforeninger. I 1983 hadde det i Bergen blitt opprettet en lokalforening, men denne ble ikke offisiell før endringene av vedtektene i 1985.

Opprinnelig hadde Norsk Statistisk Foreningen som formål

"å være et bindeledd mellom norske statistikere, som virker blant annet gjennom foredrag og diskusjoner over emner av statistisk natur både innenfor teorien og teknikken og innenfor den anvendte statistikk." (1986, s. 9)
I vedtektene som nå gjelder, etter at de ble revidert i 1985, inneholder følgende mål:

- være et bindeledd mellom norske statistikere og fremme deres faglige og profesjonsmessige interesser
- fremme kontakt mellom statistikere og statistisk interesserte
- utbre kjennskap til og interesse for statistikk i skolen og ellers i samfunnet
- fremme samarbeid og informasjon mellom nordiske statistikere
- fremme norske statistikeres kontakt med det internasjonale statistikersamfunnet

Vedtektene presenterer også foreningen hva de vil gjøre for å oppnå disse målene:

- holde norske statistikermøter annet hvert år
- holde møter for nordiske statistikere når det er Norges tur
- utgi, sammen med søsterforeningene i de andre nordiske land, Scandinavian Journal of Statistics

- utgi et medlemsblad
- organisere og støtte konferanser, etterutdanningskurs og symposier for statistikere
- holde møter med foredrag og diskusjoner over emner av statistisk natur både innen teorien og teknikken og innenfor den anvendte statistikk. (Forening, 1985)

Det tredje punktet i vedtektene er spesielt interessant i denne sammenheng. Norsk statistisk forening gjennomfører denne vedtekten på flere måter. I skolesammenheng reiser norske statistikere og medlemmer av foreningen rundt på skoler og presenterer seg og inviterer skolebarn og skoleungdom til universitetene på populærvitenskapelige foredrag.

2.10 Statistikkutdanning på universitetsnivå

Erling Sverdrup er han som får mye av æren for at statistikk ble opprettet som hovedfag i 1958 (Heuch, 1986). Sverdrup jobbet fra 1946 som assistent til den norske nobelprisvinneren i økonomi, Ragnar Frisch (1895-1973), ved sosialøkonomisk institutt. Sverdrup hadde tidligere begynt på aktuarstudiet, men ble avbrutt da krigen brøt ut. Frisch hadde vunnet nobelprisen på arbeider innen matematisk statistikk, og dette har trolig vært med og påvirket Sverdrup i interessefelt. I tillegg til Frisch jobbet også en annen norsk nobelprisvinner i økonomi ved instituttet på denne tiden, nemlig Trygve Haavelmo (1911-1999). Haavelmo hadde i likhet med Frisch blitt tildelt Nobelprisen på bakgrunn av arbeider innen matematisk statistikk. Tore Schweder (1994) skriver i sin minnetale over Sverdrup at han allerede i studietiden hadde fått opp interessen for matematisk statistikk, og denne interessen vokste ytterligere da han som stipendiat i årene 1949-1950 besøkte University of California, Berkeley, University of Chicago, og Columbia University i New York. Her ble han kjent med arbeidet til Jerzy Neuman (1894-1981) og Abraham Wald (1902-1950) om beslutningsteori. Dette ledet etter hvert til en doktorgrad, som i følge Norsk biografisk leksikon (1999d) bidrog til teorien om optimalitet av statistiske metoder.

Sverdrup fikk i 1949 tilbud fra Statistisk sentralbyrå om å bli matematisk statistisk konsulent, men avslo fordi han på dette tidspunktet var leder for forsikringsteknisk seminar. I 1964 ga Sverdrup ut læreboken Lov og tilfeldighet, som i følge Schweder *"har formet en hel generasjon av norske statistikere"* (Det Norske, 1994, s. 246) Det er tydelig at Sverdrup har hatt en viss anerkjennelse, for i "Statistikk i Norge-et langt tilbakeblikk", skriver Tore Schweder om at i 1960 og 70-årene gikk det en strøm av studenter fra Oslo til Berkeley for å ta PhD ved Neymans og Lehmans institutt. Schweder skriver videre at de norske studentene *"fikk særbehandling idet de slapp å ta de to harde begynnerkursene. Lehmann mente det ikke var nødvendig, for vi hadde jo lært det hele av Sverdrup" (2006, s. 16)*. Sverdrup var æresmedlem av Norsk statistisk forening og den norske aktuarforening.

Ivar Heuch (1986, s. 133-150) gjør i en artikkel rede for utdannelsen av fagstatistikere i Norge. Universitet i Oslo opprettet som nevnt hovedfag i statistikk i 1958. Også i ved universitetene i Bergen og Tromsø kom etter hvert hovedfag i statistikk, med de første uteksaminerte kandidatene i henholdsvis 1972 og 1979. Også ved NTH i Trondheim ble det utdannet sivilingeniører som spesialiserte seg i statistikk, som Heuch i sin artikkel også kategoriserer som fagstatistikere. De to første kandidatene var ferdigutdannet i tidsrommet 1968-1970.

Heuch har oppgitt en tabell over temaer for hovedoppgaver (1986, s. 136). Han forteller at klassifiseringen av temaene har han selv foretatt, og inneholder derfor usikkerhetsmomenter. Uansett kan man av tabellen se at det er stor variasjon i temaene, og i tabellen er det totalt 20 forskjellige kategorier, der to av temaene er anvendelser på andre fagfelter (geofysikk og biologi). Denne oversikten gjelder fra 1959-1985, men som Heuch skriver var det stor spredning i temaer ved UiO også fra 1959-1971. Dette påpeker han i forbindelse med at av de første 30 kandidatene som ble uteksaminert ved UiO, hadde 27 hatt Erling Sverdrup eller Olav Reiersøl som veileder. Heuch mener dette viser hvilken sterk innflytelse disse to har hatt på statistikkfaget i Norge.

2.11 Statistisk Sentralbyrå i nyere tid

I jubileumsskriftet til Norsk statistisk forening (1986) gir Arne Øien og Mikael Selsjord et overblikk over utviklingen til statistisk sentralbyrå mellom 1976 og 1986. Her nevnes det blant annet hva som har skjedd de 10 foregående årene som har vært med å endre Statistisk sentralbyrå sine arbeidsoppgaver. Blant annet blir oljenæringens fremvekst nevnt, og videre den stigende interesse for bruk av naturressurser og miljø. Av faktorer som påvirket mengden av publikasjoner, nevnes vekst i norsk offentlig administrasjon, som gjorde at også Statistisk sentralbyrå fikk økt stab. En annen faktor er utvikling av data-teknologi. Denne utviklingen har siden 1986 eskalert, og der det i artikkelen av Øien og Selsjord nevnes problemer med å utnytte teknologien, på grunn av mangel på utstyr og kvalifisert personale, kan man si at det har vært en enorm utvikling frem til dags dato. Dette gjelder både innen tilgang på utstyr, programvare og kompetent personale. Det er lett å tenke seg at utviklingen innen datateknologi har ført til effektivisering i Statistisk Sentralbyrå sitt arbeide, både med tanke på analyse av data og publisering.

Per dags dato utarbeider Statistisk sentralbyrå statistikk over mange emner. Et besøk på deres nettside forteller for eksempel om 12 ulike statistikk-områder, med mange forskjellige underemner (Statistikk ordnet etter emne - statistikkområder).

3. Teoretiske perspektiver på analysen av læreplaner

Det kan være knyttet flere spørsmål til innføring av statistikk og sannsynlighet i skolen. For eksempel på hvilket klassetrinn det er mest hensiktsmessig å innføre disse emnene. Piaget og Inhelder (1975) har gjennomført en undersøkelse der de utforsker når barn er i stand til å bygge opp et sannsynlighetsbegrep. I denne studien finner de fram til tre stadier i utviklingsprosessen av et sannsynlighetsbegrep. Stadiene i utviklingsprosessen kommer med alderen, og stadiene gjelder fra før fylte 7-8 år, deretter mellom 7-8 og 11-12 og til slutt etter fylte 11-12 år.

Det som karakteriserer det første stadiet er at barn vil ha problemer med å skille mellom det mulige og det nødvendige. Piaget og Inhelder mener barn er modne for å utvikle et sannsynlighetsbegrep på det tredje stadiet.

E. Fischbein (1975) skriver også om barns tanker om sjanser. Han mener barn har en intuisjon om sjanse i hverdagslige sammenhenger selv før de er fylt sju år, og påpeker at denne intuisjonen ikke nødvendigvis dreier seg om størrelsen på odds eller sannsynlighet, men uforutsigbarhet knyttet til hendelser.

Henrik Dahl (1986) stiller spørsmål om hvordan pensum i statistikk bør utformes og hvordan elevene blir presentert for elevene. Dahl er selv statistiker og har jobbet ved Høgskolen i Agder og vært involvert i det matematikkdidaktiske miljøet der. Han mener statistikken kan presenteres til elevene på to mulige måter, enten gjennom matematikkfaget eller gjennom tverrfaglig integrering. Sistnevnte kan i følge Dahl, gi problemer med å se den generelle strukturen, mens statistikk presentert gjennom matematikkundervisningen kan gi et for teoretisk bilde av statistikk, uten hensyn til anvendelser.

Et annet interessant moment ved artikkelen til Dahl - er hans skepsis til koblingen mellom sannsynlighetsregning og statistikk i grunnskolen. Dahl mener sannsynlighetsregningens rolle i grunnskolen bør være i forbindelse med forståelse av tilfeldighet, og ikke "*som en rent matematisk disiplin uten tilknytning til virkeligheten*" (1986, s. 124). Forståelsen av tilfeldighet er i følge Dahl, viktig for å forstå prinsippene bak en meningsmåling, og han mener sannsynlighetsregning er relevant i grunnskolen bare i den grad at den gir kvalitativ forståelse av tilfeldighet.

Henrik Dahl har i Normat (1985) oversatt en artikkel av Georg Schrage, om statistikkundervisning i skolen. Der tar Schrage opp flere sider ved statistikk og sannsynlighetsregning i skolen. Han nevner blant annet tilfeldighetsbegrepet, som elever i tyske skoler er ment å lære ved hjelp av myntkast og terningkast. Dette mener han er nødvendig i grunnskolen, og vil være vellykket dersom læreren viser tilstrekkelig engasjement. Videre diskuterer han statistikkfaget i skolen. Statistikk har flere ikke-matematiske sider ved seg som statistikkundervisningen bør inneholde, blant annet modellbyggingsprinsippet, risiko, utvalgsmetodikk og anvendelser av resultater. Han nevner i sammenheng med dette at statistikkproblemer som tas opp i skolen, ofte ikke levner noen tvil om hvilken modell som skal brukes, for eksempel konfidensintervall eller hypotesetesting. Dermed kan elevene lære seg standardiserte slutningsregler for ulike statistiske problemstillinger. Han begrunner hvorfor han mener det er viktig med statistikkundervisning i skolen - ikke bare i et matematisk perspektiv - ved å nevne at statistikk er i bruk overalt i samfunnet og dagliglivet, og mener statistikk er den grenen av matematikken som er i bruk av flest ikke-matematikere. Videre mener han at voksne samfunnsborgere bør ha nok kunnskaper innen statistikk til å kunne forstå og kritisere statistisk informasjon de blir utsatt for i hverdagslivet; han påpeker i denne sammenheng at statistikk kan fremstilles på så mange måter at den kan fortelle det fortelleren ønsker.

Både Schrage og Dahl tar opp temaet med statistiske feilslutninger. Dahl tar opp dette temaet i forbindelse med videregående skole, der han diskuterer hvordan intuitive prinsipper kan gi statistiske feilslutninger. Dette temaet tar også Schrage opp, og begge demonstrer ved eksempler hvordan intuitive vurderinger kan gi alvorlige feil ved vurdering av statistiske data.

Artikkelen til Schrage bygger også på en undersøkelse utført av J.M. Shaugnessy (1977). I denne undersøkelsen har elever blitt gitt oppgaver som de skal løse. Bakgrunnen for denne undersøkelsen er å få et innblikk i hvordan elevene tenker i forhold til en del sannsynlighetsteoretiske og kombinatoriske problem sett opp i mot det som i artikkelen kalles heuristisk tankegang. Dette eksemplifiseres av Shaugnessy med et myntkast, der en har fått for eksempel fem mynt på rad. Etter en heuristisk tankegang vil det på det sjette kastet være størst sannsynlighet for å få krone, siden mynten er "rettferdig". Dette er en type misoppfatning fra et sannsynlighetsteoretisk perspektiv, og kan sies å være en misforstått oppfatning av store talls lov.

Uavhengighet og betinget sannsynlighet er begreper som har vist seg å være vanskelig for flere elever. Både Wenche Rolandsen (2001) og Lars Aga (2008) tar opp dette i sine masteroppgaver. Begge refererer til J.M. Shaughnessy og B. Bergman (1993). Her drøftes Monty Halls problem, et problem som ble heftig diskutert i forbindelse med et game-show i USA. Deltakeren i game-showet står foran tre lukkede dører, og bak disse gjemmer det seg to geiter og en bil, hvor bilen selvfølgelig er den ettertraktede gevinsten. Deltakeren får velge en dør, men får ikke vite hva som skjuler seg bak den. Videre åpnes så en annen dør, der det skjuler seg en geit. Programlederen vet hva som skjuler seg bak hver dør. Før deltakeren vet hva som er bak døren han valgte i utgangspunktet får han muligheten til å bytte dør. Her er det mange ganger vanskelig for elever å tenke seg hva som er mest fornuftig å velge, mange mener umiddelbart man har 50 % sjanse til å vinne. Ved å gjøre dette forsøket mange ganger, vil man trolig etter hvert oppdage at det vil være mest fornuftig å bytte dør fra det opprinnelige valget, fordi programlederen har gitt deltakeren en tilleggsinformasjon ved å åpne den tredje døra. Generelt mener Shaughnessy og Bergman (1993) at simuleringer eller utførelser av ulike forsøk, som for eksempel beskrevet over, kan være et lovende hjelpemiddel i forhold til å forstå en del prinsipper i sannsynlighetsregning.

Læreplanen benytter mange ulike begreper knyttet til hva elevene skal kunne. Eksempler kan være beregne, forstå, vurdere og så videre. Inger Margrethe Tallaksen og Kari Repstad(2006) opererer med en tabell, der ulike begreper er klassifisert i tre trinn etter hvilke kunnskapsnivåer og ferdighetsnivåer de uttrykker. Tabellen ser ut som følger:

Kompetanse på nederste trinn			
Kunnskaper(Reprodusere)		Ferdigheter(Oppfatte)	
Reprodusere Oppdage Beskrive Føle Iaktta Lytte	Oppfatte Observere Motta inntrykk Følge med Sanse Merke	Gjenta Gjenkjenne Gjengi Angi Navngi	Definere Liste opp Beskrive Skjelne Streke under

Kompetanse på mellomste trinn			
Kunnskaper(Anvende)		Ferdigheter(Imitere)	
Påvise	Gjøre rede for	Sammenlikne	Kommunisere
Forklare	Bruke	Anvende	Organisere
Fortelle	Imitere	Verdsette	Tilpasse
Forberede	Forstå	Velge	Utføre
Ta initiativ	Ta ansvar for	Tolerere	Fortolke
Formulere	Løse	Beregne	
Kompetanse på øverste trinn			
Kunnskaper(Vurdere)		Ferdigheter(Utvikle)	
Vurdere	Drøfte	Diskutere	Generalisere
Kritisere	Utlede	Dokumentere	Trekke slutninger
Planlegge	Realisere	Improvisere	Beherske
Videreutvikle	Styre	Kombinere	Beslutte
Presisere	Justere	Integrere	Påvirke
Produsere	Utvide	Forme	Fornye
Utvikle	Integrere verdier		

Denne tabellen vil som nevnt være interessant i forbindelse med læreplaneformuleringer. Selv om ikke alle begrepene som står i læreplanen finnes i tabellen, vil de kunne tolkes i forhold til de overordnede kompetansene på hvert trinn.

I forbindelse med analysen av lærebøker, kan det være et interessant perspektiv å se på ulike typer problemstillinger i oppgavene. Derfor velger jeg å gjengi noe av arbeidet til Hundeland (1996), der han gjør rede for ulike typer problemstillinger som lå til grunn for utviklingen av sannsynlighetsregning. Dette kan også være interessant i forhold til at ulike læreplaner forteller på ulike måter at elevene skal kjenne til noe av historien bak matematikken. R94 versjon 94 forteller blant annet at *"matematikk er et eldgammelt fag med røtter i mange kulturer. Fagets historie er nært knyttet til disse kulturenes ånds- og samfunnsliv, og elevene bør få innblikk i dette samspillet"* (KUF, 1994, s. 2)

Italieneren Gerolamo Cardano (1501-1576) var den første som Hundeland nevner i sin oversikt. Han tok opp temaet med sannsynlighet i forbindelse med spill. Terningkast var et av områdene han fokuserte på, og i den forbindelse brukte han begrepet symmetrisk terning. I dagens sannsynlighetsregning har dette begrepet en betydning som er synonym med uniform sannsynlighetsmodell. Cardano gjorde også rede for noe som tilsvarer produktregelen for uavhengige hendelser, der han igjen tok opp problemet med terning, nå en firesidet. I praksis vil dette være prisme, og ikke en terning pr. definisjon. Han konkluderte i følge Hundeland med at sannsynligheten for tre etterfølgende gunstige utfall g av mulige utfall m vil være $(g/m)^3$, som man kan si er riktig bruk av produktsetningen for uavhengige hendelser. Dette eksemplifiseres ved at tre av sidene på prismet ble regnet som gunstige, av totalt fire sider i prismet. Da blir $g=3$ og $m=4$.

Også Jakob Bernoulli gav sin definisjon av produktsetningen:

> *"Anta en serie av forsøk med forskjellige sannsynligheter for suksess p_1p_2... Sannsynligheten for å få en serie av suksesser og fiaskoer i en gitt rekkefølge er produktet av de korresponderende sannsynlighetene, for eksempel $p_1p_2p_3q_4q_5q_6$...Dersom vi antar en serie av n forsøk hvor sannsynligheten er den samme hele tiden, si p, da blir sannsynligheten p^mq^{m-n}."*(Hundeland, 1996, s. 20)

Bernoulli fortsetter sin definisjon til også å omfatte binomiske forsøk eller Bernoulli-forsøk som det også blir kalt, nettopp på grunn av denne definisjonen til Bernoulli:

"*Dersom rekkefølgen ikke spiller noen rolle blir sannsynligheten* $\binom{n}{m} p^m q^{m-n}$ *siden det er* $\binom{n}{m}$ *måter å oppnå m suksesser og n-m fiaskoer på."* (Hundeland, 1996, s. 20)

Det vil ikke gås nærmere inn på Bernoullis definisjon enn å gjengi det som finnes i Hundeland (1996), men det kan være verdt å merke seg at det ser ut som denne definisjonen kun omfatter to mulige utfall i et utfallsrom. Dersom man skal finne sannsynligheten for 1 ener, 1 toer og 1 treer, på tre terningkast, vil ikke fremgangsmåten være selvsagt ut fra Bernoullis formulering.

Abraham De Moivre jobbet også med begrepet uavhengighet, og Hundeland (1996) gjengir en definisjon og et etterfølgende eksempel, som for øvrig De Moivre skal ha vært opptatt av å gjøre: *"To begivenheter er uavhengige, når det ikke er noen forbindelse mellom dem, og at hendelsen av den ene begivenheten styrker eller svekker sannsynligheten for at den ene begivenheten skal inntreffe."* (Hundeland, 1996, s. 32) Det etterfølgende eksempelet tar opp et eksempel med kort fra en kortstokk som han har delt i to bunker, en hjerterbunke og en sparbunke med alle tretten kortene i hver bunke. Oppgaven er å trekke to kort fra hver bunke, å regne ut sannsynligheten for å få to ess. De Moivre forklarer at sannsynligheten vil være 1/13 for å trekke ess fra sparbunken og 1/13 for å trekke ess fra hjerterbunken. Sannsynligheten for to ess vil dermed være 1/13*1/13 for å få to ess.

4. Metode

På bakgrunn av problemstillingen har metodevalget mitt hovedsakelig falt på dokumentanalyse. Den første delen av problemstillingen skisserer det hovedsakelig det statistiske miljø i Norge fra ca. begynnelsen av 1900-tallet, og i den forbindelse vil ulike bøker og tidsskrifter med opplysninger om dette være essensielle.

Den andre delen av problemstillingen tar for seg stillingen til statistikk og sannsynlighet i det som i dag kalles norsk videregående skole og grunnskole. Imsen (2009) forklarer at læreplanene i skolen skal være direktiver for skolene, og fortelle hva som skal gjøres i forskjellige fag og på forskjellige klassetrinn. I Norden har læreplaner tradisjonelt sett vært gitt fra sentralt hold, og mye er dermed bestemt av sentrale myndigheter. Dermed vil læreplanene kunne gi et sammenligningsgrunnlag for hele skoleverket.

Videre omtaler Imsen fem forskjellige sider ved en læreplan. Det er den ideologiske læreplan, den formelle læreplan, den oppfattede læreplan, den gjennomførte læreplan og den erfarte læreplan. Den ideologiske læreplanen er de idealistiske forestillingene om hvordan læreplanen bør være. Dette kan dreie seg om lærestoff, arbeidsmetoder eller grunnleggende perspektiver. Den formelle læreplan er selve dokumentet som foreligger. Dette er det skolene må forholde seg til, og i denne oppgaven vil den formelle læreplan spille en viktig rolle, gjennom eksplisitte mål og hovedmomenter som finnes i dokumentene. Den oppfattede læreplanen er hvordan ulike aktører oppfatter læreplanen. Imsen nevner både lærere og foreldre, men en annen viktig aktør, er lærebokforfattere. Lærebokforfatternes tolkning av læreplanen, vil i praksis kunne påvirke hvordan læreplanen blir satt ut i praksis i klasserommet. Den gjennomførte læreplan kan forklares med det som faktisk foregår i klasserommet i timene. Den erfarte læreplan går på hvordan elevene erfarer læreplanen gjennom undervisningen og det som foregår i klasserommet.

Et viktig poeng i forhold til dette med lærebøker og den oppfattede læreplan er at den 1. august 2000 ble loven om lærebokgodkjenning opphevet. I et rundskriv fra Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet heter det:

> ”*Kravet om at lærebøker som blir brukt i grunnskolen og i videregående opplæring skal være godkjent av departementet, er opphevet fra 1. august 2000. Det er læreplanen som skal være styrende for undervisningen, ikke lærebøkene. Lærebøkene skal bare være et av flere hjelpemidler til å nå målene i fagene. Valget mellom forskjellige hjelpemidler i undervisningen er i første rekke en del av det profesjonelle ansvaret for den enkelte lærer.”* (Fevolden, 2000).

Mye av stoffet i denne oppgaven er hentet fra før denne loven ble opphevet, og lærebøker spiller fortsatt en viktig rolle som hjelpemiddel i norsk skole. For å kunne selge lærebøker vil skolene kjøpe lærebøkene som etter deres mening fungere best som hjelpemiddel i forhold til læreplanmålene som skal realiseres. Bøkene vil derfor være en interessant kilde i forhold til denne oppgaven. I tillegg til lærebøker, vil eksamensoppgaver være en del av den oppfattede læreplan. Her vil de som lager oppgavene måtte tolke læreplanen, å lage oppgaver som tester elevers kunnskaper på ut fra hvordan læreplanen tolkes.

Det finnes mange forskjellige læreverk som har gitt ut bøker til de forskjellige klassetrinnene, både i grunnskolen og i videregående skole. Derfor har det vært nødvendig å gjøre et utvalg på hvilke bøker som analyseres. Siden statistikk og sannsynlighetsregning er mye mer omfattende på videregående skole enn i grunnskolen ligger hovedfokus på videregående skolebøker. I oppgaven blir det analysert tre bøker fra grunnskolen. Disse bøkene er fra tre forskjellige læreverk, og er skrevet etter pensum for 6. klasse i M87 og 7. klasse i L97 og K06. Sannsynlighet kommer først inn i læreplanen i L97 og K06 i 7. klasse som er siste år på barneskolen, mens det i M87 først kommer inn på ungdomskolen. Boken fra M87 som er analysert i denne oppgaven, er fra siste år på barneskolen, og inneholder sannsynlighetsregning, selv om ikke læreplanen sier dette.

I videregående skole er bøkene valgt ut fra læreplanene R94 og K06. Etter revideringen av R94 i 2000, ble nye læreverk utgitt, og analysen av lærebøker omfatter bøker fra både før og etter revisjonen. Fra hver av disse læreplanene er det valgt ut tre bøker, en på grunnkurs, 2MX(R94) og R1(K06), og 3MX(R94) og S2(K06). S2 er valgt ut siden dette er det faget med mest omfattende pensum i statistikk og sannsynlighetsregning i K06, mens 3MX har mest omfattende pensum i begge versjonene av R94. Det er valgt ut litt forskjellige læreverk, og grunnen er at flere læreverk har hatt samme forfattere i flere år. Dermed er mange fremstillinger i bøkene reprodusert fra det ene læreverket til det andre, og for å få forskjellige perspektiver har det vært nødvendig å benytte flere læreverk. Illustrasjoner fra lærebøkene har også blitt inkludert i analysen. Disse kunne vært scannet inn i oppgaven, men for å unngå komplikasjoner med rettighetshaver er disse tegnet ved hjelp av ulike dataprogrammer, og dermed gjengitt så likt som mulig.

I forbindelse med selve læreplandokumentet er det i denne oppgaven foretatt to intervjuer med to medlemmer av gruppene som utarbeidet læreplanene; Tom Lindstrøm og Kristian Ranestad. Disse satt i læreplangruppene for henholdsvis Reform 94 og Kunnskapsløftet 06. Deres bidrag var hovedsakelig i forhold til programfagene på allmennfaglig linje (R94) og studieforberedende linje (K06). Selv om disse intervjuene ikke utgjør en omfattende del av oppgaven er det likevel nødvendig å klargjøre litt om prosessen i forbindelse med disse. Av praktiske årsaker ble intervjuene foretatt ved korrespondanse pr. e-post. Intervjuobjektene har fått tilsendt hver sitt spørsmålsark, som de har svart på skriftlig. Intervjuene må kategoriseres som semi-strukturerte. Bryman (2008) gjør rede for semi-strukturerte intervju, som en type intervju innen kvalitativ forskning. Her følger intervjueren en intervjuguide, der spørsmålene hovedsakelig er fastsatt på forhånd, men relativt åpne. Intervjuer kan også be intervjuobjekt utdype enkelte svar, stille tilleggsspørsmål eller stille oppfølgingsspørsmål. I forhold til dette skiller intervjuene i denne oppgaven seg litt, men må likevel kategoriseres som semi-strukturerte. Det har fra intervjuerens side vært stilt åpne spørsmål, som har vært mulig å følge opp ved mottatt svar. Intervjuene må ses på som kvalitative, ettersom hensikten er å få frem noen betraktninger fra enkeltrepresentanter fra læreplangruppene. Intervjuobjektene har også gjort det klart at opplysningene de har gitt, representerer deres subjektive meninger, og ikke nødvendigvis gjelder for alle medlemmene av de forskjellige læreplangruppene.

5. Grunnskolen

5.1 Læreplaner Grunnskolen

I analysen av læreplaner[3] vil man kunne legge merke til at de forskjellige læreplanene har ulik oppdeling av mål og hovedmomenter. L97 har hovedmomenter for hvert klassetrinn, mens kunnskapsløftet har kompetansemål for opp til 2., 4., 7., og 10. klassetrinn. M87 har en lignende type inndeling som K06. I K06 og M87 skulle det utarbeides lokale læreplaner av skolene, der målene og hovedmomentene ble fordelt på klassetrinn, mens i L97 er dette altså gitt i læreplanen. M87 og M74 kalles rammeplaner (KU, 1987, s. 8) (KU, 1974, s. 25) og er mer fleksible enn både L97 og K06. M87 opererer med en viss fleksibilitet i forhold til del-emner innenfor hvert fag. Det kunne for eksempel være mulig å ta bort noen del-emner dersom man hadde pedagogiske grunner for å gjøre det, eller legge til del-emner under hvert hovedemne. Slik sett er K06 og L97 mer detaljerte, i særlig grad L97. Derfor kan man ikke sammenligne direkte med trinn i andre læreplaner. Likevel vil innholdet fortelle hva elevene bør ha oppnådd etter for eksempel 10. trinn, og dette vet man også fra tidligere utgaver av læreplaner dersom man sammenfatter målene til for eksempel 7., 8. og 9. trinn i L97 med oppnådd mål etter 10. klasse i Kunnskapsløftet.

5.1.1 Mønsterplan for grunnskolen 1974

"Læreplan for forsøk med niårig grunnskole" fra 1964 inneholder ikke statistikk eller sannsynlighetsregning, mens i "Mønsterplan for grunnskolen" fra 1974 inneholder en del forskjellige punkter. Det første punktet kommer inn i 3 klasse og lyder som følger: "Statistikk. Forberedende øvinger med enkle illustrasjoner" (KU, 1974, s. 135) Dette er ikke noe spesielt konkret mål, men trolig er disse øvingene basert på enkel innsamling av data på dette nivået. Illustrasjonene er trolig enkle typer diagrammer, som søylediagram. I fjerde klasse blir pensum litt utvidet, med innsamling av statistisk materiale. Her er begrepet *utvelging* inkludert i læreplanen. Hva som ligger i dette er vanskelig å si, utvelging med bakgrunn i noen form for representativitet er for vanskelig på dette nivået. Elevene skal også illustrere enkelte diagram, og her er linjediagram, som ofte kalles kurvediagram, nevnt. I 5. klasse skal arbeidet med 4. klasse pensum fortsette, men det er poengtert at data skal hentes fra elevenes erfaringsområder, blant annet andre skolefag. Her får man en tverrfaglig vinkling på det hele. Statistikk er dessuten ikke noe eget emneområde i læreplanen, men kommer inn under et emneområde som kalles anvendelser. Et overordnet mål i læreplanen er dessuten *"å anvende matematikk på problemer fra det daglige liv og fra andre fag*" (KU, 1974, s. 132).

Målene i statistikk i de videre klassetrinnene forteller at det skal bygges videre på det som allerede har vært pensum, og det kommer i tillegg inn noen få nye begreper til hvert klassetrinn. I 6. klasse kommer begrepene sektordiagram og gjennomsnitt inn, i 7 klasse innføres histogram og i 8. klasse er relativ hyppighet et mål. I 8. klasse skal det hentes inn tallmateriale fra ulike kilder blant annet offentlige tabellverk. Dette utdypes i en forklaring til læreplanen, og der nevnes det blant annet at *Statistisk årbok* kan være en aktuell kilde. I målene for 8. klasse står det også at det skal gis eksempler på misbruk av statistiske data og fremstillingsmåter. I 9. klasse er ikke matematikk obligatorisk fag, derfor er det ingen mål knyttet til statistikk.

I et avsnitt som heter *kommentarer til emnene* står det en del om statistikkdelen. Blant annet står det at elevene bør kunne beregne gjennomsnitt og avvik fra gjennomsnittet, og begrepene klassebredde og intervallhyppighet skal innføres. Ut fra de konkrete målene i planen, er det

[3] I siteringer av læreplaner er de ulike departementene med ansvar for utdanning oppgitt som forfatter. De forekommer i siteringene som følgende forkortelser: KU=Kirke- og utdanningsdepartementet, KUF=Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, KD=Kunnskapsdepartemantet

ingenting som tyder på at dette er begreper som skal læres. Læreplanen er ellers svært vag i sin beskrivelse av innholdet av statistikk, og man kan tenke seg store forskjeller i innhold fra skole til skole.

Som nevnt var ikke matematikk obligatorisk for 9. klasse i M74, men det var mulig å velge et fag som hette matematikk og samfunnsfag. Blant emnene som er foreslått i mønsterplanen er følgende:

> *8: Forsikring*
> *Skadeforsikring, livsforsikring. Forsikring for motorkjøretøy og fartøy. Premier, bonus. Skadeoppgjør, utbetalinger.*
> *11: Deskriptiv statistikk*
> *Videre bruk av statistikk på materiale av forskjellig art. En del statistisk materiale bør samles inn av elevene selv. Studium av gjennomsnitt, median og enkle spredningsmål. Prosentiler* (KU, 1974, s. 345)

Ettersom dette er emner som i følge M74 *kan være aktuelle,* er det vanskelig å si noe om hva som ligger i mål 8. Men i dette emnet kunne det vært mulig å anvende statistikk, til å få frem noen prinsipper i forbindelse med forsikring. Trolig er det ikke brukt mye statistikk eller sannsynlighetsregning i dette emnet, ettersom en del nok blir for komplisert på dette nivået, som for eksempel begrepet forventning, som er viktig i forbindelse med forsikring.

5.1.2 Mønsterplanen for grunnskolen 1987

I *Mønsterplan for grunnskolen* (1987) er statistikk et eget hovedområde. M87 er som M74 også en rammeplan, men siden statistikk her er et eget hovedområde, er det noen flere begreper som kommer inn, blant annet frekvens og median. I tillegg er også sannsynlighetsregning blitt en del av læreplanen. M87 inneholder en del overordnende mål som blant annet dreier seg om praktiske anvendelser av matematikken. For eksempel skal elevene bli *"i stand til å bearbeide data og vurdere informasjon slik at de kan ta ansvarlige avgjørelser"* (1987, s. 194). I forbindelse med dette målet, kan det argumenteres for at statistikk et fornuftig emne å ha med i læreplanen. Noen kommentarer til hovedområdet finner man også i læreplandokumentet. Her er det også kommentert omkring den praktiske nytten av statistikken og det blir poengtert at statistikk har mange anvendelsesområder i samfunnet, og at emnet er godt egnet for tverrfaglig arbeid.

Problemløsning kom inn som et eget hovedområde i M87. Læreplanen definerer ikke hva et problem er, men inkluderer fire punkter i en problemløsningsprosess. Det er

- *formulere problemet*
- *Analysere problemet og komme fram til en løsningsmetode*
- *Foreta de nødvendige beregninger*
- *Vurdere framgangsmåte og resultater* (Laake, 1986, s. 196)

Disse punktene ser ut til å være inspirert og nesten direkte oversatt av George Pólyas punkter i *How to solve it (1971).* I forbindelse med pensum i statistikk og sannsynlighetsregning, vil det være flere muligheter for å få til problemløsningsprosess, og det kan tenkes at noen av formuleringene som er gitt er inspirert av nettopp dette. Blant annet en av formuleringene i 7.-9. klasse, der elevene skal få en innføring i sannsynlighetsbegrepet gjennom praktiske forsøk. Her vil det være mange muligheter for en problemløsningsprosess, bare ved enkle forsøk som for eksempel terningkast eller myntkast. Ragnar Solvang nevner også at sannsynlighetsregning vil gi gode muligheter til problemløsning, i forbindelse med en analyse han har foretatt av eksamensoppgaver tilknyttet denne planen (Pedersen & Solvang, 1993).

5.1.3 Reform 97

L97 var en læreplan som bare gjaldt for grunnskolen. Det kom inn en generell del, som forteller om de overordnede målene i skolen. I forbindelse med fagplanene, blir teknologi fremhevet, og det poengteres at både kalkulator og datamaskin skal integreres i matematikkfaget. Regneark blir nevnt spesifikt, men det påpekes at andre programvarer bør trekkes inn, dersom det er hensiktsmessig. I statistikk og sannsynlighetsregning kan man tenke seg mange innfallsvinkler, med det som er tilgjengelig av ikt-ressurser i dag, som ulike simuleringsprogrammer og lignende. Disse var trolig ikke like tilgjengelige i 1997, men det var likevel gode muligheter for å inkludere teknologi, spesielt siden mange av emnene handler om deskriptiv statistikk.

I læreplanen fra *Reform 97* kommer det ikke nødvendigvis klart fram av målene og hovedmomentene at statistikk og sannsynlighet er pensum for 1.-4. Klasse.[4] Det finnes mål som for eksempel "*i opplæringen skal elevene prøve å lage og følge regler i lek og spill* og *i opplæringen skal elevene ordne og telle* og *arbeide med å ordne og telle i lek, spill og praktiske oppgaver"* (1996, s. 159) i 1. og 2. klasse, men det er ikke noe mer konkret som kan relateres til statistikk og sannsynlighet. Disse målene kommer uansett inn under hovedmomentet *Matematikk i dagliglivet* i begge tilfeller. I 3. klasse kommer det inn et mål fra hovedmomentet *Matematikk i dagliglivet,* som lyder: "*I opplæringen skal elevene samle og prøve å sortere og ordne data fra egne interesseområder, fra naturen og fra stedet der de bor."*(1996, s. 160) Dette målet kan også tolkes til å gjelde statistikk, men det står ikke skrevet like eksplisitt som i Mønsterplanen fra 1987. I 4., 5. 6. og 7. klasse kommer det inn noen nye begreper som dreier seg om deskriptiv statistikk, blant annet er søylediagram og sektordiagram nevnt. I tillegg kommer sannsynlighetsregning inn, og det er et fokus å skaffe seg erfaringer med tilfeldighet gjennom ulike forsøk. På ungdomsskolen kommer det inne enda flere begreper relatert til deskriptiv statistikk og enkel sannsynlighetsregning.

5.1.4 Kunnskapsløftet 2006

Kunnskapsløftet (2006)[5] ble iverksatt i august 2006. Denne planen har blant annet et fokus på det som kalles grunnleggende ferdigheter i matematikk. En av disse grunnleggende ferdighetene er å kunne uttrykke seg skriftlig i matematikk, som blant annet innebærer å lage tabeller og diagram. Dette inkluderer også det å kunne lese matematikk, altså tolke tekster som inneholder ulike diagrammer og tabeller. Bruk av digitale verktøy er også en grunnleggende ferdighet. Her kommer flere momenter inni bildet som er essensielle i forbindelse med både statistikk og sannsynlighetsregning. Blant annet er det nevnt simulering, og også det å kunne presentere, analysere og behandle data. Statistuikkundervisningen i grunnskolen er av den deskriptive typen, der det handler om å samle inn data å presentere dem i ulike diagrammer. I beskrivelsen av hovedområde fortelles det blant annet også om at det å kunne vurdere kritisk fremstilling og konklusjoner basert på statistikk er sentralt. Sentrale begreper som være til hjelp i denn prosessen som er representert i læreplanen er gjennomsnitt, typetall, median og variasjonsbredde.

[4]Fra og med reform 97 er 1.klassingene 6 år. Før har de vært 7 år.

[5] Refererer til en bok, læreplanene finnes også på http://www.udir.no/grep

5.1.5 Kommentarer til utviklingen i grunnskolen

Fra 1. til 4. klasse (3. i M87) er det lite som skiller både M87, L97 og Kunnskapsløftet i innhold i emnene statistikk og sannsynlighet. I alle planene er det en innledning i statistikk som i korte trekk går ut på å samle, sortere og fremstille statistisk materiale. På dette nivået vil matematikk kunne være en del av dette, i form av addisjon, subtraksjon og divisjon. Å illustrere data ved hjelp av søylediagrammer, er noe som går igjen i alle læreplanene. Sannsynlighetsregning kommer ikke inn i bildet i noen av læreplanene på disse års-trinnene. Det er nevnt noe om spill i L97, men det står ikke noe om det er en sammenheng med sannsynlighetsregning. Sannsynlighetsregning på disse års-trinnene vil uansett være vanskelig, men i følge Fischbein (1975) vil det være mulig å introdusere begrepet tilfeldighet gjennom ulike spill. Som nevnt påpeker L97 at barn skal skaffe seg erfaringer gjennom spill, men det ser ikke ut til at tilfeldighet er noe det legges vekt på. M74 skiller seg tilsynelatende litt fra disse, i og med at statistikk bare er nevnt vagt i målene for 3. klasse

I 5.-7. klasse (4.-6. klasse i M87 og M74) er det tilsynelatende større forskjeller på planene. Innsamling, systematisering og tolkning og gjennomsnitt er begreper som går igjen i planene. I M87 skal elevene presenteres for histogram, noe som ikke er nevnt verken i M74, L97 eller K06, mens i K06 og L97 kommer det inn nye begreper som median og typetall. Begreper som data og databaser kommer også inn i de to seneste læreplanene. I M87 finnes det et eget kapittel i læreplanen for matematikk som heter datalære for 7-9 klasse. I L97 og K06 er bruk av data integrert i de forskjellige emnene. Den generelle delen av læreplanen til både L97 og K06 har mye sterkere fokus på IKT i undervisningen. M87 påpeker blant annet at ”anskaffelse av data- og medie-teknologisk utstyr og programvare må skje ut fra pedagogiske vurderinger”(1987, s. 58) K06 og L97 sin generelle del omtaler grunnleggende ferdigheter på tvers av fag. En av disse ferdighetene er å kunne bruke digitale verktøy. I matematikk dreier det seg blant annet om å bruke digitale hjelpemiddel til blant annet spill, utforsking, visualisering, problemløsning, simulering og modellering. I tillegg er det viktigheten av å kunne finne og forholde seg kritisk til informasjon og presentere data. Tilgjengeligheten til både datamaskiner og programvare har blitt vesentlig bedre siden M87, og derfor er det blitt mer meningsfylt å integrere IKT i statistikk, som for eksempel ved å fremstille statistiske diagrammer eller simuleringer i forbindelse med sannsynlighet, for eksempel terningkast. I L97 og K06 skal elevene presenteres for sannsynlighet i 4.-7. klasse, mens sannsynlighet ikke er omtalt i M87. En liten forskjell fra L97 til K06 er at L97 påpeker at sannsynlighet skal beskrives i området fra 0-1, mens Kunnskapsløftet ikke nevner hvordan sannsynligheter skal beskrives.

På klassetrinnene 8.-10. klasse (7.-9. M87) finner man ut fra mål og hovedmomenter nokså store forskjeller fra de forskjellige læreplanene. M87 ser ut til å utvide pensum fra barneskolen, med å planlegge undersøkelser. Denne planen inneholder ikke mange eksplisitte nye begreper, men median og sannsynlighet kommer inn i M87 på ungdomskolen. Ellers kommer også *prognose* inn i bildet. L97 har mange nye begreper i forhold til M87, som blant annet går på å tolke og beskrive statistiske data. En del typer diagrammer er også pensum, og her poengteres det i læreplanen at IKT kan brukes som hjelpemiddel. Igjen kommer muligheter til IKT inn i bildet, det kan argumenteres for at det er mer meningsfylt å drive med disse forskjellige typene diagrammer i L97 enn i M87, dersom man tar tilgang på IKT-ressurser i betraktning. L97 utvider også begrepsapparatet i drøfting av statistiske data med *typetall, variasjonsbredde*, og *sentraltendens* i forhold til M87. I L97 ser man også at det er nevnt mange forskjellige typer diagrammer, mens M87 nøyer seg med grafiske illustrasjoner.

K06 nevner også *variasjonsbredde*, mens et begrep som *sentraltendens*, som var med i L97, ikke er der. I L97 er det et mål som involverer bevis. Dette finner man ikke i K06 eller M87.

M87 beskriver kun at elevene skal ha fått en innføring i sannsynlighetsbegrepet gjennom praktiske forsøk, mens L97 beskriver mer detaljert om *relativ frekvens*, *tilfeldighet*, og ser også ut til å legge vekt på presise begreper. Et mål er å beregne sannsynligheter hvor alle utfall har like stor sjanse, som formelt kalles *uniform sannsynlighet*. K06 er den eneste planen som nevner *kombinatorikk*. Selv om dette ikke er verken sannsynlighet eller statistikk, er det et viktig verktøy innenfor sannsynlighetsregning.

Henrik Dahl (Laake, 1986) og Georg Schrage (1985) påpeker viktigheten av kritisk sans i forhold til statistisk materiale. Både M87, L97 og K06 nevner dette. Kritisk sans på dette nivået vil trolig være i forhold til fremstillinger av statistisk material eller eventuelle slutninger på bakgrunn av dette.

Vi finner en del forskjell i begreper i de forskjellige læreplanene. Selv om læreplanene har en del forskjeller, er det vanskelig å si noe bastant om hvor store forskjeller det har vært i praksis. Læreplanene er såpass forskjellige i hvor generelle de er og L97 er mye mer konkret i målene og bruken av eksplisitte begreper enn både M74, M87 og K06. Likevel kan det virke som om pensum, spesielt i statistikk, har blitt mer omfattende fra M74 til M87 og fra M87 til L97, mens det ikke er store forskjeller fra L97 til K06. Forskjeller i sannsynlighetsregning er også vanskelig å si noe om. L97 er igjen mer nøyaktig i beskrivelsen av målene, mens det ikke kommer like klart fram hva pensumet i sannsynlighetsregning omfatter i K06 og M87.

Det ser ikke ut til at læreplanene er opptatt av å introdusere elever for tilfeldighet veldig tidlig, som Fischbein (1975) mener vil være mulig. Aritmetikk er derimot viktig i denne alderen, og man kan forstå at det ikke er lagt vekt på tilfeldighet, da noe annet muligens da hadde måttet vike.

Det kan også være verdt å merke seg at de overordnede målene for matematikkfaget har endret seg en del fra læreplan til læreplan, men ut fra konkrete læreplanmål og lærebøker, er det ikke tydelig hvordan dette vil gjøre seg gjeldende i skolen.

5.2 Lærebøker i grunnskolen

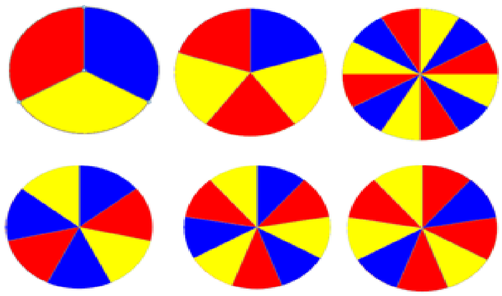
5.2.1 M87-Matteboka

M87 har ingen punkter som omtaler sannsynlighetsregning på barneskolen. Likevel finnes det et kapittel i Matteboka, som er en matematikkbok for 6. klasse, som heter ”*Hvor stor er sjansen*” (1986, s. 96-115) Men tatt i betraktning av at M87 er en rammeplan, kan de frihetene det gir, som tidligere nevnt, være grunnen til at litt sannsynlighetsregning er tatt med i boka. Her blir begrepet *sjanse* brukt om terningkast i blant annet spillene ludo og yatzy. I tillegg er det gitt oppgaver som går på to myntkast, og det er lykkehjul delt inn i farge-sektorer. I noen av oppgavene skal sjansene for at noe skal skje utrykkes som både brøk og desimaltall. Dette er et ganske stort fokus i denne boka, og i det aktuelle kapittelet om sannsynlighet, er det mange oppgaver som går på addisjon og multiplikasjon av brøker, og som ikke involverer sannsynlighet. Det finnes også oppgaver som går på å skrive brøker som desimaltall, som heller ikke er en oppgave som handler om sannsynlighet. Svein H. Torkildsen(1997) beskriver i en artikkel om sannsynlighetsregning på grunnskolen - en liten undersøkelse han har utført i forbindelse med denne undervisningen. Han skriver blant annet at arbeid med sannsynlighet kan føre til bedre forståelse av brøk, desimaltall eller prosent. I denne sammenheng kan det være interessant og dette kan ha vært et fokus for lærebokforfatteren, både med tanke på det sterke fokuset på brøk og desimaltall, og med tanke på at sannsynlighet ikke er et eksplisitt mål i læreplanen for 6. klasse.

De store talls lov blir også presentert. Boka forklarer blant annet store talls lov ved å påpeke at dersom du kaster en terning 6 ganger *"kan du regne med å få 1 ener, 1 toer, 1 treer, 1firer, 1 femmer og 1 sekser. Slik går det nesten aldri i virkeligheten"* (Garmannslund et al., 1986, s. 112). Videre står det at dersom du kaster en terning 6000 ganger kan du regne med at hver side blir vist 1000 ganger, og dersom man prøver vil resultatene ligge i nærheten av dette. På denne måten blir elevene presentert for De store talls lov. Ordbruken til boka er interessant fordi den skriver *kan du regne med.* Det er ikke nødvendigvis så lett å definere de store talls lov på dette stadiet i skolen. Bruken av *regne med* kan derimot være litt misledende, fordi man kan få en forståelse at det kommer til å skje. Som boka påpeker skjer det nesten aldri i virkeligheten at man får en av hver side på terningen på seks terningkast. Det vil nesten heller aldri skje at man får 1000 av hver side på 6000 terningkast. Bokas bruk av *regne med* kan tolkes som et substitutt til begrepet forventningsverdi. Forventningen til antall seksere, femere, treere, toere og enere er nemlig $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ hvis man kaster en terning seks ganger og $6000 \cdot \frac{1}{6} = 1000$ hvis man kaster terningen 6000 ganger. Sannsynligheten for å få en av hver side når man kaster 6 ganger er $\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{6^6} = 0.0154$ og sannsynligheten for å få 1000 av hver side når man kaster terningen 6000 ganger er
$\frac{\binom{6000}{1000}\binom{5000}{1000}\binom{4000}{1000}\binom{3000}{1000}\binom{2000}{1000}}{6^{6000}} = 7.84 \cdot 10^{-10}$. Med så liten sannsynlighet for disse hendelsene, kan man si at ordet *regne med*, kan virke malplassert. Uansett må store talls lov på dette nivået kun forklares på et intuitivt nivå, men det er viktig å unngå misforståelser, som for eksempel at man tror det er veldig sannsynlig terningen visere sidene like mange ganger, hvis man kaster terningen 6000 ganger.

Kapittelet om statistikk inneholder oppgaver der elevene skal tolke og lage tabeller og søylediagram. Det er ikke mange oppgaver som kan relateres direkte til statistikk. Kapittelet heter *"Gutt eller jente - betyr det noe?"*, og oppgavene handler gjennomgående om interesser for fritidsaktiviteter, skolefag og interesser. I de fleste tabellene og søylediagrammene man finner i boka, er gutter og jenter sortert. Disse sammenligningene kan være en måte å gi svar på overskriften i kapitelet. Det vil være mulig å antyde en konklusjon på en problemstilling på bakgrunn av statistiske data. Hvor nøyaktige eller signifikante konklusjoner man kan trekke ut fra bokas materiale er ikke interessant på dette nivået i matematisk forstand, men den røde tråden i kapitelet, som sammenligner gutter og jenter, vil kunne gi elever et innblikk i hvordan statistikk kan brukes, og at den har en nytteverdi.

En type oppgave som går igjen i bok er som illustrasjonene som følger etter dette avsnittet. Her skal elevene finne ut hvilket hjul som gir best sannsynlighet for gevinst, når man får gevinst på rødt. Mye av kunnskapen som trengs her er sammenligning av brøker eller desimaltall - altså hvilke av disse som er størst.



5.2.2 L97-Pluss

Pluss(1999a) er en lærebok i matematikk godkjent av Nasjonalt læremiddelsenter etter L97. Utgaven for 7. klasse inneholder et del-kapittel om sannsynlighetsregning. Til forskjell fra læreplanverket etter M87, bruker denne boken stort sett begrepet sannsynlighet i stedet for sjanse, men bruker sjanse for å definere sannsynlighet: ”Sannsynlighetsregning er det samme som å beregne sjansen eller muligheten for at noe kan hende”(1999a, s. 211) Denne boken fokuserer også på eksempler med terningkast og lykkehjul. Sannsynlighetene i oppgavene skal uttrykkes som både desimaltall - eller vanlig tall som boka uttrykker det - brøk og prosent. Boka fra M87 bruker ikke prosent for å uttrykke sannsynligheter. Et lite poeng i forbindelse med dette kan være at man i dagligtalen ofte uttrykker sjanse eller sannsynlighet som prosent. De store talls lov blir ikke nevnt med ord, men det finnes en oppgave som går ut på å trekke lapper med tall fra en til tjue for å se hvilken om sannsynligheten for hvert tall ”stemmer”. Oppgaven lyder som følger: *”Putt lappene i en boks eller liknende og trekk hver deres lapp fem ganger. Noter tallet for hver gang og putt lappen tilbake i boksen. Ble resultatet det samme for alle tallene fra 1 til 20? Begrunn svaret deres.”* (Haanes & Kvalheim, 1999a, s. 212): I forbindelse med denne oppgaven skriver boka videre: ”*Utfører vi et eksperiment som det dere har gjort med tall-lappene 1 til 20, må vi trekke lapper svært mange ganger for å nærme oss en riktig sannsynlighet*” (Haanes & Kvalheim, 1999b, s. 212) Denne formuleringen gir en intuitiv forståelse av store talls lov. Det er klart at det ikke kan gjøres rede for at *nærme oss* i denne sammenheng betyr at antall kombinasjoner som gir relativ frekvens nær 1/20, er mye større enn antall kombinasjoner som ikke relativ frekvens nær 1/20. Sannsynligheten for å få en kombinasjon av tall som gir relativ frekvens nær 1/20 er altså mye større enn en kombinasjon som ikke gir relativ frekvens nær 1/20, og den blir større når antall observasjoner øker. Problemet med formuleringen til boka er at det kan oppfattes som at en trekning ikke kan gi bare lapper med tallet 20. Dette er jo ikke riktig, men sannsynligheten for at det skal skje er svært liten.

Det finnes en oppgave i Pluss som lyder: *”Hvis dere sier det er helt sikkert at dere kommer til å gjøre lekser hver dag neste uke, så er det det samme som at dere er 100 % sikre. Hva betyr det hvis dere er: a) 50 % sikre b) 25 % sikre c) 10 % sikre”*(Haanes & Kvalheim, 1999a, s. 212) Denne oppgaven kan være vanskelig å tolke i et matematisk perspektiv. Sannsynligheten i denne oppgaven er ikke knyttet til noe vitenskapelig, noe man kan regne ut, og kan ikke knyttes til matematikken. Hva det at man er 50 % sikker på at man skal gjøre lekser alle dager i neste uke i praksis vil si, kan være vanskelig å si. Man kan spørre seg hvilke faktorer det kan være som gjør at en person er nøyaktig 50 % sikker på at han/hun kommer til å gjøre leksene hver dag i en uke. Lærerveiledningen (1999) forteller ingenting om denne oppgaven. Sannsynlighet i matematisk forstand kunne i denne oppgaven være bygget på statistiske data over tid som fortalte om hvor ofte eleven gjorde lekser hver dag i en uke, men det er liten grunn til å tro at det er meningen i dette tilfellet. En mulig innfallsvinkel for en lærer på denne oppgaven vil være en muntlig gjennomgang i klassen. Etter min oppfatning av denne oppgaven er det et vesentlig skille mellom den sannsynligheten som det opereres med her, og for eksempel sannsynligheten for å få en sekser ved å kaste en terning.

Pluss har også et kapittel som inneholder en del læreplanmål fra statistikk. Dette kapitelet innledes med en del spørsmål som elevene skal finne svar på ved hjelp av internett eller reisebyrå. Et spørsmål er for eksempel *"Hvilket land tror dere har flest besøk av nordmenn i løpet av et år?"(1999b, s. 32)* Videre repeteres begreper som *søylediagram, median* og *gjennomsnitt*. Disse begrepene brukes videre i praktiske oppgaver, der elevene selv må finne opplysninger eller gjøre målinger og observasjoner. Videre skal elevene fremstille dataene i forskjellige diagrammer, og *sektordiagram* og *kurvediagram* blir også presentert.

Lærerveiledningen påpeker at elevene bør arbeidet med temaet sannsynlighet gjennom utforsking i ulike spill. Oppgaven nevnt ovenfor med 20 lapper med tall fra en til tjue, er en mulighet for elevene til å erfare De store talls lov.

5.2.3 K06-Abakus

Abakus (2007) er en matematikkbok som dekker kompetansemålene i Kunnskapsløftet. Boka definerer sannsynlighet slik: *"Sannsynlighet er sjansen for at noe skal skje. Den skrives som et tall mellom 0 og 1. 1 er helt sikkert, og 0 er umulig"*(2007, s. 156). Definisjonen av sannsynligheten omfatter åpenbart ikke kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger, ettersom et utfall med sannsynlighet 0 i følge definisjonen ikke kan inntreffe. På dette nivået kan en slik definisjon uansett forsvares, i og med at pensum ikke omfatter kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger. Denne boka bruker også terningkast, myntkast og lykkehjul i oppgavene med sannsynlighet. Boka tar ikke opp at man kan uttrykke sannsynlighet som brøk eller prosent, men det finnes et kapittel tidligere i boka som handler om sammenhengen mellom brøk, prosent og desimaltall. De store talls lov er ikke omtalt med ord, men det finnes flere oppgaver som går ut på å gjøre et forsøk mange ganger. Et eksempel er at i en oppgave skal det lages en tabell der en terning skal kastes tretti ganger, og hvert kast skal registreres i en tabell. Oppgaven som følger etterpå lyder: "*4a) Hva tror dere resultatet blir hvis dere kaster 60 ganger? 4b) Lag tabell, kast terning og sjekk resultatet."*(2007, s. 141). Elevene skal ikke regne ut relativ frekvens, men bare notere antall. Her vil det være muligheter for å sammenligne de tretti kastene med de seksti kastene. Det kan bli vanskelig å sammenligne disse to bare basert på antall observasjoner. Hvis man for eksempel i det første tilfellet har 7 seksere og 4 femmere er forskjellen på antall observasjoner 3. Relativ frekvens er henholdsvis 0,233 og 0,133. Hvis man i forsøket med 60 kast skulle få for eksempel 13 seksere og 8 femmere, er forskjellen i antall observasjoner 5. Relativ frekvens vil være henholdsvis 0,21 og 0,13. Forskjellen i antall observasjoner for hvert utfall vil altså kunne være større på 60 kast enn på 30, og det vil være mindre forskjell i relativ frekvens. Hvis disse oppgavene skal ses i sammenheng er dette et viktig poeng å få frem, og det vil være en fin mulighet til å få en intuitiv forståelse av at relativ frekvens nærmer seg sannsynligheten for dette utfallet. Samtidig vil det være mulig at relativ frekvens ikke vil nærme seg den riktige sannsynligheten mer etter 60 kast enn etter 30. Her vil man få samme problem som beskrevet i forbindelse med store talls lov i *Pluss* (1999a), siden observasjonene ikke er så mange.

Abakus har en oppgave som lyder: *"Hva er sannsynligheten for at a) et kvadrat har fem hjørner b) vinter kommer etter høst c) Bente åpner vinduet"(2007, s. 156)* Dette som følger etter definisjonen boka har på sannsynlighet som er gjengitt ovenfor. På oppgave a og b er sannsynligheten henholdsvis 0 og 1, viss man kan snakke om sannsynlighet i de tilfellene. Det er ikke snakk om tilfeldighet for man vet at et kvadrat har 4 hjørner og at vinter kommer etter høst. Poenget er trolig å få frem at sannsynligheten for noe som er helt sikkert er 1 mens noe som ikke vil skje er null. På dette nivået kan det være fornuftig å si at noe som helt sikkert ikke vil skje har sannsynlighet 0, siden kontinuerlige fordelinger ikke kan betraktes. Oppgave c vil være vanskelig å tolke. Det er ingen opplysninger som forteller oss noe som helst om at Bente kommer til å åpne vinduet eller ikke. Det vil etter min mening ikke være hensiktsmessig å uttale seg om sannsynligheten for at Bente lukker opp vinduet. Etter min vurdering bør en oppgave av denne typen tas opp til diskusjon i fellesskap av læreren, og det bør poengteres at det er snakk om en subjektiv vurdering. Det er viktig å skille mellom denne typen subjektiv vurdering av sannsynlighet og en objektiv sannsynlighet som for eksempel sannsynlighet for en sekser ved et terningkast.

Statistikken i Abakus går ut på tolking av diagrammer og tabeller, både sektordiagram og søylediagram. Det finnes oppgaver som konkret går på bruk av data. Elevene skal blant annet lage sektordiagram og søylediagram på regneark, og boka bruker Microsoft Excel som eksempel.

5.2.4 Oppsummering lærebøker

Det er ikke store forskjeller på innhold og presentasjon i de tre aktuelle lærebøkene. Det kan være verdt å merke seg at alle bøkene introduserer elevene for prinsippet i De store talls lov, selv om det ikke står eksplisitt i noen av læreplanene. Man kan argumentere for viktigheten av at elevene blir introdusert for dette, for å unngå misoppfatninger som at dersom man kaster en terning seks ganger, er man garantert en sekser. Dette er et viktig poeng med sannsynlighet.

Tilfeldighet finner man i alle bøkene. Mange av oppgavene relatert til sannsynlighetsregning i bøkene, kan sies å være inspirert av de opprinnelige problemene som førte til sannsynlighetsregningen, som myntkast, terningkast kortstokker og lykkehjul.

I statistikkdelen er oppgavetypene nokså like i alle bøker. Alle bøkene har innslag av datainnsamling, men kanskje Pluss skiller seg ut med ekstra mye av dette. Matteboka har som nevnt en rød tråd der gutter og jenter blir sammenlignet, mens de andre lærebøkene har flere forskjellige tema. Abakus er den boken som har størst fokus på bruk av data i forbindelse med fremstilling av datamateriale. Dette kan nok ses i sammenheng med at den stadig økende tilgangen til IT-resurser har gjort at denne typen oppgave vil være gjennomførbar på de aller fleste skoler, i tillegg til at K06 også er den læreplanen som har mest fokus på dette i forbindelse med de grunnleggende ferdighetene.

6 Videregående skole

6.1 Læreplaner

6.1.1 Bakgrunnsmateriale

I forbindelse med arbeidet omkring læreplaner, har jeg gått gjennom noen gamle artikler skrevet av Kay Piene i *Norsk matematisk tidsskrift*, der han beskriver matematikkens stilling i den høyere skole etter 1800. (Piene, 1937, 1938) Her finnes det nesten ikke noe sannsynlighetsregning eller statistikk, som heller ikke var å vente med tanke på emnenes utvikling. Det eneste som er relatert til dette er et punkt i den første av tre avdelinger til reallærereksamen, der sannsynlighetslære er nevnt.

Av tidligere læreplaner er også "Undervisningsplan for gymnasiet, i henhold til Lov om høiere almenskoler af 27de juli 1896 §11" (*Undervisningsplan for gymnasiet, i henhold til Lov om høiere almenskoler af 27de juli 1896 §11: vedtaget 5te december 1899 af Kirke- og undervisningsdepartementet som gjældende indtil videre*, 1899) gjennomgått og en læreplan fra 1935 (KU, 1935). I planen fra 1896 finnes det ikke spor av verken sannsynlighet eller statistikk, og det gjør det heller ikke i 1935. Derimot finnes Pascals trekant som et mål, men det er poengtert at pensum ikke inneholder binomialformelen. Dette er ikke sannsynlighetsregning i seg selv, men er ofte brukt i forbindelse med dette.

6.1.2 Forslag til læreplan i 1964 av Gymnas-utvalget

Forslaget til plan fra 1964 inneholder såkalt leseplan som tilsvarer pensum eller kompetansemål i Kunnskapsløftet. Det er to forskjellige leseplaner, én for reallinjene og én for de humanistiske linjene. De humanistiske linjene ble foreslått å ha mindre matematikk enn reallinjene. Dette ble begrunnet med færre timer til rådighet for de humanistiske linjene, selv om lektorlagets gymnasutvalg mente at *"stort sett kan man si at den målsetning som gjelder for faget på de matematisk-naturvitenskapelige linjer, også bør gjelde på de humanistiske linjer"* (Gymnasutvalg, 1964, s. 249) I leseplanen for De humanistiske linjene er kun *Enkel statistikk* nevnt som et punkt, og det gis ingen utfyllende beskrivelse utover dette (Gymnasutvalg, 1964, s. 250). For reallinjen er det derimot flere punkter under emnet *Kombinatorikk, sannsynlighetsregning og statistikk,* og det ser ut til at dette er den første planen som inneholder sannsynlighetsregning på gymnasnivå.

1. *Multiplikasjonsprinsippet*
2. *Permutasjoner*
3. *Antall del-mengder til en gitt mengde. Binomialkoeffisientene*
4. *Binomialformelen og Pascals trekant*
5. *Sannsynlighetsbegrepet*
6. *Utfallsrom og hendelse som en delmengde av utfallsrommet.*
7. *Sannsynligheten i endelige utfallsrom*
    a) *Elementærsannsynlighet*
    b) *Sannsynlighet for en hendelse*
    c) *Gjensidig utelukkende hendelser (enten-eller)*
    d) *Uavhengige hendelser (både-og)*
    e) *Den allmenne addisjonssatsen*
    f) *Komplementære hendelser*
8. *Metoden til å skaffe seg en oversikt over forskjellige typer av tallmateriale.*
    a) *Hyppighetstabell og stolpediagram*
    b) *Klasseinndeling av materiale med tilhørende histogram*
    c) *Middeltall (aritmetisk og geometrisk middel, median, typetall)*

d) Spredningsmål (gjennomsnittsavvik, standardavvik)

9. Hypoteseprøving

10. Korrelasjon (Gymnasutvalg, 1964, s. 244)

Gymnasutvalget har gitt noen kommentarer til leseplanen. Sannsynlighetsregningen bør i følge gymnasutvalget behandles ved hjelp av mengdelærens symboler, og abstrakt aksiomatikk vil være unødvendig. Gymnasutvalget begrunner dette med at planforslaget bare inneholder endelige utfallsrom. I forbindelse med statistikk begrunner utvalget innholdet i planen ut fra et praktisk grunnlag, og skriver at målet skal være å ordne et tallmateriale å trekke slutninger ut fra dette tallmaterialet. I Gymnaset i søkelyset (1964, s. 308-309) er det også gitt noen kommentarer til omfanget av læreplanen for 1967. Blant medlemmene i komitéen var Ragnar Solvang, som er et kjent navn i norsk matematikkdidaktikk, og Ingebrigt Johansson som var professor i matematikk.

Planen fra 1964 ble ikke gjennomført. Flere komitéer arbeidet med organiseringen og læreplanene i den videregående skole fra mellom 1960 til 1974, og først i 1974 ble ny lov om videregående skole vedtatt. Denne ble iverksatt i 1976. Det er vanskelig å si noe om hvorfor sannsynlighetsregning og statistikk ble foreslått av Gymnas-utvalget, men det finnes en del kommentarer i Gymnaset i søkelyset (Gymnasutvalg, 1962), der det legges vekt på økt behov for utdanning i samfunnet. Antall arbeidere i primærnæringene er stadig synkende på denne tiden, og et voksende kunnskaps -og teknologisamfunn krever i følge utvalget flere utdannede mennesker innen flere ulike kunnskapsområder. Som det blant annet står: *"vi er på vei mot det man i Sverige er begynt å kalle utdannelsessamfunnet"* (Gymnasutvalg, 1962, s. 50). Sett i sammenheng med det stadig voksende statistiske miljø på denne tiden, kanskje spesielt Statistisk sentralbyrå og opprettelsen av statistikk som hovedfag ved flere universiteter, kan det tenkes at statistikk og sannsynlighetsregning ble sett på som så betydelig at utvalget foreslo dette i nokså omfattende grad.

6.1.4 Læreplan 1976

I følge læreplanen for studieretning allmenne fag, er matematikken organisert på følgende måte: Grunnkurset på allmenne fag er felles for alle. Det vil si matematikken er felles, og blant emnene i matematikk på grunnkurset finnes det ikke verken sannsynlighetsregning eller statistikk i det som i læreplanen kalles kjernestoffet for faget. Dette kurset, som kalles 1MA, kan elever som går yrkesfaglige studieretninger også ta. I den forbindelse er det en del i emneplanen til kurset som kalles tilvalgs-stoff. Læreplanen påpeker at det i én klasse kan være elever fra ulike studieretninger og tilvalgs-stoffet bør velges ut fra de forskjellige elevers interesser og behov for senere studier. Det kan av det som står i læreplanen altså tyde på at det er mulig for elever ved yrkesfaglige studieretninger å ta grunnkurset i matematikk ved allmennfaglig studieretning. Sannsynlighetsregning er ikke et emne som er nevnt i forbindelse med noen av studieretningene, mens i studieretningene for Handel og kontor, Landbruksfag og Fiskerifag (navigasjon og maskin) er deskriptiv statistikk ett av områdene som læreplanen uttrykker kan være viktig.

Etter grunnkurset er det mulig å velge to studieretninger på allmennfaglig linje; naturfaglinjen og samfunnsfagslinjen. Verken kursene 2MN eller 3MN, som er matematikk-kurset for naturfaglinjen andre og tredje året, har noen emner som inneholder sannsynlighetsregning eller statistikk. (KU, 1976c, s. 59-63)

På samfunnsfagslinjen derimot, finnes det i emneplanen til 2MS, som er andre året på samfunnsfagslinjen, et punkt som heter skildrende statistikk, og dette presiseres nærmere:

- *Stolpediagram, histogram, kumulativ fordeling, typetall, median, middelverdi, fraktiler, standardavvik*
- *Relativ frekvens*
- *Prisindeks (levekostnadsindeks-reallønn)* (KU, 1976c, s. 64)

I kurset 3MS, som er tredje året på samfunnsfagslinjen, er det ingen obligatoriske emne innen statistikk eller sannsynlighet. Derimot var det mulig å velge et emne i tillegg i dette kurset. Blant tre muligheter var én sannsynlighetsregning. I dette kurset burde det i følge læreplanen del 4 inngå: *"modeller for tilfeldige utvalg, sannsynlighetsmodeller, stokastiske variable, enkle sannsynlighetsfordelinger, eksempler på estimering og hypoteseprøving"*(1976b, s. 150)

Læreplanen inneholder også noen kommentarer til kurset 1MA. Det påpekes at stoffet bør presenteres så det kan brukes på konkrete oppgaver, noe som spesielt gjelder for linjer der matematisk kunnskap er viktig i andre fag. For elever som skal slutte med matematikk etter et år, bør stoffet velges så det har så stor nytteverdi som mulig, og elever som skal fortsette med matematikken bør ha mange av tilvalgsemnene (KU, 1976a, s. 65). Det ser ut til at læreplanen har et fokus på at faget skal ha nytteverdi. I den forbindelse kan det være verdt å merke seg at læreplanen anbefaler deskriptiv statistikk som tilvalgsemne for Handel og kontor, Landbruksfag og Fiskerifag. Kanskje kan det ha blitt vurdert at deskriptiv statistikk kan hatt en spesiell nytteverdi for elever på disse studieretningene. Ser man på statistikkproduksjonen til Statistisk sentralbyrå på denne tiden, var jo både landbruksstatistikken og fiskeristatistikken omfattende.

Etter en revisjon av denne planen i 1985 kom det noen få endringer. Som før var det mulig å velge litt statistikk i 1MA og 2MS. Nytt var at det nå også var mulig å velge sannsynlighetsregning i 3MS med målene

1.1 Av kombinatorikk tar en med:
Multiplikasjonssetningen, antall delmengder i en gitt mengde, ordnet utvalg med og uten tilbakelegging, uordnet utvalg uten tilbakelegging.
Hypergeometrisk tilfelle
1.2 En del uniforme eller ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller(eller utfallsrom)
1.3 Følgende setninger må kunne brukes:

1. $P(A^c)=1-P(A)$
2. $P(\emptyset)=0$
3. $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$, *der A,B,C er vikårlige parvis disjunkte begivenheter.*
4. *Summen av elementærsannsynlighetene er lik 1*
5. $P(A \backslash B)=P(A)-P(A \cap B)$
6. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$ *der A, B er vilkårlige begivenheter.*

Ellers tar en med Bayes' setning og eksempler på sannsynlighetsmodeller for uavhengige begivenheter og forsøk.

1.4 Under sannsynlighetsfordelinger tar en med
Stokastisk avbildning, kumulativ sannsynlighetsfunksjon, binomialfordelingen og hypergeometrisk fordeling.
Forventningsverdi og varians
Elevene orienteres om bruk av estimering og hypoteseprøving. Dette stoffet vil ikke bli prøvd til eksamen." (KU, 1992)

Det er klart at læreplanen fra 1974 ikke tok hensyn til Gymnasutvalgets forslag for omfang av statistikk og sannsynlighetsregning i videregående skole. Likevel skiller denne planen seg fra planen fra 1939 ved at den inneholder litt deskriptiv statistikk og i tillegg en mulighet til å velge sannsynlighetsregning og statistikk som valgfag.

6.1.5 R94 versjon 1994

Reform 94 har to versjoner av læreplanen. Den første trådte i kraft i 1994. Når L97 noen år senere ble innført i grunnskolen, var det nødvendig å justere læreplanene for R94 så disse ble tilpasset L97. Den reviderte versjonen ble godkjent i juli 2000. I denne sammenheng er læreplan i betydning av fagplaner. Både K06 og begge versjonene av R94 har en generell del av læreplanen, som er de overordnede målene for hele opplæringsprosessen. Denne delen er lik for disse tre læreplanene.

Matematikkfaget i R94 versjon 94 og versjon 00 er bygget opp nokså likt. På grunnkurset er det en obligatorisk modul, som alle elever må ta. Denne heter Modul 1 og var felles for både allmenne og økonomiske/administrative fag, musikk, dans, drama, idrettsfag og yrkesfag. Elever på de tre førstnevnte linjene måtte i tillegg til modul 1 velge én av retningene Modul 2A eller 2B det første året. Læreplanen forklarer at Modul 2A var praktisk rettet direkte mot bruk av matematikk i samfunn og dagligliv, mens Modul 2B var mer teoretisk rettet og gav grunnlaget for videre studier av matematikk (KUF, 1993, s. 3)[6]. Videre studier i matematikk på VKI og VKII bygger på modulene 1+2B. Matematikkfaget har etter grunnkurset to retninger, MX og MY. I disse fagene var det mange felles elementer, men MX-retningen var beregnet for elever som vil gå videre på studier som krever mer teoretisk matematikk. MY-retningen er mer praktisk rettet og kan være med å danne grunnlaget for forståelse for andre fag som for eksempel biologi og økonomi. (KUF, 1994, s. 3)

Kapittel 1 i læreplanen i matematikk (KUF, 1993, s. 1) gir en del generell informasjon om matematikkfaget. Her poengteres det at undervisning i matematikk må balansere mellom anvendelser av faget på den ene siden og teori og regneteknikk på den andre siden, og at matematikkurs må ha anknytninger utenfor seg selv for å være meningsfulle og inspirerende. I forbindelse med dette påpekes det at når matematikk brukes til å løse problemer fra det virkelige liv, må elevene ta del i både *"det opprinnelige problemet, den matematiske formuleringen av det, løsningen av den matematiske formuleringen, og tolkningen av svaret i den praktiske situasjonen."*(1993, s. 2). Disse momentene finner vi implisitt igjen i læreplanmålene til 1M. Statistikk er et emne der det er mange muligheter for å oppfylle alle disse momentene.

Det finnes også en del mål i læreplanen som er omhandler matematikken generelt, som i modul 1 kalles fellesmål. Ett av målene kalles *Matematikk som kulturarv*. Dette dreier seg blant annet om å ha kjennskap til hovedtrekk i matematikkens historie, og dets betydning for det planen omtaler som vår teknisk-naturvitenskapelige kultur. Et annet mål heter *Modellbygging og problemløsning*. Her nevnes blant annet det å vurdere løsninger på matematiske problem. Et annet hovedmoment under dette målet, som man kan tenke seg vil kunne ha vært essensielt i forhold til statistikk, er *"å kunne bruke IT-hjelpemidler i problemløsning."*(KUF, 1993, s. 10).

Også 2MX og 3MX har noen overordnede mål. Blant annet skal elevene kunne *"gjenkjenne bruk av vanlige matematiske og statistiske begreper i dagligliv og samfunn"(KUF, 1994, s. 4).* Av de andre overordnede målene, finner man blant annet det å kunne anvende matematikken på realistiske problemer fra samfunn, naturfag og teknikk. Dette kan tolkes til å gi et tverrfaglig perspektiv på matematikkfaget der anvendelser er sentralt. Generelt sett kan

[6] Læreplanen trådte i kraft i 1994, men på dokumentet som er brukt i denne oppgaven er 1993 oppgitt det året planen for matematikk på grunnkurset ble trykket

det argumenteres for at mål 2, som heter modellering og problemløsning, vil omfatte mange av de spesifikke målene for sannsynlighetsregning og statistikk i og med at det ofte vil være nødvendig med ulike sannsynlighetsmodeller.

Dersom man ser på de fagspesifikke læreplanmålene, er det tydelig at R94 er den læreplanen der statistikk og sannsynlighetsregning for første gang får skikkelig fotfeste i videregående skole. På grunnkurset er innholdet deskriptiv statistikk. Av læreplanene fra grunnskolen, ser man at dette er et tema som er relativt omfattende, og målene er en utvidelse av stoffet fra gjeldende læreplan i grunnskolen (M87). Siden matematikk kunne velges bort etter grunnkurset, vil derfor det man kan kalle et minimum av matematikk-kunnskaper fra videregående skole ikke inneholde noen form for sannsynlighet. En del av begrepene som er under målet som omhandler statistikk er ikke kun spesielle statistikkbegreper, for eksempel er begrepene gjennomsnitt og median nevnt. Det å kjenne til feiltolkning og misbruk av statistikk er ett av hovedmomentene. Ut fra det faglige grunnlaget elevene skal ha i statistikk på det aktuelle tidspunkt i læreplanen, feiltolkning av ulike typer diagrammer.

I programfagene kommer det i R94 inn en god del sannsynlighetsregning. Målene er stort sett de samme for henholdsvis 2MX og 2MY, og 3MX og 3MY. En del kombinatorikk er inkludert i planene for både 2MX og 2MY, blant annet skal elevene *regne* med fakulteter og binomialkoeffisienter og *behandle* ordnede utvalg med og uten tilbakelegging og uordnede utvalg uten tilbakelegging. Det kan argumenteres for at det å skulle behandle de ulike typer ordnede og uordnede utvalg forutsetter at man kan regne med både fakulteter og binomialkoeffisienter. Kombinatorikken er i seg selv ikke en del av statistikk eller sannsynlighetsregning, men den er i mange tilfeller nødvendig for å kunne regne ut sannsynligheter. Det er også poengtert i læreplanen at de ordnede og uordnede utvalgene skal brukes til nettopp det. Det er ikke utdypet nærmere, noe som gir det rom for fortolkning. Dette kan anvendes på helt enkle eksempel, og det kan anvendes på den binomiske og hypergeometriske sannsynlighetsmodellen. Det er også nevnt at elevene skal skaffe seg innsikt i tilfeldige fenomener, noe som skal gjøres ved eksperimenter og simuleringer. Dette punktet kan relateres til noen av de overordnede målene, der problemløsning og modellering er sentrale begrep. Verken *problem* eller *problemløsnin*g er definert i planen, men dersom man tar utgangspunkt i problemløsningsprosessen som er forklart i M87, kan det argumenteres for at en prosess som inneholder eksperimentering og simuleringer kan overføres til en problemløsningsprosess. Et moment er også at elevene skal være kjent med misoppfatninger om sjanser og sannsynlighet. Dette er ikke veldig konkret, men et eksempel på dette kan være problemer av typen som Shaugnessy (1977) beskriver i forbindelse med det han kaller heuristisk tankegang som blir beskrevet et annet sted i oppgaven. For at en person skal kunne unngå misoppfatninger om sjanser og sannsynlighet, kan man argumentere for at personen må ha et grunnlag i sannsynlighetsregning, for selv å kunne unngå misoppfatninger. Med tanke på grunnlaget elever på dette nivået har, basert på læreplanmål som skal være gjennomgått, er egentlig grunnlaget tynt. Dermed kan trolig ikke disse misoppfatningene bygge på teori som er særlig komplisert. En del av formuleringene i hovedmomentene til 2MX og 2MZ er at elevene skal kunne *bruke*. I følge Repstad (2006) er både *bruke* og *beregne* kompetanser som er klassifisert på mellomste trinn. Andre begreper i læreplanens mål om sannsynlighetsregning er å *være kjent med og skaffe seg innsikt*. Disse målene er klassifisert på nederste kunnskapsnivå. Som nevnt over skal elevene *være kjent med* ulike misoppfatninger om sjanser og sannsynlighet. Det er ingen mål i planen som er på det øverste nivået i klassifiseringssystemet.

2MY har i tillegg til målene som er felles med 2MX to mål som omhandler statistikk. Her skal elevene blant annet *beregne* og *vurdere* ulike beliggenhets- og spredningsmål, i tillegg til å *være fortrolig med* begrepene *hyppighet, populasjon* og *stikkprøve*. Begrepet å *vurdere*, er klassifisert på høyeste ferdighetsnivå. Dette vil for eksempel være å kunne vurdere beliggenhetsmål opp mot hverandre. Et eksempel kan være median opp mot gjennomsnitt i et datamateriale.

Statistikken og sannsynlighetsregningen i 3MX og 3MY er også relativt like. 3MX inneholder to mål som ikke er inneholdt i 3MY. Det ene går ut på å kjenne den mengdeteoretiske formaliseringen av sannsynlighetsbegrepet. Dette er en vid formulering, og kan tolkes på mange måter. En mulig tilnærmelse vil være en enkel presentasjon av Kolmogorov's aksiomer, og en kobling opp mot regneregler i sannsynlighetsregning. Ivar Heuch m.fl. (1998, s. 4) nevner i en artikkel der flere lærebøker i videregående skole er analysert, at ulike lærebøker har tolket denne formuleringen på svært ulike måter. Et annet mål som bare gjelder for 3MX er at elevene skal kjenne *betingede sannsynligheter*. Dette er ikke et mål i 3MY, og elever som velger MY-linjen vil tilsynelatende ikke vite noe om dette begrepet ut fra eksplisitte læreplanformuleringer. Likevel er et mål at elevene skal kunne regne med *produktsetningen* i både 2MX og 2MY. Uten å kjenne til betinget sannsynlighet, vil elevene da bare kunne anvende produktsetningen på uavhengige hendelser. *Uavhengighet* er et begrep som ikke er nevnt i læreplanen. Begrepet er en nødvendighet, eksempelvis skal elevene i både 3MX og 3MY "*anvende binomisk fordeling til å utføre hypotesetesting.*"(KUF, 1994, s. 10,18). Binomisk fordeling forutsetter uavhengige hendelser, og dermed blir begrepet uunngåelig. Derfor kan det virke rart at ikke begrepet på et eller annet nivå er inkludert i læreplanen.

Både *konfidensintervall* og *hypotesetesting* er begreper som kommer inn i læreplanen for både 3MX og 3MY. Det er påpekt at hypotesetesting skal utføres både på binomisk fordeling og normalfordeling. En del nødvendige begreper i forbindelse med dette, som *forventing* og *varians*, skal elevene kunne regne ut. Læreplanen forteller ikke noe om at elevene skal kunne regne ut standardavvik, men det må nødvendigvis anvendes i forbindelse med både hypotesetesting og konfidensintervall. Sentralgrensesetningen er ikke nevnt i læreplanen. Den er heller ikke en absolutt nødvendighet, men det er svært vanlig å tilnærme en binomisk fordeling til normalfordeling i forbindelse med hypotesetesting. Uten denne tilnærmingen vil utregningene kunne bli lange. Siste punktet i planen forteller at elevene skal fremskaffe et statistisk materiale gjennom undersøkelser, eksperimenter eller simuleringer. Dette målet har en klar sammenheng med det overordnede målet, om å kunne innhente, bearbeide å presentere matematisk informasjon.

I forbindelse med klassifiseringen av kunnskaper og ferdigheter av Repstad (2006), er de fleste formuleringene i læreplanen for 3MX og 3MY på mellomste nivå. De typiske stikkordene i disse læreplanmålene er *kunne, anvende* og *utføre*.

Under målet *matematikk som samfunnsfaktor* finnes det et hovedmoment som bare gjelder for 3MZ. Elevene skal kunne "*anvende statistikk til å vurdere resonnementer og påstander i for eksempel presse, reklame og debatter"* (KUF, 1994, s. 18). Målet i seg selv kan man trolig si har bakgrunn i begrunnelsen for MY-retningen. Som forklart innledningsvis er retningen beregnet for elever som er interessert i videre studier innen for eksempel samfunnsvitenskapelige fag, og det kan trekkes paralleller fra dette til det omtalte hovedmomentet.

Heuch, Lillestøl og Dahl (1998) nevner i artikkelen der temaet er analyserte skolebøker, at flere av disse inneholder mangelfulle fremstillinger av begreper. Analysen av bøker ble oversendt til forfatterne av de ulike bøkene med tips til forbedringer i forkant av revisjonen av R94. Artikkelen forteller også om ambisiøse læreplaner i forhold til statistikk og sannsynlighetsregning. Andre momenter som nevnes er at lærebokforfatterne skal ha hatt begrenset tid, og at mange ikke hadde noe særlig bakgrunn i statistikk.

6.1.6 R94 versjon 2000

I læreplanen for matematikk R94 (utgave 2000) finnes det et kapittel med generell informasjon. Dette handler om matematikkfagets formål generelt. Der blir det blant annet påpekt at pedagogikk og faglig innhold må balanseres. Det påpekes at *"Regneferdighet, teoriforståelse, praktiske anvendelser, problemløsing, historisk innsikt og tekniske hjelpemidler må knyttes til emneområder på en fornuftig og naturlig måte."* (KUF, 1999). Det generelle kapittelet for 2000-utgaven er svært lik den for 1994 utgaven, med noen små omformuleringer.

I Læreplanverket for videregående opplæring (R94) i versjonen som er fra 2000 er matematikk organisert slik:

Grunnkurs: Obligatoriske fag: 1M og enten 1MX eller 1MY (til sammen 187 årstimer)
VK1: Studieretningsfag: 2MX(187t) og 2MZ(112t)
VK2: Studieretningsfag: 3MX(187t) og 3MZ(187t)

På grunnkurset skal alle elever gå gjennom samme pensum med sannsynlighetsregning. Som i versjonen fra 1994, er X-retningen beregnet for elever som ønsker å gå videre med studier innen naturvitenskap, teknologi, datafag osv. Z-retningen er beregnet for elever som ønsker å gå videre med andre fag, for eksempel samfunnsvitenskapelige fag, der matematikk vil være viktig som et redskap. Her nevnes blant annet fagområder som journalistikk, samfunnsfag og økonomi.

I planen argumenteres det for at faget matematikk skal styrke elevenes ferdigheter i matematikk, særlig med tanke på deres behov i dagligliv, samfunnsliv og yrkesliv. I tillegg skal stoffet i størst mulig grad knyttes til dagligdagse utfordringer. Videre står det at elevene også skal få muligheten til å utforske matematiske sammenhenger og mønster uten en direkte praktisk anvendelse. Ved denne formuleringen gir læreplanen rom for mange ulike tilnærmelser til faget, både fra lærerens og lærebokforfatternes ståsted.

Også i denne læreplanen finnes det overordnede mål for matematikkundervisningen. Dette er momenter som går igjen fra versjonen fra 1994 og er nokså like for både grunnkurset i matematikk og de ulike programfagene. Her kan nevnes problemløsning, historisk perspektiv, noen ulike bevis og bruk av teknologi.

I læreplanmålene for grunnkurset er et av målene sannsynlighetsregning. Dette målet er felles på grunnkurset for både MX-retningen og MZ-retningen. Til forskjell fra versjonen fra 1994, er det ikke lenger deskriptiv statistikk i grunnkurset, men bare sannsynlighetsregning. Dette må trolig ses i lys av den nye læreplanen for grunnskolen, der deskriptiv statistikk fikk litt mer omfang i L97 enn i M87, og den deskriptive statistikken som før var på grunnkurset i videregående, var nå pensum på ungdomskolen.

Ett av hovedmomentene i 2MX og 2MY i versjonen fra 1994 finner man igjen som ett hovedmoment på grunnkurset i versjonen fra 2000, som det å *kunne bruke produktsetningen og addisjonssetningen.* Ellers skal elevene telle opp gunstige mulige utfall i enkle eksempler. Andre begreper som *valgtrær* og *Venndiagram* er også inneholdt i planen, og elevene skal anvende disse til å regne ut sannsynligheter. En del av disse begrepene, altså det å *telle opp* og *systematiske oppstillinger*, kan ses på som en liten forsmak på kombinatorikk, uten at det nødvendigvis er mange formler inne i bildet. *Uavhengighet* og *betinget sannsynlighet* er begreper som ut fra læreplanen vil være mål for alle elever. Dette er essensielle begrep, og i motsetning til versjonen fra 1994 er disse uttrykt eksplisitt i læreplanen fra 2000. Disse begrepene skal elevene ha en intuitiv forståelse av. *Uniforme* og *ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller* er andre begreper som er med i læreplanen. Blant annet skal elevene *eksperimentere med* disse modellene. Dette er i tråd med læreplanens overordnende mål, der det blant annet står at elevene skal ”(…) *eksperimentere med mønstre, systemer og sammenhenger”* (1999, s. 7). De fleste begrepene i dette målet i læreplanen er på mellomste trinn i Tallaksen og Repstads (2006) klassifisering av kunnskap. *Regne ut, bruke,* og *forstå* er begreper som er relatert til anvendelser.

Ett av målene i læreplanen for 2MX og 2MZ heter *kombinatorikk og sannsynlighetsregning*. Hovedmomentene er nesten identiske for begge retningene, med et lite unntak. Der elevene i 2MX skal kunne *behandle* ordnede utvalg med og uten tilbakelegging og uordnede utvalg uten tilbakelegging, skal elevene i 2MZ *være kjent* med disse utvalgene. Ut fra en tolkning av Tallaksen og Repstads (2006) klassifiseringstabell, er dette kunnskaper som ligger på henholdsvis mellomste og laveste trinn. Hovedmomentet fortsetter med å fortelle at elevene i 2MX skal bruke de ulike utvalgene til å *beregne* sannsynligheter, mens elevene i 2MZ skal gjøre *enkle sannsynlighetsberegninger* knyttet til utvalgene. I den grad det er noen forskjell på pensum i 2MX og 2MZ, er det vanskelighetsgraden og omfanget av hovedmomentet beskrevet over. De andre målene er identisk formulert. *Bayes setning på to hendelser* er også nevnt i versjonen fra 2000, noe den ikke var i versjonen fra 1994.

Blant annet skal elevene *kjenne* begrepene *uavhengighet* og *betinget sannsynlighet*. På grunnkurset skulle elevene ha en *intuitiv forståelse* av disse begrepene. I følge klassifiseringen av kunnskap (2006), kan det å *kjenne* klassifiseres på nederste trinn, og *intuitivt forstå* klassifiseres på mellomste trinn. I så måte, er det lavere krav i 2MX og 2MZ enn på grunnkurset, noe som trolig ikke er meningen. Å *kjenne* må trolig derfor tolkes utover det å *gjenkjenne* eller *definere* for at det skal være progresjon i læreplanen.

Det er også spesifisert at elevene skal kunne regne med binomiske og hypergeometriske sannsynligheter. I forbindelse med dette er kombinatorikk et viktig hjelpemiddel. Ut fra målet om de ulike ordnede og uordnede utvalgene, kan man, som i læreplanen fra 1994, velge å inkludere både binomiske og hypergeometriske sannsynligheter, men i planen fra 2000 er det altså nevnt spesifikt. Det overordnede målet for innholdet av sannsynlighetsregning og kombinatorikk, forteller blant annet at elevene skal kunne *vurdere* utsagn om sjanser og sannsynligheter. *Vurdere* er av Repstad og Tallaksen (2006) klassifisert på høyeste nivå. Dette kan trolig relateres til det å ha kritisk sans og unngå misoppfatninger, som for eksempel den heuristiske tankegangen, beskrevet av Shaughnessy (1977).

Også målene for 3MX og 3MZ er nokså like. Sammenlignet med læreplanen fra 1994, kan det først og fremst bemerkes at *hypotesetesting* er tatt bort. Forskjellen i 3MX og 3MZ er hovedsakelig at statistikk og sannsynlighetsregning er litt mer omfattende. Der både målene for 3MX og 3MZ forteller at elevene skal finne *forventning, varians* og *standardavvik* for en stokastisk variabel for endelige utfallsrom, skal i tillegg elever i 3MX kjenne regnereglene for varians og forventing for en lineær kombinasjon av to stokastiske variable. Elevene fra 3MZ skal kunne tilnærme binomiske fordelinger til normalfordelinger. Her går også læreplanen fra 3MX litt lenger, og nevner at elevene i tillegg skal ha kjennskap til sentralgrensesetningen. Enda et eksempel på forskjell i omfang finner man i målet som for 3MZ forteller at elevene skal ha kjennskap til normalfordelingens betydning. Her skal elevene fra 3MX i tillegg kunne regne med sannsynligheter knyttet til normalfordelingen. Dette må nødvendigvis elever i 3MZ også kunne siden et annet mål forteller at elevene i både 3MZ og 3MX skal kunne finne en tilnærmet konfidensintervall for en populasjonsandel. For å få til dette bør elevene i 3MZ også kunne regne med sannsynligheter knyttet til normalfordelinger.

De aller fleste målene handler om *å kjenne* eller *å kunne beregne,* som er klassifisert på nivå en og to av Repstad og Tallaksen (2006). Det finnes ingen fokus på kritisk sans, eller det å kunne vurdere statistisk materiale eller konklusjoner, noe som kunne gitt mening med tanke på den kunnskapen om statistikk og sannsynlighetsregning elever på disse nivåene har.

6.1.7 Betraktninger på R94

Dette avsnittet bygger i sin helhet på intervjuet med Tom Lindstrøm (Vedlegg nr. 7). Tom Lindstrøm var med i læreplangruppen for både grunnkurs og VK1 og VK2 for matematikkfaget. Han var blant annet én av to som foreslo å dele grunnkurset i matematikk i en X- og Y-retning rundt juletider. Lindstrøm satt også i læreplangruppen som reviderte læreplanen etter at L97 ble innført i grunnskolen.

Lindstrøm forteller om tre hovedargumenter som førte til at statistikk og sannsynlighetsregning fikk så stort omfang i R94 sammenlignet med tidligere læreplaner for videregående skole. Politikerne mente det var større behov for kjennskap til statistikk i det Lindstrøm kaller det nye kunnskapssamfunnet. I tillegg presset statistikkmiljøet på for å få en synliggjøring av faget. Flere andre land, eller som Lindstrøm sier, ’de fleste andre land’, hadde fått statistikk og sannsynlighetsregning inn i deres læreplaner, og dette var et argument for å få det også i Norge.

Lindstrøm har ingen sterke formeninger om hvilke faglige betraktninger som lå til grunn for MX- og MY-retningen i videregående. Han nevner at planarbeidet hadde ganske stort tidspress, og av denne grunn var det enkelt å bruke samme formuleringer for flere planer. Den deskriptive statistikken som var i grunnkurset i versjonen fra 1994 ble tatt bort ved revisjonen. Som antydet et annet sted i teksten, bekrefter Lindstrøm at dette var på grunn av at det nå ville bli repetisjon fra grunnskolen etter L97. At sannsynlighetsregning etter revisjonen kom inn på grunnkurset var det hovedsakelig to grunner til ifølge Lindstrøm. For det første var det nødvendig i forhold til å legge et grunnlag for de som valgte matematikk videre, samtidig som grunnleggende sannsynlighetsregning ble sett på som nyttig i seg selv.

Ved revisjonen ble hypotesetesting fjernet fra planen. Generelt sett forteller Lindstrøm at de statistiske teknikkene som hypotesetesting og konfidensintervaller ikke var godt nok underbygget, og for å få bedre plass til å bygge opp et sannsynlighetsteoretisk grunnlag ble hypotesetesting fjernet. Valget med å fjerne hypotesetesting ble gjort fordi flertallet i det statistiske miljø mente konfidensintervaller både var mer nyttig og enklere å forstå. Hva som menes med at konfidensintervall var enklere enn hypotesetesting, kommer ikke frem, men en grunn kan kanskje være at hypotesetesting er en mer omfattende prosess. Blant annet kan det å sette opp hypoteser være vanskelig nok i seg selv, og utregninger og fortolkning av disse kan også by på utfordringer. Når det gjelder konfidensintervall, har man formelen $\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]$ å forholde seg til og utregning av denne kan være den største vanskeligheten. α i formelen angir konfidensnivået ved 1-α.

6.1.8 Kunnskapsløftet

I 2006 trådte Kunnskapsløftet i kraft. Dette var den første læreplanen i Norge som gjaldt for både grunnskole og videregående skole. I matematikkfaget ble det på videregående nivå, studiespesialiserende linje, gjort noen få endringer i strukturen. Matematikk er fortsatt obligatorisk på grunnkurset med 140 timer matematikk i året. I tillegg er det til forskjell fra R 94 obligatorisk med minimum 84 timer matematikk på VK1.

Strukturen i Kunnskapsløftet er:

Grunnkurs: 1P(140t) eller 1T(140t)
Vk1: 2P(84t) eller 2T(84t) eller R1(140t) eller S1(140t)
Vk2: R2(140t) eller S2(140t)

R1 og R2 bygger på 1T, mens S1 og S2 bygger på 1P eller 1T, og dette er de løpene elever stort sett velger. Elever som vil klare seg med et minimum av matematikk kan som nevnt velge både 1P og 2P eller 1P og S1. Det siste alternativet er ofte aktuelt, siden mange videregående skoler ikke har ressurser til å tilby alle matematikkfagene. I tillegg til de obligatoriske fagene og linjefagene nevnt ovenfor, er det i Læreplanen K06 også mulig å ta et valgfag som heter X. Dette er et fag som blir tilbudt på et fåtall av skoler, også dette på grunn av ressurser.

R1 og R2 kalles "Matematikk for realfag" mens S1 og S2 kalles "matematikk for samfunnsfag". Matematikk for realfag skal gi grunnlag for videre studier innen naturvitenskap, medisin, teknologi, datafag, økonomi og utdanningssektoren, mens matematikk for samfunnsfag er ment å være et hjelpemiddel innen områder som økonomi og på samfunnsområder som helse, miljø og globalisering. I så måte kan R1 og R2 sammenliknes med 2MX og 3MX fra R94, mens S1 og S2 kan sammenlignes med 2MZ og 3MZ i R94.

Strukturen av selve læreplanen endret seg fra R94 til K06. Der det i R94 var mål som beskrev både arbeidsformer og generell matematisk kompetanse i tillegg til spesifikke fagkunnskaper – hovedmomenter - har kunnskapsløftet *kompetansemål* som beskriver spesifikke fagkunnskaper og *grunnleggende ferdigheter* som er overordnet for faget. En del av disse grunnleggende ferdighetene går på arbeidsmåter og uttrykksformer. Kanskje spesielt viktig i denne sammenheng er bruk av digitale verktøy.

Kompetansemålene for 1T i K06 skiller seg lite fra hovedmomentene for 1MXY fra R94 i versjonen fra 2000. Læreplanmålene i K06 vil i dette del-kapittelet bli sammenlignet med målene fra R94 sin versjon fra 2000, siden det er sist gjeldende læreplan. Denne versjonen vil heretter bare bli omtalt som R94 i dette del-kapittelet. Formuleringene går stort sett ut på å *anvende* - i følge Repstad og Tallaksen (2006) sin modell er dette det mellomste kunnskaps- og ferdighetsnivået - som å *lage, beregne, eksperimentere med* og *bruke*. Et av målene forteller at elevene skal kunne *drøfte* enkle uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller, og *drøfte* er et begrep som befinner seg på det øverste nivået. Det eneste nye begrepet i 1T i forhold til 1MXY er *binomiske sannsynlighetsmodeller*. Dette forutsetter litt kombinatorikk, i det minste å kunne regne ut binomialkoeffisientene. Dette er ikke nevnt blant kompetansemålene.

Kompetansemålene for 1P omfatter betydelig mindre sannsynlighetsregning enn 1T. Elevene skal i 1P som i 1T kunne bruke produktsetningen og addisjonssetningen, og det er også poengtert at de skal beregne sannsynlighet ved å telle opp gunstige og mulige utfall. Dette er ikke poengtert i 1T, men er en nødvendig forutsetning. 2P har en del kompetansemål som dreier seg om deskriptiv statistikk. Stikkord er *sentralmål, kumulativ frekvens* og *spredningsmål*. Dette er begreper man ikke finner igjen noe sted i R94. Kompetansemålene for 2P gir i all hovedsak inntrykk av å dreie seg om å kunne produsere og kritisere enkle statistiske fremstillinger.

Kompetansemålene for 2T er egentlig en reproduksjon av kompetansemålene for 2MX og 2MZ i R94. Det finnes egentlig bare en liten forskjell, og det er at der eleven i K06 skal *gjøre rede for* begrepene *uavhengighet* og *betinget sannsynlighet*, skulle eleven i R94 *kjenne* disse begrepene. Disse begrepene kan trolig plasseres på det mellomste nivået i Repstad og Tallaksen (2006) sin modell, og i så måte er forskjellen ubetydelig.

I R1 er det to kompetansemål som dreier seg om sannsynlighet under hovedområde "Kombinatorikk og sannsynlighet". Et av dem finner man igjen nesten identisk i både 2T i K06 og 2MX og 2MZ i R94, og handler om å kunne gjøre rede for uavhengighet og betinget sannsynlighet og anvende Bayes' setning på to hendelser. I tillegg til dette skal elevene i R1 og kunne *utlede* Bayes' setning på to hendelser. Å utlede er klassifisert på det øverste nivået av Repstad og Tallaksen (2006), noe som tyder på at elevene skal kunne litt mer i R1 enn i både 2T, og 2MX og 2MZ. Det andre målet dreier seg om ordnede og uordnede utvalg. Der elevene i både 2MX, 2MZ og 2T skulle beregne sannsynligheter ved hjelp av disse utvalgene, skal elever i R1 *utlede regler* for å kunne beregne sannsynligheter ved hjelp av disse utvalgene. I tillegg skal elevene *drøfte* kombinatoriske problem knyttet til disse utvalgene. *Å drøfte* er også klassifisert på det øverste nivået, og det kan dermed argumenteres for at kompetansemålene for R1 har større krav til kunnskaper enn hovedmomentene for 2MX og 2MZ.

Læreplanen for S1 har også et hovedområde som kalles "Sannsynlighet". I R1 kalles hovedområdet som nevnt "Kombinatorikk og sannsynlighet", noe hovedområdet i S1 også godt kunne vært kalt, siden to av tre kompetansemål dreier seg om kombinatorikk. Pascals trekant er nevnt. Siden den er nevnt i forbindelse med sannsynlighetsregning, er det trolig at den skal anvendes til å regne ut binomialkoeffisientene, som også er nevnt i samme mål. Planen for S1 viser nok et eksempel på reproduksjon fra andre planer i forbindelse med ordnede og uordnede utvalg som elevene skal gjøre rede for. Også her er det nevnt at elevene skal gjøre sannsynlighetsberegninger knyttet til slike utvalg, etterfulgt av et kompetansemål som forteller at elevene skal kunne anvende binomiske og hypergeometriske sannsynligheter.

Det finnes verken statistikk eller sannsynlighetsregning i kompetansemålene for R2 i K06. Derimot finnes det i nokså omfattende grad i kompetansemålene for S2. De fleste kompetansemålene er hentet fra 3MX eller 3MZ i R94, med visse modifikasjoner. Spesielt er formuleringen *å gjøre rede for* brukt i mange av kompetansemålene, og denne formuleringen er klassifisert på mellomste nivå av Repstad og Tallaksen (2006). Grunnleggende begreper som *fordeling,* og *stokastisk variabel* er nevnt, og også begrepene *forventning, varians* og *standardavvik for en stokastisk variabel*. Elevene skal i tillegg regne ut sannsynligheter knyttet til normalfordelinger. Dette er et viktig grunnlag i forhold til noen av de andre målene, blant annet når elevene ved hjelp av sentralgrensesetningen skal regne ut sannsynligheter for binomiske fordelinger. Hypotesetesting som ble fjernet fra planen fra R94 ved revisjonen er nå tilbake, og det er spesifisert at det dreier seg om "(…) *enkel hypotesetesting ved hjelp av p-verdier*." (KD, 2006).

X er som nevnt et valgfag i matematikk. Innholdet i sannsynlighetsregning og statistikk er i planen nesten identisk med innholdet i S2. Den eneste forskjellen det kan være verdt å merke seg, er målet som forteller at elevene skal "*planlegge, utføre og presentere en oppgave knyttet til statistiske anvendelser av sannsynlighetsregning i hypotesetesting eller* *utvalgsundersøkelser."* (KD, 2006). Dette kan sies å være et relativt krevende mål. Det å planlegge en undersøkelse der man skal anvende det som for elevene på dette nivået må kalles relativ avansert matematikk, vil være krevende.

6.1.9 Betraktinger på K06

Dette del-kapittelet bygger stort sett på et intervju med Kristian Ranestad, samt et foredrag av Ranestad publisert på internett. Intervjuet er vedlagt i slutten av oppgaven (Vedlegg 8). Kristian Ranestad var leder for en gruppe som skulle lage forslag til programfaget i matematikk i videregående skole, det vil si for fagene R1, R2, S1, S2 og X. For linjen som kalles matematikk for realfag R1 og R2 falt mye av statistikken og sannsynlighetsregningen bort. Ranestad nevner to grunner for dette. For det første var det et poeng at det skulle være tid til å behandle hvert hovedområde ordentlig, slik at elevene skulle få sjansen til å *kunne*, ikke bare *kjenne til* (Ranestad, 2007). NOU nr. 16 fra 2003(Kunnskapsdepartementet, 2003) gir en tilstandsrapport om realfagene i norsk skole. Blant punktene i denne rapporten fortelles det at målene i matematikkfaget ser ut til å omfatte for mye i forhold til timetallet, som kan ha vært med å danne grunnlaget for hva Ranestad forteller om i forhold til å *kunne* og å *kjenne til*.

I tillegg var det et ønske om å skille programfagene S og R med tanke på innhold og ikke bare omfang. Ranestad påpeker at gruppen var i kontakt med økonomi- og samfunnsutdanninger, og realfag- og ingeniørutdanninger, og på bakgrunn av dette ble statistikk og sannsynlighetsregning valgt som hovedområde for programfaget S i mye større grad enn R.

Kompetansemålene for S-retningen skiller seg litt fra MZ-retningen i R94. Blant annet er hypotesetesting som nevnt kommet inn i K06. Valg av kompetansemål hadde bakgrunn i erfaringer fra tidligere læreplaner, samt den gruppens prinsipielle vurdering om at færre emner med mer dybde var bedre enn flere emner med mindre dybde. Av andre betraktninger som ble gjort, ble læreplaner fra andre skandinaviske land, Tyskland og USA gjennomgått, men Ranestad forteller at det ikke ble tatt noen spesielle hensyn til dette i forhold til hovedområder eller kompetansemål i statistikk eller sannsynlighetsregning.

6.2 Lærebøker

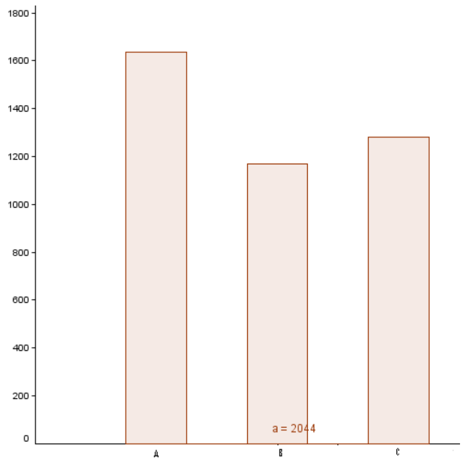
6.2.1 Lærebøker fra R94 versjon 1994

6.2.1.1 Sinus 1

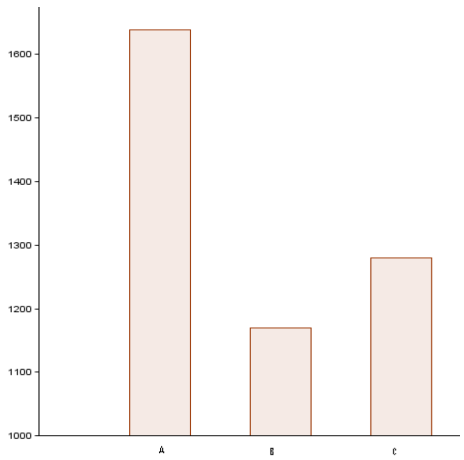
Kapittelet om statistikk i Sinus 1 (1994) innledes ved å definere en del forskjellige begreper ved hjelp av eksempel, som *observasjon, frekvens, søylediagram* og *kurvediagram.* Denne formen blir brukt videre i boka, med eksempler:

"En bilselger sammenligner salgstallene for en av bilmodellene sine med to konkurrerende bilmodeller. Salgstallene er:

Bilmerke	*Frekvens*
Bil A	*1638*
Bil B	*1170*
Bil C	*1280*



Dersom bilselgeren lar seg friste til å la andreaksen begynne ved 1000 solgte biler, ser diagrammet slik ut:



,,

(Oldervoll et al., 1994, s. 76,77)

Her kommer boka med et konkret eksempel på hvordan man kan misbruke statistikk. Dette er det eneste eksempelet på dette i boka, og temaet har blitt gitt relativt liten plass i forhold til at det er ett av fem punkter i læreplanen i 1M. Dette er et tema som er spesielt viktig for alle, fordi det vil være anvendbart å ha en forståelse for misbruk av statistikk som kan komme frem i reklamekampanjer og lignende. Derfor kan man argumentere for at det bør ha et større fokus enn det boka legger opp til, som jo læreren har mulighet til. En relativt stor del av kapittelet består av beskrivelser om hvordan man kan bruke regneark til å sette opp tabeller. Det blir ikke presentert nytt matematisk stoff i forbindelse med dette, det er bruk av data som har hovedfokus. Fokuset på datamaskiner er i tråd med den generelle delen av matematikklæreplanen, som fokuserer på viktigheten av bruk av datamaskin. Boka presenterer regnearket Quattro. Dette programmet er ikke brukt ofte i skolen i dag, av regneark er det Microsoft Excel som har størst markedsandel. Oppgavene i boka handler om eksempler fra virkeligheten, og oppfyller læreplanens anbefaling i så måte. Statistikk er dessuten et emne man kan argumentere for at vil være meningsløst uten eksempler fra virkeligheten.

6.2.1.2 Matematikk 2MX

Boka (Sandvold, 1995) er delt inn i kapitler etter emner, med øvingsoppgaver og kontrolloppgaver. Grafisk kalkulator er et viktig hjelpemiddel, og bruk av denne er integrert der det er naturlig. Videre påpekes det at det har blitt lagt vekt på å bevise en del av setningene, så langt forfatterne har funnet det pedagogisk forsvarlig, på grunn av læreplanens fokus på den formelle siden ved matematikken. Samtidig er det også forsøkt å anvende matematikken på ulike fagområder, *"(…) for å få fram rikdommen og spennvidden i faget"* (Sandvold, 1995, s. 3). Forfatterne mener også at læreplanen er skrevet på en måte som er lite spesifikk, og dermed gir mye rom for tolkninger omkring hvor omfattende enkelte deler skal være. Omfang og innhold er dermed også vurdert ut fra forfatternes pedagogiske vurderinger.

Kapittelet om sannsynlighet innledes med en presentasjon av ulike områder der sannsynlighetsregning brukes. Dette er bare en oversikt og er hensiktsmessig i den forstand at det viser at sannsynlighetsregning har andre anvendelser enn bare spill, som kanskje elevene har vært vant med til nå i skolen. Det forklares også at ulike typer spill vil være en gjenganger i mange av eksemplene boka bruker, fordi disse er enkle og oversiktlige, og vil kunne gi elevene en intuitiv forståelse av sannsynlighetsregning.

Historisk bakgrunn er et mål i læreplanen boka er skrevet etter, og det fortelles innledningsvis i kapittelet om brevvekslingen mellom de Méré og Pascal, og om problemet som gjaldt sannsynligheten for minst en dobbeltsekser i en rekke forsøk. Videre fortelles det om at sannsynlighetsregning fikk et mer selvstendig grunnlag, noe Laplace får æren for. Hvorfor er ikke helt klart, men trolig på grunn av at han i sin bok "Theorie analytique des probabilités" i følge Hundeland (1996) tok opp temaer fra andre matematikere, og drøftet dem der. Laplace får også æren for det teoretiske grunnlaget for normalfordelingen. Her har også Laplace bidratt, men kanskje burde både Gauss og De Moivre vært nevnt i denne sammenheng. Videre fortelles det om et problem som ble drøftet av Laplace og den franske filosofen d'Alembert (1717-1783). Problemet var om alle utfallene i myntkast med to mynt var like sannsynlig, altså to krone, mynt og krone, eller to mynt. Et lignende problem gjør boka seg bruk av og elevene skal kaste tre mynter 20 ganger og telle opp ulike utfall.

Kombinatorikk blir viet mye plass i læreboken. Etter først å ha presentert hvordan fakulteter regnes ut, blir ordnede og uordnede utvalg uten tilbakelegging og ordnet utvalg med tilbakelegging omhyggelig presentert. Disse ulike måtene å regne kombinasjoner på blir hele tiden presentert gjennom eksempler. Vanlig oppbygging i boka er et eksempel, deretter en regel som etterfølges av flere eksempler og oppgaver. Dette er en grei måte å presentere stoff på. En liten ting som kan nevnes er oppgaver av typen:

Regn ut:

a) 8C4 b) 32C26 c) 18C13 d) 84C78

(Sandvold, 1995, s. 166)

Skrivemåten nCk er ikke den mest vanlige. Dette må regnes som en lett oppgave, og det trengs liten kompetanse utover å sette inn tall i en formel. Boka gir ingen oppskrift på hvordan man kan regne ut dette på kalkulatoren, men påpeker at på noen kalkulatorer finnes det en funksjon som gjør det. Dersom det er meningen at det er dette som skal gjøres – altså taste inn på kalkulatoren - er oppgaver av denne typen egentlig lite nyttig, bortsett fra øvelse i bruk av kalkulator.

Binomialkoeffisientene blir presentert på samme måte som de andre kombinatoriske sammenhengene, men de behandles mer omfattende, i og med at både Pascals trekant og det boka kaller Newtons binomialformel blir presentert. Pascals trekant anvendes til å finne binomialkoeffisientene, og kan derfor sies å være essensiell i så måte. Newtons binomialformel blir brukt til å regne ut uttrykk av typen $(a+b)^n$. Dette er interessant nok i seg selv, men virker litt isolert fra resten av stoffet i kapittelet, siden det ikke blir brukt til noen kombinatoriske problem eller for å regne ut sannsynligheter.

Når sannsynlighet blir presentert, forklares en del begreper på en litt uheldig måte. *Statistisk eksperiment* er et begrep som benyttes, og forklares som et tilfeldig forsøk. Bruken av ordet *statistisk eksperiment* er unødvendig og lite beskrivende, og kunne vært kuttet ut. I stedet kunne *tilfeldig* eller *stokastisk forsøk* vært brukt. For eksempel kaller boka et terningkast for *statistisk eksperiment*.

I stedet for å bruke *utfall*, kaller boka det for *enkeltutfall*. Enkeltutfall er kanskje mer beskrivende i så måte, men benyttes sjelden, og et utfall er vanligvis å betrakte som et enkeltutfall, ikke noe annet. Derfor burde vanlig og kjent ordbruk fra matematikken vært benyttet. Begivenhet blir benyttet i stedet for hendelse. Hendelse er nok noe mer vanlig. Boka skriver at begivenhet er en samling enkeltutfall, noe som i og for seg er korrekt, men en hendelse kan også være bare et utfall eller som boka skriver; enkeltutfall. Boka skriver videre at utfall brukes som en fellesbetegnelse på hendelser og enkeltutfall. Det er ikke hensiktsmessig. Boka burde anvende utfall eller enkeltutfall og hendelse, som blant annet Gunnar G. Løvås (2004) definerer gjennom et eksempel utfall og hendelse. Han bruker ulike værtyper; sol, sol med skyer, sol med regn, sol med snø, skiftende, torden, snø og regn, i sitt eksempel. De ulike typene ovenfor skriver han er utfall, mens oppholdsvær (*sol* og *sol med skyer*) og snøvær (*sol med snø* og *snø og regn*) som omfatter flere utfall er hendelser. Hyppighet er et ord boka har valgt å bruke i stedet for frekvens. Igjen har boka tatt et litt uvanlig valg, ettersom frekvens er mest vanlig, men boka påpeker også at frekvens ofte blir brukt.

Sannsynlighet blir definert etter at et eksempel med kast av tegnestift er illustrert. Frekvensen for antall ganger spissen lander opp blir notert i en tabell for 50, 200, 500, 2000, 5000 og 10000 kast. Relativ frekvens nærmer seg mer og mer til 0,44, og på bakgrunn av det forteller boka at sannsynligheten for en hendelse A er

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} r_n$$

der r_n er relativ frekvens for A. Bakgrunnen for dette er de store talls lov. Ut fra bokas definisjon kan det se ut som om det dreier seg om konvergens av en tall-følge, som kan defineres som at for hvert reelt tall $\varepsilon>0$ finnes det et naturlig tall N så vil for alle $n>N$ $|r_n - P(A)|<\varepsilon$. Store talls lov forteller derimot at sannsynligheten for at $|r_n - P(A)|>\varepsilon$ konvergerer mot null, som kan formuleres $\lim_{n\to\infty} P(|r_n - P(A)| > \varepsilon) = 0$. Det er trolig for avansert å gå nøye inn på dette i videregående, men elevers forhold til konvergens på dette nivået vil føre til at bokas bruk av $P(A) = \lim_{n\to\infty} r_n$ kan misforstås. P'en som står utenfor parentesen over, kan forklares som følger: Man kan få veldig mange forskjellige følger av relative frekvenser når man kaster en tegnestift, fordi disse følgene selv er tilfeldige. Når man kaster en tegnestift ofte nok vil de mulige følgene som gir $|r_n - P(A)|<\varepsilon$, dominere stort i antall over følgene som gir $|r_n - P(A)|>\varepsilon$.

En oppgave som står i boka går ut på å finne ut ved hjelp av statistikken i Statistisk årbok hvor mange gutter og jenter som ble født det siste året. Dette er en interessant vinkling av en oppgave. For å gjøre denne oppgaven blir elevene aktivisert. Trolig har det vært meningen at elevene skal ta i bruk internett for å finne ut av dette og dermed kommer flere momenter inn i undervisningen. For det første kommer bruk av IKT-ressurser inn på en naturlig måte, og det å kunne plukke ut informasjon fra statistisk data. Dette er dessuten et mål i læreplanen under "*Mål 1: Språk og kommunikasjon*." Et av hovedmomentene her forteller nemlig at elevene skal kunne *"innhente, bearbeide og presentere matematisk informasjon"* (KUF, 1994, s. 4)

Matematikk 2MX (1995) beskriver også en sannsynlighetsmodell, der det forklares at dersom sannsynligheten for en hendelse P(A)=0, vil hendelsen aldri inntreffe. Pensum omfatter bare endelige utfallsrom, og i så måte er definisjonen anvendbar, men dette burde i tilfelle påpekes.

Et eksempel i boka er et hypergeometrisk forsøk. 3 av totalt 11 deltakere skal trekkes ut til dopingkontroll. 5 av de 11 deltakerne er dopet, og man skal finne ut sannsynligheten for at ingen av disse blir trukket ut til kontroll. Den hypergeometriske modellen blir ikke presentert i boka, men ved hjelp av kombinatorikk og $\frac{gunstige\ utfall}{mulige\ utfall}$ kommer boka fram til følgende uttrykk: $\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{11}{3}}$. Siden problemer av denne typen går igjen i flere oppgaver kunne kanskje formelen for hypergeometriske sannsynligheter blitt presentert. Den er ikke nevnt i læreplanen, men siden det er så mange problemstillinger av lignende type, hadde det vært fornuftig.

Addisjonssetningen blir presentert som følger:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (1995, s. 181)

Boka opererer ikke med noen egen addisjonssetning for disjunkte hendelser, men det er poengtert et annet sted i teksten at når A og B ikke har noen felles utfall, kalles de disjunkte hendelser, og ut fra dette er det lett å konkludere med at $P(A \cap B) = 0$, i hvert fall dersom man har litt erfaring med sannsynlighetsregning. På dette nivået i matematikkundervisning, kunne det likevel vært en fordel å drøfte dette med disjunkte hendelser bedre enn hva som er blitt gjort.

Det boka kaller *produktregelen* er ikke viet noe særlig plass i boka. Det er kun uavhengige forsøk som er behandlet, og setningen ser ut som følger:

$P(AogB) = P(A) \cdot P(B)$ (Sandvold, 1995, s. 184)

Det er dessuten verdt å legge merke til at i denne setningen brukes ikke $(A \cap B)$, men $(AogB)$. Det kunne vært fornuftig å anvende matematiske uttrykksmåter, ettersom dette også er en del av opplæringen i faget.

Boka har et eget delkapittel om simulering. Hovedsakelig går det ut på å anvende kalkulatoren til å simulere ulike eksperimenter, og resultatene av simuleringene som blir eksemplifisert blir i liten grad drøftet i forhold til sannsynlighetsteori. Eksperimentene er både binomiske fordelinger og normalfordelinger. Blant annet simuleres sum av øyne ved kast med tre terninger 5000 ganger. Resultatene fra dette eksempelet illustreres i et søylediagram som er tilnærmet normalfordelt. Dette er ikke drøftet nøyere, og normalfordelingen er heller ikke pensum, men for elever på dette nivået kan dette være et interessant eksempel. Eksempelet kan være illustrerende i forhold til prinsippet i sentralgrensesetningen.

Et mål i læreplanen som dreier seg om vanlige misoppfatninger om sjanser og sannsynlighet er ikke diskutert nøye i boken. Det blir drøftet litt omkring *subjektiv sannsynlighet*, som ikke baserer seg på tallmateriale, men det er stort sett hele beholdningen.

6.2.1.3 Matematikk 3MX

Matematikk 3MX (1996) er en lærebok fra samme forlag og skrevet av samme forfattere som Matematikk 2MX (1995), og boken er stort sett bygd opp på samme måte. En liten forskjell er at den historiske vinklingen av faget er redusert til kun ett kapittel, som heter geometri og kjeglesnitt, og dermed er ikke statistikk og sannsynlighetsregning viet noe historisk perspektiv. Forfatterne påpeker at 3MX har en omfattende læreplan, og i en tilhørende lærerveiledning har forfatterne gjort rede for hvor mye vekt det bør legges på ulike tema. I forordet påpekes det også at læreplanen er lite spesifikk, og dermed er det rom for mange ulike tolkninger.

I innledningen presenteres begrepet *stokastiske forsøk,* som tilsvarer det 2MX-boken kaller *statistisk eksperiment*, men ellers bruker boken stort sett samme begrep som i 2MX-boken, som begivenhet og enkeltutfall. Betinget sannsynlighet kommer inn i 3MX. Her har boken brukt vanlig notasjon;

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

er sannsynligheten for en hendelse A når B har inntruffet. Dette kaller boken *den generelle produktregelen for sannsynligheter*. I 2MX-boka kalles som nevnt $P(A og B) = P(A) \cdot P(B)$ produktregelen for sannsynligheter. Det blir dermed litt uklart hva som er et generelt tilfelle i og med at i 3MX-boken behandles produktsetningen for uavhengige hendelser som et spesialtilfelle av betinget sannsynlighet når $P(A \mid B) = P(A)$. Begrepet uavhengighet drøftes også ved å gi eksempler på ulike situasjoner. Blant annet er det et eksempel der Hege scorer på straffespark med 90 % sannsynlighet på en bestemt keeper, og at man vet dette på grunn av lang erfaring. Boka skriver videre at dersom hun har scoret på det første straffesparket er sannsynligheten kanskje mindre for at hun scorer på det andre dersom hun er mer nervøs. Dette er et dårlig eksempel. Dersom det er faktorer som kan påvirke sannsynligheten for at hun scorer på det andre straffesparket, kan det like godt være faktorer som påvirker sannsynligheten for at hun scorer på det første. Situasjonen er i det hele tatt urealistisk, men det konkluderes likevel riktig med at situasjonen ikke er uavhengig. Første straffespark er ikke nødvendigvis uavhengig av observasjonene som sannsynligheten er basert på, og man kan dermed ikke nødvendigvis si at sannsynligheten er 90 % for at hun scorer på det første straffesparket.

Total sannsynlighet blir så vidt nevnt i boken, og er forklart med ord. Setningen er ikke presentert med symboler, ei heller illustrert med for eksempel venndiagrammer. Også Bayes' setning presenteres, og denne bevises som følger:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot\frac{P(B\cap A)}{P(A)}}{P(B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}$$

Siden $P(A\cap B)=P(B\cap A)$ er dermed $P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$ (Sandvold, 1996, s. 100).

Beviset er greit fremstilt, men det er lite tekst som hører til, noe som gjør at beviset kan bli vanskelig å følge.

Stokastisk variabel blir definert på en nokså teoretisk måte. Begrepet blir beskrevet som "(...*) en funksjon fra utfallsrommet S for det stokastiske forsøket og til de reelle tallene **R**"* (Sandvold, 1996, s. 106) Det er gitt flere eksempler på en stokastisk variabel. Blant annet myntkast med kast av mynt to ganger. Den stokastiske variabelen X står for antall krone, og verdimengden til X blir listet opp: *X(mm)=0 X(mk)=1 X(km)=1 X(kk)=2* (Sandvold, 1996, s. 106).

Sannsynlighetsfordelinger blir kort beskrevet som alle mulige verdier til en stokastisk variabel, og sannsynligheten for hver av disse verdiene. Det gjøres videre kort rede for kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger og diskrete sannsynlighetsfordelinger. Kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger blir presentert som et tilfelle der en stokastisk variabel kan anta alle reelle tall som verdier i et gitt intervall. Diskrete fordelinger presenteres som tilfeller der en stokastisk variabel bare kan ha atskilte verdier. Disse fordelingene finnes det nok av eksempler på i boken. Ellers blir hypergeometrisk fordeling, binomisk fordeling og kumulativ fordeling presentert. Binomisk fordeling er viet klart mest plass, og er den eneste av disse fordelingene man finner eksplisitt nevnt i læreplanen. Kumulativ fordeling er en fordeling man ellers ikke finner i så mange lærebøker.

Binomiske forsøk presenteres ved tre punkter som forklarer hva som er spesielt for binomiske forsøk. Altså to utfall, suksess eller fiasko, sannsynligheten for suksess er uendret fra hvert delforsøk og lik *p*, og alle delforsøkene er uavhengige. Dette blir etterfulgt av et eksempel der utregninger blir vist, og deretter presenteres formelen. Eksempelet som presenteres går ut på et tilfelle der man har sannsynlighet *p=0,4*, for suksess. Problemet er å finne sannsynligheten for at man får suksess i tre av ti tilfeller. Det listes opp tre eksempler på tilfeller der man får suksess i tre av ti forsøk. Totalt finnes det 120 forskjellige måter å få tre suksesser på ti forsøk. Det kunne kanskje vært hensiktsmessig å se på et tilfelle der antall forsøk var mindre. For eksempel én suksess på tre forsøk. Da ville det vært mulig å liste opp alle mulighetene for en suksess på tre forsøk, noe som bedre ville illustrert poenget med forskjellig forsøksrekker med en suksess på tre forsøk. Binomiske forsøk er plassert i et delkapittel mot slutten av kapittelet. Det kan argumenteres for at det kunne vært fornuftig å presentere dette etter produktsetningen for uavhengige hendelser, ettersom et binomisk forsøk ikke krever så mye utvidet kunnskap fra å anvende produktsetningen for uavhengige hendelser.

Forventning blir satt i sammenheng med gjennomsnitt, og blir eksemplifisert ved å regne ut gjennomsnittet i en karakterfordeling. I eksempelet finner man forventningsverdien i denne karakterfordelingen, men tolker ikke hva denne forventningen betyr annet enn gjennomsnittet. Derimot kommer et annet eksempel med et spill som koster penger med pengegevinst, der man regner ut forventningsverdien til spillet. Spillet går ut på å kaste to mynter. Hvis man får to krone vinner man 20 kroner, hvis man får én krone og en mynt vinner man 10 kroner og dersom man får to mynt må man betale 50 kroner. Sannsynlighetsfordelingen blir illustrert i en tabell der X er beløpet man vinner i spill:

x	20	10	-50
P(X=x)	0.25	0.5	0.25

Definisjonen av forventningsverdi i boka er som følger:
$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + ... + x_n \cdot P(X = x_n)$ (Sandvold, 1996, s. 115). Ved hjelp av denne regnes forventningsverdien for spillet beskrevet ovenfor til å være -2,5 kr. I hvert enkelt spill er sannsynligheten 0,75 for å vinne. Likevel forteller forventningsverdien at man vil tape i det lange løp. Dette kunne vært gjort et poeng ut av for å klargjøre betydningen av sannsynlighet i forhold til forventning.

Varians og standardavvik er enkelt presentert. Det nevnes at varians og standardavvik er et mål på spredning, og at standardavvik er kvadratroten av variansen. Ellers dreier det seg om anvendelser av formlene for varians og standardavvik, men det gis ingen argumenter for hvorfor formelen er som den er. Forventning og varians for binomiske forsøk, blir også bare presentert som en formel, uten noen utledninger for hvorfor formelen er som den er.

Simulering er et eget delkapittel i boka. Det dreier seg om å simulere hele tall i ulike intervaller, ved hjelp av kalkulatoren, hvor ulike hendelser er relatert til de ulike hele tall. Det gir kunnskap i bruk av kalkulator, og kan være et fint tillegg til simulering ved terning eller mynt, fordi man har flere muligheter.

Boken avslutter kapittelet med et delkapittel om formaliseringen av sannsynlighetsbegrepet. Mye av innholdet her er repetisjon av ulike begreper og modeller som har vært anvendt før i kapittelet. Empirisk sannsynlighet blir nevnt, og boka skriver at De store talls lov er prinsippet som ligger bak. De store talls lov har ikke blitt grundig presentert i denne boken, og heller ikke i 2MX-boken fra samme læreverk, og det er uheldig ikke å utdype loven i denne sammenhengen. Her presenteres De store talls lov intuitivt ved hjelp av kast med tegnestift. Det forklares at når man kaster tegnestiften flere og flere ganger vil relativ frekvens for *spiss opp* nærme seg et tall som defineres som sannsynligheten for spiss opp. I likhet med Matematikk 2MX (1995), er også denne forklaringen for store talls lov intuitiv.

Det generelle funksjonsbegrepet blir presentert, der funksjonen *P* virker på et element fra en mengde *S* og gir et element i en mengde *R*. Videre skrives det at *"ut fra dette kan vi sette opp aksiomene som gjelder for sannsynligheter"* (Sandvold, 1996, s. 129). Deretter presenteres Andrej Kolmogorov (1903-1987) sin aksiomatisering av sannsynlighetsbegrepet som følger:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. *Dersom* $A \cap B = \emptyset$, *så skal* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Sandvold, 1996, s. 130)

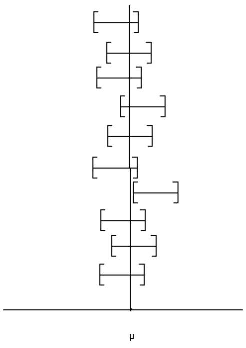
Over er S utfallsrommet for et stokastisk forsøk, og A og B er hendelser og delmengder av S. Dette delkapittelet gir inntrykk av å være svært teoretisk, og eksemplene og oppgavene som er tilknyttet, bidrar lite til intuitiv forståelse.

Kapittelet som heter *"Statistikk. Konfidensintervall. Hypotesetesting."*, innledes med å definere gjennomsnitt og standardavvik for en populasjon. Her presenteres gjennomsnitt av en stikkprøve fra et datamateriale på vanlig måte, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$, men dette relateres ikke til begrepet forventning. Gjennomsnittet av en stikkprøve fra en populasjon er et estimat for forventingen. Innledningsvis brukes *s* for standardavvik, når x'ene er enkeltobservasjoner. *S* defineres innledningsvis som $s=\sqrt{\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_N-\overline{x})^2}{N}}$, der *N* er antall observasjoner. Boka har ikke gjort rede for om eksemplene dreier seg om stikkprøver eller hele populasjoner, men siden det ene eksempelet dreier seg om høyden til 5 elever i en klasse, er det grunn til å tro at det dreier seg om en stikkprøve. I en hel populasjon er standardavviket som over, mens i en stikkprøve benyttes ofte formelen

$s=\sqrt{\dfrac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_N-\overline{x})^2}{N-1}}$. Det viser seg nemlig at standardavviket for en stikkprøve blir mer nøyaktig hvis man dividerer for med *N-1*. Det kunne vært gjort rede for, at denne formelen ofte blir brukt for å estimere standardavviket i en populasjon ved hjelp av en stikkprøve. Senere bruker boken σ for standardavviket til en populasjon, og *s* som standardavvik for en stikkprøve fra en populasjon, og fortsatt med *N* i nevner i formelen. I tilfeller der standardavviket for hele populasjonen er kjent, benytter boka formelen $\sigma_{\bar{x}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ for standardavviket til en stikkprøve.

Standardisering av normalfordeling gjøres rede for på en enkel måte. Den standardiserte normalfordelingen er illustrert med $\mu=0$ og $\sigma=1$, og formelen for omregning fra en hvilken som helst normalfordeling til standard normalfordeling, $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$, blir presentert. Boka har oppgitt en tabell for z-verdier, men bare positive, og det påpekes at det er nok ettersom den standardiserte normalfordelingen er symmetrisk om gjennomsnittet, μ. Som nevnt over ble ikke gjennomsnitt relatert til forventning, noe som kunne vært gjort. Noen eksempler er gitt i forhold til dette, blant annet høyden til rekrutter. Blant annet får vi vite at sannsynligheten for at en tilfeldig valgt rekrutt er 180 cm er 0, noe som grunngis med at arealet under tetthetsfunksjonen i punktet 180 er 0. Dette er greit nok, men burde vært utdypet. Blant annet burde det vært gjort bedre rede for forskjellen på diskrete og kontinuerlige fordelinger.

Konfidensintervall blir hovedsakelig behandlet på den måten at μ og σ er kjent, og man finner et konfidensintervall for en oppgitt hendelse. I tilfeller der μ ikke er kjent, finner man intervaller som med en gitt sannsynlighet inneholder μ. I denne sammenheng regnes standardavviket ut som følger: $\sigma_{\bar{x}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Det gjøres bra rede for at man finner ulike verdier av $\overline{x}$ i ulike stikkprøver. Videre forklares det at et 90 % konfidensintervall betyr at dersom man tar flere stikkprøver vil 90 % av stikkprøvene ha et intervall om $\overline{x}$ som vil inneholde μ. Dette kan sies å være det viktigste poenget med konfidensintervall, nemlig at for hver stikkprøve vil man få et konfidensintervall, og dersom man regner med konfidensnivå på 90 %, vil 90 % av stikkprøvene gi en gjennomsnittsverdi som får et konfidensintervall som inneholder μ. Dette illustreres også på en bra måte med et eksempel der det er tatt 10 stikkprøver. Illustrasjonen tilsvarer den følgende:



Boken gjør også kort rede for hvordan man kan tilnærmet regne ut sannsynligheter i binomiske fordelinger ved hjelp av normalfordelingen. Her er ikke sentralgrensesetningen betraktet. Den er heller ikke nevnt i læreplanen, men ettersom den ikke utelukker den heller, kunne den vært inkludert for helheten sin skyld. Boka skriver at man kan tilnærme binomiske fordelinger til normalfordeling når *n* er over 30. Dette er ikke en fastsatt regel, men en cirka-verdi, noe som kunne vært påpekt, ettersom andre bøker opererer med andre tall. For eksempel Løvås (2004) sier at n >20.

Kapittelet avsluttes med hypotesetesting. Først blir hypotesetesting for binomisk fordeling presentert. Dette gjøres nøye, og steg for steg blir prosessen og ulike begreper i prosessen presentert. Det gjøres rede for hva som er poenget med en hypotesetest, og tolkning av resultatet. Det forklares at dersom en hypotesetest forteller om man skal forkaste eller beholde en nullhypotese, er det ikke helt sikkert at denne konklusjonen er rett. Forkastningsfeil og godtakingsfeil blir drøftet opp mot hverandre og det går frem at disse henger sammen, altså dersom sannsynligheten for den ene typen feil forandres, forandres også sannsynligheten for den andre typen feil.

Hypotesetesting ved normalfordelinger blir også presentert. Dette introduseres gjennom et eksempel der man tar for seg potet-sekker og tester om vekten av disse er som oppgitt av leverandøren, 25 kg. Ved en stikkprøve på 12 sekker har man fått en gjennomsnittsvekt på 24,82 kg. Nå skal man utføre en test med 5 % signifikansnivå for å teste denne vekten. Eksempelet gjøres større og mer komplisert ved at man i boka ikke har oppgitt verdi for negative z-verdier. Dermed må man gå veien om der arealet er 0,95 i normalfordelingen, regne ut z, og på grunn av symmetrien, vil z-verdien for 0,05 bli lik den negative z-verdien for 0,95. Denne delen av eksempelet dominerer såpass mye, og det hadde vært bedre å oppgi standard normalfordelingstabell for både positive og negative z-verdier. Dessuten er både den negative og positive z-verdien markert i en standard normalfordelt tetthetsfunksjon, noe som kan virke forvirrende i forhold til tosidige tester, mens testen i det aktuelle eksempelet er ensidig.

Også tosidige tester blir presentert ved et eksempel. Her er også normalfordelingen illustrert med markerte z-verdier på x-aksen der arealet under grafen er 0,97 og 0,03. Dette blir riktig i dette tilfellet, men problemet er at illustrasjonen for ensidige tester var lik. Delkapittelet avsluttes med en forklaring på når man skal bruke tosidige og ensidige tester. Dette forklares med at $\mu \neq a$ er utgangspunkt for en tosidig test, mens $\mu < a$ eller $\mu > a$ er utgangspunkt for ensidige tester.

6.2.2 R94 versjon 2000

6.2.2.1 Matematikk 1Mx/My

Matematikk 1Mx/My (2000) er skrevet etter læreplanversjonen fra 2000 etter reform 94. Boken er beregnet for elever som tar MX- og MY-retningen, der noen av kapitlene bare er forbeholdt MX-retningen. Boka inneholder tekst, eksempler og oppgaver med løsninger i hvert kapittel. De rene tekstavsnittene er ofte lange, men nøyaktige i beskrivelsene. Dette kan føre til at de kan være litt "tunge" å lese, men likevel er det en del eksempler som kan veie opp for dette. Oppgavene har ulik vanskelighetsgrad, og oppgavene som i følge bokas vurdering er vanskeligere, er merket. Det fins også kalkulatoroppskrifter for grafiske kalkulatorer av merkene Casio og Texas. I følge læreplanen er kjennskap til matematikkens historie et mål, og i forordet påpekes det at dette er tatt med i ulike sammenhenger.

I innledningen forteller boka litt om bakgrunnen for sannsynlighetsregningen, og nevner blant annet loddtrekning mellom Jesu disipler. I sammenheng med dette skriver boka at på denne tiden trodde folk at tilfeldige hendelser ble avgjort av høyere makter, og at det kan ha vært en grunn til at sannsynlighetsregningen ikke fikk sitt gjennombrudd før brevvekslingen mellom Pascal og Fermat. Man kan også lese at ulike spill var opphavet til sannsynlighetsregningen, og litt om hva sannsynlighetsregning brukes til i dag. Dette er den historiske beholdningen i boka, og det er ikke gitt noen andre eksempler som er direkte knyttet til den historiske bakgrunnen til sannsynlighetsregningen. Det finnes flere eksempler og oppgaver som tar for seg terningkast og kortstokker, men disse er ikke konkret satt i sammenheng med problemene Pascal, Fermat, De Moivre m.fl. beskjeftiget seg med.

I delkapittel 1 drøfter boka temaet deterministiske og tilfeldige hendelser. En deterministisk hendelse er definert som noe vi på forhånd vet om vil skje eller ikke. En oppgave tilknyttet dette går ut på å avgjøre om følgende tre hendelser er deterministiske eller tilfeldige:

"a) Kast et kronestykke og se om du får mynt eller krone.
b) Varm opp vann og mål temperaturen når det koker.
c) Seks barnehagebarn skal leke sisten. De avgjør ved å "elle" hvem som skal "stå""
(Heir, 2000, s. 125)

Denne oppgaven er interessant, for den kan tolkes på flere måter. Oppgave a) er klart tilfeldig. Oppgave b) er et deterministisk forsøk, fordi man vet at vann vil koke ved 100^o. Likevel er det et interessant tema, fordi dersom man gjentar dette forsøket mange ganger, vil trolig ikke mange målinger registrere koking ved nøyaktig 100^o. I praksis vil man derfor ikke få nøyaktig det resultatet man forutsier. Faktorer som påvirker er hvor forsøket utføres (høyde over havet), måleinstrumenter, og individuelle vurderinger av når vannet koker. Det som er deterministisk i praksis i dette eksempelet, er at observasjonene trolig vil være normalfordelte, med $\mu=100^o$ ved 1 atmosfærers trykk. Dette eksempelet kunne ledet til en interessant diskusjon. Oppgave c) kan tolkes begge veier. Dersom "ellingen" foregår ved at barna står i en ring og blir pekt på i rekkefølge, ligger tilfeldigheten i hvilken person som blir pekt på først og hvilken retning det "elles" i. Når en person har blitt pekt på først og retningen er valgt på ellingen, kan man forutsi hvem som må "stå". Dermed blir det mulig for den som "eller" å unngå å måtte stå selv. Dette er også et godt eksempel på oppgave, dersom man tar hensyn til ulike innfallsvinkler.

Boka drøfter relativ frekvens og sannsynlighet, og definerer: *"Sannsynlighet er det samme som relativ frekvens i det lange løp"* (Heir, 2000, s. 126) Dette er en grei definisjon intuitivt sett, men det er et stykke fra en tilstrekkelig matematisk definisjon.

Boken presenterer flere typer systematiske oppstillinger. Blant annet valgtrær og venn-diagram som er nevnt eksplisitt i læreplanen, i tillegg til toveistabeller. Venn-diagram blir for øvrig presentert i et kapitel om algebra tidligere i boka i forbindelse med mengdelære.

Sannsynlighetsmodeller blir forklart generelt, deretter forklares uniforme sannsynlighetsmodeller. Boka bruker tre hovedpunkter for å forklare en sannsynlighetsmodell:

- *En sannsynlighetsmodell for et tilfeldig forsøk gir sannsynligheten for hvert enkelt utfall i utfallsrommet*
- *Sannsynligheten for hvert av utfallene er et tall mellom 0 og 1*
- *Sannsynlighetene for alle utfallene er til sammen 1*

(Heir, 2000, s. 133)

Punkt en og tre er essensielle punkter i en beskrivelse av en sannsynlighetsmodell. Punkt to er ikke helt riktig i og med at utfall også kan ha sannsynlighet null, og er kun riktig hvis en kan oppfatte at et utfall også kan ha sannsynlighet 1 eller 0, og ikke bare tall *mellom* 0 og1. Det finnes ingen oppgaver i boka som strider mot dette punktet, og på videregående nivå kan man argumentere for at dette er en anvendbar definisjon. Ankepunktet er at dette ikke er riktig for kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger.

Boka definerer sannsynligheten for en hendelse *A* i en uniform sannsynlighetsmodell, dvs. hvor alle *n* mulige utfall har samme sannsynlighet *1/n*:

$$P(A)=\frac{\text{antall gunstige utfall for A}}{\text{antall mulige utfall}}.$$

Boka inneholder et del-kapittel som kalles sammensatte forsøk. Her gjøres det rede for ulike forsøk der man må multiplisere antall utfall i hvert del-forsøk for å finne totalt antall mulige utfall. Dette del-kapittelet er en innledning til produktsetningen, men den nevnes ikke. Poenget med dette del-kapittelet er trolig å forklare logikken bak produktsetningen, altså at antall mulige kombinasjoner i et eller flere delforsøk multipliseres med hverandre, og antall gunstige kombinasjoner i et eller flere delforsøk multipliseres med hverandre, for å finne totalt antall gunstige og mulige utfall for hele forsøket. Deretter brukes kan totalt antall gunstige muligheter divideres med totalt antall mulige muligheter for å finne sannsynligheten for hendelsen. I forbindelse med to andre del-kapitler, som boka kaller *"Produktsetningen for uavhengige hendelser"* og *"Produktsetningen for avhengige hendelser"* forklares ikke logikken bak multiplikasjonen, dette grunnlaget er lagt i del-kapittelet *"Sammensatte forsøk"*.

Produktsetningen for uavhengige hendelser presenteres først. Den behandles ikke som mer eller mindre fundamental enn produktsetningen for avhengige hendelser, men begge setningene behandles som sammensatte forsøk, der ulike kriterier ligger til grunn for å anvende den ene eller den andre. Boka kaller som nevnt en av setningene for *produktsetningen for avhengige hendelser*. En mer vanlig terminologi er betinget sannsynlighet, noe også læreplanen benytter seg av, men det krever en omforming av formelen $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A \mid B)$ som boken bruker, for at formelen skal uttrykke den betingede sannsynligheten. Boka nevner også begrepet betinget sannsynlighet. Et eksempel i boka brukes i forbindelse med både uavhengige og avhengige hendelser. Man skal se på hendelsene A: første kule er blå, og B: andre kule er rød. I tilfellet med uavhengige hendelser legger man første kule tilbake, mens i tilfellet med avhengige hendelser legges den ikke tilbake. Her kommer det fram en klar forskjell på uavhengige og avhengige hendelser, som kan være med å gi et intuitivt bilde av hva som skiller uavhengighet og betinget sannsynlighet (avhengighet).

6.2.2.2 Matematikk 2MX

Matematikk 2MX (Heir, 2001) er bygd opp på samme måte som Matematikk 1MX/1MY som beskrevet over. I kapittelet om sannsynlighetsregning finnes det en historisk introduksjon, som omhandler kombinatorikk. Her gjøres det rede for ulike kulturer som har vært opptatt av kombinatoriske problem. Pascals trekant er avbildet, og et par navn er fra indisk matematikk, Pingala (ca 200 f.Kr.) og Halayudha (ca. 900 e.Kr.) blir nevnt i denne sammenheng. Pascals studier av trekanten blir også nevnt. Ellers er det lite historie, både i forhold til problemstillinger i oppgaver og i forhold til tema som blir behandlet, som for eksempel Bayes' setning og binomisk fordeling. I forhold til Matematikk 1MX/MY er det også få eksempler som omhandler de historiske problemene i sannsynlighetsregning som terningkast eller kort, men det finnes noen. Eksemplene og oppgavene tar for seg forskjellige tema, og mange av disse problemene viser at sannsynlighetsregning er anvendbart på mange måter i praktiske problemstillinger.

Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser blir behandlet også i Matematikk 2MX. Selv om denne boken og Matematikk 1MX/MY har samme forfattere er temaene behandlet litt forskjellig, med tanke på notasjon. Det som ble kalt *produktsetningen for avhengige hendelser* i Matematikk 1MX/MY blir i Matematikk 2MX bare kalt produktsetningen og ser ut som følger:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A \mid B) .$$

Betinget sannsynlighet uttrykker boka ved å omforme formelen over og man får

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} .$$

Fremstillingene i 2MX er isolert sett greie, men ettersom det er samme forfattere som har skrevet både *1MX/MY* og *2MX* utgaven av *Matematikk*, kan man argumentere for at det kunne vært lurt å bruke samme navn på like formler i begge bøkene. Her behandles også *produktsetningen for uavhengige hendelser*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

som et spesialtilfelle av produktsetningen når $P(B \mid A) = P(B)$. I forbindelse med betinget sannsynlighet har boka et avsnitt der det gis en intuitiv forklaring av hva betinget sannsynlighet er. Her trekkes relativ frekvens inn, og det poengteres at *P(B|A)*, kan tolkes som relativ frekvens av B, når hendelsen A har inntruffet. Dette er et viktig poeng som ikke bør bli utelatt i en forklaring på betinget sannsynlighet. Samtidig er dette kun en intuitiv formulering av store talls lov, lignende formuleringene fra Matematikk 2MX (1995) og Matematikk 3MX (1996). Boka påpeker dessuten at både *produktsetningen for uavhengige hendelser* og *produktsetningen* også gjelder for tre eller flere hendelser.

Bayes' setning blir utledet ved å kombinere definisjonen på betinget sannsynlighet og produktsetningen:

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ og $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. I samme delkapittel som Bayes' setning presenteres også setningen om total sannsynlighet. Denne setningen er ikke i læreplanen, men boka argumenterer for at det kan være en måte å finne en av opplysningene i Bayes' setning, for eksempel *P(B)* eller *P(A)*.

Kombinatorikk er viet tre del-kapitler i boka. I disse kapitlene blir først eksempler og ulike problemstillinger presentert, før det blir konkludert hvordan disse løses, og etterfulgt av generelle regler. Dette er lurt i og med at kombinatorikk ikke er noe som har vært pensum tidligere i den aktuelle læreplanen. Læreplanen forteller om at elevene skal kunne behandle ulike kombinatoriske utvalg, og bruke dette til å regne sannsynligheter. I de tre del-kapitlene om kombinatorikk er oppgavene stort sett bare knyttet til kombinatoriske problem i seg selv, og nesten ingen oppgaver handler om å regne ut sannsynligheter. Dette kommer derimot igjen i de to siste del-kapitlene som omhandler henholdsvis hypergeometriske og binomiske sannsynligheter.

Uordnet utvalg uten tilbakelegging er kanskje det viktigste utvalget med tanke på at dette brukes både til å regne ut hypergeometriske og binomiske sannsynligheter. Boka viser hvordan man kan regne ut binomialkoeffisientene først å vise noen eksempler og deretter ved å bruke den vanlige formelen for dette: $\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r-1)}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

(Heir, 2001, s. 195)

I tillegg gis det oppskrift på hvordan disse kan regnes ut ved to typer grafiske kalkulatorer. Pascals trekant er ikke tatt med i denne sammenheng. I og med at boken innleder kapittelet med et avsnitt der Pascals trekant i forbindelse med litt historisk bakgrunn, kan man argumentere for at denne også burde vært nevnt i forbindelse med binomialkoeffisientene. Dermed ville det historiske perspektivet fått en litt mer konkret tilnærming enn bare anekdoten i starten av kapitelet.

For å få en forståelse av hva som ligger bak er det brukt en del eksempler. Blant annet hvor mange bokstavkombinasjoner man kan lage, dersom man trekker ut tre bokstaver fra alfabetet. Boken illustrerer først hvor mange kombinasjoner man kan få med tre bokstaver. Dersom man trekker tre bokstaver kan man få $29\cdot 28\cdot 27$ kombinasjoner. Av tre bokstaver kan man få 6 kombinasjoner, og dersom man ikke tar hensyn til rekkefølgen til bokstavene, konkluderer boken med at man kan få $6x = 29\cdot 28\cdot 27$, og dermed $x = \frac{29\cdot 28\cdot 27}{6} = 3654$.

Formelen for hypergeometriske sannsynligheter i boken er som følger:

$$P(\text{k elementer fra D}) = \frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Boken innleder kapittelet om hypergeometriske sannsynligheter med to eksempler der man trekker elementer fra bare en delmengde. Denne fremstillingen kan være lur med tanke på at det er relativt lett å se at det man her regner ut *gunstige utfall/mulige utfall*. I en presentasjon av hypergeometriske sannsynligheter bør det poengteres at formelen egentlig dreier seg om *gunstige utfall/mulige utfall*.

Boken skriver at for en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell har man generelt:

- *En mengde med n elementer*

- *Elementene kan deles inn i to delmengder, D og $\overline{D}$. Det er m elementer i D og m-n i $\overline{D}$*
- *Vi trekker tilfeldig r elementer fra mengden* (Heir, 2001, s. 198)

Her er det tatt med mange viktige elementer som beskriver modellen. Det blir poengtert at *r* elementer fra *D* kan kombineres med *r-k* elementer fra $\overline{D}$, og disse kan kombineres på $\binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{r-k}$ mulige måter.

Binomiske sannsynligheter blir innledet med et eksempel som viser man må ta hensyn til rekkefølgen når man beregner sannsynligheter, altså at for eksempel gutt, gutt, jente, jente er en annen hendelse en jente, gutt, jente, gutt. Det handler om en søskenflokk på fire, der man skal regne ut sannsynligheten for at søskenflokken består av to gutter og to jenter. Antallet utfall telles opp, uten å bruke binomialkoeffisientene. Neste eksempel har et større antall forsøk, og dermed kommer det fram at det blir for komplisert å telle opp antall forskjellige kombinasjoner. Behovet for binomialkoeffisienter kommer tydelig frem gjennom disse eksemplene. Generelt beskrives formelen på følgende måte:

$P(S \text{ } inntreffer \text{ } k \text{ } ganger) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. (Heir, 2001, s. 202)

Boka gjør rede for en generell situasjon for binomiske forsøk, og nevner fire punkter:

- *Vi gjør n forsøk*
- *I hvert forsøk er det to muligheter. Enten inntreffer en bestemt hendelse S, eller så inntreffer den ikke.*
- *I hvert forsøk er sannsynligheten p for at S skal inntreffe*
- *Forsøkene er uavhengige* (Heir, 2001, s. 202)

Man kan argumentere for at boka burde nevnt at sannsynligheten er 1-p for at S ikke skal inntreffe. Dette kan man uansett konkludere med ut fra de andre punktene, men det ville gjort beskrivelsen av modellen mer fullstendig.

Problemstillinger av typen $P(X \leq k)$ der *X* er binomisk fordelt, gis det i følge boka eksempler på i oppgavesamlingen. Denne typen oppgaver kan kun regnes ut ved hjelp av kalkulator i dette faget, siden normalfordelingen ikke blir presentert og heller ikke er pensum.

6.2.2.3 Sinus 3MX

Sinus 3MX (2002) har to kapitler som inneholder sannsynlighetsregning og statistikk. Det første kalles *Sannsynlighetsfordelinger* og det andre *Normalfordeling og statistikk*. Læreverket består av grunnbok og oppgavesamling. Forlagets nettside har i følge forordet ressurser knyttet til læreverket. Hvert kapittel innledes med litt historisk bakgrunn om temaet som er inneholdt.

Den historiske innledningen i kapittelet nevner noen viktige personer i utviklingen av sannsynlighetsregningen, som Christiaan Huygens, Jakob Bernoulli og Abraham De Moivre. Oversikten presenterer deres respektive verker, men lite konkret om hvilke problemstillinger de tok for seg. Man får vite at Huygens innførte begrepet forventning, og at han drøftet urnemodeller i sin bok *Om beregninger i terningspill*. Det er ingen tall-eksempler eller oppgaver som knyttes til den historiske biten av læreplanen.

Stokastiske variabler forklares ved å definere ordene stokastisk og deterministisk. Tilfeldigheter blir drøftet i denne sammenheng. Et eksempel på stokastisk variabel blir nevnt i forbindelse med et parti lyspærer. To stokastiske variabler blir definert.

X: tallet på defekte lyspærer i et tilfeldig utvalg på totalt 100
Y: Hvor mange timer lyser en tilfeldig lyspære

I forbindelse med disse variablene blir forskjellen på kontinuerlige og endelige (diskrete) variabler forklart. X er en endelig stokastisk variabel, og det forklares ved at utfallsrommet har et endelig antall mulige verdier, og med dette får boka fram poenget med enn kontinuerlig sannsynlighetsmodell på en bra måte. Det som kanskje kunne vært poengtert bedre, er at X er en stokastisk variabel i den forstand at hvis man plukker ut 100 lyspærer flere ganger fra samme parti, vil X være tilfeldig. Det gir ikke mening å snakke om at antall lyspærer er tilfeldig i én konkret prøve på 100 lyspærer. Poenget er nemlig at det er trekningen på 100 lyspærer som er tilfeldig. Boka skriver at Y er en kontinuerlig stokastisk variabel med utfallsrom $\left[0,\rightarrow\right\rangle$. For at Y skal være kontinuerlig må man anta at det ikke dreier seg om hele timer, noe det opprinnelig kan se ut som i teksten.

For å definere hva en endelig sannsynlighetsfordeling er bruker boka begrepet punktsannsynlighet, og sannsynlighetsfordelingen til en binomisk fordeling blir presentert ved å regne ut punktsannsynligheten for hvert utfall. Disse resultatene blir presentert i en tabell. Dette er en grei måte å illustrere en sannsynlighetsfordeling på. Noe boka ikke nevner, er notasjonen med stor bokstav for å beskrive en stokastisk variabel. For eksempel uttrykker boka punktsannsynligheten til X som P(X=x). Boka gjør også rede for kalkulatoroppskrifter på hvordan man kan regne ut sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel som er binomisk fordelt ved hjelp av få tastetrykk.

Forventningsverdi blir forklart ved et eksempel fra et lotteri. Scenarioet er som følger: Hvert tredje lodd gir gevinst. Man kjøper 3 lodd, og da skriver boka at vi forventer å vinne på ett av dem. Deretter setter boka opp sannsynlighetsfordelingen for X: antall gevinster på tre lodd. Ved hjelp av binomisk sannsynlighet blir sannsynligheten for 0,1,2 og 3 gevinster regnet ut. Dermed har boka antatt uavhengighet mellom hver trekning, noe som bare er rimelig hvis totalt antall lodd er høyt. Det kunne vært påpekt. Sannsynlighetsfordelingen for X regnes ut og presenteres som følger:

x	0	1	2	3
P(X=x)	8/27	4/9	2/9	1/27

Videre forklares det at man kjøper tre lodd n ganger der n er et svært høyt tall. Boka skriver at samlet antall gevinster blir $0\cdot\frac{8}{27}\cdot n+1\cdot\frac{4}{9}\cdot n+2\cdot\frac{2}{9}\cdot n+3\cdot\frac{1}{27}\cdot n$. Dette er ikke helt korrekt formulert, uttrykket gir nemlig *forventet* antall gevinster ved kjøp av 3 lodd *n* ganger. Ved å dele på antall ganger, *n*, man kjøper lodd, får man i følge boka gjennomsnittsgevinst hver gang: $0\cdot\frac{8}{27}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{27}=1$. Måten boka regner gjennomsnittsgevinst på hadde vært lik for en n=1. Poenget med å bruke *n*, er trolig prinsippet med store talls lov. Altså at sannsynligheten for at relativ frekvens for antall gevinster ikke vil nærme seg forventet antall gevinster, vil konvergere mot null når $n\rightarrow\infty$. Dette prinsippet kommer ikke klart frem, heller ikke en intuitiv forklaring av det.

Etter eksempelet blir forventningsverdien for en stokastisk variabel med endelig utfallsrom definert: $\mu = E(X) = \sum_{x} x \cdot P(X = x)$ (Oldervoll et al., 2002, s. 262-263)

Et annet eksempel er et lotteri der det også er gevinst på hvert tredje lodd. En fjerdedel av gevinstene har verdi 300 kr., og resten av gevinstene har verdi 20 kr. Boka regner ut forventningsverdi på hvert lodd til å være 30 kr, ved hjelp av formelen over. Dermed konkluderes det med at lotteriarrangøren må ta betalt minimum 30 kr. pr. lodd, for å unngå tap. Her må det også forutsettes at alle loddene blir solgt ut. Dette eksempelet viser bedre hvordan forventningsverdien kan anvendes. Et eksempel av typen rulett kunne vært brukt, fordi da kommer poenget med "gjennomsnitt i det lange løp" eller prinsippet bak store talls lov frem på en bedre måte en det gjør i bokas eksempler.

Varians og standardavvik er et eget delkapittel i kapittel 7. Boka forteller at målet nå er å finne et mål for spredningen i fordelingen. Videre skriver den *"som et mål for avstanden fra forventningsverdien kunne vi bruke* $|x-\mu|$*, men bruker i stedet* $(x-\mu)^2$ *"* (Oldervoll et al., 2002, s. 266)

Boka gir ikke noe grunn for hvorfor de gjør det. En matematisk utledning hadde ikke vært nødvendig, men det kunne vært nevnt at å beregne kvadratene av avviket er hensiktsmessig i forhold til normalfordelingen. Standardavviket blir motivert av boka ved å skrive at det behøves riktig benevning på variansen, og derfor tas kvadratroten av variansen. Kapittelet forklarer ikke nærmere hva varians og standardavvik er i dette kapittelet, og heller ikke hvordan det kan anvendes. Boka har et eget del-kapittel for regneregler for varians og standardavvik. Disse blir først presentert og eksemplifisert ved å lage problemstillinger som leder til forskjellige resultat av typen *Var(X+10)=Var(X)*. Boka bruker mye plass på å bevise en del av disse setningene og er trolig tatt med i forhold til læreplanens Mål 1, som blant annet handler om bevis. Neste del-kapittel handler også om regneregler, nå for stokastiske variabler. Boka gjør blant annet rede for at *Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)* bare hvis *X* og *Y* er uavhengige. Det gjøres ikke rede for hvorfor *X* og *Y* må være uavhengige.

Del-kapitlene 7.4, 7.5 og 7.6 motiverer i all hovedsak bra for regneregler gjennom eksemplene, men fokuset er nokså sterkt på nettopp regneregler. Uansett presenteres en del av begrepene på nytt i det etterfølgende kapittel, der for eksempel varians og standardavvik blir anvendt i forbindelse med konfidensintervall.

Også det siste del-kapittelet i kapittel 7 dreier seg om regneregler, nå for forventing og varians for binomisk fordeling. Her blir forventning utledet ved først å se på et delforsøk, der man ser på hvor mange ganger en hendelse inntreffer. I et binomisk forsøk kan hendelsen inntreffe enten 0 eller 1 gang i hvert delforsøk. Ut fra dette bruker boken regnereglene for forventning og finner *E(X)=p* i et delforsøk. I tillegg skriver boken at *E(X2)=p*. Ut fra dette konkluderes det med at

$E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X_n)=p$ og
$VAR(X_1)=Var(X_2)=\ldots=Var(X_n)=p(1-p)$ (Oldervoll et al., 2002, s. 280)

Videre bruker boken regneregler og finner:

$E(X)=E(X_1+X_2+\ldots+X_n)= E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)=p+p+\ldots+p=np$ (Oldervoll et al., 2002, s. 281)

og siden variablene er uavhengige er

$Var(X)=Var(X_1)+Var(X_2)+\ldots+Var(X_n)= p(1\text{-}p)+ p(1\text{-}p)+\ldots+ p(1\text{-}p)=np(1\text{-}p)$ (Oldervoll et al., 2002, s. 281)

Deretter konkluderes det med at forventningsverdi og varians til en binomisk fordelt X

$\mu=E(X)=np$
$Var(X)=np(1\text{-}p)$ (Oldervoll et al., 2002, s. 281)

Boken har gjennom eksempelet som leder frem til resultatet ovenfor brukt samme notasjon for antallet ganger en hendelse inntreffer totalt i et binomisk delforsøk, og antallet ganger hendelsen inntreffer i et delforsøk, nemlig X. Dette er uheldig, og kan virke forvirrende. Selv om det er poengtert i teksten burde disse vært skilt ved notasjon. Boken har heller ikke presentert en binomisk sannsynlighetsfordeling. Det kunne vært lurt i forhold til den intuitive forståelsen, og man kunne brukt følgende definisjon til å regne ut forventingen i tillegg $\mu = E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$.

Et eksempel boken bruker er at det har vært valg og i en by stemte 15 % Krf. Man spør 100 personer i denne byen om hva de stemte, og lar X være antall personer som stemte Krf. I løsningen av denne oppgaven påpeker boken at det antas at X er binomisk fordelt. Etter å ha spurt en person, vil sannsynligheten forandre seg litt for at den neste skal ha stemt Krf eller ikke. For eksempel hvis byen har 1000 innbyggere som har vil 150 av dem ha stemt Krf. I utgangspunktet er altså sannsynligheten for at den første personen som spørres har stemt Krf 0,15. Men når den andre personen skal spørres er det 999 innbyggere å velge mellom og 149 av som har stemt Krf, siden 1 av de som stemte allerede er blitt spurt og stemte Krf. Dermed blir sannsynligheten for at den andre personen som spørres stemte Krf, gitt at den første som ble spurt stemte Krf, 149/999=0,149. Delforsøkene er altså ikke uavhengige. Dersom byen har et høyt antall innbyggere som har stemt, vil ikke denne sannsynligheten forandres mye for hver person som spørres, og man kan dermed anta uavhengighet mellom delforsøkene. Dette burde boken gjort rede for.

Første del-kapittel i kapittel 8 kalles *Normalfordelingen*. Det introduseres ved å framstille en binomisk fordeling i et histogram, som får en klar klokkeform. Videre presenterer boken tetthetsfunksjonen $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, som de skriver passer godt med histogrammet. Dette er en litt uheldig introduksjon til normalfordeling. Sentralgrensesetningen er ikke presentert foreløpig, og en introduksjon til en normalfordeling burde ta for seg fordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel. Her burde det vært brukt en fordeling som kunne vært delt opp i mindre og mindre intervaller, som til slutt bare ble til punkter eller elementærhendelser. Dette hadde trolig gitt et mer riktig bilde, og en presentasjon av tetthetsfunksjonen kunne vært mer naturlig. Den kommer, og boken forteller med at Abraham De Moivre fant at den følgende tetthetsfunksjonen passet best til et histogram som viser binomisk fordeling.

$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Dette medfører ikke riktighet. Karl Pearson (1857-1936) var den første skrev tetthetsfunksjonen for normalfordelingen uttrykt ved σ. Fremstillingen i boken kan sies å ligne på problemstillingen til De Moivre for å motivere for en tetthetsfunksjon. Boken påpeker uansett at fordelingen det dreier seg om er tilnærmet normalfordelt.

For å finne sannsynligheter ut fra normalfordelinger bruker boken tetthetsfunksjonen og utregninger av bestemte integral i forhold til dette. Ettersom det ikke er lett å finne det ubestemte integralet for funksjonen, forutsetter boken grafisk kalkulator for å finne de bestemte integralene. I forbindelse med dette kommer boken frem til tre punkt for hvordan man kan regne ut sannsynligheten:

- $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$
- $P(X < a) = \frac{1}{2} + \int_\mu^a f(x)dx$
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$

der μ er definert som *np*, altså forventingen til en binomisk fordeling. Disse punktene går på det regnetekniske og er tatt med for å unngå å bruke ∞ eller $-\infty$ som integrasjonsgrenser.

Boken går også inn på et eksempel med høyden til rekrutter. Dette kunne kanskje heller vært brukt for å innlede normalfordelingen, siden dette er en kontinuerlig fordeling. I forbindelse med dette eksempelet drøfter også boken sannsynligheten for at en rekrutt er nøyaktig 178 cm. høy. Ved å integrere med integrasjonsgrenser på 178 og 178, er selvsagt svaret null. Boken mener dette er rimelig, siden en rekrutt alltid vil være noen tusendels millimeter høyere eller lavere. Det er ikke gitt noen betraktinger omkring det å kunne måle høyder nøyaktig, eller det at antall utfall for høyder er uendelig mange. Boken regner så ut sannsynligheten for at en rekrutt er 178 cm., ved å se på intervallet 177,5cm.-178,5cm. Her får man en tilnærming til at en rekrutt er 178 cm, ved et definert intervall, og i så måte kommer poenget frem med at punktsannsynligheten blir null.

Når boken introduserer normalfordelingstabellen, tar den utgangspunkt i tetthetsfunksjonen. Det blir utledet hvordan man kan standardisere en hvilken som helst normalfordeling, men begrepet standard normalfordeling er ikke nevnt. Utledningen tar utgangspunkt i normalfordelingsfunksjonen og vil finne $P(X < \mu + z\sigma) = \int_{-\infty}^{\mu+z\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$. Ved hjelp av en del utregninger, kommer boka etter hvert frem til $P(X < a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$, der $z = \frac{a-\mu}{\sigma}$.

Hvor nyttige disse utregningene er i forhold til sannsynlighetsteori kan diskuteres. Fokuset er sterkt på utledningen, som trolig gir mer forståelse i integrasjon enn sannsynlighetsteori, mens blant annet egenskapene til en standard normalfordeling, μ=0 og σ=1, ikke er nevnt. Boka har en illustrasjon av en normalfordeling, men det kunne trolig vært fordelaktig å ha to illustrasjoner, en hvilken som helst normalfordeling og en standardisert normalfordeling.

Estimering av forventningsverdi og standardavvik blir presentert i et del-kapittel som blir kalt gjennomsnitt og empirisk standardavvik. Boken gjør først rede for at μ og σ er modellparametere, men at man ikke alltid kjenner disse, og at man derfor estimerer disse. Boken bruker et eksempel der man gjennomfører en stikkprøve der man ser på den stokastiske variabelen *X: Vekten av en tilfeldig valgt sild*. For å estimere forventningsverdi gjør boken som følger:

Det fanges *n* sild. *Y* er summen av vektene til sildene som blir fanget, mens $X_1, X_2, \ldots X_n$ er vekten av hver enkelt sild. $\overline{X} = \frac{Y}{n}$. Videre argumenteres det for at hvis prøvebestanden er representativ for hele populasjonen, er $\mu = E(X_i)$, og dermed $E(Y) = n \cdot \mu$. Videre er

E($\overline{X}$)= $E\left(\frac{1}{n}\cdot Y\right)=\frac{1}{n}\cdot E(Y)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu$ =μ.

Problemet med denne fremstillingen er hovedsakelig notasjonen. Eksempelet som introduserer estimering, handler om å gjennomføre prøvefiske i en sildepopulasjon. I sildepopulasjonen kjenner man ikke μ, og det påpekes at $\overline{X}$ er forventningsrett estimator for µ. Videre påpekes det at $\overline{X}$ er en stokastisk variabel, noe som er et viktig poeng, men det kunne med fordel vært utdypet at den er stokastisk i forhold til at hver stikkprøve er en tilfeldig trekning av fisk.

Sentralgrensesetningen blir presentert gjennom et eksempel. Her er det høydene til 96 gutter på en skole som er tema. Det blir tatt stikkprøve med 20 gutter i hver stikkprøve, først 50 prøver og deretter 250 prøver, der resultatene fra begge disse blir presentert i et histogram. Boken formulerer sentralgrensesetningen i en spesiell form på følgende måte:

"La X være en stokastisk variabel som er knyttet til elementene i en stor populasjon. La $\overline{X}$ *være gjennomsnittet til X i en stikkprøve med n elementer fra denne populasjonen. Da er* $\overline{X}$ *tilnærmet normalfordelt. Tilnærmingen er best når n er stor. Hvis X har forventningsverdien µ og standardavviket σ, har* $\overline{X}$ *forventningsverdien* $\mu_{\bar{x}}=\mu$ *og standardavviket* $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *."*

(Oldervoll et al., 2002, s. 314)

Med tanke på formuleringen med at tilnærmingen er best når *n* er stor blir ikke tydelig illustrert ved eksemplene nevnt over. Det kunne vært hensiktsmessig, å illustrere dette tydeligere. Det kunne kanskje vært poengtert bedre at det dreier seg om alle mulige følger av X. Poenget er at det er flest kombinasjoner av stokastiske følger som gir gjennomsnitt lik forventningsverdien, mens det blir færre og færre kombinasjoner av stokastiske følger dess større forskjellen mellom gjennomsnitt og forventning blir.

Bokens forklaring av konfidensintervall for ukjent μ, er svært detaljert. Utledningen foregår ved først å betrakte $P(\mu\text{-}h<\overline{X}<\mu+h)$. Her gjelder det å finne en h slik at

$P(\mu\text{-}h<\overline{X}<\mu+h)$=0.95. Normalfordelingskurven blir betraktet, der et intervall med areal 0,95 om µ er illustrert. Videre fortelles det at h= $z\sigma_{\bar{x}}$, og ved å betrakte P(X<µ + $z\sigma_{\bar{x}}$)=1-0,05/2=0.975. Det er ikke helt tydelig hvordan boken går direkte fra P(X<µ + $z\sigma_{\bar{x}}$)=0,975 til Φ(z)=0,975 i dette tilfellet men det er vist tidligere i kapitelet der det står at $z=\frac{a-\mu}{\sigma}$ og P(X<a)=Φ(z). Ved å benytte a= µ + $z\sigma_{\bar{x}}$ vil man få P(X<µ + $z\sigma_{\bar{x}}$)=Φ(z). Ved hjelp av normalfordelingstabellen finnes z=1,96. For å finne et konfidensintervall for μ, betraktes ulikhetene

$\bar{x}>\mu-h\Leftrightarrow\bar{x}+h>\mu\Leftrightarrow\mu<\bar{x}+h$ og
$\bar{x}<\mu+h\Leftrightarrow\bar{x}-h<\mu\Leftrightarrow\mu>\bar{x}-h$

Ved hjelp av dette, tolker boken at dersom en tar flere stikkprøver er sannsynligheten 0,95 for at et konfidensintervall for ulike $\bar{x}$ vil inneholde μ. Her får boken fram et viktig poeng, nemlig at det er intervallene som er stokastiske, ikke μ.

Når en binomisk fordeling skal tilnærmes normalfordeling, fokuserer boken hovedsakelig på hvordan en skal regne ut sannsynligheter av typen *P(a<X<b)*. At man faktisk kan tilnærme en binomisk fordeling til normalfordeling, er bare nevnt, men det er ikke gjort noen betraktninger omkring hvorfor det kan gjøres, og sentralgrensesetningen er ikke nevnt. I det første del-kapittelet er det som nevnt et eksempel som viser at en binomisk fordeling blir tilnærmet normalfordelt ved tilstrekkelig antall forsøk, men dette burde også vært gjort rede for i del-kapittel 8.7. Alt i alt kan man kanskje si at boken har med det som trengs av opplysninger for å kunne tilnærme en binomisk fordeling til en normalfordeling, men det er gjort på en uoversiktlig måte, som trolig vil kunne virke litt forvirrende.

Boken forklarer også estimering av en andel *p*, i en binomisk fordeling. I innledningen gjøres det rede for hvordan man anslår *p*, altså $\frac{X}{n}$, der X er antall ganger den gunstige hendelsen inntreffer i et binomisk forsøk. Boka fastslår at $\hat{p} = \frac{X}{n}$, der $\hat{p}$ er en estimator for *p* med forventningsverdi *p* og standardavvik $\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$. Når *p* er ukjent, forklarer boken at man må bruke standardfeilen $S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$, i stedet for standardavviket, og at man dermed får et tilnærmet riktig konfidensintervall. Når boken i et eget avsnitt oppsummerer situasjonen, påpekes det at denne tilnærmingen er god viss $n \cdot \hat{p} > 10$ og $n \cdot (1-\hat{p}) > 10$. Videre følger en del eksempel på hvordan man regner ut tilnærmede konfidensintervaller for *p*. Disse eksemplene er forholdsvis greie, men betydningen av konfidensintervallene kunne vært drøftet bedre. Selv om boken som nevnt ovenfor, har gjort rede for at det er konfidensintervallet som er stokastisk, kunne dette igjen vært drøftet fordi det kan være vanskelig å forstå betydningen av det.
For å oppsummere bokens fremstilling av statistikk og sannsynlighet, kan man si at det er nokså stort fokus på utledninger. Mange av disse kan være bra og lede til forståelse. Problemet kan være at de kan være litt vanskelige og at det kan ha vært for omfattende for elever på dette nivået.

6.2.3 K06

6.2.3.1 Sinus 1T

Boka Sinus 1T (Oldervoll, 2009) er en kombinert teori- og oppgavebok. Teorien blir presentert og etterfulgt av noen få oppgaver. Bak i boken er det en egen del, med bare oppgaver. Disse er nivådifferensiert, der kategori 1 er for elever som sliter med faget og kategori 2 er tiltenkt den jevne eleven. Den 3. kategorien heter blandede oppgaver. I de to første kategoriene er oppgavene delt inn i del-kapitler tilsvarende del-kapitlene i teoridelen, mens i kategorien som kalles blandede oppgaver er det ikke en slik inndeling (Oldervoll, 2009, s. 3). Dette gir disse oppgavene en ekstra dimensjon, i og med at elevene må selv finne ut av fremgangsmåte, i motsetning til de andre to kategoriene der elevene vet når det for eksempel er snakk om produktsetning, addisjonssetning etc. Boken er ellers preget av lite rene tekstavsnitt, men mye eksempler.

Boken innleder med et del-kapittel om forsøk og simuleringer. Her blir blant annet begrepene *utfall* og *utfallsrom* forklart. Dette skal være repetisjon fra ungdomskolen ifølge læreplanen. I det første eksempelet handler det om myntkast. Boken har en tabell der antall mynt og krone blir registret for *10, 100, 1000, 10000* og *100000* kast. Relativ frekvens blir regnet ut og den nærmer seg *0,5* ettersom antall observasjoner øker. Dette er et bra eksempel, for det kommer tydelig frem at relativ frekvens nærmer seg sannsynligheten for utfallene, når antall observasjoner øker. Dette påpeker boken, og gir en definisjon av Store talls lov, uten å påpeke at det er den det er snakk om: *"Hvis vi gjør et forsøk mange ganger, vil den andelen av forsøkene som gir et bestemt utfall, nærme seg sannsynligheten for utfallet."* (Oldervoll, 2009, s. 238) Dette er en grei og intuitiv definisjon av Store talls lov på dette nivået. Videre bruker boken denne kunnskapen til å finne sannsynligheten for at en tegnestift skal lande med spissen opp, dersom den blir kastet. På *10000* kast er relativ frekvens *0,538* og boken runder dette av til *0,54*. Denne avrundingen kommer av at boken opererer med en grov regel, som sier at 100^n observasjoner, gir n riktige desimaler i relativ frekvens sammenlignet med den riktige sannsynligheten. Dette kan være en grei hovedregel, men dersom man tar eksempelet med myntkast og tar bokens tabell på side *238* som utgangspunkt, vil relativ frekvens for kron være *0,57* og dermed vil relativ frekvens for mynt være *0,43* etter *100* kast. For *10000* kast eller 100^2 kast vil relativ frekvens være hhv. *0,4944* og *0,5056* i følge tabellen i boka. Med to desimaler blir dermed relativ frekvens *0,49* og *0,51*. På både *100* og *10000* kast slår denne grovregelen sprekker, og man kan dermed diskutere verdien av den, spesielt dersom elevene er kjent med det intuitive prinsippet bak store talls lov. Mye av teorien som tas opp i det første del-kapittelet er repetisjon fra ungdomskolen, men relatert til læreplanmålene tar dette kapittelet i hovedsak for seg det å *eksperimentere med enkle uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller*, som er nevnt i det første målet.

Et eksempel på dette finner man igjen i oppgave 9,113. Oppgaven lyder:

"Et ektepar har to barn. Vi skal finne sannsynligheten for at begge er gutter. Bruk to mynter og kast dem samtidig. Dersom begge myntene viser krone, sier vi at begge barna er gutter.

a) *Kast myntene 100 ganger og tell opp hvor mange ganger myntene viser krone.*
b) *Finn på denne måten sannsynligheten for at ekteparet har to gutter."*

(Oldervoll, 2009, s. 380)

Teoretisk sannsynlighet for to gutter er *0,5*0,5=0,25* dersom man antar en uniform modell, eller *0.514*0,514=0,264* dersom man legger til grunn bokens observasjoner og utregning av relativ frekvens på side 243. Relativ frekvens for to krone vil etter hvert nærme seg *0,25* som også ligger nærme *0,264* Forsøket kan være illustrerende, men relativ frekvens vil likevel ikke nødvendigvis nærme seg klart til *0,25* siden det bare er *100* observasjoner.

Det neste del-kapittelet tar for seg uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller. Dette er direkte relatert til det første målet i læreplanen. Her skal elevene *formulere, drøfte og eksperimentere med* disse modellene. Boken definerer først sannsynlighetsmodell:

> *"1. Sannsynligheten for hvert utfall er et tall mellom 1 og 0*
>
> *2. Summen av sannsynlighetene for alle de mulige utfallene er 1"*

(Oldervoll, 2009, s. 241)

Denne definisjonen gjelder bare for diskrete sannsynlighetsfordelinger, siden det ut fra definisjonen ikke ser ut til at et utfall kan ha sannsynlighet 0, noe det kan ha i kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger.

Deretter defineres en uniform sannsynlighetsmodell:

> "*Hvis alle mulige utfall i et forsøk er like sannsynlige er*
>
> *P(et utfall)=1/antall mulige utfall*"

(Oldervoll, 2009, s. 241)

Av begrepene i læreplanen er det *å formulere* som boken har mest fokus på. Denne tolkningen av disse begrepene kan eksemplifiseres med oppgave 9.121.

Det ligger *3* blå, *4* røde og *5* gule terninger i en krukke. Dersom det trekkes en terning er spørsmålet hva som er sannsynligheten for å trekke de forskjellige fargene. Her kan man si at elevene må elevene formulere en sannsynlighetsmodell, *P(Blå), P(Gul)* og *P(Rød).*

Neste mål i læreplanen tar for seg systematiske oppstillinger. Boken presenterer tre forskjellige typer oppstillinger. Venn-diagram og toveis-tabeller brukes til å regne med addisjonssetningen, der Venn-diagram er viet størst plass. Valgtre brukes i forbindelse med produktsetningen. Ved hjelp av disse skal elevene *beregne* sannsynligheter. Komplementære hendelser blir presentert i sammenheng med introduksjon av venn-diagram og boken bruker argumentet med at summen av *P(A)* og *P(ikke A)* må være *1* for at det skal være en gyldig sannsynlighetsmodell som definert tidligere. Boken definerer to addisjonssetninger, nemlig $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$ og $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$ der boka kaller førstnevnte *addisjonssetningen*. Den andre har ikke fått noe "navn". Ofte er det vanlig å kalle sistnevnte setning for *addisjonssetningen* eller *den generelle addisjonssetningen*, mens førstnevnte ofte blir kalt *addisjonssetningen for disjunkte hendelser*. Siden boka presenterer setningen $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$ først, kan det virke som denne er den mest generelle. Løvås (2004, s. 77) mener imidlertid det er motsatt, noe som er fornuftig i og med at setningene er like når $P(A \bigcap B)$ =0, eller når *A* og *B* er disjunkte.

Videre introduserer boken betinget sannsynlighet, produktsetningen og uavhengige hendelser i den rekkefølgen. Det kan diskuteres i hvilken rekkefølge dette bør presenteres i, dersom man skal ta hensyn til stigende vanskelighetsgrad, som boken har gjort. Boken gjør rede for produktsetningen for uavhengige hendelser, ved hjelp av det som blir kalt produktsetningen og som før har blitt anvendt for å finne betingede sannsynligheter. Ut fra dette kan det virke som boken mener produktsetningen for uavhengige hendelser er et spesialtilfelle det de kaller produktsetningen og som ser slik ut: $P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. Det første eksempelet fra boken i forbindelse med uavhengige hendelser lyder:

"Vi trekker kort fra en vanlig kortstokk og definerer hendingene

> *A: Kortet er spar*
> *B: Kortet er honnørkort*

Vis at A og B er uavhengige hendelser."

(Oldervoll, 2009, s. 262)

Dette løser boken ved å regne ut *P(A)* og *P(A|B).* Siden disse er like konkluderes det med at *A* og *B* er uavhengige. Dette er for øvrig en problemstilling som ikke er ulik det nevnte korteksempelet til Abraham De Moivre.

Oppgavene i boken legger hovedsakelig vekt på å regne med produktsetningen for uavhengige hendelser og regelen for betinget sannsynlighet, noe som er i tråd med læreplanens mål om å *bruke begrepene i enkle situasjoner.* I kategori 1 og 2 er det åpenbart hva som er uavhengige hendelser ettersom oppgavene som nevnt er delt inn under del-kapitler. I blandede oppgaver er det også mange oppgaver som forteller om en situasjon er uavhengig eller ikke. De som ikke forteller om dette, vil kreve at eleven selv kategoriserer hendelsen.

Oppgave 9.316 c og d er eksempler på dette. Bakgrunnen for oppgaven er at Per har kjøpt 3 gule, 6 røde og 9 grønne epler som han har lagt i en bolle. I oppgave c skal hen trekke et tilfeldig eple opp av bollen, legge det tilbake og trekke et nytt. Spørsmålet er da hva sannsynligheten er for at begge eplene er grønne. Her må det defineres to hendelser.

A: det første eple er grønt
B: det andre eple er grønt

Siden Per legger tilbake det første eple, vil andre trekning være uavhengig av den første. Det vil si at produktsetningen for uavhengige hendelser må brukes, og man kan regne seg frem til svaret: $P(A \cap B) = \frac{9}{18} \cdot \frac{9}{18} = \frac{1}{4}$

I oppgave d skal vi finne sannsynligheten for at begge eplene er grønne uten å legge tilbake det første eple vi trakk. Nå må eleven regne ut hendelsen $P(A \cap B)$. Som i det første eksempelet er *P(A)=* $\frac{9}{18}$. Det at et grønt eple blir trukket ut, påvirker sannsynligheten for at det neste skal bli trukket ut. Altså; viss A har inntruffet, er det igjen 8 grønne epler av totalt 17 i bollen. Dermed er $P(A \cap B) = \frac{9}{18} \cdot \frac{8}{17} = \frac{4}{17}$. Denne oppgaven krever en fortolkning av situasjonen, og at eleven selv definerer de aktuelle hendelsene. Ettersom denne oppgaven også står i kategorien blandede oppgaver, vil det ikke være noen åpenbar fremgangsmåte for elever som ikke kan skille mellom situasjonene; c) betinget sannsynlighet og d) uavhengighet.

De to siste del-kapitlene tar for seg ordnede og uordnede utvalg, og binomiske forsøk. Uordnede utvalg er nødvendig for å kunne bruke formelen for binomiske forsøk, og det vil derfor være vanskelig å utelate dette, selv om det ikke er nevnt i læreplanen. Boken definerer uordnede utvalg:

"Vi har n gjenstander og skal velge ut k av dem. Dette kan vi gjøre på $\binom{n}{k}$ *forskjellige måter når rekkefølgen vi velger i, ikke har betydning. "*

(Oldervoll, 2009, s. 268)

Boken har utelatt matematiske betraktninger rundt dette, som for eksempel å bruke $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, og heller ikke Pascals trekant er nevnt som en måte å finne binomialkoeffisientene på. Utregningen av binomialkoeffisientene blir presentert gjennom eksempler, og en forklaring boken gir er for eksempel utregning av $\binom{8}{3}$. Da gjøres følgende:

$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$. Deretter påpeker boken at man begynner med 8 i teller, og har tre tall i både teller og nevner. Denne utregningen står i forbindelse med utvelgelse av en komité på tre, som velges ut av totalt 8. Boka multipliserer $8 \cdot 7 \cdot 6$ for å finne antall komitéer og forklarer videre at en komité bestående av person *A, B, C*. En trekning der *A, B* og *C* blir trukket i den rekkefølgen vil gi samme komité som hvis *B, C, A* blir trukket. *A, B, C* kan trekkes på $3 \cdot 2 \cdot 1$ måter, og dermed må $8 \cdot 7 \cdot 6$ divideres på $3 \cdot 2 \cdot 1$. Denne forklaringen er essensiell, spesielt for forståelsen av binomiske forsøk.

Boken definerer et binomisk forsøk:

> *"I et binomisk forsøk gjør vi n uavhengige delforsøk og ser hver gang om en hending A inntreffer eller ikke. I hvert delforsøk er sannsynligheten for hendingen A lik p. Sannsynligheten for at A inntreffer nøyaktig k ganger er gitt ved:* $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ *"*
> (Oldervoll, 2009, s. 271)

Denne definisjonen er god og beskrivende. Den inneholder de tre hovedkravene for at et forsøk skal være binomisk, nemlig at del-forsøkene er uavhengige, enten inntreffer *A* eller så inntreffer ikke *A*, og sannsynligheten for *A* er i hvert utfall lik *p*. I tillegg påpekes det at ved hjelp av den oppgitte formelen regner man ut sannsynligheten for at *A* inntreffer nøyaktig k ganger. Det er mulig å påpeke at denne definisjonen ikke sier at sannsynligheten for at *A* ikke inntreffer er *1-p*. Ut fra definisjonen er det likevel klart at det er sånn, men det er ikke sikkert elever som leser definisjonen klarer å slutte dette på egen hånd. Bernoullis definisjon (Hundeland, 1996, s. 20) kan kanskje være enda mer beskrivende i så måte i og med at han forklarer at det er $\binom{n}{m}$ måter å oppnå *m* suksesser og *n-m* fiaskoer på. Oppgavene i forbindelse med binomiske forsøk er varierte med tanke på tema. Det finnes oppgaver med terning, men det er ingen tema som dominerer. At temaene er varierte kan ha sine fordeler. Man kan tenke seg at oppgaver med terningkast kan pugges prosedyrisk, det vil si at oppgaver med terningkast kan bli så innarbeidet at det kun krever å huske hva som skal settes inn i en formel. Ved ulike oppgaver må hver enkelt situasjon tolkes, som kan skape en bedre forståelse. Blant annet har boken tatt med en oppgave der temaet er valg.

"Det har nettopp vært valg, og 20 % av velgerne har stemt på Høyre. Vi velger tilfeldig 500 personer som har stemt ved valget. La X være tallet på høyrevelgere blant dem.
a) Finn P(X=100)
b) Finn P(X≤110)
c) Finn P(X>110)
d) Finn P(X≥90)
e) Finn P(90≤X≤110)"

(Oldervoll, 2009, s. 273)

Denne oppgaven kan løses ved hjelp av normaltilnærming, altså ved hjelp av $P(X \le x) \approx \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, og tabell med der $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ er oppgitt. Dette er ikke pensum, mens bokens tilnærming til denne oppgaven baserer seg på løsning ved hjelp av kalkulator. Hensikten med denne oppgaven kan diskuteres, i og med at normaltilnærmingen til X når X er binomisk fordelt ikke er pensum. Det er trolig at bokens grunn for å ta med denne typen oppgaver er integrering av digitale hjelpemidler i matematikken, som jo er et overordnet mål.

Ved hjelp av en kalkulatoroppskrift som boken gir, er det nemlig mulig å regne ut $P(X \le x)$ når X er binomisk fordelt. Det finnes derimot ingen oppskrift på å regne ut $P(X > x)$, som er problemet i oppgave c). Her må kunnskaper om komplementære hendelser tas i bruk, og ettersom $X \le 110$ og $X > 110$ er komplementære hendelser, vil det være mulig for elevene å finne ut av både b) og c). Dersom hensikten er integrering av digital kompetanse, kunne det vært hensiktsmessig og også bruke dataprogram i forbindelse med oppgaven. Blant annet har Microsoft Excel har en egen funksjon for å løse problemstillinger både av typen $P(X \le x)$ og $P(X = x)$.

6.2.3.2 Sinus R1

R1 bygger på 1T i læreplanen, og følgelig bygger da også boken Sinus R1 på boken Sinus 1T. I forordet til boken forklares det at det legges vekt på den abstrakte matematikken. Boken er bygd opp ved at forskjellige emner er delt inn i forskjellige kapitler, som igjen er delt inn i del-kapitler. Til hvert del-kapittel er det oppgaver som kan løses ved hjelp av teorien i del-kapittelet. Det finnes i tillegg en oppgavesamling, coSinus R1, som har nivådifferensierte oppgaver.

Det første del-kapittelet dreier seg om betinget sannsynlighet. Denne delen minner mye om tilsvarende del-emne i 1T. Oppgavene og eksemplene ligner, men Sinus R1 har et bevis for setningen $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, som egentlig bare bygger på definisjonen av sannsynlighet; $\dfrac{\text{gunstige antall utfall}}{\text{mulige antall utfall}}$.

Boken inneholder også et del-kapittel som kalles total sannsynlighet. Læreplanen omtaler ikke dette begrepet, men det har sterk tilknytting til betinget sannsynlighet. Setningen boken bruker er $P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$. Denne setningen blir bevist, basert på definisjon betinget sannsynlighet som ovenfor. Setningen tar i boken utgangspunkt i et utfallsrom med to disjunkte hendelser, nemlig $A \; og \; \overline{A}$. Hendelsen B er også inneholdt i utfallsrommet $A \cup \overline{A}$.

Bayes' setning blir introdusert ved å betrakte setningen om betinget sannsynlighet, $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Siden $P(A \mid B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)}$ og $P(B \cap A) = P(A \cap B)$ bruker boken algebra til å finne formelen $P(B \mid A) = \dfrac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$, som er Bayes' setning. Dette er bokens utledning av Bayes' setning, som også er et mål i læreplanen. Det er ingen nærmere betraktinger om hva som ligger bak denne formelen, men boken påpeker at Thomas Bayes (1702-1761) er mannen bak setningen. Hva som er logikken i selve setningen kommer ikke klart frem av denne utledningen, ettersom den kun bygger på omforming av andre setninger. Setningen blir anvendt på forskjellige problemstillinger i eksempler og oppgaver. De største utfordringene i oppgavene er som oftest å definere hendelser. Den første oppgaven 3.30 er for eksempel:

"Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person har sykdom A, er 0,04. Sannsynligheten for at en person har sykdom B, er 0,05. Sannsynligheten for at en person som har sykdom B også har sykdom A, er 0,20.

a) Finn sannsynligheten for at en person som har sykdom A, også har sykdom B.
b) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person har begge sykdommene."

(Oldervoll, 2007, s. 88)

Problemet ligger hovedsakelig i å modellere oppgaven, eller definere en sannsynlighetsmodell. Man har nemlig to hendelser, sykdom A og sykdom B. Dette kan defineres som henholdsvis hendelse *A* og *B*. Sannsynligheten for at en person som har sykdom *B*, også har sykdom *A*, er tilfellet *P(A|B).* Oppgave a dreier seg om å finne ut *P(B|A)*. Når dette er definert handler det om å sette inn i formelen og regne ut. Noen oppgaver kan sies å ha litt høyere vanskelighetsgrad, der det ikke er så klart hvordan hendelsene kan defineres. I oppgave 3,30 er det flere opplysninger som gjør at hendelsene ikke er like lett å identifisere.

Uavhengige hendelser er også et del-kapittel i Sinus R1. Som i Sinus 1T blir uavhengige hendelser presentert etter betinget sannsynlighet. I følge læreplanen skal elevene *gjøre rede for* begrepet uavhengige hendelser i R1, mens de i 1T skulle *bruke* begrepet i enkle situasjoner. Sinus R1 går lite utover 1T i så måte og hvordan forfatterne tolker forskjellen på å *gjøre rede for* og *bruke* begrepet uavhengighet kommer ikke klart frem av presentasjoner i disse bøkene. En liten forskjell er at boken bruker Bayes' setning for å argumentere for uavhengige hendelser. Når *P(A|B)=P(A)* vil Bayes' setning gi $P(B \mid A) = \dfrac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$.

Denne sammenhengen vil trolig ikke gi noen bedre forståelse av uavhengighet. Boken forklarer:

"At hendingene er uavhengige er det samme som at $P(A) = P(A \mid B)$. *Etter Bayes'-setningen er det det samme som at* $P(B \mid A) = \dfrac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)} = \dfrac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$. *Dermed er også* $P(B \mid A) = P(B)$. *"*. (Oldervoll, 2007, s. 90)

Dette synes å være unødvendig. Siden *A* blir definert til å være uavhengig av B, sluttes det at $P(A) = P(A \mid B)$. B er også definert til å være uavhengig så, dermed kunne man trolig sluttet at $P(B \mid A) = P(B)$, uten å gå veien om Bayes' setning.

Etter kapittelet om uavhengige hendelser, går boka over til en utvidelse av kombinatorikk. I Sinus 1T ble uordnede og ordnende utvalg uten tilbakelegging presentert, noe som også presenteres i Sinus R1. I tillegg presenteres også ordnede utvalg med tilbakelegging. Fremstillingen i Sinus R1 er nokså lik fremstillingen i 1T, både med tekst og eksempler. Sinus R1 inneholder et bevis for hvordan man kan finne antall uordnede utvalg. Dette beviset er en forklaring på hvordan man finner uordnede utvalg, og minner veldig om forklaringen i talleksemplene.

Også binomiske forsøk blir presentert på nokså lik måte i Sinus R1 som i Sinus 1T. Både oppgavetyper og eksempler er av samme type, og også Sinus R1 inneholder oppskrifter på hvordan man kan regne ut binomiske sannsynligheter av typen $P(X \leq x)$ og $P(X = x)$, når *n* er for stor til å regne ut binomialkoeffisienter ved hjelp av for eksempel RUN-menyen på en grafisk Casio-kalkulator. I definisjonen til Sinus R1 ser formelen dessuten ut som følger:

$P(X=x)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$. Dette er egentlig definisjonen til en binomisk fordeling, men dette begrepet blir ikke nevnt i boka.

Hypergeometriske forsøk blir også tatt opp i Sinus R1. Dette står ikke eksplisitt i læreplanen, men står i sammenheng med at kombinatorikk skal benyttes for å beregne sannsynligheter. Boken forklarer at hypergeometriske forsøk har en del typiske trekk; *"Vi har n gjenstander av to eller flere typer. Vi trekker tilfeldig k av gjenstandene og teller hvor mange vi får av hver type. Slike forsøk kaller vi hypergeometriske forsøk"(Oldervoll, 2007, s. 110)* Selv om boken poengterer at vi kan ha to eller flere typer presenteres følgende formel: $\dfrac{\binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$. I forbindelse med formelen kunne det vært hensiktsmessig å poengtere at $n_1+n_2=n$ og $k_1+k_2=k$. Formelen kan også brukes dersom det finnes flere enn to gjenstander. Dette kunne med fordel kanskje vært poengtert i formelen, men samtidig gir boken et eksempel som viser at formelen kan anvendes på tre hendelser.

6.2.3.3 Matematikk S2

Matematikk er i følge forordet en alt-i-ett lærebok, med både teori, eksempler og oppgaver. I hvert kapittel finner man det boken kaller innlæringsoppgaver løpende i kapittelet, og det finnes i tillegg en oppgavesamling bak i boka, som også er inndelt etter del-kapitler. I denne oppgavesamlingen finnes det også en del oppgaver som har blitt gitt ved tidligere eksamener. Det blir påpekt i forordet at det er plassert bilder underveis som kan være med og "*utdype teksten å knytte stoffet til samfunn og kultur. Vi oppfordrer til aktiv bruk av bildene"*(Heir, 2008, s. 4). En del av bildene er konkret knyttet til oppgaver og eksempler i boken. Det kan argumenteres for at eksemplene motiverer bildene og ikke omvendt, og det kan diskuteres hvilken mening forfatterne har med aktiv bruk av disse. Boken inneholder en del relativt lange tekstavsnitt, med forklaringer av aktuelle tema, som gir en del gode resonnementer omkring de ulike temaene. Likevel kan disse kanskje virke litt tunge å lese. Mengden av tekst går ikke nødvendigvis utover mengden på eksempler, som kan virke å være stort sett tilstrekkelig. Boken gir også oppskrifter på bruk av kalkulator (Casio og Texas) og regneark som er tilpasset regnearket til Microsoft Excel og Openoffice.

Boken innleder med en forklaring av hva en stokastisk variabel er. Det gis ikke noen klar definisjon på stokastisk variabel i innledningen, men det er en definisjon i oppsummeringen, som er som følger:

"En endelig stokastisk variabel X har m mulige verdier $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Sannsynlighetsfordelingen til X gir oss sannsynlighetene $P(X=x_1), P(X=x_2), \ldots, P(X=x_m)$."
(Heir, 2008, s. 217)

Dessuten skriver boken at et annet ord for stokastisk variabel kan være tilfeldig variabel, noe som kan være litt oppklarende, ettersom tilfeldig er et viktig begrep i denne sammenheng. Det engelske uttrykket for stokastisk variabel er også *random variable*. I definisjonen til boken er det påpekt at det er en definisjon for en *endelig* stokastisk variabel, som også ofte kalles en *diskret* stokastisk variabel. Boken gjør også rede for sannsynlighetsfordeling ved å definere at sannsynlighetene til en stokastisk variabel, utgjør sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen.

Boken presenterer videre forventningsverdi på følgende måte:

"La X være en stokastisk variabel med m mulige verdier $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Forventningsverdien ti X er gitt ved μ=E(X)= $x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_m \cdot P(X = x_m)$ *."* (Heir, 2008, s. 172)

Boken presenterer også De store talls lov i forbindelse med forventningsverdi. Definisjonen følger:
"Vi har et tilfeldig forsøk med en stokastisk variabel X. Hvis vi gjentar forsøket mange ganger, vil gjennomsnittet av verdiene til X nærme seg forventningsverdien μ=E(X)."

(Heir, 2008, s. 172)

Dette er en intuitivt god definisjon på dette nivået. Den forteller om den praktiske betydningen av store talls lov, men utelater mange viktige matematiske momenter, og kan trolig misforstås. Et eksempel på en misforståelse kan være kast med mynt å krone. Ut fra definisjonen, kan man tolke at 1000 kast med mynt, umulig kan gi hendelsen 1000 krone. Da kan det tilsynelatende virke som definisjonen over ikke stemmer, men her må en igjen betrakte vanlig konvergens mot konvergens i sannsynlighetsteori.

Boken inneholder oppskrifter på hvordan en kan finne forventningsverdi ved hjelp av digitale verktøy. Her er det gitt en oppskrift på hvordan en kan finne forventningsverdien til antall frø av 20 som spirer, når sannsynligheten for at hvert frø skal spire er 0,70. Boken bruker binomisk fordeling til å regne dette ut. Dermed må vært frø spire eller ikke, uavhengig av de andre frøene. De digitale hjelpemidlene som er presentert er grafiske kalkulatorer, Casio og Texas og et regneark. I forklaringen av digitale hjelpemidler bruker boken innbygde summeformler på kalkulatoren og i regnearket tilsvarer fremgangsmåten et oppsett som under.

	A	B	C
1	k	P(X=k)	k*P(X=k)
2	0	3,48678E-11	0
3	1	1,62717E-09	1,6272E-09
4	2	3,60688E-08	7,2138E-08
5	3	5,04964E-07	1,5149E-06
6	4	5,00756E-06	2,003E-05
7	5	3,73898E-05	0,00018695
8	6	0,000218107	0,00130864
9	7	0,001017833	0,00712483
10	8	0,003859282	0,03087426
11	9	0,012006655	0,10805989
12	10	0,030817081	0,30817081
13	11	0,065369566	0,71906522
14	12	0,11439674	1,37276088
15	13	0,164261985	2,13540581
16	14	0,191638983	2,68294576
17	15	0,178863051	2,68294576
18	16	0,130420974	2,08673559
19	17	0,071603672	1,21726243
20	18	0,027845873	0,50122571
21	19	0,006839337	0,12994741
22	20	0,000797923	0,01595845
23			
24		E(X)=	14

Spesielt fremgangsmåten i regneark krever litt tid, og når boken rett etter å ha presentert oppskriften for regneark, presenterer følgende formel for forventning $E(X) = np$ for binomisk fordeling, viser det seg jo at det er mye mindre effektivt å beregne forventning ved hjelp av de digitale hjelpemidlene boka har beskrevet. Bruk av digitale verktøy bør være meningsfull, men her kan man diskutere hvor meningsfullt det er, siden digitale verktøy i dette tilfellet gjør jobben større.

Varians og standardavvik blir presentert i samme kapittel. Boken kaller variansen for kvadratavviket, og viser utregning for dette. Boken forklarer at variansen er et mål for spredning. Boken stiller spørsmålet om hva variansen egentlig er, og konkluderer med at variansen vil få kvadrert benevning. Derfra går veien til standardavvik, ettersom standardavvik har samme benevning som forventning. Dette del-kapittelet dreier seg hovedsakelig om å presentere hvordan varians og standardavvik blir regnet ut for en stokastisk variabel, og gi eksempler. Varians og standardavvik for en binomisk fordelt stokastisk variabel blir også presentert, og de forenklede formlene for utregning av disse, $Var(X) = np(1-p)$

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

Hvorfor formlene blir sånn, gjør boken rede for i et senere del-kapittel. Dette kunne vært påpekt, ettersom boka ikke legger noen logiske resonnementer til grunn for disse formlene på side 183. Boken gjør rede for disse formlene først i forbindelse med normaltilnærming til binomisk fordeling på side 202.

I innledningen til normalfordelingen, forteller boken innledningsvis at denne også ofte blir kalt Gauss-fordelingen etter Carl Friedrich Gauss. Videre påpekes det at de stokastiske variablene som er behandlet til nå i kapittelet har hatt et endelig antall mulige verdier, men at det ikke alltid er sånn. Gjennom et eksempel der vekten til en nyfødt gutt betraktes, presenteres kontinuerlige stokastiske variabler. Presentasjonen skjer gjennom først å betrakte intervaller av vekter, som blir tegnet inn i et histogram der arealet av hver søyle er relativ frekvens. Her er de stokastiske variablene endelige. Boken deler inn de opprinnelige intervallene i mindre og mindre intervaller, og kommer etter hvert til konklusjonen at dersom man har uendelig mange intervaller eller fødselsvekter, vil man få en tetthetsfunksjon. Denne fremstillingen er bra, for den illustrerer forskjellen fra endelige utfallsrom og uendelige utfallsrom.

For å finne sannsynligheten for en hendelse ved hjelp av normalfordelingen kommer boka med en definisjon:

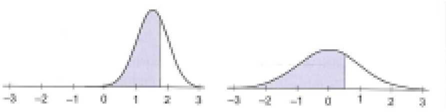
"Når X er normalfordelt med forventningsverdi μ og standardavvik σ, er $P(a \le X \le b)$ *lik arealet under grafen til normalfordelingsfunksjonen*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mellom a og b" (Heir, 2008, s. 190)

Grunnen til at integralet til f(x) ikke blir drøftet, er at integrasjon ikke er pensum på S1 eller S2. På bakgrunn av denne definisjonen konkluderes det med at $P(X = a) = P(a \le X \le a) = 0$. Dette betyr i praksis at alle utfallene, i et uendelig utfallsrom har sannsynlighet null. Et utfall vil i denne sammenheng være hvert av de reelle tallene mellom a og b. Dette er noe som trolig kan virke paradoksalt for elever, ettersom summen av sannsynlighetene for hvert utfall er 1, mens hvert enkelt utfall har sannsynlighet 0. Boken forklarer at dette gjelder i et tilfelle der man måler vekten helt nøyaktig. For å få en forståelse av logikken bak dette, kan det argumenters for at mengden av reelle tall bør betraktes, men samtidig må temaet begrenses og en drøfting av mengden av reelle tall ville trolig krevd mye plass. Dette resultatet er uansett nokså spesielt, i forhold til at elevene stort sett har behandlet diskrete fordelinger, der sannsynlighet null betegner et umulig utfall.

Standardisering av normalfordeling foregår ved at boken presenterer formelen for dette, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Motivasjonen boken har for å standardisere normalfordelinger, er at det gjør det lett å regne ut sannsynligheter. Boken bruker et eksempel med forventningsverdi 1.75 og standardavvik 0,5, og standardiserer dette. Bildet under er tatt fra boken og illustrerer X og standardisert X, eller Z, til venstre og høyre henholdsvis.



Dette er en bra illustrasjon. Her ser man tydelig forskjell på de to fordelingene. Ettersom skalaen på x-aksen også er tegnet inn, gir det et grunnlag for forståelse av standardnormalfordelingstabellen, som boken legger opp til kan anvendes for å regne ut sannsynligheter.

Sentralgrensesetningen innledes med en liten historisk presentasjon, der det gjøres kort rede for at Abraham De Moivre tilnærmet binomiske fordelinger til normalfordelinger. Boka definerer kort innledningsvis at sentralgrenseteoremet sier at summen av mange stokastiske variabler er tilnærmet normalfordelt. Boken påpeker også at det ikke er mulig å si noe om hvor mange forsøk man må gjøre for at man skal få en tilnærmet normalfordeling, men at det varierer ut fra fordelingen til de enkelte stokastiske variablene. Et poeng boken ikke nevner er at når antallet forsøk øker vil tilnærmingen til normalfordeling bli bedre. Ved en simulering av kast med ti terninger 20000 ganger har boka tegnet et histogram med antall øyne på ti terninger. Dette histogrammet er illustrerende med tanke på tilnærmingen til normalfordelingen. Boken drøfter i tillegg uavhengighetsprinsippet, som forutsettes for sentralgrensesetningen.

Når boken presenterer normaltilnærming til binomisk fordeling, gjøres det rede for formlene på side 183 (Heir, 2008), der forventning og varians for binomisk fordeling blir presentert. Ut fra disse forklaringene vil det nå være mulig å forstå grunnlaget for formlene, noe det ikke var der de først ble presentert. Boken innfører hjelpevariablene $X_1,X_2,\ldots,X_n$ for en hendelse *S*. Hvis *S* inntreffer er $X_1=1$ og viss ikke S inntreffer er $X_1=0$. Dette gjelder alle X_i. Siden $P(X_i=1)=p$ og $P(X_i=0)=1-p$ blir forventningsverdien $E(X_i)=p$. Dette resultatet er nokså åpenbart, i og med at forventningen til et del-forsøk er lik sannsynligheten for at hendelsen skal inntreffe i del-forsøket. Boken bruker også definisjonen for varians til å definere variansen til hver enkelt av hjelpevariablene:

$$Var(X_i) = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p$$

$$Var(X_i) = p \cdot (1-p)$$

Ettersom $X= X_1,X_2,\ldots,X_n$ er antall ganger hendelsen S inntreffer, argumenterer boken med at man kan bruke sentralgrensesetningen for å tilnærme den binomisk fordelte X til normalfordeling, med $E(X)=np$. Det blir ikke påpekt at $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$, men standardavviket $SD(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Forklaringen boken gir på hvordan tilnærme en binomisk fordeling til normalfordeling. Et problem som kan oppstå er imidlertid å forstå hvorfor $X_i=1$ viss S inntreffer og $X_i=0$ viss S ikke inntreffer. Dette kunne kanskje vært forklart litt nærmere.

Boken påpeker en tommelfingerregel for at en binomisk fordeling skal være tilnærmet normalfordelt, nemlig at $n \cdot p \geq 10$ og $n \cdot (1-p) \geq 1$. Dette er en god tommelfingerregel siden den tar hensyn til både *n* og *p* samtidig. Selv om boka bruker denne tommelfingerregelen, er det tatt med et eksempel som viser hvor at det kan bli nokså store unøyaktigheter også når *np* eller *n(1-p)* er i nærheten av 10.

Kapittelet om hypotesetesting innledes med en redegjørelse av forskjellen om at det fram til det aktuelle del-kapittelet har handlet om problemstillinger der man kan finne ut forventning og varians til en stokastisk variabel ved hjelp av utregninger. I forbindelse med hypotesetesting vet man ikke sannsynlighetsfordelingen til X, men ved hjelp av observasjoner kan man anslå om sannsynlighetsfordelingen til X kan være forenlig med observert verdi. Dette er et viktig punkt i å skille hypotesetesting fra de andre temaene boken omhandler. I tillegg skriver boken at man kan anslå verdien av p når vi har observert X. Med denne formuleringen menes trolig konfidensintervall, et tema som ikke tas opp i boken eller læreplanen.

Boken presenterer en problemstilling for å forklare hypotesetesting. Problemet er å avgjøre om en type salve er bedre enn en annen. 50 pasienter blir med i forsøket og får en type salve til hver hånd. Boken forutsetter uavhengighet, og forklarer prosessen med at verken pasient eller lege vet hvilken salve som blir brukt på hver hånd. Resultatet er at den nye salven gav best resultat for 30 av 50 pasienter. I forbindelse med dette tar boken opp et viktig poeng, nemlig at man vil få forskjellige tall dersom man undersøker 50 nye pasienter. Derfor kan man ikke konkludere med at den nye salven er best selv om den virket best på 30 av 50 pasienter. Uten at boken hadde tatt opp dette, kan det tenkes at elever med lite erfaring i statistikk ville konkludert på bakgrunn av dette resultatet.

Som normalt i hypotesetesting, stiller boken nå opp to hypoteser, H_0 og H_A. Det velges en sannsynlighetsmodell, i dette tilfellet en binomisk modell, og hypotesene forklares og formuleres med verdier for *p*:

H_0*: p=0.50*
H_A*: p>0.50*

Deretter regnes P-verdi ut ved å bruke sentralgrensesetningen på $P(X \geq 30)$ og får 0.101 som svar. Dette svaret tolkes, og boken skriver at 10.1 % er *"sannsynligheten for at den nye salven vil gi best resultat for minst 30 pasienter hvis de to salvene egentlig er like gode"*(Heir, 2008, s. 209). Boken beholder nullhypotesen, på grunn av at denne sannsynligheten er forholdsvis stor.

Deretter følger et avsnitt om signifikansnivå, som boken innleder med å spørre: *"Hvor liten må P-verdien være for at vi kan forkaste nullhypotesen"*(Heir, 2008, s. 209). Rekkefølgen på denne fremstillingen kan sies å være uheldig, i og med at det kan se ut som om signifikansnivå velges etter at observasjoner er foretatt og P-verdi regnet ut. Den vanlige prosedyren i en hypotesetest er å bestemme signifikansnivå på forhånd, altså både før observasjoner er foretatt og P-verdi regnet ut. Med bakgrunn i bokens fremstilling kan man få inntrykk av at signifikansnivå kan velges etter at man har regnet ut en P-verdi, og dette er ikke måten man velger signifikansnivå på. Bokens grunn for å regne ut p-verdi først, kan være at det kan virke vanskelig å diskutere signifikansnivå før man har noe å diskutere det opp i mot, altså P-verdi. Boken skriver også at det er vanlig å velge signifikansnivå på 5 %. Dette kan diskuteres, i og med at både signifikansnivå på 10%, 1% også 0,1% ikke er uvanlig. Boken har ikke tatt med drøfting av feil konklusjoner. Selv om læreplanen ikke spesifiserer dette, utelukker den det ikke heller. Det finnes to feiltyper i hypotesetesting, type I-feil, som er å forkaste H_0 hvis H_0 er sann, mens type II-feil er å beholde H_0 hvis H_A er sann. En kort drøfting av feil av type I-feil og type II-feil kunne vært lurt, for å argumentere for valg av signifikansnivå, men samtidig kan man tenke seg at emnet må begrenses i vanskelighetsgrad. Blant annet gjøres det i boken *"Statistikk for universiteter og høyskoler"* (2004) rede for valg av signifikansnivå i forhold til feiltyper. Sigma S2 (2008), som er læreboken fra Gyldendal, gjør også kort rede for feiltyper ved hypotesetesting.

Et annet poeng med hypotesetesting, er at når testen planlegges, blir det utført beregninger som forteller om hvilken maksimal eller minimal observert verdi som fører til forkastning, som kalles kritisk verdi. Dette nevner ikke boken, men dette går mer på praktisk utførelse av en test. Bokens fokus er mer på utregninger og forståelse av hvordan ulike fordelinger kan brukes.

Et eksempel på hypotesetesting der observasjonene er normalfordelt, blir også presentert. I et avsnitt på slutten av kapittelet påpekes det at boken bare tar for seg ensidig hypotesetesting, mens nettsiden tilknyttet læreverket også presenterer tosidige tester.

6.2.4 En drøfting av lærebøkene i videregående skole

Det er ikke store forskjeller i lærebøkenes fremstillinger av elementer sannsynlighetsregning. Det vil si definisjoner som for eksempel $\frac{gunstige\ utfall}{mulige\ utfall}$ og uniforme og ikke-sannsynlighetsmodeller. I sammenheng med disse begrepene er typiske problemstillinger hentet fra samme type problemstillinger som var opphavet til sannsynlighetsregningen, nemlig ulike typer spill. Konkrete eksempler er kast med mynt, terningkast, kortstokker og lykkehjul, problemer som blant annet Abraham De Moivre, Gerolamo Cardano og Jakob Bernoulli beskjeftiget seg med. Dette er gode problemstillinger i en innledning til sannsynlighet siden man vet sannsynligheten for at eksempelvis en terning skal havne på sekser. Bøkene som er skrevet etter R94 skal i følge læreplanen gi elevene innblikk i matematikkens utvikling. De fleste bøkenes perspektiv på dette i forhold til statistikk og sannsynlighetsregning er fortellinger om viktige personer, og det settes ikke i sammenheng med presentasjon av matematiske begreper.

Begrepene *uavhengighet* og *betinget sannsynlighet* blir behandlet ulikt i en del av bøkene. Noen bøker presenterer betinget sannsynlighet først, mens noen andre presenterer uavhengighet først. Man kan få inntrykk av at det begrepet som presenteres først, er det mest fundamentale. Likevel er forståelsen av begrepene viktigst, etter som de danner et fundament for mye av både sannsynlighetsregning og statistikk. Definisjonene på begrepene er ikke ulike i de fleste bøkene. Mange av oppgavene knyttet til dette krever å kunne anvende formler, og enkel tolkning av situasjoner. Ellers kan det være grunn til å trekke fram eksempelet fra 2MX (1995), som er omtalt tidligere, og handler om fotballspilleren Hege og hennes evne til å score på straffespark. Dette er nærmest et skrekkeksempel, og kan trolig heller lede til en misforstått oppfatning av uavhengighet en forståelse for det. Notasjonen er forskjellig i flere av bøkene. Man finner blant annet *den generelle produktsetningen*, *produktsetningen for uavhengige hendelser*, *produktsetningen*, og *produktsetningen for avhengige hendelser* igjen i bøkene som er analysert. Et læreverk bruker til og med forskjellige navn på samme setning i bøkene for 2MX og 3MX. Generelt finner man en del forskjell i notasjon i forskjellig bøker. Utfall, hendelse og enkeltutfall er begreper som kan tolkes til å ha forskjellige betydninger i forskjellige lærebøker.

Flere av bøkene presenterer kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger. Dette begrepet er ikke nevnt i noen av læreplanene, men er likevel inkludert i flere lærebøker. Læreplanene nevner ofte normalfordelingen, der tetthetsfunksjonen er en kontinuerlig fordeling. Ofte ser det ut til at forfatterne mener det er viktig å vite hva en kontinuerlig fordeling er, spesielt i sammenheng med sentralgrensesetningen og tilnærming av binomiske fordelinger til normalfordelingen. Et annet poeng i forhold til dette, er at det viser seg at flere av bøkene forklarer at når sannsynligheten for et utfall er null, kan ikke utfallet skje. Dette er riktig når det gjelder diskrete fordelinger, men dette blir ofte ikke poengtert godt nok.

Hypotesetesting er et tema som er tolket noe ulikt i forskjellige bøker. En bok presenterer både ensidige og tosidige tester nøye, mens en bare nevner at tosidige tester eksisterer. Ingen av de aktuelle læreplanene presiserer noe omkring dette. Et annet poeng i forhold til hypotesetesting er redegjørelsen av det som kalles forkastningsfeil og godtakningsfeil. Noen bøker gjør rede for dette, mens andre bøker ikke gjør det. Et annet moment som kan være verdt å merke seg er at Matematikk S2 (2008) gjør rede for hypotesetesting av p-verdier i binomiske fordelinger og av μ i normalfordelinger. Sistnevnte er ikke spesifisert i læreplanen. Konfidensintervaller er presentert nokså likt i de to aktuelle bøkene. Poengene med at intervallene er stokastiske er poengtert i begge de aktuelle bøkene, og at et gjennomsnitt for en stikkprøve er et estimat for forventingen til en hel populasjon.

Store talls lov er anvendt i forskjellige sammenhenger i flere av bøkene. Det er vanlig at den blir presentert på en intuitiv måte, for eksempel ved formuleringen "relativ frekvens for et utfall nærmer seg sannsynligheten for utfallet når man gjentar forsøket mange ganger". Som sagt er dette en intuitivt grei formulering. Faren med en slik formulering kan være at det muligens kan oppstå misforståelser. For eksempel er det mulig å få 1000 krone dersom man kaster en mynt 1000 ganger, men sannsynligheten for det er svært liten. Sannsynligheten for å få antall krone som er i nærheten av halvparten av forsøkene er større enn og ikke få det, og når antall observasjoner går mot uendelig, vil kombinasjonene som gir omtrent halvparten krone dominere såpass stort at sannsynligheten for og ikke få det vil konvergere mot null. Trolig kunne dette vært drøftet nøyere, men det er en vanskelig balansegang, for det må heller ikke bli for teoretisk og for vanskelig heller.

Som omtalt i teoridelen, kan simuleringer være et viktig hjelpemiddel til å forstå sannsynlighetsregning. Dette har ikke fått noe stort fokus i de fleste lærebøkene, selv om blant annet K06 nevner det innenfor de grunnleggende ferdighetene. Matematikk 3MX (1996) har som nevnt et eget delkapittel som dreier seg om simuleringer, men dette dreier seg mer om en innføring i simuleringsteknikker ved bruk av kalkulator, enn å anvende simulering som et redskap for å skape forståelse.

6.3 Eksamensoppgaver

6.3.1 Eksamensoppgaver for R94 versjon 1994

Eksamen gitt etter R94 versjon 1994 er lagt opp så elevene kan bruke godkjente formelsamlinger og kalkulator som hjelpemiddel. I hefte med eksamensoppgaver (Andersen & Nesse, 2002) gjøres det innledningsvis rede for at forskjellige lærebøker har tolket læreplanen noe ulikt, som har gitt seg utslag i hvor omfattende enkelte emner er blitt behandlet og ulik bruk av terminologi.

Eksamen fra 1998 inneholder totalt 3 deloppgaver som handler om sannsynlighet og statistikk. En deloppgave om sannsynlighet lyder:

"På en skole der 55% av elevene er jenter, er 4% av guttene og 1% av jentene over 1,80 meter høye. Vi velger en tilfeldig elev blant de som er over 1,80 meter. Hva er sannsynligheten for at denne eleven er jente?"(2002, s. 71)

I løsningsforslaget påpekes det at oppgaven kan løses på forskjellig måter. Løsningsforslaget benytter seg blant annet av setningen om total sannsynlighet og Bayes' setning i et av forslagene. Setningen om total sannsynlighet er det lagt liten vekt på i for eksempel Matematikk 3MX (1996) og i så måte kan den bli vanskelig å løse for elever som har brukt denne boken. Det kan bemerkes at verken setningen om total sannsynlighet eller Bayes' setning er nevnt eksplisitt i læreplanen. Andre problemer elevene kan støte på er å modellere problemet, altså sette opp en sannsynlighetsmodell, eksempelvis P(jente|over 1.80m). En annen tilnærming kan være å regne ut antall jenter over 1,80 m og totalt antall elever over 1,80m. Dette kan gjøres ved hjelp av opplysningene i oppgaven, og man kan dermed benytte seg av formelen gunstige utfall(jenter over 1,80m)/mulige utfall(totalt antall elever over 1,80). Dette er en løsning der det ikke trengs en dyp forståelse av sannsynlighetsregning for å få til oppgaven.

En annen oppgave i dette eksamens-settet som består av to del-oppgaver, tar for seg hypotesetesting. Oppgaven dreier seg om en blindtest av to colatyper, en ny type og en gammel type, for å finne ut om det er mulig å kjenne smaksforskjell på de ulike typene. Blindtesten går på at 500 elever skal smake på 3 glass med cola, der to av glassene inneholder den gamle typen cola, og det tredje glasset den nye typen. Elevene som smaker vet dette, og de skal peke ut glasset som inneholder den nye typen cola. Oppgaven forteller at hvis det ikke er mulig å kjenne smaksforskjell på de to typene cola, er det likevel sannsynligheten 1/3 for at en tilfeldig elev skal peke ut riktig glass. Videre er nullhypotese og alternativ hypotese oppgitt i teksten, som H_0: p=1/3 og H_A: p>1/3, og også at forsøket kan betraktes som tilnærmet normalfordelt. Oppgaven blir å finne ut hvor mange elever som må velge riktig for at nullhypotesen skal forkastes der signifikansnivå på 5% er oppgitt. Oppgaven tester elevene på flere momenter. Blant annet må elevene gjenkjenne situasjonen som et binomisk forsøk, for å finne forventning og standardavvik. Dette er nødvendig for å kunne bruke normalfordelingen til å finne hvilket antall elever som gir forkastning av nullhypotesen. Her må man regne ut antall ved hjelp av standard normalfordeling. Svaret eller antallet elevene får, må også tolkes, for å vise forståelse. Det vil si at det må påpekes at svaret, som er 184, forteller at flere enn 184 elever må peke ut den nye typen cola for at nullhypotesen skal forkastes på 5% signifikansnivå. Den andre del-oppgaven går ut på å finne signifikansnivå når man vet at det må være minst 190 elever som peker ut rett. Regningen er stort sett lik som i første del-oppgave. Det handler om å bruke formelen $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, gjøre nødvendige omforminger av denne, og lese av normalfordelingstabellen.

Eksamen i 3MX fra 1999 (2002), inneholder to del-oppgaver om statistikk og sannsynlighet. Den første oppgaven går ut på å finne ut av sannsynligheten for at det regner, dersom en jente ved navn Bodil kommer for sent til skolen. Dette skal gjøres ved hjelp av følgende opplysninger: *"På en tilfeldig høstdag er sannsynligheten for regn ¾. Dersom det regner, er sannsynligheten 3/5 for at hun kommer for sent på skolen. Dersom det ikke regner, er sannsynligheten ¼ for at hun kommer for sent på skolen."(2002, s. 56).* Dette er samme type oppgave som fra eksamen 1998, som nevnt tidligere. Elevene må kunne lage en sannsynlighetsmodell, og anvende setningen om total sannsynlighet og Bayes' setning for å få til dette. Det elevene her hovedsakelig blir testet i, er å lage en sannsynlighetsmodell og anvende de nevnte setningene.

Den andre del-oppgaven i dette eksamens-settet går ut på å undersøke hvor fornøyde elever på en skole er med antall prøver hver termin på en skole. 100 elever blir trukket ut tilfeldig, og 44 av disse er fornøyd med antall prøver. Elevrådet hevder mindre enn halvparten av elevene er fornøyde med antall prøver. Problemstillingen i oppgaven lyder: *"Bruk dine kunnskaper i statistikk og sannsynlighetsregning til å vurdere elevrådets påstand"*(2002, s. 56) Formuleringen av problemstillingen er åpen og sier ikke noe om hvilken metode som skal brukes for å løse den. I løsningsforslaget gjøres i en bemerkning rede for at en formuleringen i oppgaven inneholder nesten alle elementene elevene skal kunne innen statistiske metoder. Det påpekes også at en fullgod løsning av denne oppgaven må inneholde noen forklaringer for å vise forståelse. Eksamensheftet gjør rede for tre løsningsmetoder; hypotesetest med binomisk fordeling, hypotesetest med normalfordeling og konfidensintervall. Begge typene hypotesetesting står eksplisitt i læreplanen. Elevene må her sette opp en nullhypotese og alternativ hypotese. Disse er ikke åpenbare og her må det gjøres vurderinger. Løsningsforslaget antar H_0: p=0,5 og H_A: p<0,5, og tester ut fra dette. I forbindelse med metoden med konfidensintervaller, påpeker forfatteren at ikke alle aktuelle lærebøker gjør rede for konfidensintervall med prosentandeler. Dette står heller ikke eksplisitt i læreplanen.

6.3.2 Eksamensoppgaver for R94 versjon 2000

Eksamen i 3MX fra 2004 inneholder en oppgave med 4 deloppgaver som dreier seg om sannsynlighetsregning og statistikk. Oppgaven dreier seg om terningkast, der en terning kastes 500 ganger. X betegner antall seksere. Innledningsvis skal forventningsverdi og standardavvik regnes ut. Her kreves det at elevene kjenner igjen situasjonen som et binomisk forsøk, resten består i innsetting i formler. Neste problem er å finne P(75≤X≤91). I forbindelse med dette, er det påpekt at det skal gis en forklaring på hvorfor elevene kan bruke normalfordeling. Her er begrepet sentralgrensesetningen og betraktinger om antall terningkast sentralt. Oppgaven kan også løses ved hjelp av summeformelen på en grafisk kalkulator ved å taste inn formelen $\sum_{75}^{91}\binom{500}{x}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{500-x}$. Denne metoden blir presentert i noen lærebøker. De neste deloppgavene dreier seg om å finne ut om en pappeske formet som en kube kan erstatte terningen. *"De kaster pappesken 500 ganger og finner at den lander med toppen opp 77 ganger"*(2002, s. 90). Først skal elevene finne et estimat p; sannsynligheten for at esken lander med toppen opp. Dette må regnes som en enkel oppgave. Formelen $\hat{p}=\frac{X}{n}$ er blant annet oppgitt i formelsamlingen "Formelsamling i Matematikk" (2001), som er et godkjent hjelpemiddel på eksamen. I den siste deloppgaven skal elevene bestemme et 95% konfidensintervall for den estimerte p-verdien. I denne versjonen av læreplanen står det - i motsetning til versjonen fra 1994 – eksplisitt at elevene skal kunne regne ut et konfidensintervall for en populasjonsandel. I formelsamlingen (2001) godkjent for eksamen, er det dessuten påpekt at formelen for tilnærmet konfidensintervall for populasjonsandel, gjelder for en binomisk sannsynlighet, som er tilfellet i denne oppgaven. Resultatet av utregningen skal dessuten kommenteres. Hvis utregningen blir riktig, blir konfidensintervallet for den estimerte p-verdien [0,122; 0,186]. Teoretisk sannsynlighet for å få en sekser på en terning er 1/6=0,167. En kommentar omkring resultatet bør derfor konkludere med at utregningene støtter påstanden om at pappesken kan brukes i stedet for en terning.

Eksamen i 3MX fra 2006 (2001) inneholder totalt 5 oppgaver. På oppgave 4 er det to alternativer til oppgaver som elevene kan velge mellom. Det ene alternativet inneholder tre deloppgaver som dreier seg om sannsynlighetsregning. Den første oppgaven har som utgangspunkt at en kronisk sykdom rammer 0,1 % av befolkningen. Elevene skal forklare at i en gruppe på N personer, er sannsynligheten $1-0{,}99^N$ for at minst én har sykdommen. Her må man forstå - som læreplanen forteller – at *"utvalg fra en stor populasjon kan betraktes som uavhengige gjentak"*(KUF, 2000, s. 16). Dermed kan man regne ut sannsynligheten for at ingen er syke ved hjelp av produktsetningen for uavhengige hendelser, som gir 0.99^N. Komplementærhendelsen til ingen syke er minst én syk, og dermed er uttrykket forklart. Verken produktsetningen for uavhengige hendelser eller komplementære hendelser er pensum i 3MX, men ettersom det er pensum i 2MX, skal denne kunnskapen kunne forutsettes. Neste deloppgave går ut på å teste 100000 innbyggere for sykdommen. Dette gjøres ved blodprøver. Befolkningen deles inn i grupper på N personer, og blodet til disse personene blir blandet. Dersom det finnes spor av sykdom i blandingen til en gruppe, testes hver person i gruppen. Videre forklares det at X angir hvor mange tester en foretar på hver gruppe. Hvis analysen av blandingen ikke viser tegn på sykdom er X=1, og dersom den viser tegn på sykdom er X=N+1. Ut fra dette skal elevene vise at $E(X)=1+N(1-0{,}99^N)$. Her testes elevene i et konkret hovedmoment, nemlig å finne forventning til en stokastisk variabel i et endelig utfallsrom. Kunnskapen som trengs for å løse oppgaven kan sies å bære preg av å kunne anvende en formel. I den siste deloppgaven skal det vises at forventet antall analyser man må ta totalt er $\frac{100000}{N} \cdot E(X)$. Det viktige her er å forstå at E(X) er forventningsverdien til hver gruppe, og antall grupper er $\frac{100000}{N}$. Siden hver gruppe kan behandles som uavhengige forsøk, er uttrykket forklart.

Eksamens-settet inneholder en oppgave til som dreier seg om statistikk og sannsynlighetsregning. Det er oppgitt en tabell som gir fødselsvektene til 25 tilfeldige barn ved et sykehus. Ut fra disse vektene skal man i oppgave a finne et estimat for forventet fødselsvekt og standardfeil for estimatet. Oppgaven dreier seg om å gjenkjenne situasjonen som en stikkprøve fra en populasjon. Dermed kan følgende formler benyttes for henholdsvis estimert forventning og standardfeilen for estimatet: $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ og $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$. Å regne ut standardfeilen for hånd er mye arbeid, og vil koste elevene svært mye tid på eksamen. Derfor er dette trolig en test av digital kompetanse, som er et overordnet mål i den aktuelle læreplanen. Ved å taste inn alle fødselsvektene, vil en kalkulator kunne regne ut både estimert forventning og standardfeil. Læreboken Sinus 3MX (2002) som er analysert tidligere i oppgaven, viser ikke denne fremgangsmåten på kalkulatoren. Den viser en fremgangsmåte som gjelder for en binomisk fordelt stokastisk variabel. I den neste deloppgaven skal elevene finne et 90 % konfidensintervall for forventet fødselsvekt. Her testes elevene konkret i det å *"beregne et tilnærmet konfidensintervall for et populasjonsgjennomsnitt"(2000, s. 16)*. Før neste oppgave kommer det opplysninger om at fødselsvekter under 2500 gram regnes som lav fødselsvekt og sykehuset regner med at det kommer til å bli født 1000 barn det neste året. Y er antall barn med lav fødselsvekt. Videre opplyses det om at Y er binomisk fordelt med p=0,052. Oppgaven går ut på å bestemme en verdi A så P(Y>A)=0,05, for så å forklare hva denne A-verdien forteller. Oppgaven inneholder flere momenter, blant annet må elevene kunne tilnærme binomiske fordelinger til normalfordelinger, og kunne beregne forventning og standardavvik for en binomisk fordeling. Standardavvik for en binomisk fordeling er ikke nevnt i læreplanen, og er heller ikke eksplisitt oppgitt i det godkjente tabellverket. Tabellverket oppgir variansen for en binomisk fordeling, og en formel som forteller at standardavviket er $\sqrt{VarX}$. Utregnet verdi blir 64. En tolkning av hva denne verdien forteller vil kreve at elevene har en forståelse av sannsynligheter knyttet til normalfordelingen.

6.3.3 Eksamensoppgaver i fra K06 i S2

Første eksamen i S2 ble avholdt våren 2009. Nytt i eksamensordningen var at eksamen var todelt, der den ene delen skulle utføres uten andre hjelpemiddel enn passer, linjal, og gradskive. I den andre delen var alle hjelpemiddel tillatt, med unntak av internett eller kommunikasjonsmidler. Eksamensoppgavene i S2 er hentet fra utdanningsdirektoratets nettsider (Utdanningsdirektoratet, 2009).

I den første eksamen som ble avholdt var det to deloppgaver som inneholdt sannsynlighetsregning i delen uten hjelpemidler. Man har en terning med verdi 7 på tre av sidene, 5 på to av sidene og -1 på den siste. X betegner antall øyne som vises på terningen. Første deloppgave går ut på å sette opp en sannsynlighetsfordeling for X, noe som står klart i læreplanen at elevene skal kunne. I den andre deloppgaven skal elevene regne ut forventningsverdi og standardavvik for X. For å løse denne oppgaven, må elevene kunne regneregler for forventningsverdi og varians. Til forskjell fra tidligere eksamener vil det å kunne huske en formel nå ha en viss verdi. Man trenger ikke nødvendigvis ha en dyp forståelse for forventning og varians, hvis man husker formelen. Hvis man derimot har en bra forståelse av begrepene, vil det være mulig å resonere seg fram til en formel. For eksempel vil det trolig være mulig å resonnere seg frem til utregning av varians hvis man husker stikkordet "gjennomsnittlig kvadratavvik".

Samme eksamen inneholder en oppgave til som dreier seg om statistikk og sannsynlighetsregning. På denne oppgaven er alle hjelpemiddel tillatt. Man får opplyst at det ved en skole i gjennomsnitt har vært 4,3 % seksere ved tidligere eksamener. Skoleledelsen legger om undervisningen for å bedre resultatet. Ved neste eksamen viser det seg at 29 av 500 elever får sekser. Problemstillingen ligger i å finne ut om dette resultatet kom av omleggingen eller om det var tilfeldig. Det er formulert som følger: *"Bruk dine kunnskaper i statistikk og sannsynlighetsregning, og undersøk spørsmålet nærmere. Gjør rede for hvilke metoder du bruker, og hvilke forutsetninger du legger til grunn."(*Utdanningsdirektoratet, 2009). Dette er en svært åpen formulering, og elevene må selv vurdere hvilken fremgangsmåte de skal ta i bruk ut fra det de har lært. Det beste verktøyet for elevene til å svare på dette spørsmålet er hypotesetesting. Hypotesetesting vil i tilfelle inneholde mange elementer fra pensum. Elevene må kunne sette opp rimelige hypoteser, av typen H_0: P=0.043 og H_A: p>0.043. Signifikansnivå for testen må også velges. Videre må oppgaven løses ved å anta at den binomiske fordelingen er tilnærmet normalfordelt og anvende formelen $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, der μ er forventningen og σ er standardavviket til den binomiske fordelingen. Elevene kan nå regne ut enten P-verdi ved å sette X=29 eller regne ut X ved å sette for eksempel Z=1,645 dersom man tester med 5 % signifikansnivå. Et annet alternativ kan være å bruke kalkulatoren til å regne ut P(X≥29) ved å bruke kalkulatoren til å regne ut formelen $\sum_{29}^{500}\binom{500}{X}\cdot X^{0,043}\cdot(500-X)^{0.957}$. Det vil kunne være en mulighet til å vise sin digitale kompetanse. Noen bøker gjør rede for lignende metoder på kalkulatoren. Blant annet påpekes det i Matematikk S2 (2008, s. 170) at nettsiden tilknyttet læreverket gjør rede for dette. Når elevene kommer frem til en verdi, må verdien tolkes, enten til å forkaste eller beholde nullhypotesen. Beskrivelsen av en mulig fremgangsmåte på oppgaven over, vil inneholde deler av alle kompetansemålene fra læreplanen for S2.

Eksamen i S2 (2010) våren 2010 bød på en del oppgaver i sannsynlighet. Eksamen var organisert på samme måte som i 2009 med en del uten hjelpemidler og en del med alle hjelpemidler tillatt. I den første delen skal elevene gjøre beregninger ut fra følgende tabell:

X	-3	0	1	B
P(X=x)	0,2	0,1	A	0,3

Her skal elevene blant annet finne verdien for A, verdien til B når man vet at E(X)=1, og de skal vise at Var(X)=6. For å vise at variansen er 6, må variansen regnes ut. Siden svaret er oppgitt, vil dermed elevene kunne validere svaret de får i utregningen.

Del to av eksamen inneholder to oppgaver som dreier seg om sannsynlighetsregning og statistikk. I den ene oppgaven er det oppgitt at en stokastisk variabel X er normalfordelt med $\mu=30$ og $\sigma=2,5$. Elevene skal ut fra dette finne $P(X\leq 31)$ og $P(X>28)$. Dette er en regneteknisk oppgave, der svaret ikke krever noen fortolkning. Det dreier seg om å anvende standard normalfordeling for å regne ut sannsynligheter. For å finne $P(X>28)$ må elevene benytte seg av komplementærhendelsen til dette, nemlig $P(X\leq 28)$.

Den neste oppgaven i denne eksamen dreier seg om jordbær. En grossist har funnet ut over tid at 10% av kassene med jordbær han mottar, inneholder ødelagte jordbær. I sammenheng med at han en dag mottar 50 kasser spørres det etter følgende: Hva er sannsynligheten for at akkurat 5 kasser inneholder ødelagte jordbær og hva er sannsynligheten for at minst 5 kasser inneholder ødelagte jordbær. I det første spørsmålet gjelder det å gjenkjenne situasjonen som en binomisk sannsynlighet, og regne ut P(X=5) ved hjelp av formelen $\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$. Her betegner X antall kasser med ødelagte jordbær. For å løse det andre spørsmålet, må en bruke et digitalt hjelpemiddel for å regne ut $P(X\geq 5)$ ved hjelp av formelen for binomiske sannsynligheter. Hvis elevene ikke kjenner til hvordan en kan benytte seg av digitale hjelpemiddel i en slik situasjon, er et annet alternativ å regne ut P(X=0), P(X=1), P(X=2), P(X=3), P(X=4). Dersom man summerer disse vil man få komplementærhendelsen til $P(X\geq 5)$, og denne summen kan dermed trekkes fra 1. Det kan trolig være fristende for noen å bruke tilnærming til normalfordeling i denne oppgaven. Det vil ikke være gunstig, på grunn av relativt lavt antall observasjoner samtidig som sannsynligheten for at en kasse inneholder ødelagte jordbær er liten. Faglitteraturen opererer med forskjellige "tommelfingerregler" omkring dette, men i denne oppgaven vil en få et avvik på mellom 5 og 6 % dersom en tilnærmer den binomiske fordelingen til normalfordeling. Her må elevene være kritiske i valg av løsningsmetode.

Videre forteller oppgaveteksten at grossisten får mistanke om at mer enn 10 % av kassene inneholder ødelagte bær. Ved å undersøke 90 kasser, finner han ut at 15 kasser inneholder ødelagte bær. P angir sannsynligheten for at en kasse inneholder ødelagte bær. Først er oppgaven å sette opp nullhypotese og alternativ hypotese for problemstillingen, og forklare rundt dette. Deretter skal det undersøkes om kontrollen gir grunnlag for å påstå at det er mer enn 10 % av kassene som inneholder ødelagte bær. Signifikansnivå blir oppgitt på 5 %. Oppgaven leder elevene til å utføre en del steg i prosessen med hypotesetesting. Likevel må elevene gjøre betraktninger som å tolke utregningene og velge fremgangsmåte i utregningene. Siden utvalget er 90 i stedet for 50 som var opprinnelig, vil en tilnærming til normalfordeling være bedre. Likevel er det fortsatt bedre å gjøre utregningen ved hjelp av digitale hjelpemiddel og den binomiske sannsynlighetsmodellen. En av flere tommefingerregler for når man kan tilnærme binomisk fordeling til normalfordeling er at np>10 og n(1-p)>10. I dette tilfellet vil np=9, og ut fra dette kan man argumentere for at tilnærming til normalfordeling ikke er gunstig i dette tilfellet.

6.3.4 Drøfting av eksamensoppgaver

Ut fra de analyserte eksamensoppgavene, er det ikke vesentlige forskjeller i forhold til de forskjellige læreplanene. Noen oppgaver er åpne og har formuleringer av typen *"bruk det du kan om statistikk og sannsynlighetsregning til å avgjøre…"*. Disse formuleringene finner man igjen fra eksamensoppgaver fra både R94 og K06. Det kan argumenteres for at en slik formulering gjør en oppgave vanskeligere enn en steg-for-steg oppgave av typen: 1. sett opp hypoteser 2. gjennomfør hypotesetest med 5 % signifikansnivå. Ut fra de tillatte hjelpemidlene, som er alt i K06, vil en åpen formulering være lettere å besvare enn i R94 der bare formelhefte var tillatt. Et annet moment ved eksamen i K06, er at den som nevnt inneholder en del uten hjelpemidler. Generelt vil det si at elevene kan måtte risikere å huske formler, som for eksempel formelen for varians. Dette kommer ikke nødvendigvis frem i læreplanen, men samtidig skal elevene kunne gjøre rede for begrepet varians, og dette vil innebære å kunne huske formelen.

Det kan virke lettere å relatere konkrete hovedmomenter og kompetansemål til eksamensoppgaver fra K06 og R94 versjon 2000 enn R94 versjon 1994. Et av eksemplene på eksamensoppgaver fra R94, forutsetter trolig kjennskap til Bayes' setning og setningen om total sannsynlighet, mens disse begrepene ikke er nevnt eksplisitt i læreplanen. Forfatteren av eksamenshefte for R94 versjon 1994 (2002) påpeker også i innledningen i heftet at læreplanen har vært lite spesifikk.

I noen av eksamensoppgavene fra analysen legges det trolig opp til bruk av digitale hjelpemidler. Bruk av digitale hjelpemidler er på en eller annen måte inkludert i alle de aktuelle læreplanene, og mange av oppgavene forutsetter bruk av kalkulator til utregninger. Eksamensoppgavene fra R94 versjon 1994 benytter digitale hjelpemidler som nettopp hjelpemidler, mens i K06 og R94 versjon 2000 er det oppgaver som kan mistenkes for å ha som formål å teste elevenes digitale kompetanse.

Flere av oppgavene bruker praktiske problemstillinger, og ut fra de analyserte oppgavene er dette mer en regel enn et unntak. I forbindelse med statistikk og sannsynlighet er denne typen oppgaver på mange måter mer anvendbare enn rene utregningsoppgaver, i og med at elevene må tolke svarene i forhold til oppgavens kontekst. Den praktiske anvendelsen ser ut til å stå sterkt i eksamensoppgavene for alle læreplanene.

7 Konklusjon

7.1 Oppsummering og funn

Fra de første sporene av det som på begynnelsen av 1800-tallet het statistikk, har det skjedd en enorm utvikling til den betydningen man legger i statistikk-begrepet i dag. Det er flere sentrale aktører og hendelser som har spilt en viktig rolle. Anders Nikolai Kiær har fått mye av æren for opprettelsen av Statistisk sentralbyrå, men samtidig var det et behov for statistiske opplysninger fra statens side som trolig betydde mye for opprettelsen. Debatten omkring den representative undersøkelsens metode i Norge kom også på bakgrunn av statens behov, nemlig behovet for invalide-statistikk. Det er verdt å merke seg at aktuarene kom på banen i denne debatten, og deres mot-argumentasjon mot metoden var en av de viktigste grunnene til at den ble tatt ut av bruk. I hvor stor grad denne hendelsen hadde betydning for fremvekst av aktuarmiljøet er vanskelig å si, men man kan konstatere at i årene debatten foregikk og årene som fulgte, ble både aktuarforeningen stiftet og aktuarstudiet ved universitetet opprettet. Flere enkeltpersoner har vært viktige også i opprettelsen av universitetsutdannelsen. Trolig har impulser og kunnskaper fra utenlandsstudier vært en viktig faktor for både Sverdrup, som har fått mye av æren for opprettelsen av matematisk statistikk som hovedfag, og Frisch som Sverdrup jobbet med og fikk impulser fra.

Læreplanen i grunnskolen har stort sett inneholdt de samme temaene siden statistikk og sannsynlighet ble innført i relativt beskjedent omfang i M74. Det vil si deskriptiv statistikk og enkel innføring i sannsynlighet. På detaljnivå har planene inneholdt flere og flere begreper fra M87 til L97, mens det ikke er så mye endring fra R94 til K06. Sannsynlighet blir innført på en enkel måte i grunnskolen, og det ser ut til at elevene blir presentert for tilfeldighet i slutten av barneskolen i de fleste planene. Sannsynlighet i barneskolen blir ofte satt i sammenheng med brøk, desimaltall og prosent, noe som viser seg i bøkene som er analysert i denne oppgaven. Læreplanene i grunnskolen inneholder formuleringer som dreier seg om å kunne forholde seg kritisk til statistisk materiale. Dette målet er fornuftig i grunnskolen. Selv om det ikke kan dreie seg om komplisert statistikk, er det noe som bør høre til allmenndannelsen med tanke på hvor mye statistikk som blir publisert i ulike medier.

Det tok en del år fra statistikk ble hovedfagsstudium til man finner statistikk og sannsynlighet i grunnskole og videregående skole. Man finner statistikk og sannsynlighetsregning i omfattende grad i forslaget til læreplan fra Gymnas-utvalget fra 1962. Der nevnes begrepet *utdannelsessamfunnet*, ikke spesifikt relatert til statistikk og sannsynlighetsregning, men som et grunnlag for endring av læreplanen generelt. Tom Lindstrøm påpeker også argumenter om *kunnskapssamfunnet* fra myndighetene, når statistikk og sannsynlighetsregning for alvor ble innført i læreplanen for videregående med R94. Med bakgrunnen i økt bruk av statistikk i samfunnet generelt i 60-70 og 80-årene, og utdannelsen av flere og flere statistikere, kan trolig dette argumentet ha hatt mer slagkraft i forkant av R94. Hvilke argumenter statistikkmiljøet brukte for å få statistikk og sannsynlighetsregning inn i skolen kommer ikke frem i oppgaven, men det er et faktum at statistikkmiljøet vokste og statistikken ble anvendt på flere områder i tiårene før R94. Dermed kan det tenkes at statistikkmiljøet mente statistikk var anvendelig på såpass mange områder at det var nødvendig å få inn i skolen. Fra den reviderte versjonen av R94 til K06 har omfanget av statistikk og sannsynlighet minket i videregående skole. Det er ikke nødvendigvis fordi behovet for disse emnene er vurdert som mindre, men med bakgrunn i hva Ranestad forteller om heller å kunne enn å kjenne til, og resultatene

Siden statistikk og sannsynlighetsregning fikk skikkelig fotfeste i læreplanen for videregående skole i R94, har det vært noen endringer frem til dagens læreplan, K06. En stor forskjell er at R2 i K06, som tilsvarer 3MX i R94, ikke inneholder noe sannsynlighetsregning eller statistikk. 3MX hadde derimot omfattende omfang av emnene i begge læreplanene. Hypotesetesting og konfidensintervall har vært ut og inn i læreplanene. Å ha med begge deler i pensum ser ut til å ha vært for mye, basert på erfaringene fra den første versjonen av R94. Totalt sett ser det ut til at omfanget av statistikk og sannsynlighetsregning har minket, både fra den opprinnelige R94 til revisjonen av den, og fra revisjonen av den og til K06.

Taksonomien i alle læreplanene for videregående skole tyder på at kunnskapene og ferdighetene knyttet til sannsynlighetsteori og statistisk teori dreier seg om å anvende. Det vil si å kunne anvende matematiske formler til å løse problemstillinger. Dette kommer også frem i problemstillingene i bøkene. Selv om ikke læreplanene har hatt mange formuleringer som tyder på kunnskaper og ferdigheter på øverste nivå i modellen til Repstad og Tallaksen (2006), vil likevel både hypotesetesting og konfidensintervall kreve å kunne vurdere et resultat. Dahl og Schrages fokus på kritisk sans kommer ikke eksplisitt til syne i læreplanen, men man kan argumentere for at opplæringen elevene får implisitt inneholder dette. Kanskje spesielt gjelder dette hypotesetesting og konfidensintervall. Fokuset på å anvende gjør seg også gjeldende i eksamensoppgaver fra alle de tre aktuelle læreplanene i videregående skole.

Lærebøkenes fokus på bruk av digitale hjelpemidler, som er et overordnet mål i alle de tre aktuelle læreplanene for videregående skole, dreier seg stort sett om å kunne gjøre seg bruk av kalkulator i utregninger. IT-ressurser har blitt mer og mer tilgjengelig de siste årene, men det ser ikke ut til at dette har betydd noe særlig for bøkenes fokus på digitale hjelpemidler i forhold til statistikk og sannsynlighet. Også i forhold til simuleringer har kalkulatoren blitt viet mer oppmerksomhet enn datamaskinen. Simuleringer eller andre type forsøk er dessuten ikke noe de fleste bøkene vier stor plass. Simuleringer er ofte relatert til kun den tekniske siden, og ikke nødvendigvis for å få en bedre forståelse av sannsynlighetsregning.

Mange av bøkene formulerer store talls lov på en lignende måte: "viss vi gjør et forsøk mange ganger vil relativ frekvens for hvert utfall nærme seg sannsynligheten for utfallet". Som nevnt i analysen av bøker kan denne og lignende formuleringer gi en form for intuitiv forståelse av store talls lov. Problemet med slike formuleringer er at store talls lov trolig lett kan misforstås. Eksempelvis er det fullt mulig å få hundre krone viss man kaster en mynt hundre ganger. Likevel vil en fullstendig redegjørelse for store talls lov være omfattende og det kan være grunn til å diskutere hvordan store talls lov bør formuleres i videregående skole, men en misforstått oppfatning av store talls lov kan trolig føre til statistiske misoppfatninger. Store talls lov er ikke nevnt i de aktuelle læreplanene, men likevel danner den grunnlaget for mye sannsynlighetsteori, og trolig derfor har de fleste lærebøkene formulert den på en eller annen måte. Dette er trolig noe som kan lede til en heuristisk tankegang som Shaugnessy (1977) nevner.

Eksamensoppgavene har generelt sett vært av samme type innfor statistikk og sannsynlighetsregning. I forbindelse med konfidensintervall og hypotesetesting, er det ofte oppgitt i oppgavene hva som skal anvendes, og ofte er både nullhypotese og alternativ hypotese oppgitt. Som Schrage (1985) nevner, er det ikke nødvendig for elevene å forstå modellbyggingsprinsippet, som kanskje er spesielt aktuelt i hypotesetesting. Dog finnes det to eksempler blant de analyserte eksamensoppgavene der elevene selv må velge metode (hypotesetesting eller konfidensintervall) og eventuelt sette opp hypoteser, velge signifikansnivå og konkludere på bakgrunn av utregninger. Disse oppgavene krever en grundig forståelse av statistikk for å få til. Denne type oppgaver er det gjort funn av både i forhold til R94 versjon 1994 og K06.

7.2 Oppgavens begrensninger og forslag til videre forskning

I forbindelse med den delen av oppgaven som tar for seg ulike sider ved læreplanen kommer perspektivene fra formell læreplan (læreplandokumentet), oppfattet læreplan (lærebøker og eksamensoppgaver) idéenes læreplan (intervju Ranestad, Lindstrøm) frem. Det finnes i tillegg andre sider ved den oppfattede læreplanen, som dreier seg om hvordan læreren oppfatter læreplanen og legger opp undervisningen. Læreres oppfatning av læreplanen kunne også vært et perspektiv innen den oppfattede læreplan.

Statistikk og sannsynlighetsregning innen lærerutdanning, kunne også vært et interessant perspektiv. Både allmennlærerutdanning som spesielt kvalifiserer for arbeid i grunnskolen, eller ulike faglærerutdanninger som kvalifiserer for både grunnskole og videregående kunne vært aktuelle tema.

Kilder

Aga, L. (2008). *Begreper i sannsynlighet og statistikk på første trinn i videregående skole: en studie av elevers respons på oppgaver om utvalgte begreper.* L. Aga, Kristiansand.
Andersen, T., & Nesse, T. (2002). *Eksamenshefte i 3MX*. Bergen: Fagbokforl.
Arntzen, J. G., & Helle, K. (1999a). *Norsk biografisk leksikon* (Vol. 8). Oslo: Kunnskapsforl.
Arntzen, J. G., & Helle, K. (1999b). *Norsk biografisk leksikon* (Vol. 6). Oslo: Kunnskapsforl.
Arntzen, J. G., & Helle, K. (1999c). *Norsk biografisk leksikon* (Vol. 5). Oslo: Kunnskapsforl.
Arntzen, J. G., & Helle, K. (1999d). *Norsk biografisk leksikon* (Vol. 9). Oslo: Kunnskapsforl.
Birkeland, B. (1999). *Norsk Matematisk forening. Historikk*. Lastet, fra http://matematikkforeningen.no/historikk.html.
Boye Pedersen, B., Pedersen, P. I., & Skoogh, L. (2007). *Grunnbok 7A*. (Abakus for sjuende trinn).
Bryman, A. (2008). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.
Dahl, H. (1986). Statistikkfagets plass i skole og høyere utdanning. I: *Statistisk sett: jubileumsskrift Norsk statistisk forening 1936-1986* (s. 123-132). [S.l.]: [Foreningen].
Den Norske, a., & Falk, E. (2004). *Den Norske aktuarforening 100 år*. [Oslo]: Foreningen.
Det Norske, v.-a. (1994). Minnetale over Professor Dr. Philos. Erling Sverdrup. I: *Det Norske videnskaps-akademis Årbok* (s. 243-248). Oslo: Videnskaps-akademiet.
Fevolden, T. (2000). *Om endringer i opplæringsloven og privatskoleloven*. Lastet, fra http://www.regjeringen.no/nb/dokumentarkiv/Regjeringen-Stoltenberg-I/kuf/Lover-og-regler/2000/rundskriv_f-042-00.html?id=261018.
Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
Forening, N. S. (1985). *Vedtekter for Norsk statistisk forening (NSF)*. Lastet, fra http://folk.uio.no/geirs/nsf/index.php?hoved=0&under=4.
Færden, K., & Hjorth, J. (1929). *Aktuarvirksomhet i Norge: en historisk oversikt utarbeidet i anledning av Den norske aktuarforenings 25 års jubileum 1929*. Oslo: Foreningen.
Garmannslund, K., Sandengen, P., & Winther, S. (1986). *Matteboka: bokmål*. [Oslo]: Gyldendal.
Gymnasutvalg, N. L. (1962). (Vol. [1]). Oslo: Cappelen. (Gymnaset i søkelyset).
Gymnasutvalg, N. L. (1964). *Gymnaset i søkelyset II*: Cappelen.
Heir, O. (2000). *Matematikk 1MX/MY*. Oslo: Aschehoug.
Heir, O. (2001). *Matematikk 2MX*. [Oslo]: Aschehoug.
Heir, O. (2008). *Matematikk S2*. [Oslo]: Aschehoug.
Heuch, I. (1986). Utdannelsen av fagststiatikere i Norge. I: *Statistisk sett: jubileumsskrift Norsk statistisk forening 1936-1986* (s. 133-150). [S.l.]: [Foreningen].
Heuch, I., Lillestøl, J., & Dahl, H. (1998). En vurdering av lærebøkene i videeregående skole. *Tilfeldig Gang*, 15(1), 7.
Hjemmehørende folkemengde (2009). Lastet, fra http://www.ssb.no/histstat/tabeller/3-1.html.
Hundeland, P. S. (1996). *Fra sannsynlighetsregnings historie: utviklingstrekk, anvendelser og uavhengighet.* Institutt for matematiske fag, Høgskolen i Agder, Kristiansand.
Haanes, M., & Kvalheim, G. (1999a). *Pluss*: NKS-Forlaget. (Grunnbok 7b).
Haanes, M., & Kvalheim, G. (1999b). *Pluss Grunnbok 7a*: NKS-Forlaget. (Pluss).
Haanæs, M., & Kvalheim, G. (1999). (Vol. 7. klasse). (Idébok for læreren).
Imsen, G. (2009). *Lærerens verden: innføring i generell didaktikk*. Oslo: Universitetsforl.
Kalleberg, T. (2004). *Norsk matematisk forening: en studie av dens stiftelse og utvikling i internasjonal sammenheng.* T. Kalleberg, Kristiansand.
KD. (2006). *Kunnskapsløftet: læreplaner for gjennomgående fag i grunnskolen og videregående opplæring : læreplaner for grunnskolen*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

KU. (1935). Ny og foreløpig leseplan og pensa i de boklige fag i den høgre skolen etter lov av 10 mai 1935. Oslo.
KU. (1974). *Mønsterplan for grunnskolen: bokmål*. [Oslo]: Aschehoug.
KU. (1976a). Læreplan for den videregående skole, del 3a, Studieretning for almenne fag. I: Gyldendahl.
KU. (1976b). *Læreplan for den videregående skolen*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag A/S.
KU. (1976c). *Læreplan for videregående skole, del 3a, studieretning for allmenne fag*: Gyldendahl.
KU. (1987). *M87*. Oslo: Aschehoug.
KU. (1992). *Studieretning for allmenne fag 1992* (Vol. 3a(1992)). Oslo: Kirke- og undervisningsdepartementet : Gyldendal. (Læreplan for den videregående skole).
KUF. (1993). Matematikk. I: *Læreplan for videregående opplæring* (s. 14). Oslo: Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet.
KUF. (1994). Læreplan for videregående opplæring. I: *Matematikk*. Oslo.
KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. [Oslo]: Nasjonalt læremiddelsenter.
KUF. (1999). *Læreplanverket for videregående opplæring (R94)*. Lastet, fra http://www.udir.no/Artikler/_Lareplaner/Lareplanverket-for-videregaende-opplaring-R94/?id=1120#Allmenne, økonomiske og administrative fag.
KUF. (2000). Læreplanverket for videregående opplæring. I.
Kunnskapsdepartementet. (2003). Lastet, fra http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/nouer/2003/nou-2003-16/15/2.html?id=370764.
Lie, E., Roll-Hansen, H., & Boquist, S. (2001). *Faktisk talt: statistikkens historie i Norge*. Oslo: Universitetsforl.
Lillestøl, J. (1986). Norsk Statistisk Forening 1936-1986. I: *Statistisk sett: jubileumsskrift Norsk statistisk forening 1936-1986* (s. 9-24). [S.l.]: [Foreningen].
Løvås, G. G. (2004). *Statistikk for universiteter og høgskoler*. Oslo: Universitetsforl.
Laake, P. (1986). Eilert Sundt sosialstatistiker og sosialpolitiker. I: *Statistisk sett: jubileumsskrift Norsk statistisk forening 1936-1986* (s. 67-82). [S.l.]: [Foreningen].
Meidell, B. (1923). Arnfinn Palmstrøm. *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 5, 1-7.
Meidell, B. (1936). Professor dr. Alf Guldberg. *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 18, 33-41.
Moore, D. S. (2004). *The basic practice of statistics*. New York: W.H. Freeman.
Oldervoll, T. (2007). *Sinus R1: grunnbok i matematikk : studiespesialiserende program*. Oslo: Cappelen.
Oldervoll, T. (2009). *Sinus 1T: matematikk for Vg1 : studieforberedende program*. Oslo: Cappelen Damm.
Oldervoll, T., Orskaug, O., & Vaaje, A. (1994). *Grunnbok* (Vol. 1). Oslo: Cappelen. (Sinus).
Oldervoll, T., Orskaug, O., & Vaaje, A. (2002). *Sinus 3 MX: grunnbok*. Oslo: Cappelen.
Pedersen, V., & Solvang, R. (1993). Kurs i sannsynlighetsregning for lærere ved ungdomskolene i Tønsberg. *Tangenten*(2), 20-23.
Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *Genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. London: Routledge & K. Paul.
Piene, K. (1937). Matematikkens stilling i den høiere skole i Norge efter 1800. *Norske Matematisk Tidsskrift*, 19, 52-68.
Piene, K. (1938). Matematikkens stiiling i den høiere skole i Norge efter 1800. *Norske Matematisk Tidsskrift*, 20, 33-58.
Pólya, G. (1971). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
Ranestad, K. (2007). *Matematikk R,S og X*. Lastet, fra http://folk.uio.no/ranestad/fpd.pdf.

Repstad, K., & Tallaksen, I. M. (2006). *Variert undervisning - mer læring: lærerens metodebok*. Bergen: Fagbokforl.
Rolandsen, W. (2001). *Statistikk og sannsynlighetsregning i videregående skole: i takt med den teknologiske utviklingen?* , Kristiansand.
Sandvold, K. E. (1995). *Matematikk 2MX: grunnbok*. [Oslo]: Gyldendal.
Sandvold, K. E. (1996). *Matematikk 3MX: grunnbok*. [Oslo]: Gyldendal.
Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A., m.fl. (2008). *S2*. (Studieførebuande).
Schrage, G. (1985). Statistikkundervisning i skolen. *Normat*, 33(3).
Schweder, T. (1980). Scandinavian Statistics, Some Early Lines of Development. *Scandinavian journal of statistics*

7, 113-129.
Schweder, T. (2006). *Statistikk i Norge-et langt tilbakeblikk*. Lastet ned 11.04, fra http://www.math.uio.no/div/nsf/moter/Schweder_Langt%20tilbakeblikk_presentasjon.pdf.
Selsjord, M., & Øien, A. (1986). Statistisk sentralbyrå 1976-1986. I: *Statistisk sett: jubileumsskrift Norsk statistisk forening 1936-1986* (s. 93-106). [S.l.]: [Foreningen].
Seng, Y. P. (1951). Historical Survey of the Development of Sampling Theories and Practice. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 114(2), 214-231.
Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of Probabilty: An Experiment with a Small-Group, Activity-Based, Model Building Approach to Introductory Probability at the College Level. *Educational Studies in Mathematics*, 8(3), 295-316.
Shaughnessy, J. M., & Bergman, B. (1993). Research ideas for the classroom: high school mathematics. I: P. S. Wilson (red.), (s. xvi, 304 s.). New York: Macmillan.
Skarpenes, O. (2004). *Kunnskapens legitimering: en studie av to reformer og tre fag i videregående skole*. Sosiologisk institutt, Universitetet i Bergen, [Bergen].
Statistikk ordnet etter emne - statistikkområder. Lastet, fra http://www.ssb.no/emner/.
Statistisk sentralbyrå 100 år : 1876-1976. (1976). Samfunnsøkonomiske studier.pp. 128 s.). Oslo: Statistisk sentralbyrå. Lastet.
Sunde, B., & Ulshagen, T. (2001). *Formelsamling i matematikk: 1X, 1Y, 1MX, 1MY, 2MX, 2MZ, 3MX, 3MZ*. [Oslo]: Gyldendal undervisning.
Thalberg, O. M. (1943). Norsk Matematisk Forening gjennom 25 år. *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 25.
Thomsen, I. (1986). Anders Nicolai Kiær-statistiker og samfunnsforsker. I: *Statistisk sett: jubileumsskrift Norsk statistisk forening 1936-1986* (s. 83-92). [S.l.]: [Foreningen].
Torkildsen, S. H. (1997). Ta sjansen. *Tangenten*, 2, 25-29.
UiB. *Aktuarstudiet*

Lastet, fra http://math.uib.no/adm/grupper/aktuar/aktuar.html.
UiO, M. i., studieadminstrsjon. *Regler for tildeling av aktuarkompetanse* Lastet, fra http://www.mn.uio.no/math/studier/om/aktuarkompetanse/.
Undervisningsplan for gymnasiet, i henhold til Lov om høiere almenskoler af 27de juli 1896 §11: vedtaget 5te december 1899 af Kirke- og undervisningsdepartementet som gjældende indtil videre. (1899). Kristiania: Det norske aktieforl.
Utdanningsdirektoratet. (2009). *REA3028 Matematikk S2*. Lastet, fra http://www.udir.no/upload/Eksamen/Videregaende/Tidligere_gitte_eksoppg_Kunnskapsl/Programfag_studieforberedende/V09/REA3028_Matematikk_S2_V09.pdf.
Utdanningsdirektoratet. (2010). *REA3028 Matematikk S2*. Lastet, fra http://www.udir.no/upload/Eksamen/Videregaende/Tidligere_gitte_eksoppg_Kunnskapsl/Programfag_studieforberedende/V10/REA3028_Matematikk_S2_V10.pdf.

Vedlegg

Vedlegg 1: R94 versjon 1994

Modul 1: Elevene skal:

Mål 2 Statistikk

- *Kjenne de vanligste framstillingsmåtene av statistisk materiale og ære fortrolige med kurvediagram, søylediagram og sektordiagram*
- *Kunne samle og presentere et statistisk tallmateriale*
- *Kjenne begrepene hyppighet, variasjonsbredde, gjennomsnitt og median*
- *Kunne klassedele et statistisk materiale, beregne gjennomsnitt og tegne histogram*
- *Kjenne til eksempler på feiltolkning og misbruk av statistiske data.*

De følgende mål er overordnede mål for både 2MX, 2MY, 3MX og 3MY:

1. *Elevene skal*

- *Være fortrolig med matematisk notasjon og terminologi*
- *Kunne samtale og samarbeide om å løse matematiske problemer*
- *Kunne gjenkjenne bruk av vanlige matematiske og statistiske begreper i dagligliv og samfunn*
- *Kunne forstå og gjennomføre matematiske bevis og resonnementer*
- *Kunne innhente, bearbeide og presentere matematisk informasjon*
- *Kunne forstå og bruke en tekst*

2. *Elevene skal:*

- *Kunne formulere og løse problemer som krever initiativ, fantasi og innsikt*
- *Kjenne til og kunne velge mellom forskjellige strategier og hjelpemidler i problemløsning*
- *Kunne omforme problemer fra samfunn, naturfag, økonomi og teknikk til matematiske modeller*
- *Kunne vurdere å teste egne modeller og løsninger, tolke svar og modifisere løsningsstrategier*

8(2MX), 7(3MX),9(2MY), 7(3MY). elevene skal:

- *kjenne til bakgrunn og historisk utvikling av et matematisk område sm blir tatt opp i faget*

2MX: Elevene skal:

- *Kunne regne med fakulteter og binomialkoeffisienter*
- *Kunne bruke sannsynlighetsregningens addisjons- og produktsetning*
- *Kunne behandle ordnede utvalg med og uten tilbakelegging, uordnede utvalg uten tilbakelegging, og kunne bruke dette til å beregne sannsynligheter*
- *Skaffe seg innsikt i tilfeldige fenomener gjennom eksperimenter og simuleringer*
- *Være kjent med noen vanlige misoppfatninger om sjanser og sannsynligheter, og kunne løse enkle praktiske problemer ved hjelp av sannsynlighetsregning*

3MX: Elevene skal:

- *Kjenne den mengdeteoretiske formaliseringen av sannsynlighetsbegrepet og kunne bruke de grunnleggende regnereglene for sannsynligheter*
- *Kjenne betingede sannsynligheter*
- *Kjenne begrepet stokastisk variabel og kunne beregne forventning og varians*
- *Kjenne begrepene estimator og signifikans*
- *Kunne sette opp en statistisk modell og gjennomføre eksperimenter for å teste om hypoteser holder*
- *Kunne anvende binomisk fordeling til å utføre hypotesetesting*
- *Kunne utføre hypotesetesting og konstruere konfidensintervall i Gauss modeller når standardavviket er kjent*
- *Kunne framskaffe et statistisk datamateriale gjennom eksperimenter, undersøkelser eller simuleringer.*

2MY: Elevene skal:

- *Kunne regne med fakulteter og binomialkoeffisienter*
- *Kunne bruke sannsynlighetsregningens addisjons- og produktsetning*
- *Kunne behandle ordnede utvalg med og uten tilbakelegging, uordnede utvalg uten tilbakelegging, og kunne bruke dette til å beregne sannsynligheter*
- *Skaffe seg innsikt i tilfeldige fenomener gjennom eksperimenter og simuleringer*
- *Være kjent med noen vanlige misoppfatninger om sjanser og sannsynligheter, og kunne løse enkle praktiske problemer ved hjelp av sannsynlighetsregning*

- *Kunne beregne og vurdere ulike beliggenhets- og spredningsmål*
- *Være fortrolig med begrepene hyppighet, populasjon og stikkprøve.*

3MY: Elevene skal:

- *Kjenne begrepet stokastisk variabel og kunne beregne forventning og varians*
- *Kjenne begrepene estimator og signifikans*
- *Kunne sette opp en statistisk modell og gjennomføre eksperimenter for å teste om hypoteser holder*
- *Kunne anvende binomisk fordeling til å utføre hypotesetesting*
- *Kunne utføre hypotesetesting og konstruere konfidensintervall i Gauss modeller når standardavviket er kjent*
- *Kunne framskaffe et statistisk datamateriale gjennom eksperimenter, undersøkelser eller simuleringer.*
- *Kunne anvende statistikk til å vurdere resonnementer og påstander i for eksempel presse, reklame og debatter.*

Vedlegg 2: Læreplan for videregående skole R94 versjon 2000

1MXY: Mål 1 og 2 er overordnede mål for matematikkundervisningen, mens mål 5 er spesifikke mål om sannsynlighetsregningen.

Elevene skal:

Mål 1

- *Kunne samtale og samarbeide om matematiske spørsmål*
- *Kunne presentere og begrunne egne oppgaveløsninger og undersøkelser, kunne føre et matematisk resonnement og kunne bruke matematisk notasjon og terminologi*
- *Kunne lese og forstå en enkel matematisk tekst, kunne gjøre rede for innholdet og kunne bruke det i oppgaveløsning*
- *Kjenne til matematikkens flerkulturelle historie og ha innblikk i matematikkens betydning for naturvitenskap, teknologi, samfunnsliv og kultur.*

Mål 2

- *Kunne omforme et problem fra virkeligheten til matematisk form, kunne løse det og kunne vurdere gyldigheten til løsningen*
- *Kunne reflektere over egne metoder og resultater og kunne diskutere dem med andre*
- *Kunne bruke verktøy i utforskning og problemløsning*
- *Kunne oppdage og eksperimentere med mønstre, systemer og sammenhenger og kunne undersøke om resultatene de kommer fram til har generell gyldighet*
- *Kunne formulere og løse problemer der de må kombinere sine matematiske kunnskaper og ferdigheter med initiativ, fantasi og innsikt.*

Mål 5 Sannsynlighetsregning

- *Kjenne til begrepet sannsynlighetsmodell og kunne formulere og eksperimentere med enkle uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller.*

- *Kunne regne ut sannsynligheter ved å telle opp alle gunstige og alle mulige utfall i enkle eksempler*

- *kunne regne ut sannsynligheter ved hjelp av valgtrær, Venn-diagrammer og andre systematiske oppstillinger*

- *ha en intuitiv forståelse av uavhengighet og betinget sannsynlighet.*

- *kunne bruke addisjonssetningen og produktsetningen.*

Mål 1 og 2 er overordnede mål for 2MX, 3MX, 2MZ og 3MZ

Mål 1

- *kunne samtale og samarbeide om matematiske spørsmål og kunne presentere og begrunne egne oppgaveløsninger og undersøkelser*
- *kunne lese og forstå en enkel matematisk tekst, gjøre rede for innholdet og bruke det i oppgaveløsning*
- *kjenne begrepene implikasjon og ekvivalens og være kjent med noen vanlige matematiske bevistyper*
- *kjenne matematiske bevis for noen sentrale resultater i faget og selv kunne gjennomføre matematiske resonnementer*

- *kjenne til matematikkens flerkulturelle historie og ha innblikk i matematikkens betydning for naturvitenskap, teknologi, samfunnsliv og kultur.*

Mål 2

- *kunne formulere og analysere enkle matematiske modeller og kunne vurdere deres gyldighet*
- *kunne reflektere over og vurdere egne metoder og resultater og kunne diskutere dem med andre*
- *kunne bruke teknologiske verktøy i utforskning og problemløsning*
- *kjenne forskjellen på analytiske og numeriske løsninger og kunne gi svar på eksakt form eller med fornuftig avrunding*
- *kunne oppdage og eksperimentere med mønstre, systemer og sammenhenger og kunne undersøke om resultatene de kommer fram til, har generell gyldighet*
- *kunne formulere og løse problemer der de må kombinere sine matematiske kunnskaper og ferdigheter med initiativ, originalitet og innsikt.*

I 2MX er hovedmomentene
Elevene skal:

- *kjenne begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet, og kunne bruke Bayes' setning på to hendelser*

- *kunne behandle ordnede utvalg med og uten tilbakelegging, uordnede utvalg uten tilbakelegging, og kunne bruke dette til å beregne sannsynligheter*

- *kunne regne med binomiske og hypergeometriske sannsynligheter*

I 3MX er hovedmomentene
Elevene skal:

- *kjenne begrepene fordeling og stokastisk variabel for endelige utfallsrom og kunne finne forventning, varians og standardavvik*

- *kjenne regnereglene for forventningen til en lineær kombinasjon av to stokastiske variable og variansen til en lineær kombinasjon av to uavhengige stokastiske variable*

- *kjenne forventning og varians til en binomisk fordeling*
- *kjenne normalfordelingene og kunne regne ut sannsynligheter knyttet til normalfordelinger*
- *ha kjennskap til den sentrale grense-setningen og kunne beregne sannsynligheter ved å tilnærme binomiske fordelinger med normalfordelinger*

- *forstå at utvalg fra en stor populasjon kan betraktes som uavhengige gjentak og kunne beregne punktestimat med standardfeil og tilnærmet konfidensintervall for en populasjonsandel og et populasjonsgjennomsnitt.*

I 2MZ er hovedmomentene
Elevene skal:

- *kjenne begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet og kunne bruke Bayes' setning på to hendelser*

- *være kjent med ordnede utvalg med og uten tilbakelegging, uordnede utvalg uten tilbakelegging, og kunne gjøre enkle sannsynlighetsberegninger knyttet til slike utvalg*

- *kunne regne med binomiske og hypergeometriske sannsynligheter*

I 3MZ er hovedmomentene
Elevene skal:

- *kjenne begrepene fordeling og stokastisk variabel for endelige utfallsrom og kunne finne forventning, varians og standardavvik*
- *kjenne forventning og varians til en binomisk fordeling*
- *kjenne normalfordelingene og vite litt om deres betydning*

- *kunne tilnærme binomiske fordelinger med normalfordelinger*
- *forstå at utvalg fra en stor populasjon kan betraktes som uavhengige gjentak og kunne beregne punktestimat med standardfeil og tilnærmet konfidensintervall for en populasjonsandel*

Vedlegg 3: Læreplan for videregående skole kunnskapsløftet 2006

1P:

- *Lage eksempel og simuleringer av tilfeldige hendelser og gjøre rede for begrepet sannsynlighet*
- *Beregne sannsynlighet ved å telle opp alle gunstige og alle mulige utfall fra tabeller og ved å systematisere opptellinger og bruke addisjonssetningen og produktsetningen i praktiske sammenhenger*

1T:

- *Formulere, eksperimentere med og drøfte enkle uniforme og ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller*
- *Beregne sannsynlighet ved hjelp av systematiske oppstillinger, og bruke addisjonssetningen og produktsetningen*
- *Bruke begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet i enkle situasjoner*
- *Lage binomiske sannsynlighetsmodeller ut fra praktiske eksempel, og beregne binomisk sannsynlighet ved hjelp av formler og digitale hjelpemiddel*

2P:

- *Planlegge, gjennomføre og vurdere statistiske undersøkelser*
- *Beregne kumulativfrekvens og finne og drøfte sentralmål og spredningsmål*
- *Representere data i tabeller og diagram og drøfte ulike dataframstillinger og hvilket inntrykk de kan gi.*
- *Gruppere data og beregne sentralmål for et gruppert datamateriale*

2T:

- *Gjøre greie for begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet og bruke Bayes' setning på to hendelser*
- *Beregne sannsynlighet ved ordnet utvalg med og uten tilbakelegging, og ved uordnet utvalg uten tilbakelegging*
- *Regne med binomisk og hypergeometrisk sannsynlighet.*

R1:

- *Gjøre rede for begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet, og utlede og anvende Bayes' setning på to hendelser.*
- *Drøfte kombinatoriske problemer knyttet til ordnende utvalg med og uten tilbakelegging og uordnede utvalg uten tilbakelegging, og bruke dette til å utlede regler for beregning av sannsynlighet.*

R2: Det finnes ingen kompetansemål som omfatter statistikk og sannsynlighet i R2.

S1:

- *Regne med binomialkoeffisienter og bygge opp Pascals talltrekant*
- *gjøre rede for ordnede utvalg med og uten tilbakelegging og uordnede utvalg uten tilbakelegging, og gjøre enkle sannsynlighetsberegninger knyttet til slike utvalg*
- *lage binomiske og hypergeometriske sannsynlighetsmodeller ut fra praktiske situasjoner, og regne med sannsynligheter for slike modeller*

S2:

- *Gjøre rede for begrepene fordeling og stokastisk variabel for endelige utfallsrom, og finne forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel*
- *Gjøre rede for betydningen av normalfordelingene og regne ut sannsynligheter knyttet til dem*
- *Gjøre rede for sentralgrensesetningen og bruke den til å beregne sannsynligheter for summer av uavhengige stokastiske variabler og binomiske fordelinger*
- *Gjennomføre enkel hypotesetesting ved hjelp av p-verdier og tolke resultatet.*

X:

- *Gjøre rede for begrepene fordeling og stokastisk variabel for endelige utfallsrom, og finne forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel*
- *Gjøre rede for betydningen av normalfordelingene og regne ut sannsynligheter knyttet til dem*
- *Bruke sentralgrensesetningen til å beregne sannsynligheter for summer av uavhengige stokastiske variabler og binomiske fordelinger*
- *Planlegge, utføre og presentere en oppgave knyttet til statistiske anvendelser av sannsynlighetsregning i hypotesetesting eller utvalgsundersøkelser.*

Vedlegg 4 Mønsterplan for grunnskolen 1987

1.-3. Klasse:

- *Innsamling og enkel systematisering av data: Søylediagrammer*

4.-6. Klasse:

- *Innsamling og enkel systematisering av data: Innføring av histogram*
- *Tolking av enkle tabeller og diagrammer.*
- *Beregning av gjennomsnitt i enkle eksempler*

7.-9. Klasse:

- *Planlegging og gjennomføring av undersøkelser: innsamling og systematisering av data.*
- *Grafiske illustrasjoner.*
- *Frekvens og frekvenstabeller*
- *Beregning av gjennomsnitt. Begrepet median*
- *Tolking av data: Øvelse i kritisk vurdering av statistisk materiale. Begrepet prognose*
- *Innføring i sannsynlighetsbegrepet gjennom praktiske forsøk.*

Vedlegg 5 Læreplan for grunnskolen 1997

Fra og med 4. klasse finner vi mer hovedmomenter som mer eksplisitt handler om statistikk og sannsynlighet.
I læreplanen finner vi disse målene:

I 4. klasse er hovedmomentene:

i opplæringen skal elevene:

- *samle, notere og illustrere data, for eksempel med tellestreker, tabeller og søylediagrammer.*

I 5. klasse er hovedmomentene:
I opplæringen skal elevene:

- *trene seg i å samtale om, samle og tolke data og bli kjent med databaser*
- *gjøre erfaringer med å systematisere og presentere data ved hjelp av tabeller og enkle diagrammer, spesielt søylediagrammer*

I 6. klasse er hovedmomentene:
I opplæringen skal elevene:

- *øve seg i å samle, tolke, systematisere og presentere data*
- *vinne erfaringer med å ordne dataene i rekkefølge etter størrelse og lære å finne median og typetall*
- *gjøre erfaringer med sannsynlighet ved å reflektere over og samtale om situasjoner fra dagliglivet, spill og forskjellige eksperimenter*

I 7. klasse er hovedmomentene:
I opplæringen skal elevene:

- *gjøre flere erfaringer med data, med å finne fram til hensiktsmessig gruppering når det er aktuelt, og med å bruke søyle- og sektordiagram.*
- *arbeide med begrepet gjennomsnitt*
- *vurdere, og etter hvert å beskrive sannsynlighet som tall i området fra 0 til 1- fra erfaringer i dagliglivet, i spill og ved eksperimenter*
- *vinne erfaringer med å simulere fenomener med tilfeldighet og usikkerhet.*

I 8. klasse er hovedmomentene:
I opplæringen skal elevene:

- *planlegge å lage skjema for datainnsamling, ordne dataene og klassedele materialet*
- *trene seg i å bruke hensiktsmessige mål for sentraltendens og lære å bruke variasjonsbredde som et enkelt spredningsmål*
- *- tolke og lage diagrammer ved hjelp av for eksempel informasjonsteknologi, og vurdere hvordan framstilling av data kan påvirke oppfatningen.*
- *vinne erfaringer med å bruke statistiske data tverrfaglig, for eksempel med søking i databaser*

I 9. klasse er hovedmomentene:
I opplæringen skal elevene:

- *arbeide med begreper og ferdigheter i statistikk*
- *arbeide med å utvikle mer presise begreper og uttrykksmåter for sannsynlighet og med å tallfeste sannsynlighet*
- *gjøre erfaringer med relativ at frekvens noen ganger må brukes som et anslag for sannsynlighet*
- *beregne sannsynligheter ut fra situasjoner hvor alle enkeltutfall har like stor sjanse*
- *undersøke situasjoner der det må regnes med usikkerhet, risiko og sjanse, for eksempel spill, forsikring, etterforskning og medisin*
- *prøve ut simulering av praktiske situasjoner der tilfeldighet inngår.*

I 10. klasse er hovedmomentene:
I opplæringen skal elevene:

- *gjennomføre enkle statistiske uttrykk med bokstaver for variable størrelser kan brukes til å formulere og bevise generelle sammenhenger*

- *finne og trekke ut informasjon fra tabeller og annet datamateriale og drøfte eventuelle usikkerheter, skjevheter og feilkilder*
- *ordne og gruppere data. Finne, bruke og vurdere typetall, median og gjennomsnitt som hensiktsmessige mål for sentraltendens, og variasjonsbredde og eventuelt andre mål for spredning*
- *- arbeide med å lage statistiske grafer og diagrammer, bl.a. søylediagram, kurvediagram, sektordiagram og punktdiagram for eksempel ved hjelp av informasjonsteknologi*
- *- tolke resultater fra statistiske beregninger, tolke grafer og diagrammer og vurdere dem kritisk*
- *arbeide videre med begreper i sannsynlighet*

Vedlegg 6 Læreplan for grunnskolen Kunnskapsløftet 2006

Elevene skal kunne:

Etter 2. års-trinn:

- *samle, sortere, notere og illustrere enkle data med tellestreker, tabeller og søylediagram*

Etter 4. års-trinn:

- *samle, sortere, notere og illustrere data med tellestreker, tabeller og søylediagram, og kommentere illustrasjonene*

Etter 7. års-trinn:

- *planlegge og samle inn data i samband med observasjoner, spørreundersøkelser og eksperiment*
- *representere data i tabeller og diagram som er framstilt digitalt og manuelt, og lese, tolke og vurdere hvor nyttige de er*
- *finne median, typetall og gjennomsnitt av enkle datasett og vurdere de i forhold til hverandre*
- *vurdere sjanser i dagligdagse sammenhenger, spill og eksperiment og beregne sannsynligheter i enkle situasjoner*

Etter 10. års-trinn:

- *gjennomføre undersøkelser og bruke databaser til å søke etter og analysere statistiske data og vise kildekritikk*
- *ordne og gruppere data, finne og drøfte median, typetall, gjennomsnitt og variasjonsbredde, og presentere data med og uten digitale verktøy*

- *finne sannsynligheter gjennom eksperimentering, simulering og beregning i dagligdagse sammenhenger og spell*
- *beskrive utfallsrom og uttrykke sannsynligheter som brøk, prosent og desimaltall*
- *vise med eksempel og finne de mulige løsningene på enkle kombinatoriske problem*

Vedlegg 7 Intervju med Tom Lindstrøm

Spørsmål 1.

Kan du beskrive din rolle i forbindelse med utarbeidelsen av R94?

Svar:

Jeg var ikke med i den opprinnelige læreplangruppen for grunnkurset, men kom med etter at det første utkastet hadde møtt betydelig motbør. Mitt "politiske" hovedbidrag var at jeg sammen med Knut Jørgensen (St. Olav vgs i Sarpsborg) kom med et alternativt forslag med deling av 1MX og 1 MY ved juletider. Departementet valgte dette forslaget fremfor flertallsforslaget med sammenholdt 1. klasse. Senere var jeg med i læreplangruppen for VK1 og VK2 (som det den gang het). Jeg var også med i læreplangruppen som noen år senere reviderte læreplanene.

Spørsmål 2.

Etter hva jeg har funnet ut var det før R94 lite statistikk og sannsynlighetsregning i læreplanen. Hva var grunnen til at disse emnene nå fikk så stort omfang i forhold til tidligere?

Svar:

Jeg tror det var tre hovedargumenter: For det første mente politikere og andre at det var større behov for kjennskap til statistikk i det nye "kunnskapssamfunnet", for det andre presset statistikkmiljøet på for å synliggjøre faget, og for det tredje hadde de fleste andre land etter hvert fått sannsynlighetsregning og statistikk med i sine læreplaner

Spørsmål 3.

Jeg har forstått det som at MX-retningen var beregnet for videre studier i mer teoretisk matematikk og MY-retningen var beregnet for videre studier i for eksempel økonomi og biologi. Det er lite som skiller læreplanmålene i statistikk og sannsynlighetsregning i disse to retningene. Hvilke vurderinger ble gjort i forhold til forskjellen på disse to retningene og videre nytteverdi av statistikk og sannsynlighet?

Svar:

Jeg vet ikke hvor faglige disse begrunnelsene var. Fagplanarbeidet skjedde under et ganske stort tidspress, og det var åpenbart praktisk å resirkulere flest mulig formuleringer. Små skoler så seg også om etter muligheten for å samordne noe av undervisningen. Det dreide seg uansett om grunnleggende begreper og teknikker med naturlige anvendelser både i realfag/teknologi og samfunnsfag/økonomi.

Spørsmål 4.

Ved revisjonen av planen i 2000 kom en del endringer. For eksempel inneholdt læreplanen ingen statistikk i 1 videregående, som det gjorde før revisjonen, men en del sannsynlighetsregning. Hvilke vurderinger ble gjort i forhold til denne endringen?

Svar:

Sannsynlighetsregningen og statistikken i den opprinnelige planen fungerte ikke godt. De statistiske teknikkene (hypotesetesting og konfidensintervaller) var ikke godt nok underbygget, og lærestoffet fikk enn "lang og smal" utforming som ikke førte til solid læring. Hovedhensikten med omlegningen var å redusere omfanget av statistikken for å få bedre tid til å bygge opp et sannsynlighetsteoretisk grunnlag. Etter L97 var statistikken i 1. klasse nærmest en repetisjon av den deskriptive statistikken på ungdomstrinnet, og man så liten grunn til å beholde den

Spørsmål 5.

Dersom elever ville ta allmennfaglig utdannelse, måtte de ha matematikk i første klasse, og deretter kunne de velge det bort. Ble det gjort noen vurderinger i forhold til hva et minimum av kompetanse i statistikk og sannsynlighetsregning måtte være for de som eventuelt valgte bort matematikk senere?

Svar:

Dette var nok ett av flere momenter. Som sagt følte man at den beskrivende statistikken var godt dekket på ungdomstrinnet, og at det var vanskelig å komme videre i den retningen uten å legge et sannsynlighetsteoretisk grunnlag først. Samtidig ble grunnleggende sannsynlighetsregning regnet som nyttig i seg selv.

Spørsmål 6.

Hva var grunnen til at hypotesetesting ble fjernet fra planen ved revisjonen i 2000?

Svar:

Som sagt følte man et behov for å bruke mer tid på oppbygningen av teorien, og da ble det ikke plass til både hypotesetesting og konfidensintervaller. Flertallet i det statistiske miljøet gikk inn for å beholde konfidensintervaller — det ble nok oppfattet både som "nyttigst" og enklest å bruke/forstå.

Vedlegg 8 Intervju Kristian Ranestad

1. Kan du beskrive din rolle i forbindelse med utarbeidelsen av K06?

Jeg var leder for en gruppe på 6 som fikk i oppdrag å lage forslag til læreplaner for programfaget matematikk i den videregående skolen som en del av K06.

2. Dersom en elev velger den 1T, R1 og R2, vil statistikk ikke være pensum i det hele tatt for denne eleven i videregående, noe det var i R94 med valg av tilsvarende retning, Mx-retningen. Hvilke vurderinger ligger til grunn for å utelate statistikk i denne retningen?

-I sammensetning av de ulike fagene prioriterte gruppen ikke å ta med flere hovedområder enn det var tid til for å behandle vært område ordentlig.

-Gruppen ønsket også å bruke valg av hovedområder til å skille S-løpet og R-løpet, slik at skillet mellom de to ble tydeligere og ikke et spørsmål om hvor mye en dekket av hvert område. Etter kontakt med økonomi/samfunnsfags utdanninger og realfag/ingeniørutdanninger valgte vi integrasjon, differensiallikninger og geometri i R-løpet, funksjoner med derivasjon (ikke integrasjon) og funksjonsdrøfting og statistikk i S-løpet

3. Dersom man velger "minste motstands vei" i matematikk på videregående vil dette si 1P og 2P, og på mange skoler 1P og S1, ettersom mange ikke tilbyr 2P. Ble det gjort noen vurderinger omkring hva som kreves av kunnskaper i statistikk og sannsynlighet for elever som velger "minste motstands vei"?

Jeg deltok ikke i gruppen som foreslo planene i 1P og 2P. For S1 ble vi bedt om å lage en plan som bygger på 1P. For å kunne bygge videre til et helt S-løp er det en del tematisk overlapp med 1T. I tillegg er det kombinatorikk/sannsynlighet. Det var for oss klart at det ikke var plass til både sannsynlighet og statistikk. Statistikken er derfor konsentrert i S2. Også her var den prinsipiellle vurderingen at flere emner med mindre dybde er mindre nyttig enn færre emner med rimelig dybde.

4. Hvilke vurderinger ligger til grunn for målene i statistikk og sannsynlighetsregning i S1 og S2?

Den prinsipielle vurderingen om valg av hovedområder brukte vi også i noen grad i valg av mål. Det var altså for oss et enten eller, ikke et både og . Valg av mål gjorde vi etter vurdering av relevans og den erfaring som er gjort med ulike av disse målene i videregående sole de siste 15 årene.

5. Jeg leser i timms advanced 2008 at norsk videregående skole hadde mer statistikk og sannsynlighet i læreplanen(R94) enn mange andre land. Ble det gjort noen vurderinger av innhold i læreplaner i andre land ved utarbeidelse av K06?

Vi undersøkte og leste læreplaner fra de andre skandinaviske landene i tillegg til tyske og amerikanske læreplaner, uten at noe av disse fikk en spesiell eller direkte innvirkning på våre valg. Det viktigste vi tok med oss fra dem var en høy grad av detaljering i mål. Dette var klart mot den generelle filosofien som vi ble bedt om å følge av direktoratet som ledet arbeidet med K06. Ved å insistere på tydelige mål fikk vi likevel gjennomslag.