UNIVERSITETET I AGDER

Elever og læreboken

- en casestudie om læreboken sin rolle hos matematikkelever

Gunhild Skåsheim

Veileder
Simon Goodchild

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2011
Fakultet for teknologi og realfag
Institutt for matematiske fag

Forord

Observasjoner jeg gjorde i en mindre oppgave i løpet av masterstudiet tilsa at elever brukte læreboken på forskjellige måter, og det kunne se ut som at elevene hadde ulikt læringsutbytte avhengig av bruken av læreboken. Observasjonene motiverte meg til valg av tema for denne masteroppgaven.

Jeg vil rette en stor takk til deltakerklassen og læreren for at dere lot meg være til stede i undervisningen med alle de forstyrrelsene det har måttet medføre.

Min veileder, Professor Simon Goodchild, har bidratt med svært mange nyttige innspill i løpet av den tiden det har tatt å fullføre oppgaven. Du har vært svært tålmodig, vist forståelse og hjulpet meg videre når jeg har trengt det. Tusen takk!

En stor takk til min mann, som har vært en god støttespiller under arbeidet og har lagt til rette for at jeg skulle kunne gjennomføre studiene mine ved å være fleksibel i hverdagen. Min mor har vært god å diskutere med, kommet med innspill og lyttet til meg når jeg har hatt behov for å tenke høyt. Familie og venner har vært støttende gjennom hele prosessen.

Balestrand, 6.6.2011

Gunhild Skåsheim

Sammendrag

Elever og læreboken er en casestudie av læreboken sin rolle hos matematikkelever. Når en lærebok er i bruk i undervisningen er det sannsynlig at det vil utvikles en relasjon mellom elevene og læreboken. Dermed er det rimelig å anta at elevene påvirkes av læreboken på en eller annen måte. Studien forsøker å synliggjøre eventuelle relasjoner som kan oppstå mellom elevenes forståelse og hvordan de bruker læreboken. Jeg har forsøkt å finne karakteristiske trekk ved elevenes forståelse, selv om det er umulig å vite med sikkerhet hva et annet menneske tenker. I klassifiseringen av elevenes forståelse for matematikk har jeg brukt Skemp (1976) sin teori og begrepene instrumentell forståelse og relasjonsforståelse.

Problemstilling

- Hva er lærebokens rolle i undervisningen?
- Hvordan bruker elevene læreboken?
- Er det mulig å finne noen sammenheng mellom hvordan elevene bruker læreboken og karakteristikken av deres forståelse for matematikk?

Metode

Studien bygger på konstruktivistiske prinspipp der elevene skaper sin egen kunnskap, og læring er et resultat av hvordan elevene arbeider med ulike stimuli. Innsamling av data ble gjort ved kvalitative metoder. Dataene ble samlet inn ved å observere undervisning, ta feltnotater, gjennomføre en test, intervjue elever og lærer i tillegg til å ta bilder av elevenes arbeidsbøker. Analysen av data ble gjennomført ved å betrakte elevenes aktivitet fra flere synsvinkler i den hensikt å få et større og dermed sikrere tolkningsgrunnlag.

Resultat

I undervisningen ble ingen andre kilder enn læreboken eller materiell tilknyttet læreboken brukt. Framdriftsplanen for undervisningen fulgte delkapitlene i læreboken, og læreren bygget all undervisning på tekstene i læreboken. Elevene arbeidet med oppgaver fra læreboken hver eneste time. Læreboken hadde en stor og sentral rolle i undervisningen. Elevene brukte læreboken på flere forskjellige måter, nesten hver elev hadde sin egen, individuelle måte. Felles for alle elevene var at de brukte lærebokens fasit. Bruken av læreboken kunne variere fordi elevene ikke gjorde det samme hver eneste gang. Den tydeligste forskjellen mellom måtene å bruke boken på var om elevene leste eller brukte lærebokens fagtekst eller ikke. Kartleggingen av elevenes forståelse for matematikk pekte på at elevene kunne vise tegn til både relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, men for hver elev var den ene typen forståelse ofte var mer fremtredende enn den andre.

Datamaterialet var ikke entydig, men viste svake tendenser til at elever med relasjonsforståelse helst leste fagtekst og brukte fagteksten, reglene og eksemplene i oppgaveløsingen. Materialet tydet og på at elever som kun brukte eksemplene og reglene uthevet i rammer i hovedsak var elever som viste tegn til instrumentell forståelse. At sammenhengen mellom bruken av læreboken og elevenes forståelse for matematikk ikke er tydeligere er overraskende fordi elevene deler i stor grad de samme erfaringene med matematikk. Det kan tyde på at lærerens påvirkning og rolle i undervisningen er avgjørende for elevenes forståelse for matematikk. Studien viser at det ville være interessant å undersøke om noen måter å bruke læreboken på er mer effektive enn andre.

Summary

Students and the textbook is a case study of the role of the textbook among students. When a textbook is used in lessons, it is likely that a relation between the text and pupils will develop. Then, it is reasonable to assume that the students are influenced by the textbook in one way or the other. This study sets out to illustrate any relation that might exist between students understanding and the way in which they use the textbook. I have attempted to identify what is characteristic of each student's understanding, although realizing the impossibility to determine anyone's perception with certainty. To classify the students understanding of mathematics, I have used the theory and the concepts of Skemp (1976), instrumental and relational understanding.

Research questions

- What position do the textbook have in the class?
- How do the students use the textbook?
- Is there any relation between how students use the textbook and the nature of the students understanding of mathematics?

Methods

The study builds on constructivist principles where the students build their own knowledge, and learning is a result of how the students engage in different types of experience. I have used qualitative methods to collect data. The data was collected by observing lessons, take field notes, conduct a test, interview students and the teacher and taking photographs of the workbooks of the students. The analysis was carried out by looking at the students' activity from several points of view with the intention of getting a broader and thus more secure foundation for the interpretation.

Result

During the lessons, there were used no other resources than the textbook, or the material associated with the textbook, for example a set of problems or the suggestions for solutions. The lessons were structured and organized following the structure and organization of the textbook, and the teacher based all the lessons on the texts in the textbook. The textbook had a central and important position in the class. The students used the textbook in different ways. Almost every student had his or her own, individual, way to use it. All of the students used the answers to the tasks at the end of the textbook. The student's use of the mathematical text in the textbook, whether they gave it any attention or not, was the clearest difference between how the students used the book. The identification of the nature of students understanding of mathematics indicated that the students could show signs of both instrumental and relational understanding, but that for each student one or other of the categories was more striking.

The evidence is not unequivocal, but indicated weak tendencies towards that the students who mainly showed signs of relational understanding read the text in the textbook and used the text, the formulas and then solved the tasks. The study also indicates that students who only used the solved tasks and the formulas usually were students that showed to a greater extent instrumental understanding. The weak relation between the textbook and students understanding of mathematics is surprising because the students share to a considerable extent the same experiences with mathematics. The study points out that it would be of interest to examine further whether using the textbook in some ways are more effective than other ways.

Innhold

1 Innledning

Læreboken sin rolle hos matematikkelever kan variere. Min oppgave handler om lærebokens rolle i kommunikasjonen av matematikk og matematiske ideer, samt hvordan elevene bruker læreboken. Videre har jeg undersøkt om det finnes en relasjon mellom hvordan elevene forstår matematikk og deres bruk av læreboken. For å karakterisere elevenes forståelse av matematikk har jeg tatt utgangspunkt i Skemp (1976) sine kategorier, instrumentell forståelse og relasjonsforståelse. Jeg har brukt observasjon, intervju, analyse av en kapitteltest og studert elevenes arbeidsbøker for å undersøke lærebokens rolle i undervisningen, hvordan elevene bruker læreboken og hva slags forståelse for matematikk elevene har. Avhandlingen ”Elever og læreboken – en casestudie av læreboken sin rolle hos matematikkelever” forklarer hvordan jeg utførte min forskning og de resultatene jeg fant.

Innledningskapittelet handler om hva slags undervisningserfaring jeg har og mine verdier knyttet til undervisning og læring i matematikk. Videre presenteres bakgrunnen for problemstillingene, problemstillingene og min forståelse av dem. I tillegg blir strukturen i oppgaven presentert.

1.1 Min bakgrunn

Jeg startet på allmennlærerutdanning høsten 2004. Etter å ha fullført tre av fire studieår valgte jeg å avbryte allmennlærerutdanningen og fortsette på masterutdanning i matematikkdidaktikk. Jeg følte at som allmennlærer ville jeg ikke ha god nok kompetanse innenfor fagfeltene jeg skulle undervise og ønsket heller å fordype meg i ett emne som interesserte meg. I løpet av allmennlærerutdanningen ble min interesse for matematikk større og større, og det som fasinerte meg var hvordan man kunne gjøre matematikk tilgjengelig for elevene.

Da jeg startet arbeidet med masteroppgaven hadde jeg ingen undervisningserfaring utenom praksisperiodene på allmennlærerutdanningen. Jeg har undervist i matematikk på mellomtrinnet og ungdomsskolen, både vanlig klasseromsundervisning og spesialpedagogisk undervisning, parallelt med at jeg har skrevet oppgaven. Undervisningserfaringen har ført til at min forståelse og erfaring med undervisning av matematikk har endret seg i løpet av arbeidet med masteroppgaven. Jeg mener det er viktig at elevene opplever at matematikken de lærer kan brukes til noe, og at de er engasjert i oppgavene. Min erfaring er at når elevene er aktive i læringsprosessen er utbyttet større enn om de er passive mottakere.

Skolehverdagen som lærer er helt annerledes enn hva jeg trodde. Tid er en mangelvare, og mye av tiden blir brukt til møter og rapportskriving, som går på bekostning av planlegging av undervisningen. I min jobbhverdag opplever jeg at elevene står fort fast og spør ofte om hjelp før de i det hele tatt forsøker å løse oppgaven. De fokuserer på om de er ferdige med oppgavene i stedet for hva de har lært. Derfor ser jeg på det som min oppgave å oppøve elevenes evne til selvstendig tenkning. Når elevene tenker selv og tar del i oppgavene blir undervisningen mer interessant og spennende, og elevene blir igjen mer engasjerte. For å få til undervisning som engasjerer elevene må jeg fokusere på hver enkelt elev sine forutsetninger, ellers blir ikke matematikken tilgjengelig for dem.

1.2 Oppgavens matematiske kontekst og bakgrunn

Jeg har siden videregående skole hatt en interesse for hvordan ulike emner formidles. Tema jeg fant interessant og spennende opplevde jeg at mine medelever syntes var vanskelig. Samme erfaringen har jeg fra allmennlærerutdanningen. Med bakgrunn i min egen erfaring og interesse ønsket jeg å skrive en masteroppgave der jeg så på hvordan et tema ble formidlet.

Da jeg fikk kontakt med en skole forhørte jeg meg med læreren om når de skulle begynne på et nytt tema, og når det passet for dem at jeg kom for å observere. Tilfeldigvis skulle klassen begynne på vektorregning rett etter nyttår, hvilket var et helt nytt tema for elevene. Jeg mente at et helt nytt tema ville kunne gi meg bedre innsikt i elevenes forståelse og hva som påvirket deres forståelse for vektorregning fordi jeg da ville observere alt de hadde lært om vektorregning.

Masteroppgavens problemstilling har blitt til på bakgrunn av observasjoner jeg gjorde i en annen oppgave på masterstudiet, kalt Mathematics Education Research Group-oppgave (MERG-oppgave). Jeg syntes resultatene i MERG-oppgaven var så interessante at jeg bestemte meg for at masteroppgaven skulle bygge videre på funnene. For å gi en forståelse av masteroppgavens og problemstillingenes bakgrunn presenterer jeg arbeidet med MERG før problemstillingene i masteroppgaven blir presentert.

1.3 Arbeidet med MERG

MERG-oppgaven ble skrevet innenfor faget *Undervisning og læring i matematikk* ved Universitetet i Agder. Jeg observerte fem undervisningstimer og intervjuet tre elever og en lærer. Problemstillingene ble laget ut i fra observasjoner jeg oppfattet som interessante under datainnsamlingen. Oppgaven hadde følgende problemstillinger:

- Hvordan blir det matematiske konseptet/ begrepet derivasjon behandlet i undervisningen under innføringen av temaet?
- Finnes det en sammenheng mellom elevenes løsningsstrategier og måten derivasjon ble behandlet på?
- Hvordan blir læreboken brukt i undervisningen?

Konklusjonen var at selv om derivasjon ble behandlet på flere måter i undervisningen, hadde ikke elevene en god forståelse for begrepet. Elevene brukte derivasjonsreglene, men de så ikke ut til å forstå hvorfor de kunne bruke dem. Læreboken ble fulgt til punkt og prikke selv om læreren sa at hun brukte sin erfaring i forhold til presentasjon av begrepet. Jeg syntes resultatene var veldig interessante og lurte på om situasjonen var særegen for denne klassen eller om det var en normal situasjon på videregående skoler. MERG-oppgaven ga meg inspirasjon til å begynne på en masteroppgave som fokuserte på læreboken og hvordan den påvirker elevenes forståelse for matematikk. Da jeg skulle bestemme meg for tema i masteroppgaven ønsket jeg å bygge videre på observasjonene gjort i MERG som bygget på mitt eget interessefelt. Med utgangspunkt i resultatene fra MERG-oppgaven dannet jeg meg et bilde av hva jeg ønsket å finne ut av. Slik oppstod forskningsspørsmålene til masteroppgaven.

1.4 Problemstilling

MERG-arbeidet og etterfølgende refleksjon har ledet meg frem til følgende problemstilinger for masteroppgaven:

- Hva er lærebokens rolle i undervisningen?
- Hvordan bruker elevene læreboken?

- Er det mulig å finne noen sammenheng mellom hvordan elevene bruker læreboken og karakteristikken av deres forståelse for matematikk?

Med begrepet lærebok mener jeg kun tekstboken elevene har fremfor seg i undervisningen. I undervisningen brukte læreren lærebokens løsningsforslag, og oppsummerende oppgaver i tillegg til læreboken. Elevene brukte læreboken gjennom hele undervisningen og de oppsummerende oppgavene de siste timene før kapittelprøven. Løsningsforslag og oppsummerende oppgaver er tilgjengelig for alle på forlagets internettside for læreboken ("SinusR1", 2008). I tillegg oppfordret læreren elevene til å arbeide med oppgavesamlingen tilhørende læreboken. Oppgavesamlingen ble kun brukt av én elev i undervisningen. I det tidsrommet jeg gjorde datainnsamling ble ingen andre kilder enn selve læreboken, oppgavesamlingen, løsningsforslag og de oppsummerende oppgavene benyttet. Læreren oppfordret elevene til å arbeide med oppgaver tilgjengelig på bokens internettside i lekse, men brukte ikke materiellet i timene.

I begrepet undervisning legger jeg den tiden elevene er inne i klasserommet og har timeplanfestede mattematikktimer. Undervisningen jeg observerte består både av at lærer formidler matematikk til elevene, samt at elevene har en arbeidsøkt der de arbeider med oppgaver og læreren hjelper og gir veiledning.

1.5 Egenforståelse av problemstillingene

Hva er lærebokens rolle i undervisningen?
I klasserom kan lærebokens rolle variere. Undervisningen kan være sterkt knyttet til læreboken, enten ved at lærer i stor grad benytter læreboken under formidling av matematikk, eller ved at elevene bruker boken i stor grad når de arbeider med oppgaver eller leser tekst selv. Lærebokens rolle behøver ikke å være sentral i undervisningen, det kan være at læreren frigjør seg fra læreboken, bruker flere kilder og egen erfaring. Når jeg vil undersøke lærebokens rolle i undervisningen vil jeg finne ut hvordan både elever og lærere bruker læreboken i de timeplanfestede matematikktimene på skolen.

Hvordan bruker elevene læreboken?
I mitt arbeid med MERG-oppgaven oppdaget jeg at elevene brukte læreboken på forskjellige måter. Flere elever arbeidet med faget ved å finne ut hva slags oppgaver de skulle gjøre, slo opp i fasiten bakerst i læreboken og skrev av svarene før de begynte å arbeide med oppgavene. Hvis de ikke forstod oppgaven lot de bare svaret fra fasiten stå, og så ut til å være fornøyd med arbeidet de hadde gjort. En av elevene fortalte under intervjuet at hvis han hang etter med leksene, hendte det at han bare skrev av fasiten i stedet for å regne oppgavene. I hovedsak brukte fasiten for å finne ut om de hadde regnet riktig.

Andre elever benyttet læreboken som et oppslagsverk, der de slo opp i læreboken for å finne ut hvordan de skulle løse oppgaver de ikke umiddelbart klarte. Enkelte elever brukte læreboken som en støtte til undervisningen, der de fulgte med i boken når læreren formidlet matematikk.

Jeg ville observere hvordan elevene bruker læreboken for å kunne studere om det finnes noen mulige sammenhenger mellom bruken og elevenes forståelse for matematikk.

Er det mulig å finne noen sammenheng mellom hvordan elevene bruker læreboken og karakteristikken av deres forståelse for matematikk?
Forståelse for matematikk kan deles inn i flere kategorier, som forklares i teorikapittelet. Jeg mener at når elevene bruker læreboken på forskjellige måter, kan påvirke det læringsutbyttet elevene sitter igjen med. I dette forskningsspørsmålet vil jeg derfor undersøke om det er mulig å avdekke en relasjon mellom hvordan elevene bruker læreboken og hva slags kunnskap og forståelse elevene har for faget.

1.6 Min forskning

I min forskning har jeg samlet inn data, hovedsakelig gjennom observasjon av undervisning, gjennomføring av en test, intervju av elever og lærer, samt tatt bilder av elevenes arbeidsbøker. Jeg har analysert læreboken for å finne ut om den fremmer ulike typer forståelse for matematikk, samt undersøkt hvordan læreboken blir brukt i undervisningen gjennom observasjon av undervisning og intervju. Videre har jeg studert hvordan elevene bruker læreboken gjennom observasjon av både undervisning og arbeidsbøker. I tillegg har jeg utforsket elevenes oppgaveløsninger i arbeidsbøkene og observert deres atferd og utsagn i undervisningen for deretter å lage hypoteser om karakteristikken av elevenes forståelse for matematikk. Til slutt har jeg presentert og analysert funnene.

1.7 Oppgavens struktur

Oppgaven består av syv ulike kapitler. Først blir oppgaven presentert i introduksjonen. Deretter følger teorikapittelet der jeg har sett på ulike teorier om forståelse for matematikk og begrunner hvilken teori jeg benytter i oppgaven. Analyse av lærebøker er også å finne som et tema i teorikapittelet. Videre følger metodekapittelet der studiens kontekst, deltakere, metodene brukt til datainnsamling, valg jeg gjorde underveis og etiske perspektiv blir presentert. Dernest følger kapittelet om vektorer, der læreboken og vektorbegrepet i læreplanen blir analysert. Videre presenteres datamaterialet i et eget kapittel før det blir analysert og diskutert i et senere kapittel. I analysen og diskusjonen blir datamaterialet vurdert opp mot forskningsspørsmålene og teorien. Til slutt presenteres konklusjonen og oppsummeringen av studien.

2 Teori

I kapittelet presenteres forskjellige måter å dele inn kunnskap og forståelse i matematikkfaget på, ulike måter å analysere lærebøker på samt et par artikler om liknende forskning gjort tidligere. Jeg har tatt utgangspunkt i fire forskjellige inndelinger av kunnskap og forståelse, basert på Skemp (1976), Hiebert og Lefevre (1986), Sfard (1991) og Gray og Tall (1994), samt to analyseverktøy, basert på American Association for the Advancement of Science (2000) og Rezat (2006). Først har jeg skrevet et sammendrag av artikler som tar for seg ulike typer kunnskap og forståelse, for deretter å drøfte teorien. Samme oppbygging gjelder for teori om analyse av lærebøker. Til slutt presenteres kort noen artikler om tidligere forskning gjort om sammenliknbare tema. Artiklene blir presentert i kronologisk rekkefølge.

2.1 Ulike typer kunnskap og forståelse

Kognitive psykologer og matematikklærere startet med å se på ulike typer begrepsmessig kunnskap og prosedyrekunnskap. De gjorde det klart at det finnes mange betydninger av begrepet kunnskap. Matematisk kunnskap kan deles inn på flere forskjellige måter. En inndeling er å skille mellom ferdighet og forståelse. Selv om man bruker de samme begrepene kan man ha ulikt syn på ferdighet og forståelse. Hiebert og Lefevre (1986) refererer til arbeid av flere ledende skikkelser som har bidratt til vår forståelse av begrepene kunnskap, forståelse, kompetanse og utføring. Blant andre refererer de til Bruner, Ganges, Thorndike og Piaget. Diskusjoner om kunnskap i matematikk er ikke nytt, men diskusjonene er under utvikling. Tidligere hadde man kun fokus på matematisk læring i skolen, men i dag analyserer man også fenomenet i barnehagen og førskolen. Forholdet mellom ferdighet og forståelse har endret seg. I motsetning til tidligere kan man i dag studere begge tilfellene under en og samme teori (Hiebert & Lefevre, 1986).

Relasjonsforståelse og instrumentell forståelse

Nedenfor følger sammendrag av artikkelen "Relational understanding and instrumental understanding" av Skemp (1976). Sammendraget omhandler punktene jeg betrakter som relevante for min masteroppgave.

Matematisk forståelse kan tolkes på flere måter i følge Skemp (1976). I utgangspunktet betraktet han begrepet "matematisk forståelse" som et begrep som ikke kunne misforstås. Skemp (1976) ble gjort oppmerksom på at begrepet hadde forskjellig betydning, avhengig av hvem han snakket med, og ble dermed klar over begrepene relasjonsforståelse og instrumentell forståelse.

Relasjonsforståelse handler om innsikt i et begrep eller en regel og begrepets relasjoner og forbindelser til andre begrep eller regler. Skemp definerer det som "*knowing both what to do and why*" (Skemp, 1976, s. 20). Instrumentell forståelse er kunnskap om reglene, strategiene og hjelpemidlene man bruker for å løse en oppgave som Skemp (1976) forklarer ved uttrykket "*rules without reasons*" (Skemp, 1976, s. 20). Mange betrakter de to begrepene som ett felles, men Skemp (1976) stiller seg undrende til det synet. Han presiserer at lærere ofte underviser en fremgangsmåte for å løse en viss type oppgaver, og elevene lærer seg denne prosedyren, men forstår de egentlig det bakenforliggende? Og hva med elever som pugger fremgangsmåter, for de trenger bare å kunne prosedyren for å få et godt resultat på prøvene, forstår de begrepene fullt ut? Elever kan fortelle at de forstår hva de holder på med, men når oppgavetypen forandres, så får elevene feil svar. Hva slags forståelse har eleven for matematikk da?

Instrumentell forståelse kan ha flere fordeler. For eleven blir det lettere å forstå hva de skal gjøre og hva oppgavene dreier seg om og de kommer raskt frem til svaret fordi mindre kunnskap er involvert. I tillegg får de en umiddelbar og tydelig belønning ved å kunne vise til mange rette svar. Fordeler ved relasjonsforståelse kan være at eleven klarer å tilpasse seg nye typer oppgaver og det er lettere å huske strategier og begrep når man har andre knagger å henge dem på. Dermed kan det å utvikle et begrepsnettverk i seg selv være et stort mål. Til syvende og sist kan begrepskunnskap være tidseffektiviserende, da du slipper å slå opp formler, for du kan utvikle dem selv. (Skemp, 1976, s. 23–24) Skemp (1976) kommenterer at mange elever blir undervist instrumentell matematikk. Han ser for seg at lærere kan begrunne valget med at relasjonsforståelse tar for lang tid å lære og det blir for vanskelig innenfor et enkelt område, men at man må på grunn av tester og prøver. Han ser også for seg argumenter av som at elevene trenger en ferdighet i forbindelse med et annet fag, at det er den type forståelse som er grunnlaget i tester, pensum er stort eller rett og slett at det er vanskelig å vurdere relasjonsforståelse. En annen begrunnelse kan være at lærere kan ha store vanskeligheter med å justere sine egne skjema for å bli i stand til å undervise på en måte at det fremmer relasjonsforståelse hos elevene. (Skemp, 1976, s. 24)

Man må ikke glemme at det viktigste med en aktivitet er målet, og man må ha en plan for hvordan man skal nå det. Med instrumentell forståelse vil elevene få flere ferdige planer eller oppskrifter, slik at elevene klarer å løse de oppgavene de skal. Kontrasten til relasjonsforståelse, der elevene konstruerer skjema som kan produsere mange planer for å løse oppgaver, er stor. Ved bruk av relasjonsforståelse vil elevene kunne ha en plan uavhengig av oppgavetypen og det å skape skjemaer blir et stort ønske og et mål i seg selv. Når elevene oppdager at de har et godt utviklet skjema kan det øke deres selvtillitt. Et skjema blir aldri ferdig utviklet, det er alltid rom for å utarbeide det videre, noe som kan gi elevene motivasjon til å lære mer. (Skemp, 1976, s. 24)

Skemp (1976) vektlegger relasjonsforståelse i sin artikkel i så stor grad at han stiller spørsmålstegn ved om instrumentell forståelse i det hele tatt kan karakteriseres som matematikk. Han presiserer at han trolig ikke presenterer instrumentell forståelse på en rettferdig måte, og at det helt sikkert finnes flere fordeler for instrumentell forståelse enn de han kommenterer i artikkelen, men at han ikke vet om dem. (Skemp, 1976, s. 23)

Begrepskunnskap og prosedyrekunnskap

Videre følger et sammendrag fra artikkelen ”Conceptual and procedural knowledge in mathematics: a introductory analysis” av Hiebert og Lefevre (1986). Sammendraget består av punktene jeg oppfatter som relevante for mitt arbeid.

Innenfor matematisk læring er det viktig å skille mellom begrep og prosedyre. Å være klar over begrepenes ulikheter er bra, men det leder ikke til et klassifiseringsskjema der all kunnskap hverken bør eller kan sorteres. Selv om ikke all kunnskap kan bli beskrevet innenfor begrepene prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, kan man ved hjelp av dem tolke og forstå elevenes læringsprosess bedre, både når det gjelder feil og suksess. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3)

Begrepskunnskap kjennetegnes ved at den er rik på forhold, sammenhenger og bindeledd. Det kan sammenlignes med et spindelvev, der all kunnskapen henger sammen og har en eller annen forbindelse til hverandre. Kunnskapen blir et nettverk der bindeleddene mellom informasjonene er like viktig som informasjonen selv. For at kunnskap skal kunne klassifiseres som begrepskunnskap må eieren selv kjenne igjen forholdet mellom ulike komponenter av informasjon. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3–4)

Først når det dannes nettverk av informasjon skjer utvikling av begrepskunnskapen. Nettverkene bygges på to ulike vis. Enten kan to komponenter av kjent informasjon få en relasjon mellom seg, eller så blir ny kunnskap en del av gamle nettverk. Begrepsvevene kan binde sammen små detaljer og knytte bånd mellom store nettverk. Undervisning av begrepskunnskap må være meningsfull for elevene, der de kjenner igjen forholdet mellom hver enkelt kunnskapskomponent. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 4)

Prosedyrekunnskap består av to deler, form og prosedyre. Formen utgjør det formelle, matematiske språket, den symbolske representasjonen. Kunnskap om matematiske notasjoner hører til her og innebærer at man er bevisst på overfladiske kjennetegn, man trenger ikke kunnskap om notasjonenes betydning. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6)

At noen fremgangsmåter er innbakt i andre måter å løse oppgaver eller finne ut av problemer på, gjør at prosedyrekunnskap har en hierarkisk struktur. Prosedyrene danner algoritmer og regler man trenger for å løse en oppgave, og består av forhåndsbestemte instruksjoner gitt steg for steg som beskriver hvordan man løser oppgavene. Prosedyrene kan deles i symbolske og problemløsende prosedyrer. Symbolske prosedyrer er de som blir brukt mest i skole og omhandler helt vanlige skrevne symboler, der man gjør om det symbolske uttrykket ved å ta i bruk regler. Problemløsningsprosedyrer handler om operasjoner med konkreter eller mentale bilder. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6–7)

I motsetning til begrepskunnskap er ikke elevene avhengige av å kjenne igjen forholdet mellom ulike kunnskapsdeler for å tilegne seg prosedyrekunnskap. Hvis elevene lærer en prosedyre de oppfatter som meningsfull, kan den ene prosedyren knyttes opp mot begrepskunnskap, fordi en prosedyre som gir mening vil være knyttet opp mot kunnskap elevene har. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 8)

Flere elever lærer informasjonsbiter utenat. Metoden gjør at elevene får kunnskap som ikke har noen relasjoner og kun kan knyttes opp mot konteksten den er lært i. Å pugge på denne måten gir ikke direkte begrepskunnskap, men kunnskap som lagres som små isolerte deler av informasjon. De små, isolerte delene er ikke med i noe begrepsmessig nettverk. Prosedyrer blir ofte lært utenat. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 8) Skemp (1976) ville beskrevet fenomenet pugging som instrumentell forståelse fordi man lærer regler og svar uten noen sammenheng.

Ved mangelfull begreps- eller prosedyrekunnskap, eller at de to forblir isolerte fra hverandre, blir elevene lite kompetente i matematikk. Elevene vil få et inntrykk av at de forstår hva de gjør og de tror de behersker matematikken, uten at de faktisk gjør det. Nettopp derfor er det viktig med samspill mellom begrep og prosedyrer. Et slik potensielt samspill mellom begrep og prosedyrer kan gi fordeler for begge enhetene. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9) Hos Skemp (1976) kan vi gjenkjenne et slikt samspill som relasjonsforståelse fordi elevene vil gjennom et samspill både vite hva de skal gjøre og hvorfor de gjør det.

For begrepskunnskap vil et samspill innebære at elevene opplever symboler som meningsfulle, selv om de ikke kjenner til den eksakte betydningen til symbolet. Det blir mulig å utføre prosedyrer som visuelle mønstre uten å forstå symbolene. Matematikk består av mange prosedyrer, og ved å knytte dem sammen med annen kunnskap blir prosedyrene enklere å huske. Resultatet blir flere nettverksgrener til hver prosedyre, som utvider begrepskunnskapen. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 10–11)

For prosedyrekunnskap vil en samhandling med begrepskunnskap kunne medføre at symbolene forsterker begrepene. Symboler bidrar til å organisere tankene våre, og notasjonssystemet vil da automatisk være med å styrke og utvikle begrepene. For å klare å løse et problem vil prosedyrene benytte seg av begrepsnettverkene. Gode strategier tilrettelegger dermed for at begrepskunnskap kan utvikle seg. I tillegg vil prosedyrer fremme konsept og begrep fordi nye prosedyrer trigger begrepsnettverkene til å finne en plass til prosedyren. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 15–16)

Ved hull eller mangler i elevers kunnskapsbase, kan bygging og utvikling av sammenhenger og relasjoner mellom konsept hindres. Man kan se tendenser til å plassere kunnskap i båser som gjør at man ikke ser sammenhengene så tydelig. Slike grunner gjør at det er vanskelig for elevene å gjenkjenne relasjonene mellom begreps- og prosedyrekunnskap. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 17)

Operasjonell forståelse og strukturell forståelse

Sfard (1991) har skrevet om to ulike typer forståelser jeg betrakter som vesentlige innenfor mitt arbeid i artikkelen ”On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin”. Et sammendrag med temaene som er aktuelle i forhold til min problemstilling følger under.

Matematisk forståelse kan ikke sanses men er synlige inne i hodet, mener Sfard (1991). Det som noteres og skrives ned på papiret er kun en representasjon for noe abstrakt. Sfard (1991) deler matematisk forståelse inn i to deler, operasjonell og strukturell forståelse. De ulike forståelsene beskriver notasjoner på ulike måter. Operasjonell forståelse omtaler notasjoner som at de reflekterer prosesser, algoritmer og handlinger, mens strukturell forståelse beskriver notasjonene som referanser til et abstrakt objekt. I tillegg til strukturell forståelse nevner Sfard (1991) strukturell tenkning, der man forbinder konsept med ulike figurer og bilder. Strukturell tenkning gjør at en person betrakter konseptet som en unik ting. (Sfard, 1991, s. 3–4)

Sfard (1991) mener det er et ontologisk skille mellom operasjonell og strukturell forståelse, og hun betrakter de to ulike kategoriene av matematisk forståelse ikke som motsetninger til hverandre, men som komplementære. Et begrep kan bli forstått både operasjonelt og strukturelt. Et eksempel Sfard (1991) nevner er likhetstegnet, ”=”, som kan forstås både som et identitetssymbol og som et signal om at man skal utføre operasjonene på venstre side av likhetstegnet. Mentale bilder støtter oppunder strukturell forståelse og gjør dermed ideer mer forståelige. Et parallellogram laget av to utspente vektorer og deres parallelle vektorer vil kunne være et slikt mentalt bilde, som gjør elevene i stand til å huske regnereglene for addisjon og subtraksjon med vektorer ved å se på sidene i parallellogrammet for å finne ut hva summen og differansen blir. (Sfard, 1991, s. 4–6)

Strukturell og operasjonell forståelse har sprunget frem ved å undersøke hvordan matematiske enheter blir mottatt av den som tenker. Dermed stammer de ulike forståelsene fra ontologiske problemer og psykologiske perspektiv. Sfard (1991) hevder at strukturell og operasjonell forståelse er to sider av samme sak og ikke en begrepsmotsetning, slik som Hiebert og

Lefevre (1986) sin begrepskunnskap og prosedyrekunnskap, og relasjonsforståelse og instrumentell forståelse utarbeidet av Skemp (1976). (Sfard, 1991, s. 7–9)

Operasjonell og strukturell forståelse har hatt ulike roller i utformingen av matematiske konsept. I utformingen av begrep går operasjonell kunnskap foran strukturell. Bakgrunnen er at historisk sett var det prosessene som oppstod, ikke objektene. Utvikling av nye begrep i historien har ofte blitt gjort ved å veksle mellom strukturell og operasjonell forståelse, slik som ved utviklingen av tall. Å vite hvorvidt den observerte læringsprosessen har blitt påvirket av læringsmetoder, og hvordan det ville blitt under andre omstendigheter, er umulig. (Sfard, 1991, s. 11–17)

Antakelsen om at operasjonell kunnskap oppstod før strukturell kunnskap, har medført at utsagnet ”operasjonell før strukturell” ofte blir ansett som en oppskrift i undervisningssammenheng. Hvis antakelsen om operasjonell opprinnelse av matematiske objekt er sann, ble prosessene utført på allerede kjente objekter. En idé om å snu prosessen til en uavhengig enhet oppstod, og det krevdes at man utviklet evnen til å se den nye enheten som et integrert objekt. Utviklingen av konsept skjer i tre steg; indregjøring, sammentrekning og tingliggjøring. (Sfard, 1991, s. 17–18)

Indregjøring handler om at eleven blir fortrolig med prosessen, som vil gi grobunn for et nytt konsept. Prosessene er utført på enkle objekter. Eleven blir flinkere og flinkere til å utføre prosessen. Sammentrekking handler om at eleven deler opp lange sekvenser til mindre sekvenser som er mer forståelige. Da kan eleven se på prosessen som et hele uten å ha behov for å gå i detaljer. Sfard (1991) mener tingliggjøring er et ontologisk skifte, der man utvikler evnen til å se noe kjent i lys av noe nytt. Det er her konseptet går fra prosess til objekt og strukturer. (Sfard, 1991, s. 18–20)

Operasjonell tilnærming er helt nødvendig og noen ganger tilstrekkelig. Elevene starter med elementære prosesser og fortsetter til mer krevende og høyere prosesser. De trenger aldri å referere til abstrakte objekter. Tilnærmingen fører til at elevene ikke blir presset inn i en statisk, abstrakt enhet. Likevel er strukturell forståelse helt nødvendig, fordi den gjør at elevene kommer over komplekse prosesser ved å bryte dem ned til mindre deler for å klare å håndtere dem. Mangel på strukturell forståelse kan dermed hindre elevenes utvikling, fordi prosessene blir for store til at elevene klarer å håndtere situasjonen. (Sfard, 1991, s. 23–29)

Prosept

Gray og Tall (1994) snakker om begrepet prosess som er en måte å beskrive forståelse på. Nedenfor følger et sammendrag av deres artikkel ”Duality, ambiguity, and flexibility: a ”proceptual” view of simple arithmetic”.

Gray og Tall (1994) mener det er et stort skille mellom prosess og prosedyrer. Prosess er et generelt begrep. Man kan snakke om en prosess slik som addisjonsprosessen, men der ingen prosesser blir utført. Prosedyrer er spesifikke algoritmer man bruker for å gjennomføre prosessen og kan være spontane, bortlærte eller personlig utviklede prosedyrer. (Gray & Tall, 1994, s. 116–117)

At prosesser blir konseptuelle er en situasjon Gray og Tall (1994) beskriver. Elevene bruker prosesser på nye eller andre måter enn tidligere. Den nye bruken av prosesser er med på å skape nye konsept. Sfard (1991) bruker begrepet tingliggjøring om samme fenomen. (Gray & Tall, 1994, s. 118)

Pensum i skolene skiller mellom de ferdighetene elevene må ha og begrepene og faktakunnskapene de må kunne. De skiller mellom hva elevene må kunne gjøre og hva de må vite. Prosedyrene er enkle å undersøke om blir utført på en tilfredsstillende måte og hvis elevene behersker ulike oppgavetyper er målet nådd. Begrepskunnskap er vanskeligere å tilegne seg, og den er rik på forhold. I tillegg er det vanskeligere å teste elevene i denne typen kunnskap. (Gray & Tall, 1994, s. 117–118)

I barnehagen og førskolen er det lite som skiller begrep og prosedyre for barna. Det er naturlig for barna, i og med at i matematikken har man samme symbolikk for prosess som for produktet av prosessen. 1+2 står både for prosessen addisjon, og resultatet av prosessen, summen 3. Matematikernes tvetydige notasjoner kan skape problemer for elevene. (Gray & Tall, 1994, s. 119–120)

Prosept er en kognitiv kombinasjon av prosess og begrep. Et enkelt prosept er en kombinasjon av en prosess, et objekt og et symbol. Det matematiske objektet blir skapt av prosessen og symbolene skaper en assosiasjon til prosessen eller objektet. Objekter kan uttrykkes symbolsk på flere måter. Det innebærer at symbol blir sett på både som forskjellige prosesser som gir samme objekt og betraktet som forskjellige navn for et og samme objekt. (Gray & Tall, 1994, s. 121)

Et prosept er satt sammen av flere enkle prosept som tar utgangspunkt i det samme objektet. Et eksempel er objektet 3. Det består av de enkle proseptene å telle til tre, 1+2, 2+1, 4-1 osv. Proseptene er sterkt avhengig av barnets kognitive vekst. Hvis man ser på symbolet 3 er det veldig abstrakt, men når det blir kommunisert med aritmetikk blir det et fysisk objekt, enten ved hjelp av konkreter eller mentale bilder. Symbolet blir meningsfullt for elevene. Elevene får uttrykk for både konseptuel tenkning og prosedyretenkning. Kombinasjonen av de to kaller Gray og Tall (1994) for proseptuell tenkning. (Gray & Tall, 1994, s. 122)

I prosedyretenkning er det et stort fokus på prosedyren og det fysiske som bistår den. Tenkningen blir begrenset av elevenes forståelse av symbol, at tall bare blir brukt som konkrete enheter og blir manipulert av en telleprosess. Når man vektlegger prosedyrene reduserer man fokuset på forholdet mellom hva elevene får tilført og utbyttet de får av det. Ved proseptuell tenkning vil elevene knytte sammen hvert steg under manipulasjonen av symboler, og dermed se på dem som objekter. Objektene kan da dekomponeres og organiseres igjen på forskjellige måter. (Gray & Tall, 1994, s. 122–125)

Begrepene prosedyrekunnskap og begrepskunnskap blir ofte brukt for å beskrive barns måter å tenke på når de utfører aritmetikk. Gray og Tall (1994) mener det blir bedre beskrevet som prosedyrekunnskap og proseptuell kunnskap nettopp fordi prosept inneholder også bruken av prosedyrer. I tillegg medfører proseptuell kunnskap et syn på symboler, enten som en utløser for å utføre prosedyrer, eller som en representasjon av mentale bilder. (Gray og Tall, 1994, s. 125)

Det er et skille mellom elever som lykkes og de som ikke gjør det. Inndelingen der de som mislykkes er avhengige av prosedyrer, kaller Gray og Tall (1994) for det proseptuelle skillet. Elever som ikke er så flinke vil ofte fokusere mer på prosedyrene. Ved vanskelige og sammensatte oppgaver vil fokuset på prosedyrer føre dem inn på et blindspor som de har vanskelig for å komme ut av og dermed ha problemer med å løse oppgaven. (Gray & Tall, 1994, s. 132) Gray og Tall (1994) refererer til Skemp (1976), Hiebert og Lefevre (1986) og Sfard (1991).

Slik jeg forstår Gray og Tall (1994) sin mening med begrepet prosess, kan multiplikasjonsprosessen være et eksempel på begrepet. Prosessen kan bli assosiert med konseptet produkt mellom tall og vektorer. Skalar er et eksempel på hva som ble lært som konsept i klassen jeg har observert i min studie. Elevene diskuterte størrelser som hadde både retning og lengde og størrelser som bare hadde lengde opp mot hverandre. Ut i fra det laget de sine egne referanser på hva en skalar er. Da ble skalar et konsept for elevene. For at en prosess, slik som multiplikasjonsprosessen skal bli et prosept for elevene, må elevene utvikle sin forståelse av prosessen. Notasjonen for multiplikasjon med vektorer må gjenkjennes både som et objekt og som en prosess. For eksempel kan notasjonen 3[2,5] gjøre at eleven vil utføre regneoperasjonen, eller eleven ser det som et produkt. Dersom notasjonen vekker begge tolkningene hos elevene, vil prosessen ha blitt utviklet til et prosept.

Sfard (1991) mener strukturell og operasjonell forståelse er to sider av samme sak, og at de utfyller hverandre. Gray og Tall (1994) definerer prosept som en kombinasjon av objekt, symbol og prosess. Notasjoner ligger innunder begrepet prosept. De har på mange måter samme forståelsen som Sfard (1991), men går ett skritt videre ved å mene at notasjoner ikke bare representerer mentale objekt eller handlinger, men notasjonene trigger oss til å utføre handlingene.

Drøfting av teori

Skemp (1976), Hiebert og Lefevre (1986), Sfard (1991) og Gray og Tall (1994) har trolig ikke nøyaktig samme oppfatning av de ulike typene kunnskap og forståelsene som jeg vil ha. Årsaken er at vi har forskjellige referanserammer og vil tolke det vi leser på forskjellige måter. Jeg har forsøkt å gi begrepene det samme meningsinnholdet som forfatterne mente, men det at vi har ulike referanserammer og tolker det vi leser på forskjellige måter kan føre til ulik forståelse av begrepene. Nedenfor definerer jeg hvordan jeg tolker de ulike typene kunnskap og forståelse. Tolkningen vil være utgangspunktet for begrepenes betydning når de blir brukt i oppgaven.

Instrumentell forståelse handler om at eleven er i stand til å utføre operasjoner uten at eleven forstår hvorfor det blir riktig å utføre operasjonen på den måten. Elevene kjenner til prosedyren men vet ikke årsaken til at det blir riktig. Det er slik jeg tolker Skemp (1976) sitt utsagn ”rules without reasons” (Skemp, 1976, s. 20).

Relasjonsforståelse er preget av at elevene vet både hva de skal gjøre og hvorfor. Da er det helt avgjørende at elevene har god forståelse for begrepene og reglene, og god kjennskap til hvordan begrep og regler henger sammen, deres relasjoner. Hvis eleven ikke kjenner igjen relasjonene mellom begrepene og vet hvordan kunnskapen henger sammen, kan ikke kunnskapen klassifiseres som relasjonsforståelse. Slik er min tolkning av uttrykket ”knowing both what to do and why” (Skemp, 1976, s. 20).

Prosedyrekunnskap er kunnskap om prosessene, algoritmene og handlingene som blir utført. Innunder begrepet kommer både prosedyrer der elevene vet hvorfor prosedyren kan benyttes, samt prosedyrer som elevene bare utfører uten å ha kjennskap til hvorfor prosedyren kan benyttes. I situasjoner der elevene pugger en prosedyre eller de ikke vet hvorfor prosedyren når frem til svaret kan man snakke om instrumentell prosedyrekunnskap.

Begrepskunnskap er som store nettverk mellom de ulike kunnskapsdelene våre. Å kjenne til og forstå relasjonene mellom de ulike begrepene og kunnskapsdelene er minst like viktig som å forstå begrepene.

Operasjonell forståelse beskriver hvilket syn man har på notasjoner. Når elever oppfatter at notasjoner og det som skrives gjenspeiler prosesser, algoritmer og handlinger betyr det at eleven har en operasjonell forståelse av notasjonene.

For et en person skal ha strukturell forståelse må han eller hun se på skrivemåter og notasjoner som at de representerer abstrakte forestillinger og objekter. En notasjon kan relateres til flere abstrakte objekter og motsatt.

Prosept er et sammensatt begrep. Slik jeg forstår det er prosept noe mer enn bare begrepskunnskap slik Hiebert og Lefevre (1986) definerte begrepet. Jeg oppfatter det slik at det å bruke prosedyrene faller inn under proseptbegrepet. Prosedyrekunnskap slik Gray og Tall (1994) beskriver det, oppfatter jeg på samme måte som prosedyrekunnskap av Hiebert og Lefevre (1986).

Relasjonsforståelse, begrepskunnskap, strukturell forståelse og prosept har flere likheter. Alle dreier seg om relasjoner, enten mellom notasjoner og deres assosiasjoner, eller relasjoner mellom flere kunnskapsbiter. Elevenes skjema eller nettverk av kunnskap er òg en fellesfaktor. Videre krever alle kategoriene at nye relasjoner må til for at kunnskapen eller forståelsen skal utvikles, samtidig som elevene må være klar over og bevisst over relasjonene. Både relasjonsforståelse og prosept inkluderer bruken av prosedyrer. Samtidig er det en vesentlig forskjell mellom de ulike inndelingene. Begrepskunnskap og prosept omhandler kunnskap mens relasjonsforståelse og strukturell forståelse dreier seg om forståelse. I tillegg krever relasjonsforståelse innsikt i det som skal forstås.

Prosedyrekunnskap og operasjonell forståelse krever begge at man har kjennskap til symbolene og skrivemåtene. Det er ingen forutsetning under instrumentell forståelse. Slik jeg forstår instrumentell forståelse betyr det at elevene har en begrenset forståelse av skrivemåtene og symbolene som kun omhandler at de er i stand til å bruke reglene. Jeg velger å forstå det slik at elevene da har en for dårlig forståelse til å kunne forstå hvorfor reglene kan brukes. At elever ikke vet hvorfor de kan bruke ulike regler og prosedyrer i gitte sammenhenger er felles både for instrumentell forståelse og prosedyrekunnskap, men prosedyrekunnskap omhandler i tillegg de gangene elevene forstår hva de skal gjøre.

Jeg betrakter de fire ulike inndelingene av matematisk kunnskap som nyanser av hverandre, men de små forskjellene er viktige fordi de kan bidra til ulike vinklinger i mitt datamateriale. Sfard (1991) skiller seg ut fra Hiebert og Lefevre (1986) og Skemp (1976) ved at hennes inndeling av matematisk kunnskap ikke er motsetninger til hverandre, men utfyller hverandre. I sin teori i artikkelen ”On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin” tar Sfard (1991) utgangspunkt i hvordan notasjonene blir oppfattet. Hiebert og Lefevre (1986) i artikkelen ”Conceptual and procedural knowledge in mathematics: a introductory analysis” og Skemp (1976) i artikkelen ”Relational understanding and instrumental understanding” ser mer på selve prosessene og ferdighetene. Prosedyrekunnskap hos Hiebert og Lefevre (1986) kan innebære både at eleven forstår både hva og hvorfor man utfører prosedyrene slik, men prosedyren kan også være bare en handling uten grunn. Ut i fra Skemp (1976) sine begrep vil da prosedyrekunnskap kunne være både instrumentell forståelse og relasjonsforståelse. Begrepskunnskap kan, på grunn av forståelsen som kreves, kun karakteriseres som relasjonsforståelse. På denne måten blir Hiebert og Lefevre (1986) sin prosedyre- og begrepskunnskap innbakt i Skemp (1976) sine inndelinger for forståelse. Skemp (1976) sin inndeling er svært dekkende. Jeg vil derfor ta utgangspunkt i instrumentell forståelse og relasjonsforståelse når jeg analysere elevenes forståelse og kunnskap i vektorregning.

2.2 Analyseverktøy for lærebøker

Analyse av lærebøker kan gjøres på forskjellige måter og med forskjellig perspektiv. Med bakgrunn i min interesse for karakteristikken av elevenes forståelse i matematikk ønsker jeg å undersøke forholdet mellom læreboken og elevenes forståelse. I enkelte artikler jeg har lest, slik som i Pepin og Haggarty (2001, 2003), forklares ikke fremgangsmåten for analyse av lærebøker, men det presiseres at bøkene er analysert med bakgrunn i den anvendte teorien. Når jeg leser artikler vil jeg trolig vektlegge andre deler av teorikapittelet enn hva forfatterne gjorde, og min analyse vil da ha et annet utgangspunkt enn det artikkelforfatterne hadde. Bakgrunnen er at vi mennesker er forskjellige og tolker ut i fra vår egen referanseramme. Andre artikler, slik som American Association for the Advancement of Science (2000), Rezat (2006), beskriver nøye fremgangsmåten som er brukt for å analysere lærebøkene. Jeg har derfor vektlagt deres artikler, og nedenfor presenteres deres to måter å analysere lærebøker på.

American Association for the Advancement of Science

American Association for the Advancement of Science (2000) utviklet i "Project 2061" en prosedyre for å analysere lærebøker i matematikk der hensikten var en effektiv analyse. Metoden er bygget opp av syv hovedkategorier, som hver består av flere underpunkt eller spørsmål. Prosjektet registrerte et scoringsskjema for hver kategori der man fikk en forståelse for hvordan læreboken eller materiellet i forhold til hva prosjektet ønsket. Nedenfor presenteres et sammendrag av kategoriene, hentet fra American Association for the Advancement of Science (2000).

Kategori 1: Å identifisere en følelse av mening. Kategorien tar for seg hvordan læreboken starter opp et nytt kapittel eller enhet. Er det et innledende spørsmål eller problem som vekker oppmerksomheten, en presentasjon av hva som skal læres og det man møter i kapittelet eller gis elevene en forståelse av hensikten med kapittelet? Måten å starte opp en ny enhet på er mange og varierende. Videre handler første kategori om hvorvidt elevene forstår hensikten med de ulike aktivitetene og om aktivitetene er logiske og strategiske slik at de bygger opp en forståelse hos elevene. (American Association for the Advancement of Science, 2000).

Kategori 2: Bygge på elevenes tanker og ideer om matematikk. Kategorien omhandler spørsmål som om læreboken tar utgangspunkt i tidligere kunnskap hos elevene som er nødvendig for å oppnå læringsmålene? Blir læreren gjort oppmerksom på hvordan elevene kan tenke om eller forstå temaet? Er læreboken eller tilhørende materiale en støtte for læreren når det gjelder å finne ut hvordan elevene tenker? Omhandler læreboken kjente misforståelser blant elevene? Kategorien vektlegger hvordan læreboken kan hjelpe både lærere og elever til å forstå matematikken og hverandre best mulig. (American Association for the Advancement of Science, 2000)

Kategori 3: Engasjere og involvere elevene i matematikk. Her undersøkes det om læreboken sørger for å presentere matematikken i flere kontekster og om læreboken omfatter aktiviteter som gir elevene egen erfaring med praktiske læringsmål. (American Association for the Advancement of Science, 2000)

Kategori 4: Utvikle matematiske ideer. Kategorien vurderer om læreboken presenterer måter å hjelpe elevene på, slik at de utvikler en forståelse for hvorfor matematiske konsept og prosedyrer er viktige og gyldige. I tillegg undersøkes det om boken vektlegger elevenes forståelse eller om elevene skal huske eller pugge prosedyrer. Videre studeres det om fremstillingen av ideer er nøyaktige og presise og om naturlige sammenhenger mellom begrep og ferdigheter blir gjort tydelige. Til slutt vurderes det om prosedyrene eller kunnskapen demonstreres gjennom eksempler og om elevene får prøvd kunnskapen og ferdighetene i forskjellige situasjoner. (American Association for the Advancement of Science, 2000)

Kategori 5: Fremme elevenes tanker om matematikk. Spørsmålene tilknyttet kategorien omhandler hvorvidt læreboken inkluderer at elevene må uttrykke seg, begrunne, oppklare og presentere sine tanker og hvordan de kan få respons fra lærere og medelever. Videre undersøkes det om oppgaver og spørsmål som leder elevene til å tolke og resonnere rundt konsepter og ferdigheter er inkludert og om læreboken foreslår hvordan elevene kan kontrollere sin egen progresjon. (American Association for the Advancement of Science, 2000)

Kategori 6: Vurdering av elevenes progresjon i matematikk. Inneholder læreboken vurderingsoppgaver relatert til konseptene og ferdighetene elevene skal kunne? Er vurderingsoppgavene av en slik karakter at elevene må bruke ferdigheter og begrep, eller kan de bare bruke en regel uten å ha forstått den? Kategorien omfatter en vurdering av om materiellet inneholder diagnostiske oppgaver slik av læreren kan se om aktivitetene må tilpasses underveis. (American Association for the Advancement of Science, 2000)

Kategori 7: Forsterkning av det matematiske læringsmiljøet. Kategorien vektlegger om materiellet hjelper læreren til å øke sin egen forståelse av matematikk og matematiske anvendelser, om det bidrar til å skape et miljø i klasserommet der elevene får muligheten til å være kreative, nysgjerrige og å stille spørsmål. Til slutt ser man på om lærestoffet er tilrettelagt for ulike kunnskapsnivåer, om alle får oppleve mestring og tilhørighet i det matematiske klasserommet. (American Association for the Advancement of Science, 2000)

Analyse basert på strukturnivå

Rezat (2006) har valgt en annen fremgangsmåte for å analysere lærebøker. Han mener lærebøker kan bli analysert ut i fra et sosiokulturelt perspektiv, der både den sosiale og kulturelle dimensjonen er vesentlig. I undervisning og læring i matematikk hevder han at læreboken er en del av aktivitetene, den er ikke bare en hvilken som helst bok. (Rezat, 2006, s. 482)

I analysen av lærebøkene skilte Rezat (2006) mellom de to strukturnivåene makrostruktur og mikrostruktur. Makrostruktur handler om strukturelle kjennetegn gjennom hele boken, mens mikrostruktur er forbundet med undervisningsopplegg der hensikten var å bruke opplegget et fåtall ganger i undervisninga. (Rezat, 2006, s. 482)

I Rezat (2006) sin studie ble de første sidene i læreboken, som presenterer bokens struktur for elevene, brukt som datagrunnlag innenfor mikrostrukturen. Bøker som ikke hadde slike sider ble ekskludert fra studien. For å kunne sammenlikne alle bøkene ble de strukturelle elementene organisert. Kategoriene som ble brukt under organiseringen var visuell karakteristikk, innholdskarakteristikk, språklig karakteristikk og forventet bruk av boken. (Rezat, 2006, s. 483)

Fem kategorier brukt for å beskrive elementene i lærebøkene på mikronivå ble utviklet. Innholdskarakteristikk, språklig karakteristikk, visuell karakteristikk, pedagogisk virksomhet og situasjonsbestemte vilkår. Situasjonsbestemte vilkår dreier seg om aktiviteter og kontekst i forhold til introduksjon av nye tema og lekser. Pedagogisk virksomhet handler om at elevene skal være aktive, boken skal være informerende og gi elevene trening. (Rezat, 2006, s. 483)

Mikrostrukturen i tyske lærebøker i matematikk består hovedsakelig av introduserende oppgaver, redegjørelse, fakta- eller regelboks, eksempler og oppgaver. Spørsmålet som ble reist var hvordan strukturlikheten hadde oppstått. Rezat (2006) nevner at Hebart og Roth har vært betydningsfulle innenfor tyske læringsteorier. Han mener likheten mellom tyske lærebøker har oppstått fordi alle har tydelige relasjoner til Hebart og Roth. Videre påstår han at når de samme teoretikerne ligger til grunn for hvordan stoffet presenteres vil også didaktikken ha store likheter. (Rezat, 2006, s. 483-486)

Til slutt hevder Rezat (2006) at tyske lærebøker i matematikk egentlig ikke er elevbøker, men de er lærernes bøker fordi det er lærerne som kan presentere teksten til forståelige deler for elevene. (Rezat, 2006, s. 486)

Drøfting av teori
De to metodene inneholder flere moment som kan sammenliknes, men det er ulike måter å gå frem på, og valg av metode vil selvsagt avhenge av hva ved læreboken man ønsker å finne ut av. Begge metodene ser på hvordan stoffet blir presentert for elevene, på innhold, struktur, språk og hvilket utbytte det forventes at elevene har av læreboken. Rezat (2006) vektlegger lærerens rolle og selve undervisningsopplegget i sin måte å analysere lærebøker på. Som forklart i både introduksjonen og metodekapittelet skal ikke min masteroppgave fokusere på lærerens rolle i undervisningen. Derfor vil jeg benytte meg av American Association for the Advancement of Science (2000) sine kategorier når jeg skal analysere læreboken.

Av hensyn til begrensingen av en masteroppgave, vil jeg fokusere på de kategoriene som sier noe om hvordan elevene opplever matematikken, om formuleringer, oppbygging av tekstene i boken, hvordan boken presenterer matematikken for elevene, bruk av eksempler osv. Jeg vil ikke benytte kategoriene i sin helhet fordi de i tillegg gir informasjon som ikke er relevant for min problemstilling. Derfor gjør jeg et utvalg basert på hvilke kategorier som gir informasjon i forhold til elevenes forståelse av matematikk.

2.3 Andre studier om lærebokens rolle i undervisningen og hvordan elevene bruker læreboken

Det er gjort flere studier om lærebokens rolle i undervisningen og hvordan elevene bruker læreboken. Nedenfor presenteres tre studier som vil kunne være interessante i forhold til resultatene jeg kommer fram til i min studie.

Lærerens preferanser i lærebokens karakteristikker ble undersøkt i en casestudie gjennomført av Shield (1989). Gjennom spørreskjema og intervju fant han ut at læreboken var viktig for læreren i forberedelsesfasen, men at andre informasjonskilder ble brukt i tillegg til læreboken i det minste i noen av timene. Videre viste studien at lærerne ikke lærte elevene å lese teksten slik at de kunne benytte seg av den når de skulle veilede seg selv. Elevene vendte seg heller ikke frivillig til læreboken. Til slutt pekte Shield (1989) på at når lærebokens oppbygging, med vekt på oppgaver og øvinger for elevene, ga et begrenset bruksområde for læreboken.
En australsk studie kartla lærebøkers bruksområde i undervisningen. 28 lærere svarte på spørreundersøkelser der de skulle gradere påstander ut i fra hvor beskrivende påstanden var (Shield, 1991). Studien viste at lærerne foretrakk annet materiell enn læreboken som

undervisningsressurs og at de betraktet læreboken som en kilde til oppgaver og øvelser elevene kunne arbeide med både hjemme og på skolen. I tillegg mente lærerne at elevene kunne bruke boken hvis de hadde problemer med å klare leksene. Studien viste at læreboken var lite synlig i undervisningen.

I forbindelse med elevers bruk av læreboken i matematikk utførte Rezat (2010) en studie der han strukturerte elevenes lærebokbruk i fire kategorier:

1. løse oppgaver og problem
2. underbygge matematisk kunnskap og ferdigheter
3. tilegnelse av kunnskap
4. aktiviteter som assosieres med engasjement i matematikken

Ut i fra kategoriene ble det laget skjema som kartla elevenes bruk av læreboken. Studien viste at tyske lærere lener seg mye på læreboken både i forberedelsene og i undervisningen. Elevene bruker hovedsakelig læreboken til å lete etter informasjon som kan benyttes for å løse oppgaver. I tillegg fant Rezat (2010) ut at elevene sjeldent prøvde å forstå matematikken først, for så å bruke det i oppgavene.

3 Metode

Metodekapittelet omhandler hvilket fokus studien har, informasjon om konteksten og deltakerne i studien, metodene brukt til innsamling av data og forholdet mellom problemstillingen og metodene som er brukt. Videre beskriver jeg andre metoder som kunne vært brukt, men som jeg valgte bort og hvilken strategi jeg hadde i forhold til analyseringen av dataene. Før og under arbeidet med datainnsamlingen tok jeg flere valg som fikk store konsekvenser. Beskrivelse av valgene, konsekvensene, samt etisk perspektiv følger til slutt i kapittelet.

3.1 Klassifisering av oppgaven

Resultatene fra MERG[1] tydet på at matematikk var et fag der elevene bare utførte prosedyrer uten å vite hvorfor de gjorde det. Observasjoner viste at læreboken ble fulgt til punkt og prikke, og da ble i realiteten informasjonen læreren og læreboken formidlet mye av det samme. Var det da læreboken som gjorde at elevene fikk en mangelfull forståelse for derivasjon? Hva slags forståelse legger læreboken opp til at elevene skal få? Jeg stilte meg undrende til om oppdagelsene jeg gjorde var gjeldende på flere skoler. Å finne ut om det gjaldt på alle skoler ville være som nevnt et for stort tema, men det kunne være mulig å se på forholdene på en annen skole. Mine observasjoner og refleksjoner ledet meg frem til følgende problemstillinger:

- Hva er lærebokens rolle i undervisningen?
- Hvordan bruker elevene læreboken?
- Er det mulig å finne noen sammenheng mellom hvordan elevene bruker læreboken og karakteristikken av deres forståelse for matematikk?

Mellom elevene og læreboken finnes det en relasjon, uavhengig om bokens bruk er fremtredende i undervisningen eller ikke, for boken står på elevenes pensumliste. Jeg ønsker ikke å forutse eller forvente resultater eller teori for min studie, likevel har jeg flere ideer om hva jeg vil finne. Under observasjonen vil jeg finne informasjon om lærebokens rolle. Uansett hvordan boken blir brukt vil observasjonen gi meg svar på spørsmålet.

Elevene kan bruke mange kilder til sin læring om vektorer. Uavhengig av hva som skjer i undervisningen bruker elevene læreboken på en eller annen måte. Dersom boken ikke blir brukt av elevene vil observasjonen gi svar på det. Å ikke bruke læreboken er og en måte å bruke den på. Da kan det bli nødvendig å vurdere andre kilder til elevenes læring. Hvis boken har en fremtrendene rolle vil det være lettere å beskrive hvordan elevene bruker den.

Hvis man antar at læreboken spiller en vesentlig rolle i undervisningen, så må elevene ha et eller annet slags forhold til boken. Da er det naturlig å anta at læreboken påvirker elevene og deres læring, og kanskje også deres forståelse for matematikk. Antakelsen sier at jeg vil finne nyttig informasjon om mine problemstillinger dersom læreboken spiller en stor rolle i undervisningen.

Kunnskapsteori handler om hva som er kjent innenfor en vitenskapsgren, om hva vi egentlig vet. Spørsmål om den sosiale verden kan bli studert under samme forutsetninger og prinsipp som naturvitenskapelig forskning blir stilt. Interpretivister mener sosial forskning krever en prosedyre som sammenliknet med naturens systemer, får frem det som er helt særegent for

[1] Se 1.3 Arbeidet med MERG for forklaring på MERG

mennesket. Å sette seg inn i andres ståsted og gjøre betraktninger derifra er også karakteristisk. (Bryman, 2004)

Min studie forsøker å få en forståelse for hvordan elevene tenker, ikke en forklaring på hvorfor de handler som de gjør. Epistemologisk vil derfor studien kunne klassifiseres som interpretivistisk.

Konstruktivisme fokuserer på at mennesket finner eller oppdager ikke kunnskap i samme grad som de konstruerer og lager kunnskap selv. Videre gjør konstruktivister tolkninger på bakgrunn av en felles forståelse, praksis og språk, ikke isolerte handlinger. Å forstå hvordan sosiale aktører husker, lager og reproduserer sosiale handlinger er sentralt innenfor sosial konstruktivisme. (Schwandt, 2007)

Masterstudien fokuserer på hva slags forståelse eller kunnskap elevene får gjennom sitt arbeid med vektorer i løpet av tre uker. Problemstillingene tyder på at kunnskap ikke er noe som blir funnet eller oppdaget uten videre, for jeg undersøker om det finnes en sammenheng mellom hvordan læreboken brukes og elevenes forståelse. Jeg ser hverken på tilfeldige forhold eller lover om årsak og virkning, men studerer ett bestemt forhold, forholdet mellom læreboken og elevenes forståelse. Elevenes læring vil være avhengig av, og et resultat av, hvordan de arbeider med ulike stimuli, i dette tilfellet læreboken. Vinklingen tyder på at kunnskap blir konstruert av hver enkelt elev, ikke oppdaget eller funnet. Ut i fra datainnsamlingen tolker jeg situasjonene. Tolkningene er basert på observasjoner i timene, på testen og under intervjuene. De tar utgangspunkt i språk, både verbalt og nonverbalt, og i øvelser. Jeg vil forsøke å finne karakteristiske trekk ved elevenes forståelse, men jeg kan ikke vite med sikkerhet hvordan elevene tenker og resonnerer. Selv om jeg har gode indisier gjennom dataene vil resultatene fremdeles være tolkninger, ikke nødvendigvis fakta. Studiens fokus tyder på at dens teoretiske bakgrunn er sosial konstruktivisme.

Teori innenfor elevenes matematiske forståelse er utfyllende, men ikke innenfor om det finnes noen sammenheng mellom elevenes forståelse for matematikk og bruken av læreboken. Dermed blir det gjort undersøkelser uten å ha noe teori på akkurat det området. Problemstillingen blir studert i den hensikt å finne ut av problemstillingen, ikke for å teste teori. Bryman (2004) mener da at forholdet mellom teori og forskning i studien er induktivt. Selv om jeg ikke tester teorier vil jeg likevel knytte resultatene mine opp mot resultater fra andre studier.

Metodene benyttet til datainnsamling i oppgaven er:

- observasjon
- bilder av elevenes arbeidsbøker
- intervjuer både med elever og lærer
- gjennomføring av en test
- annen dokumentasjon

De bygger på sikre, gode data fra få elever i stedet for datainnsamling fra mange elever som ville blitt kvantifisert. Forskningsmetodene benyttet i studien er derfor kvalitative. Resultatene vil ikke kunne generaliseres, for studien tar utgangspunkt i én enkelt klasse og gir ikke informasjon om hvordan situasjonen er generelt.

Innsamling av data ble gjennomført i en kortere tidsperiode der jeg som forsker var engasjert i den sosiale settingen. Jeg observerte oppførselen til medlemmene i gruppen, lyttet og deltok i samtaler med elevene. Jeg fikk en forståelse for oppførselen i gruppa som helhet og mellom individene. I tillegg har jeg samlet inn dokumentasjon om gruppa på flere måter. I følge Bryman (2004) har jeg da brukt mikroetnografiske metoder for å samle inn data. Studien ble gjennomført i lukkede omgivelser i og med at den ble gjennomført på en skole, som ikke er åpen for alle. Situasjonen er ikke offentlig. Deltakerne var klar over min rolle som masterstudent.

3.2 Kontekst

Studien er gjennomført i ei bygd med under 2000 innbyggere (Statistisk sentralbyrå, 2011) på en videregående skole med studiespesialiserende utdanningsprogram og to yrkesrettede linjer. Skolen har ca. 160 elever. Studien er utført i programfaget matematikk R1, et realfagsrettet matematikkfag. Årsaken til at denne skolen ble valgt ut er helt tilfeldig. Med fare for å redusere anonymiteten til deltakerne og at bygda er så liten, kan jeg ikke forklare mer inngående om bakgrunnen for den tilfeldige utvelgelsen. Klassen ble utpekt ved at de var den første klassen jeg fikk kontakt med på skolen som kunne tenke seg å delta i studien der jeg skulle bruke de metodene jeg hadde planlagt.

Klassen som ble observert benyttet tre forskjellige klasserom. Rommene var tradisjonelle klasserom med tavle, kateter og pulter som stod på rader bakover i klasserommet. Elevene hadde ikke faste plasser, men plasserte seg der de selv ønsket. Noen elever valgte å sitte alene, mens andre satt sammen. Elevene holdt seg ofte til enkelte grupperinger, men mønsteret var ikke fast. Elever som satt alene en time valgte gjerne å sitte sammen med noen en annen time. Derfor hadde elevene forskjellig plassering hver undervisningsøkt. Flere elever var ikke tilstedet under én eller flere av undervisningsøktene. Fraværet var ikke av de samme elevene hver gang. Enkelte elever hadde større fravær enn andre. Se Vedlegg 10: Klasseromsplassering for elevenes og videokameraets plassering i klasserommet de ulike timene.

3.3 Deltakere

Deltakerne er elever innenfor studiespesialiserende utdanningsprogram. I matematikklassen er det 10 elever, ni av dem er elever på årstrinn VG2, mens én går på VG3, fire jenter og seks gutter. Flere av dem kjenner hverandre også fra barne- og ungdomsskolen, men ikke alle. Likevel har de kjent hverandre siden VG1. Alle har samme matematiske bakgrunn med teoretisk rettet matematikk, matematikk 1T.

Læreren har undervist på gjeldende videregående skole i to og et halvt år. Hun har hovedfag (cand scient) i fysikk, og et og et halvt år matematikk er inkludert i hovedfaget. Hun har vekslet mellom å jobbe som lærer og studere. Før hun kom til nåværende arbeidsplass underviste hun voksne elever i seks år. De fleste elevene på voksenopplæringen var mellom 25–35 år.

Studien tar for seg undervisningen som ble gjennomført ukene 4, 5 og 6 i 2009. Hele kapittel 5 i læreboken ble gjennomgått i løpet av de tre ukene. Kapittelet handler om vektorer. Undervisningsøktene ble gjennomført ved følgende tidspunkt: mandag 12^{10}–13^{35}, onsdag 12^{10}–12^{50} og torsdag 12^{10}–13^{35}. En undervisningsøkt varte i 40 minutter. Mandag og torsdag hadde klassen økter på to skoletimer, atskilt med et friminutt på fem minutter. Etter matematikktimene torsdag hadde klassen en studietime der samme lærer var tilgjengelig for å hjelpe elevene. Studietimen var ikke knyttet spesielt til matematikk, så elevene kunne selv velge hvilket fag de ønsket å arbeide med.

3.4 Prosedyre for innsamling av data

Observasjon

Observasjon utgjør en vesentlig del av min studie. Jeg har fulgt alle matematikktimene klassen hadde i tre uker, hvilket betyr fem timer hver uke. For å kunne analysere undervisningen over et lengre tidsperspektiv enn den sanne tiden skoletimen foregikk i, valgte jeg å ta opp undervisningen med video og lydopptaker. Første time stod kameraet bakerst i klasserommet, men jeg oppdaget raskt at jeg ikke så hva elevene gjorde, jeg så bare ryggene deres. Kameraet ble flyttet fram og jeg filmet bakover i klasserommet. Grunnet at jeg ikke skulle fokusere på lærerens rolle har jeg valgt å ikke ha læreren i fokus for videokameraet heller. Jeg gjorde samme erfaring i klasserommet brukt på onsdager. I flere situasjoner filmer jeg elevene når læreren underviser fra tavlen. Jeg har likevel valgt å filme læreren innimellom og passet på at det som har blitt skrevet på tavlen er med på opptakene.

Lydopptakeren ble brukt for å ta opp hva elevene snakket om mens de løste oppgavene. Spilleren ble lagt ut på en elevpult. Som regel ble spilleren lagt hos de to samme elevene, for de pratet høyt mens de løste oppgavene. Da tenkte jeg at jeg ville få mer informasjon om hvordan de to har forstått vektorer. En mulighet kunne vært å henge lydopptakeren på læreren slik at jeg alltid ville fått lyden av elevene i situasjoner der de fikk hjelp eller veiledning. Ofte stod læreren fremme ved kateteret og bladde i læreboken, og da ville ikke lydopptaket gitt meg den informasjonen jeg var interessert i. Jeg ønsket data fra når elevene diskuterte seg i mellom og valgte derfor å ha spilleren liggende på pulten. Etter å ha gått igjennom de innsamlede data etter første dag jeg var ute i felten, oppdaget jeg at når elevene arbeidet snakket de stille, raskt og med så mange dialekter at det var meget vanskelig å få noe ut av lydopptaket. Jeg fikk lov av elever og lærer å gå rundt og hjelpe elevene som trengte det, og da jeg også kunne spørre om hvordan de tenkte. Med det håpet jeg at jeg skulle høre og forstå noe av det elevene sa, samtidig som jeg kunne få informasjon om hvordan elevene tenkte. Mens jeg observerte tok jeg notater av situasjoner jeg oppfattet som interessante. Notatene ble renskrevet på data etter fullført observasjonsøkt.

I ettertid har jeg transkribert deler av videomaterialet, slik at det er mulig å studere undervisningen i et lengre tidsperspektiv enn den sanne tiden undervisningen foregår i. Det transkriberte materialet består av seks episoder fra undervisningen som kan gi meg informasjon om elevenes forståelse og hvordan de tenker. Se Vedlegg 8: Transkribert materiale som ikke er presentert i oppgaven og 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk for transkribert materiale, samt Vedlegg 7: Transkripsjonsnøkkel for transkripsjonsnøkkel.

Intervju

Seks intervjuer ble gjennomført i etterkant av all undervisning i kapittelet, fem elevintervjuer og ett lærerintervju. Samtlige intervjuer tok utgangspunkt i spørsmål laget på forhånd, men når det var ønsket eller nødvendig ble det stilt oppfølgingsspørsmål. Intervjuobjektene ble valgt ut på bakgrunn av om de kunne tenke seg å bli intervjuet, samt hvor aktive de hadde vært i timen og om jeg hadde informasjon om hvordan de tenkte mens de løste oppgaver. I undervisningen var noen elever mer aktive enn andre. Elever som forklarte hvorfor de løste oppgavene og var aktive ga meg mer informasjon om deres forståelse enn elever som ikke sa noen ting. Enkelte elever hadde stort fravær under observasjonen, noe som gjorde at jeg ikke hadde nok data om dem til å kunne si noe om hvordan deres forståelse for vektorer så ut til å være.

Intervjuene ble gjennomført på ulike dager, avhengig av når elevene og læreren hadde tid og mulighet. Elevintervjuene hadde forskjellig varighet avhengig av hvordan og hvor utdypende elevene svarte på spørsmålene.

Under samtlige intervjuer ble lyden tatt opp ved hjelp av videokamera. I forkant av intervjuene tenkte jeg igjennom hvilke mulige svar elevene kunne gi meg på hvert spørsmål. Hensikten var å legge til rette for å få så mye informasjon jeg ønsket for så å planlegge oppfølgingsspørsmål. I tillegg prøvde jeg ut intervjuet på ei jente som tar det samme faget som privatist.

Test
Av hensyn til tidspress i faget valgte jeg i samråd med læreren å lage en prøve som jeg kunne bruke til min studie, samtidig som hun kunne bruke den som kapittelprøve som elevene fikk karakter på.

Prøven ble laget ut i fra temaene i læreboken. Etter at testen var laget ble den sendt til læreren for innspill og kontroll. Testen ble revidert og sendt tilbake for nye innspill og tilbakemeldinger. Vi ble enige om å ha testen som den var da. Oppgavene i læreboken, den ferdiglagde prøven tilknyttet læreboken, samt oppgavene i Rinvold (2003) Oldervoll, Orskaug og Vaaje, (2003) ble brukt som inspirasjon.

Jeg gjennomførte en piltottest i det samme matematikkfaget på en annen videregående skole i nærheten. Resultatene viste at noen oppgavetekster måtte omformuleres litt, men at jeg ville få mye relevant informasjon ut av testen slik den var da. Ingen oppgaver gjennomgikk store endringer. Se Vedlegg 6: Rapport fra Pilottest for rapport fra pilottesten.

Prøven ble gjennomført som en del av undervisningen, i de to siste øktene av datainnsamlingen. Ni av ti elever var til stede. Elevene fikk to skoletimer tilgjengelige til prøven i tillegg til friminuttet mellom undervisningsøktene. Elevene som ønsket det fikk mulighet til å sitte gjennom friminuttet etter undervisningsøkten. Læreren gikk rundt under testen og svarte på elevenes spørsmål. Når flere elever spurte om det samme, skrev hun det opp på tavlen, eksempelvis definisjonen på trapes. Prøven ble, som all annen undervisning, tatt opp på film. Videokameraet stod helt foran i klasserommet slik at det fanget opp alle elevene.

Elevenes arbeidsbøker
Arbeidsbøkene er elevenes egne kladdebøker. Der fører de notater fra timen og regner oppgaver, både hjemme og på skolen. Arbeidsbøkene ble fotografert side for side hver torsdag. Ikke alle elevene brukte skrivebok, og av forskjellige årsaker var det ikke mulig å ta bilde av samtlige arbeidsbøker hver torsdag. Siste dagen, da prøven ble gjennomført, var det ingen anledning til å ta bilde av elevenes bøker. Jeg var tilbake på skolen for å ta bilder av de resterende bøkene, men ikke alle elevene hadde de med seg. Derfor har jeg ikke komplett samling av elevenes arbeidsbøker.

Hensikten med å få oversikt over elevenes arbeidsbøker var å se hvordan de jobbet med pensum og hvordan de løste oppgavene. Arbeidsbøkene kan gi meg informasjon om elevenes forståelse for vektorer.

Annen dokumentasjon
Læreboken brukt i undervisningen er Sinus R1 (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch & Hals, 2007). I studien vil jeg analysere læreboken for å undersøke om den fremmer ulike typer forståelse eller kunnskap. Hensikten er å se hvordan læreboken påvirker elevene.
Læreren delte ut fremdriftsplan over kapittelet til elevene. Fremdriftsplanen kan gi meg informasjon om hvordan undervisningen var tenkt lagt opp.

3.5 Forholdet mellom metodene og problemstillingene

Lærebokens rolle i undervisningen
Observasjon gir meg god dokumentasjon på lærebokens rolle i undervisningen, og da hovedsakelig fra lærerens perspektiv. Læreren legger undervisningen opp etter en framdriftsplan som er bygget opp av seksjonene i læreboken. Ved å følge læreboken kan man kjenne igjen forelesningssekvensene i undervisningen. I lærerintervjuet blir læreren spurt om hvordan hun bruker læreboken i undervisningen, som følgelig vil gi meg informasjon om hennes syn på læreboken og hvilken rolle hun har lagt opp til at boken skal ha i undervisningen. Notatene fra observasjonen i undervisningen er og en kilde til bevis på hvordan læreboken ble brukt i undervisningen. Dokumentasjon ved læreboken og framdriftsplanen er de eneste kildene som kun gir meg informasjon om dennes rolle i undervisningen.

Elevenes måte å bruke læreboken på.
Både observasjonen og feltnotatene gir meg dokumentasjon på hvordan elevene bruker læreboken. I elevintervjuene forteller elevene om deres arbeid og hvordan det er knyttet til læreboken. Læreren får i sitt intervju spørsmål om hvordan hun opplever at elevene bruker boken. Elevenes arbeidsbøker dokumenterer også hvordan de bruker læreboken fordi der er det arbeid basert på læreboken og kopi fra lærebokens tekst.

Sammenheng mellom elevenes bruk av læreboken og karakteristikken av deres forståelse for matematikk
I undervisningssekvensene uttrykker elevene flere ganger hvordan de tenker når de arbeider med oppgaver, som vil gi meg informasjon om det i det hele tatt finnes en sammenheng mellom bruken av læreboken og hva slags forståelse elevene har. Informasjon kan jeg finne både i observasjonen og i feltnotatene. Under intervjuene forklarer elevene hvordan de tenker omkring ulike begrep. Intervjuene vil derfor være en annen kilde til å finne informasjon om problemstillingen. Jeg vil også kunne hente informasjon ut av intervjuet med læreren, der hun reflekterer omring elevenes innsats i timen. Testen inneholder oppgaver som varierer litt fra oppgavene i boken, men omhandler samme tema. Elevenes løsninger vil dermed gi meg indikasjoner på hva slags forståelse elevene har og hvordan det henger sammen med læreboken. Testen gir meg ikke svar på noen av de andre problemstillingene i oppgaven.

3.6 Andre metoder som kunne ha vært aktuelle

Å velge hvilke metoder man vil bruke til datainnsamling betyr å velge bort andre metoder. Jeg ønsker å presentere enkelte metoder som kunne vært like naturlige å bruke som de jeg valgte.

Spørreundersøkelse
Spørreundersøkelse er en måte å innhente informasjon på som kun består av skriftlig kommunikasjon. Det gjør at hvis et spørsmål misforstås eller deltakeren forstår spørsmålet på en annen måte enn intervjueren mente, er det ingen ting å gjøre med, og forskeren kan heller

ikke vite hvem som har misforstått eller ikke. Derfor er utformingen av spørsmålene veldig viktig. En spørreundersøkelse krever ikke like mye tid til gjennomføring som intervju og kan være svært nytting når man ønsker å samle inn data fra mange informanter. Selv om man sender ut en spørreundersøkelse er det ikke gitt at alle deltar på den, heller ikke at de som velger å delta svarer på alle spørsmålene. Frafallet kan være stort. En spørreundersøkelse kan være ustrukturert, der deltakeren fyller inn setninger til svar, eller den kan være strukturert der deltakeren har gitte svaralternativer (Bø, 1995).

Å formulere presise nok spørsmål til at alle deltakerne ville få samme oppfatning som meg på alle spørsmålene ville være svært utfordrende. Videre mener jeg at det ville vært svært vanskelig å få like god kvalitet på dataene når det gjelder innsikt i elevenes forståelse for matematikk, som det jeg får ved de metodene jeg har valgt. Eksempelvis kunne jeg ha gjennomført en stor spørreundersøkelse om bruken av læreboken blant elever, men det er uvisst om svarene ville gitt meg like detaljert informasjon som metodene jeg har benyttet, er uvisst. Dersom jeg hadde gjennomført en stor spørreundersøkelse kunne resultatene blitt generalisert, men slik min studie er vil jeg ikke kunne gjøre det.

For å innhente noe grunnleggende informasjon om mine deltakere vurderte jeg å gjennomføre en liten spørreundersøkelse. Undersøkelsen kunne gi meg samme informasjonen om alle elevene, eksempelvis om deres matematiske bakgrunn. Jeg vurderte situasjonen slik at jeg hadde nok informasjon om elevene til å kunne gjennomføre studien slik jeg hadde planlagt. Derfor gjennomførte jeg ingen spørreundersøkelse blant mine deltakere.

Stimulert erindring

Stimulert erindring handler om at personer ser eller lytter til opptak av oppgaver de har utført. Under fremvisningen av deres egne handlinger tenker de høyt og reflekterer over hva de gjorde. Metoden er særlig brukt når deltakeren ikke kan tenke høyt når oppgaven blir utført. Forskeren kan stille deltakeren generelle og åpne spørsmål om situasjonen som blir vist frem. (Eisenhart & Borko, 1993)

Lærere i undervisningssituasjoner, som presenterer stoff eller hjelper elever kan ikke tenke høyt mens de utfører selve oppgaven. Ved bruk av stimulert erindring som metode, antar man at deltakeren både vil og kan huske og formulere fullstendige og nøyaktige tankerekker. Videoopptak er rik på detaljer, og gjør at læreren gjenopplever situasjonen. At læreren gjenopplever situasjonen, fører ikke automatisk til at erindringen er sammenfallende med hva læreren faktisk tenkte. Spørsmål forskeren stiller kan være ledende og på den måten gi læreren assosiasjoner om hva svaret bør inneholde. Situasjonen kan medføre at dataene ikke lenger blir komplette, og sannheten blir forvrengt. Årsaken er at læreren ubevisst ønsker å fylle inn hullene forskeren har om situasjonen. (Wittrock & American Educational Research Association, 1986)

I min studie ville bruk av stimulert erindring være en metode som ga meg gode svar på problemstillingen, men flere faktorer gjorde at jeg valgte den bort. Faget matematikk R1 er et svært travelt fag. Pensum er stort og klassen skal igjennom mye stoff. Metoden ville vært for tidkrevende for både elever og læreren å delta på. Læreren har lite tid utenom undervisningen og har i tillegg undervisning umiddelbart etter matematikktimene. Dessuten fokuserer ikke studien på læreren, men elevene. Det kreves stor grad av motivasjon hos elevene for å få dem til å delta i prosjekter uten at de trekker seg. Jeg vil tro at det innebærer blant annet at prosjekter ikke kan være spesielt tidkrevende. Derfor valgte jeg å ikke bruke stimulert erindring som metode i min studie.

3.7 Strategi for analyse av data

Jeg ønsker å se på elevenes aktivitet fra forskjellige perspektiver. Elevenes arbeid og forståelse vil bli studert gjennom

1. observasjon av deres arbeid i undervisningen
2. undersøke arbeidsbøkene der deres faktiske arbeid er dokumentert
3. betrakte elevenes prestasjon på testene
4. studere deres svar på intervjuene.

Ved hjelp av flere ulike tilnærminger til elevenes forståelse kan analysemetoden gi meg et større grunnlag for å tolke resultatene.

Observasjon

Først så jeg gjennom videoopptakene, lyttet gjennom lydfilene og noterte ned interessante hendelser. Da jeg noterte hadde jeg ikke noe spesielt fokus og heller ikke definert hva jeg syntes var interessante hendelser. Da jeg senere skulle undersøke hvordan elevene reagerte når de så ut til å stå fast i arbeidet oppdaget jeg at min første datareduksjon ikke gjorde store nytten lenger. At jeg ikke hadde noe spesielt fokus førte til at notatene ikke kunne brukes til annet enn at jeg fikk et godt overblikk over observasjonsdataene mine.

Jeg så og lyttet gjennom all observasjon på nytt og noterte ned når elevene så ut til å stå fast. Jeg lagde en skjematisk fremstilling for hver elev og over deres reaksjonsmønstre. Jeg så gjennom oppgavene utallige ganger med ulikt fokus hver gang for å finne den informasjonen som var nødvendig i analysen.

Alrø og Dirckinck-Holmfeld (1997) skriver om analyse av videoobservasjon. De hevder at ved hjelp av noen fokuspunkt vil man kunne få en grundig analyse av observasjonene. Fokuspunktene de lister opp er: registrering av episoder, lage oversikt over aktivitetenes tidsfordeling, turtaking, deltakerstruktur, fordeling av problemer og løsninger, organiseringen av rommet og gjenstandenes/ dokumentenes rolle. Jeg ønsker ikke å gå i dybden i alle fokuspunktene da det blir for omfattende for denne oppgaven, men de aller fleste vil gi meg dyptgående informasjon om alle tre problemstillingene mine. I mitt arbeid med å analysere observasjon av undervisningen har jeg vektlagt å registre episoder, lage oversikt over aktivitetenes tidsfordeling, registre turtaking i flere episoder og se på dokumenters rolle i klasserommet og undervisningen.

Intervju

Jeg lyttet nøye gjennom alle intervjuene og noterte ned hva både elever og lærer svarte på hvert enkelt spørsmål. Min oppfatning var at det ville bli lettere å se på sammenhengen mellom intervjuene og andre datakilder når jeg hadde svarene skrevet ut i tekst. Kvale og Brinkmann (2009) sier at man aldri skal stille spørsmål om hvordan analysere intervjuene etter at du har gjennomført dem, for da er det for seint. I mitt tilfelle er det slik. Jeg tenkte ikke nøye nok igjennom hvordan jeg ønsket å analysere intervjuene, og i ettertid er det vanskelig å forklare hvordan jeg vil analysere dem.

En metode for kvalitativt å studere intervju i følge Kvale og Brinkmann (2009) er å kode svarene, det vil si notere ned nøkkelord slik at innholdet kan presenteres på en oversiktelig måte i etterkant. Slik ønsker jeg å analysere mine intervjuer.

Test
Umiddelbart etter at testen ble gjennomført, kartla jeg hvordan hver enkelt elev svarte på alle oppgavene samt fremgangsmåtene de så ut til å bruke. Jeg så med en gang tendenser til hva som var problematisk og hva elevene hadde forstått.

Jeg vil se nærmere på hver enkelt oppgave, studere elevenes løsninger på testen opp mot hva de sier i intervjuene at de kan og hvordan de liker å arbeide. Fokus for analysen av testen handler om hvorvidt elevene kan begrunne svarene sine, om de klarer å vise hvordan de har tenkt i tillegg til å se på elevenes løsningsstrategier på testen opp mot strategiene presentert i læreboken. I forhold til kartlegging av elevenes forståelse er det interessant å studere sammenhengen mellom svarene på testen, elevintervjuene, arbeidet i arbeidsbøkene og reaksjonene når de ser ut til å stå fast.

Elevenes arbeidsbøker
Elevenes arbeidsbøker ble nøye gjennomgått. Metodene elevene brukte når de løste oppgaver kan gi meg en pekepinn på hvordan de forstod matematikken. Jeg studerte om elevene løste oppgavene ved bruk av prosedyrene presentert i læreboken, eller om de hadde funnet egne strategier for å løse oppgavene. Undersøkelser av hvordan elevene løste oppgavene kan gi meg informasjon om deres forståelse. Ved å studere videoobservasjonen kan det hende at jeg finner ut hvilke oppgaver elevene har gjort i lekse og hvilke de har gjort hjemme. Jeg ønsker å studere om arbeidet gjort på skolen er løst annerledes enn leksene. Dersom elevene bruker forskjellige metoder hjemme og på skolen er det viktig å se på hva som gjør det, i og med at min studie omhandler påvirkningen av læreboken.

Annen dokumentasjon
Etter å ha observert klassen i tre uker virket det som at elevene trengte mindre hjelp med oppgaver i læreboken der de måtte tegne, enn oppgaver der det var nødvendig å finne svaret ved hjelp av regning. Tegninger kan fungere som et konkretiseringsmateriell for elevene og vil dermed kunne gi dem en bedre begrepsmessig forståelse når de løser oppgavene på den måten. Læreboken analyseres med utgangspunkt i kategorier fra American Association for the Advancement of Science (2000), slik som beskrevet i 2.2 Analyseverktøy for lærebøker.

3.8 Valg og konsekvenser
Før jeg startet med oppgaven tok jeg flere valg. Metodene var valgt før jeg i det hele tatt kontaktet noen skole. En klasse informerte om at elevene ikke ønsket å bli filmet i en læringssituasjon, og grunnet tidspress var det heller ikke aktuelt å bruke tid fra undervisningen til noen undersøkelse eller test. En annen klasse på samme skole syntes derimot at studien hørtes spennende ut og ønsket å være deltakere.

MERG-oppgaven[2] inspirerte meg til å arbeide videre med lærebokens mulige innvirkning på elevenes forståelse for matematikk. Elevene hadde ikke hatt om vektorer i matematikken før. Min oppfatning var at å bruke et helt ukjent tema for elevene, ville bare være en fordel når jeg skulle undersøke elevenes forståelse for temaet. Da ville jeg ha god kjennskap til alt elevene hadde lært om vektorer.
Jeg har vært veldig tydelig på at jeg ikke ønsker å fokusere på lærerens rolle i undervisningen. Bakgrunnen er at alle de videregående skolene i området aktuelt for datainnsamling er skoler i små kommuner der ”alle kjenner alle”. For å ha mulighet til å gjennomføre studien på en hvilken som helst videregående i området har jeg valgt å se bort i fra lærerens rolle i

[2] Se 1.3 Arbeidet med MERG for forklaring på MERG

klasserommet. Det kan være ubehagelig å delta i en studie dersom du vet at den vil fokusere på hvordan du utfører din profesjon. Kanskje er det spesielt ubehagelig når bygda er liten og en deltakelse i en mastergradsstudie vil kunne føre til prat mellom andre i bygda. Jeg har ikke vært rettferdig mot læreren fordi jeg ikke forteller om vedkommendes bidrag i undervisningen. Jeg beskytter henne og unngår å vurdere henne, men ved å utelate læreren rapporterer jeg ikke det hele og sanne bildet fra undervisningen.

Da bygda er liten fører det til begrensninger om hva jeg kan rapportere. Både i friminuttet og i andre situasjoner utenfor klasserommet har jeg hørt og sett interessante utsagn og situasjoner. Av respekt for elevenes fritid og privatliv vil ikke gjeldende situasjoner være en del av datamateriellet. Kun observasjoner gjort i undervisningen og under intervjuene ligger til grunn for studien.

3.9 Etikk

Etikk er svært viktig innenfor all forskning. Pring (2004) sier at noe av det viktigste er at man alltid skal lete etter sannheten. Likevel må man ta vare på deltakerne sine, slik at ingen blir skadelidende eller såret. Deltakerne har krav på respekt, og skal ikke oppleve sårbare situasjoner. For å få tilgang til en skole må man ofte forhandle for å komme frem til en avtale som både skolen og forskeren kan akseptere. Man må respektere betingelsene som er nødvendige for å få frem sannheten. Bryman (2004) har samme fokus når det gjelder etikk i sosial forskning. Han deler etikk inn i fire hovedpunkter: om deltakerne er skadelidende, om det er mangel på informert samtykke fra deltakerne, om privatlivet blir invadert, og om deltakerne føler de blir bedratt.

Studien er godkjent av Personvernombudet for forskning, underlagt Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD). Godkjenningen medfører kvalitetssikring av informasjonen elever og skolen får. Elevene har fått forklaring på hva studien handler om og hvilken rolle de har i studien gjennom et informasjonsskriv, se Vedlegg 1: Informasjonsskriv til elever. I skrivet står det at studien er frivillig å delta på, og at de når som helst, uten grunngiving, kan trekke seg fra studien. Informasjonen har de i tillegg fått muntlig flere ganger. Skolen har samtykket skriftlig, som svar på søknad, til at jeg kan gjennomføre studien hos dem, under den forutsetning at elevene ønsker å delta. Jeg tror hverken elevene eller læreren føler seg bedratt av meg som masterstudent. Jeg mener jeg har vært tydelig og klar på hva som skulle skje både under datainnsamlingen og etterpå. Gjentatte ganger har deltakerne blitt minnet på at det var frivillig å delta. I intervjuene fikk ikke elevene inngående spørsmål om deres privatliv, annet enn bakgrunnsinformasjon som hvilken ungdomsskole de gikk på og deres alder. Elevene kunne velge å ikke svare på spørsmålene. Av den grunn tror jeg ingen har følt at deres privatliv har blitt invadert. Dersom resultatene viser tendenser som kan være ubehagelige for deltakerne ønsker jeg likevel å formidle de sanne resultatene, men på en skånsom måte.

Å velge bort fokus på læreren var et avgjørende valg i studien, basert på hensyn til læreren. Årsaken var, som nevnt i 3.8 Valg og konsekvenser, at det skulle sørge for at læreren ikke ville oppleve det ubehagelig dersom andre i bygda fikk tak i masteroppgaven med kunnskap om hvor den er gjennomført. Jeg har full taushetsplikt, men elevene forteller sine foreldre om studien, som igjen kan fortelle det videre. Da blir ikke deltakerne anonyme, selv om jeg har overholdt min taushetsplikt.

Etter at dataene er samlet inn, vil ingen andre enn jeg ha tilgang til dem. Datamaskinen materialet ligger på, vil være innelåst når jeg ikke er til stede. Sikkerhetskopiene og elevenes tester ligger innelåst i et arkiv der ingen andre enn jeg har tilgang. I etterkant av masteroppgaven vil det bli destruert.

3.10 Oppsummering

Studien bygger på konstruktivistiske prinspipp der elevene skaper sin egen kunnskap, og læring er et resultat av hvordan elevene arbeider med ulike stimuli. Elevene er nødt til å ha et forhold til læreboken i større eller mindre grad, fordi den er i bruk i undervisningen. Antakelsen om at læreboken påvirker elevene på en eller annen måte er derfor naturlig. Mitt arbeid består blant annet av å undersøke om læreboken påvirker elevenes forståelse for matematikk.

Ti elever deltar i studien, av dem fire jenter og seks gutter, i tillegg til læreren. Jeg har fulgt undervisningen i faget matematikk R1 og deres arbeid med vektorer i tre uker. Innsamlingen av data har blitt gjort ved bruk av kvalitative metoder som observasjon, intervju, test, dokumentasjon av elevenes arbeidsbøker og analyse av læreboken. Andre metoder jeg kunne ha brukt var spørreundersøkelse og stimulert erindring, men grunner presentert i kapittelet valgte jeg dem bort. Analysen av data vil bli gjennomført ved å betrakte elevenes aktivitet fra flere synsvinkler i den hensikt å få et større tolkningsgrunnlag.

Under arbeidet med studien har jeg foretatt valg som har innvirkning på studiens fokus, eksempelvis har jeg sett bort fra lærerens rolle i observasjonene, samt utsagn og episoder mellom elevene observert utenom undervisningen. For å ivareta deltakernes anonymitet og privatliv er det mange hensyn å ta med tanke på størrelsen på området og befolkningen studien gjennomføres i.

4 Vektorer og analyse av læreboken

Kapittelet om vektorer handler om hva elevene skal lære om vektorer ut i fra læreplanen og hvilken bakgrunnskunnskap elevene trenger for å oppnå målene i læreplanen. Videre reflekteres det over om det er en konflikt mellom elevenes tidligere kunnskap og det å lære vektorer, slik som at notasjonen for vektorer og lukkede intervall kan forveksles. Til slutt presenteres en analyse av læreboken, der både forholdet mellom tegning og regning i læreboken blir undersøkt, og læreboken blir knyttet opp mot Skemp (1976) sine kunnskapskategorier. Analysen vil bli utført med bakgrunn i kategoriene fra American Association for the Advancement of Science (2000).

4.1 Vektorregning i læreplanen

Vektorregning er et stort område innenfor matematikken, slik som andre matematiske konsept. I og med at læreplanen sier at elevene skal lære vektorregning, er det et prioritert tema. Det er vanskelig å si hvor stor del av læreplanen vektorregning utgjør fordi læreplanen består av både store og små kompetansemål, som lærere og lærebøker kan vektlegge forskjellig. Læreplanen har to kompetansemål om vektorregning innenfor geometri, samt et om vektorfunksjoner under funksjoner. Det står at elevene skal kunne ”regne med” vektorer, hvilket er et vidt begrep. I tillegg bygger læreplanen videre på de geometriske kompetansemålene om vektorregning ved å introdusere vektorfunksjoner. Det kan tyde på at vektorregning er et prioritert matematisk område i læreplanen for matematikk R1. Deltakerne i studien hadde bare en introduksjon til vektorregning i den perioden jeg observerte undervisningen. Det er læreplanen som er pensum og sier hva elevene skal kunne. Nøyaktig hva elevene skulle lære om vektorregning står beskrevet i fagplanen for Matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, n.d.).

To punkter i læreplanen omhandler vektorer. I tillegg nevner læreplanen vektorfunksjoner. Studien omhandler kun introduksjon til vektorregning. Derfor har jeg valgt å se bort fra læreplanens mål om vektorfunksjoner når jeg skal analysere vektorbegrepet. Jeg vil ta for meg de to læreplanmålene og se på hvilken forståelse elevene trenger for å oppnå hvert av dem.

Læreplanen sier at elevene skal kunne ”regne med vektorer i planet, både geometrisk som piler og analytisk på koordinatform” (Utdanningsdirektoratet, n.d.). Jeg presenterer en liste over hva elevene må kunne for å oppnå kompetansemålet innenfor introduksjon av vektorer. For å oppnå kompetansemålet fullt ut vil elevene måtte kunne mer enn det som er listet opp. Elevene må:

- kjenne til definisjonen av en vektor
- kjenne til notasjonen av vektorer
- kunne tegne vektorer i og utenfor et koordinatsystem
- vite hva en enhetsvektor er
- vite hva en nullvektor er
- kunne addere vektorer som piler og på koordinatform
- kunne subtrahere vektorer som piler og på koordinatform
- kunne multiplisere et tall og en vektor som piler og på koordinatform
- kunne regne ut koordinater til punkter
- kunne finne vektoren mellom to punkt

Videre sier læreplanen at elevene skal kunne ” beregne og analysere lengder og vinkler til å avgjøre parallellitet og ortogonalitet ved å kombinere regneregler for vektorer” (Utdanningsdirektoratet, n.d.). Jeg presenterer en liste over hva elevene må kunne for å oppnå kompetansemålet innenfor introduserende vektorregning. Elevene må:

- vite hva som gjør at vektorer er parallelle i og utenfor koordinatsystemet
- kunne avgjøre om to vektorer er like
- kunne finne midtpunktet til et linjestykke ved hjelp av vektorregning
- kunne regne ut lengden av vektorer
- kunne finne avstanden mellom to punkt

Innunder kompetansemålet kommer også skalarprodukt samt andre tema, men tatt i betraktning at studien handler om introduksjon til vektorregning på videregående skole mener jeg temaene ikke tilhører introduksjonen. De er derfor ikke med i oversikten.

4.2 Elevenes forkunnskap

Elevene kan ikke forstå og lære vektorregning uten forkunnskap. Jeg vil se på hva slags forkunnskap som er nødvendig for at elevene skal oppnå punktene listet opp i 4.1 Vektorregning i læreplanen. Jeg deler forkunnskapen inn i tre kategorier: geometri, algebra og aritmetikk.

Innenfor aritmetikk må elevene ha kjennskap til de fire regneartene for å kunne regne med vektorer. Elevene skal kunne addere og subtrahere vektorer, samt multiplisere vektorer og tall. I tillegg er det viktig at elevene vet at divisjon ikke er definert for vektorer. Elevene må i tillegg kjenne til positive og negative tall for å kunne avgjøre retning på vektorene. For å kunne regne ut lengder av vektorer må elevene kjenne til absoluttverdi og kunne regne med kvadratrøtter.

Algebraisk må elevene forstå hva bokstaver representerer fordi de brukes i notasjonen av vektorer. Videre er det viktig at de forstår at en bokstav kan både stå for en bestemt ukjent eller en variabel. Først da kan elevene kan løse likninger, sette inn tall for bokstaver i regnestykker, formler og variere verdier. Videre må elevene kjenne til at parentes rundt to tall, skilt med komma, er en punktkoordinat, som igjen leder til forståelse for vektorkoordinater.

Innenfor geometrien må elevene kjenne til en rekke begrep for å ha en forutsetning for å forstå vektorregning. Elevene må kunne begrep som pil, plan, koordinatsystem, origo, 1.- og 2.- akse, retning, lengde, punkt, endepunkt og startpunkt for å kunne forstå vektorbegrepet som piler i planet og i koordinatsystemet. I tillegg må de ha kunnskap om begrep som parallell, parallellforskyving og motsatt rettet. I vektorregning blir ofte ulike trekanter og firkanter brukt i oppgaveløsning. Derfor er det viktig at elevene kjenner til egenskapene til ulike trekanter, firkanter og andre geometriske figurer og forstår notasjonen for å beskrive en bestemt figur, for eksempel firkant ABCD. Videre er det viktig at elevene kan bestemme hvorvidt to trekanter er kongruente ut i fra trekantenes egenskaper.

Elevene er helt avhengige av denne forkunnskapen for å lære seg og forstå punktene nevnt i kapittel 4.1 Vektorregning i læreplanen. Elevenes faktiske forkunnskap er ikke kartlagt i denne studien.

4.3 Konflikt mellom tidligere kunnskap og vektorregning

Vektorregning består av andre elementer enn elevenes tidligere kunnskap, hvilket er naturlig fordi det er et nytt tema for elevene. Ny kunnskap kan komme i konflikt med gammel kunnskap når elevene lærer. Elevene må arbeide med konfliktene. Ved å oppdage at de må gjøre noe annerledes får de en større kunnskapsbase.

Det er flere eksempler på konflikt mellom vektorregning og elevenes tidligere kunnskap. Notasjonen for vektorer, slik som [0,3] kan forveksles med det lukkede intervallet fra 0 til 3. Det er derfor viktig å være klar over om man snakker om vektorer eller lukkede intervall. I de aller fleste tilfeller vil konteksten klargjøre hva det er snakk om, men det er like fullt en situasjon der det kan oppstå konflikter.

En annen utfordring kan være at en vektor ikke bare er et tall. En vektor består av to komponenter, både lengde og retning. Elevene har hatt om det tidligere, slik som ved parallellforskyving, men det kan tenkes at det ikke blitt presisert så tydelig at noe består av to komponenter tidligere.

Addisjon og subtraksjon av vektorer kan skape en konflikt på grunnlag av at man ikke får et tall ut som tidligere, men et tallpar skilt med komma. Likevel kan man si at addisjon og subtraksjon av vektorer fungerer som elevene er kjent med fra tidligere fordi innenfor de to tallparene vil operasjonene fungere som vanlig og man ender opp med et nytt tallpar. Situasjonen blir annerledes når man ser på skalarprodukter av vektorer. Da vil ikke resultatet bli et tallpar som man først kan anta, men derimot får man en skalar størrelse. Elevene lærer ikke om dette i introduksjonen til vektorregning, men i et senere kapittel. Derimot lærer elevene om multiplikasjon av tall og vektorer, som kan knyttes opp mot parentesregning som elevene kjenner fra før.

Videre kan elevene sette spørsmålstegn ved hvorfor de ikke lærer å anvende divisjon på vektorer, men å multiplisere med en brøk i stedet. Det kan skape konflikter for elevene fordi de ikke forstår hvorfor, men godtar at det er slik.

4.4 Analyse av læreboken

Læreboken brukt i undervisningen er Sinus R1 (Oldervoll et al., 2007). I observasjonsperioden ble kapittel 5, vektorer, gjennomgått. Kategoriene fra American Association for the Advancement of Science (2000) vil bli brukt som et utgangspunkt for analysen. Som forklart i *2.2 Analyseverktøy for lærebøker* blir ikke kategoriene brukt i sin helhet fordi alt ikke er like relevant for masterstudien.

Lærebokens oppbygging

Læreboken starter kapittelet med å referere læreplanens kompetansemål knyttet til kapittelet. På denne måten vet elevene godt hva som forventes at de skal kunne og hva de blir vurdert ut i fra. Kapittelet inneholder åtte delkapitler, som tar for seg ulike deler av introduserende vektorregning. De ulike delene er vektor og skalar, sum av vektorer, vektordifferanse, produkt av tall og vektor, vektorer på koordinatform, regning med vektorkoordinater, vektoren mellom to punkt og lengde og avstand. Til slutt kommer et sammendrag der viktige regler blir listet opp. Punktene fra 4.1 Vektorregning i læreplanen konkretiserer hva slags vektorregning som tilhører kompetansemålene. Læreboken inneholder alle punktene.

Læreboken bruker symbol i margen for å vise elevene hva som kommer, se *Figur 1*. Pil-symbolet viser elevene at en viktig regel blir beskrevet, utropstegnet viser til et nyttig tips, spørsmålstegnet indikerer oppgaver og symbolet med en mann som tenker viser at det kommer et vanskelig bevis. I lærebokens forord blir symbolene beskrevet. Videre i forordet står det at det vanskeligste stoffet kommer til slutt i kapittelet, ofte også innenfor hvert delkapittel. Boken legger ikke opp til noen bestemt organisering av undervisningen.

Figur 1: Symboler brukt i margen i læreboken (Oldervoll, 2007, s. 154-183)

Oppstart av nytt tema

Kapittelet starter med et delkapittel om forskjellen på vektor og skalar. Kraft og krefter blir brukt som innfallsvinkelen til vektorer, i tillegg til å presisere viktigheten av retning. Boken bruker eksempler som er gjenkjennelige og lette å forholde seg til for elevene. Et eksempel er at i et orienteringsløp kan man ikke bare løpe, det er også avgjørende hvilken retning man løper i. Innfallsvinkelen gjennom kraft og krefter kan være vanskelig for elevene som ikke er kjente med det fysiske temaet. Elevene blir i første delkapittel informert om at ulike vektorer, som fartsvektorer og kraftvektorer har felles egenskaper, der matematikken tar for seg vektorene uten noen spesiell fysisk betydning.

De ulike delkapitlene har veldig lik oppbygging. Hovedsakelig starter kapitlene med å forklare en regel eller prosedyre, etterfulgt av eksempler og arbeidsoppgaver for elevene. Noen steder poengteres ulike tips med symbol i margen, og ved subtraksjon av vektorer blir to ulike metoder for å regne differansen presentert. Kapitlene starter ikke med innledende problem eller spørsmål som vekker elevenes oppmerksomhet eller nysgjerrighet.

Læreboken og elevenes forkunnskap

Læreboken sammenlikner ofte vektorregning med matematikk elevene kjenner til fra før, særlig knyttet opp mot regneregler for tall. På den måten påkaller læreboken kunnskapen elevene har fra før og skaper bånd mellom kjent og ny kunnskap. Delkapitlene starter rett på informasjon, enten ved kort å adressere gammel kunnskap, eller introduserer nye temaer. I oppgavene er ofte vektorregning knyttet opp mot geometriske figurer som parallellogram eller andre firkanter. De geometriske figurene kjenner elevene fra før.

Boken viser elevene hvordan man kan tenke gjennom eksemplene. Noen oppgaver ber elevene utføre et bevis eller en oppskrift, men elevene er ikke nødt til å reflektere rundt det å lage matematiske argument med og om vektorer. Slike oppgaver inneholder deloppgaver som leder elevene helt fram til svaret, som oppgave 5.44, se *Figur 2*. Elevene kan svare på alle deloppgavene og dermed ha utført beviset, uten å forstå at de faktisk har gjort et bevis.

Oppgåve 5.44

Teikn ein firkant og finn midtpunktet på kvar side. Teikn ein firkant som har hjørne i kvart av desse midtpunkta. Kva slags figur ser dette ut til å vere? Teikn fleire firkantar med forskjellige fasongar og sjå korleis det går med firkanten mellom midtpunkta. Kva regel ser ut til å gjelde?
Vi skal no prove regelen ved hjelp av vektorrekning.
Først teiknar vi ein fritt vald firkant $ABCD$ som ikkje treng å vere eit parallellogram. M_1 er midtpunktet på AB, M_2 er midtpunktet på BC, M_3 er midtpunktet på CD, og M_4 er midtpunktet på AD.
Vi set $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ og $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$.

a) Finn $\overrightarrow{AD}$ uttrykt med $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.
b) Finn $\overrightarrow{M_1M_2}$ og $\overrightarrow{M_4M_3}$ uttrykt med $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.
c) Kva slags figur er $\square M_1M_2M_3M_4$?

Figur 2: Oppgave 5.44 (Oldervoll et al., 2007, s. 168)

Involvering og engasjement
For at matematikken skal involvere og engasjere elevene kan den bli presentert i flere kontekster. Oppgavene i boken består i all hovedsak av rene rutineoppgaver som krever at man kun bruker den regelen som nettopp har blitt presentert. Rutineoppgavene er knyttet opp til vektorer som piler i planet eller til koordinatsystemet. Noen få andre oppgaver utfordrer elevene til å bruke flere regler eller er knyttet opp mot en annen kontekst, som handler om å ro over en elv. Oppgavene med robåten er knyttet opp mot vektorsum og vektordifferanse. Mange rutineoppgaver kan føre til lite interesserte og uengasjerte elever. Hele vegen følger mønsteret med matematisk tekst med regler, eksempler og oppgaver. En ensformig lærebok bidrar ikke til å øke engasjementet hos elevene. At oppgavene i læreboken virker ensformige kan være fordi læreverket har en egen oppgavesamling med nivådifferensierte oppgaver. Det er ikke presisert at oppgaver kan egne seg som diskusjonsoppgaver eller samarbeidsoppgaver.

Utvikling av matematiske ideer
Arbeidsoppgavene, med unntak av noen få, består av rene rutineoppgaver der elevene skal finne svaret ut i fra å anvende en regel som nettopp er blitt presentert. I mer krevende oppgaver blir elevene ledet gjennom prosessen uten at de får en mulighet til å prøve selv først. Hovedsakelig får elevene en demonstrasjon ved eksempler før elevene løser oppgaver selv.

Rutineoppgavene tester om elevene har forstått prosedyrene, ikke nødvendigvis begrepene, i og med at de kan se på eksempelet foran eller bare bruke en presentert regel og likevel klare oppgaven. Min oppfatning er da at forståelsen for begrepet ikke blir vektlagt men at elevene gjentatte ganger øver på en prosedyre. Om de da lærer seg eller pugger prosedyren vil de fortsatt kunne klare oppgavene uten å forstå begrepene.

Om vektoraddisjon beskriver læreboken en huskeregel tilknyttet regelen $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Boken beskriver at når de to innerste bokstavene i uttrykket er like kan man stryke dem og plusstegnet, og man får svaret. En slik formulering legger ikke opp til forståelse hos elevene, men en mekanisk gjennomføring av oppgavene.

Læreboken består av mye matematisk tekst, formler, argumenter og bevis. Språket er presist, slik at jeg har ingen vanskeligheter å forstå tekstene, men det er uvisst om elevene oppfatter det på samme måten. Begrep og prosedyrer knyttes godt sammen gjennom forklaringer og eksempler. For enkelte elever kan teksten være vanskelig å få med seg rett og slett fordi det er mye tekst.

Elever får ikke prøvd kunnskapen sin i forskjellige situasjoner. Oppgavene som er satt i en annen kontekst enn piler i planet og koordinatsystemet er ikke alltid like enkle for elevene å forstå. En av grunnene kan være at eksempelet som innleder oppgavene ikke er av samme art som oppgavene selv, slik at elevene ikke forstår hva de skal gjøre.

Elevenes tanker om matematikk
Formuleringene i oppgavene sier som regel at elevene skal finne svaret på noe, for eksempel finn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ut i fra en figur. Oppgavene krever ikke at elevene skal begrunne svarene sine, men de skal komme fram til et svar. Ved å benytte regelen de har fått presentert kan de finne svaret. Få oppgaver lar elevene tolke og resonere selv. Oppgaver som legger opp til resonnement leder elevene fram til svaret gjennom deloppgaver, slik at elevene ikke trenger å resonnere selv. I noen få oppgaver bes elevene forklare hvorfor de får et svar uten at de blir ledet mot svaret.

Vurdering av progresjon
Elevene har god mulighet til å vurdere sin egen progresjon gjennom lærebokens fasit. I fasiten står kun korte svar, ikke løsningsforslag. Lærer har tilgang til en kapittelprøve tilhørende læreboken som elevene kan bruke til å teste egen kunnskap. Tilknyttet læreboken finnes også en oppgavesamling med nivådifferensierte oppgaver og interaktive oppgaver på forlagets nettsider. Siden at oppgavesamlingen og nettoppgavene ble brukt kun av enkeltelever og i veldig liten grad i undervisningen vil de ikke bli behandlet i analysen.

Kartlegging av forholdet mellom tegning og regning i lærebokens oppgaver
I intervjuene spurte jeg elevene om de foretrakk å tegne eller å regne når de skulle løse oppgaver. Bakgrunnen for spørsmålet var at elevene ga uttrykk for i undervisningen å like det ene bedre enn det andre. Elevenes forståelse for matematikk kan bli påvirket av om de foretrekker å tegne eller regne på grunn av de to ulike arbeidsmåtenes karakter. Derfor ønsket jeg å kartlegge hvilket fokus læreboken hadde i forhold til om man skulle løse oppgavene ved hjelp av tegning eller regning. Jeg har sett på hva oppgavene spør etter av tegning og regning, hva som kreves for å klare å løse oppgaven og hvordan løsningsforslaget tilhørende boken har valgt å løse oppgavene. Det er totalt 42 oppgaver i kapittelet.

Undersøkelsen av hvilke løsningsstrategier oppgavene spør etter, se *Tabell 1*, fokuserer på oppgavens ordlyd. I mange av oppgavene er det vanskelig å kategorisere hvilken framgangsmåte oppgaven egentlig spør etter, for ordlyden indikerer valgfrihet. Eksempler på det er ”vis”, ”finn”, ”bestem” og ”skriv”. Oppgaver som ikke spør etter noe bestemt faller inn under kategorien ”ikke spesifisert”. Oppgaver der deloppgavene spør etter ulike fremgangsmåter er blitt kategorisert under kombinasjon av flere enn to kategorier.

Tabell 1: Oversikt over hvilken fremgangsmåte læreboken spør etter

Kategori	**Antall oppgaver**
Tegning	6
Regning	4
Tegning og regning	2
Tegning i deloppgave a, regning i b	1
Tekst- og begrepssvar	4
Valgfrie formuleringer	18
Deloppgavene spør etter ulike fremgangsmåter	5
Ikke spesifisert	2

Av *Tabell 1* ser vi at boken spør direkte etter at oppgavene skal løses med tegning flere ganger enn hva den spør etter regning. Forskjellen er relativt liten, men den er der likevel. Videre ser vi at de valgfrie formuleringene er mange, der valget av strategi trolig vil variere med konteksten i oppgaven.

Grunnet variasjonen i hvilke fremgangsmåter læreboken spør etter, er det interessant å undersøke hva som faktisk må til for å løse oppgavene, se *Tabell 2*. Oppgaver som falt inn under valgfrie formuleringer i *Tabell 1*, går i denne kategoriseringen som regel inn under ***ikke spesifisert***, men i enkelte tilfeller også under ***regning***.

Tabell 2: Oversikt over hva som må til for å løse oppgaven

Kategori	**Antall oppgaver**
Tegning	7
Regning	10
Tegning og regning	2
Tegning i deloppgave a, regning i b	1
Tekst- og begrepssvar	4
Deloppgavene spør etter ulike fremgangsmåter	2
Ikke spesifisert	16

Regning må oftere til for å løse en oppgave enn tegning. En stor del av oppgavene har ikke spesifisert noen framgangsmåte. Det gjør at elevene selv kan velge hvordan de ønsker å løse mange av oppgavene.

Kartleggingene viser at oppgavene ***spør*** etter mer tegning enn regning, men at når man ser på hva som ***faktisk må til*** for å kunne løse oppgavene må man regne på flere av oppgavene enn hva man må tegne. Likevel er det mange oppgaver som indikerer valgfrihet for elevene.
For å finne ut hva læreboken vektlegger av å løse oppgaver ved tegning og regning kan man derfor se hvilke fremgangsmåter som er brukt i løsningsforslaget, se *Tabell 3*.
Løsningsforslaget ligger tilgjengelig for alle på nettsidene til læreboken. Oppgavene er løst etter følgende løsningsmetoder:

Tabell 3: Oversikt over hvordan løsningsforslaget løser oppgavene

Kategori	**Antall oppgaver**
Tekst- og begrepssvar	4
Tegning	7
Regning	23 (12)
Tegning og /så regning	4
Kombinasjon av flere kategorier	4

I kategorien tegning og/ så regning ligger både oppgaver som er løst ved tegning og regning, samt oppgaver der første deloppgave er løst ved tegning og andre deloppgave er løst ved regning. Tallet i parentes på kategori regning er antall oppgaver som er løst ved hjelpefigur og regning.

I løsningsforslaget blir flest oppgaver løst ved hjelp av regning. Elevene kan fritt bruke løsningsforslagene, og de kan påvirke hvilke strategier elever velger til å løse oppgaver. Det kan tyde på at læreboken vektlegger regning i større grad enn tegning.

4.5 Læreboken, instrumentell forståelse og relasjonsforståelse

Flere av oppgavene i boken kan brukes som diskusjonsoppgaver eller samarbeidsoppgaver, men læreboken legger ikke opp til det. At elevene får presentert eksempler før de skal regne oppgaver gjør at de kan utføre oppgavene uten å forstå matematikken bak, de behøver bare å bruke reglene benyttet i eksempelet. Oppbyggingen av boken kan dermed knyttes direkte til instrumentell forståelse fordi elevene kan utføre prosedyrene og reglene, men de oppnår ikke å vite hvorfor.

Når læreboken vektlegger regning i stedet for tegning vil det kunne påvirke elevenes forståelse for matematikk. Læreboken presenterer ofte en regel som skal benyttes i de neste oppgavene. Da blir oppgavene en måte å drille elevene på. Når elevene blir oppfordret gjennom løsningsforslagene til å bruke regning, driller de på oppgavene. Skemp (1976) definerer drill som instrumentell forståelse.

Med bakgrunn i analysen knytter jeg boken opp mot instrumentell forståelse. Læreboken forklarer hvorfor reglene og prosedyrene de utleder kan brukes, men elevene er ikke nødt til å reflektere over dette selv. Oppgavene i boken vektlegger ikke refleksjon, tolkning, samarbeid eller diskusjon, men prosedyrer og rutiner. Elevene kan klare nesten alle oppgavene i boken ved å anvende reglene uten å forstå dem. Ved kun å anvende regler vil ikke elevene oppnå en forståelse av hvorfor reglene er gyldige, og dermed vil læreprosessen ikke føre til økt relasjonsforståelse. Læreboken er god på å beskrive sammenhenger mellom kjent og ny informasjon. Ved å presisere slike forbindelser bidrar boken til å lage knagger elevene kan henge kunnskapen på. Å knytte sammen gammel og ny kunnskap bidrar til relasjonsforståelse.

I min analyse av læreboken kan resultatet forstås som negativt, det vil si at bruken ikke nødvendigvis fremmer relasjonsforståelse. Læreboken er en populær bok i videregående skole, lærebokforfatterne ser ut til å ha tilnærmet seg matematikkundervisning og læring på en måte som reflekterer undervisningskulturen i norsk videregående skole. Det er hverken forfatterne eller lærernes feil. Årsakssammenhengene her kan man stille spørsmål ved. Det er et komplekst spørsmål som kanskje kan besvares ved å se på sammenhenger mellom politiske føringer og utviklingen av undervisnings- og lærekulturen i norsk skole. Det ligger utenfor denne oppgaven. Det er hverken forfatterne eller lærernes feil, det er et resultat av hvordan undervisningskulturen i norsk videregående skole har utviklet seg.

4.6 Oppsummering

I matematikk R1 har læreplanen to kompetansemål tilknyttet vektorregning. Vektorregning består av langt mer enn hva elevene skal lære. Jeg har derfor beskrevet hva jeg mener tilhører kompetansemålene innenfor introduserende vektorregning. Kapittelet er delt inn i åtte mindre seksjoner som alle er har samme oppbygging med presentasjon av matematikk, eksempler og oppgaveløsing. Elevenes forkunnskap er viktig, og læreboken er flink til å adressere forkunnskapen og minne elevene på den og på den måten skape forbindelser mellom kjent og ny kunnskap. Oppgavene består av flest rutineoppgaver der elevene skal bruke en regel de nettopp har fått presentert til å løse oppgaven. Da er det ikke behov for at de skal tolke og reflektere selv. Læreboken har fasit som elevene kan bruke til å vurdere sin egen progresjon.

Boken bidrar til at elevene skal få både relasjonsforståelse og instrumentell forståelse. Rutineoppgavene i læreboken der elevene kan anvende reglene som er uthevet i stedet for å lese teksten i læreboken for å løse oppgavene, er veldig mange. Av den grunn mener jeg læreboken legger opp til at elevene i hovedsak får en instrumentell forståelse for matematikk.

5 Presentasjon av data

I kapittelet vil jeg redegjøre for data jeg har samlet inn som er relevant for problemstillingene. Først presenteres data fra observasjoner gjort i undervisningen. Observasjonsdataene inkluderer kartlegging over bruk av tid i undervisningen og hvordan elevene reagerer når de ser ut til å stå fast på oppgaver. I tillegg presenteres syv utdrag fra mattematikktimene. Deretter presenteres resultatene fra testen elevene hadde i slutten av kapittelet, og til slutt presenteres informasjonen som kom frem under intervjuene.

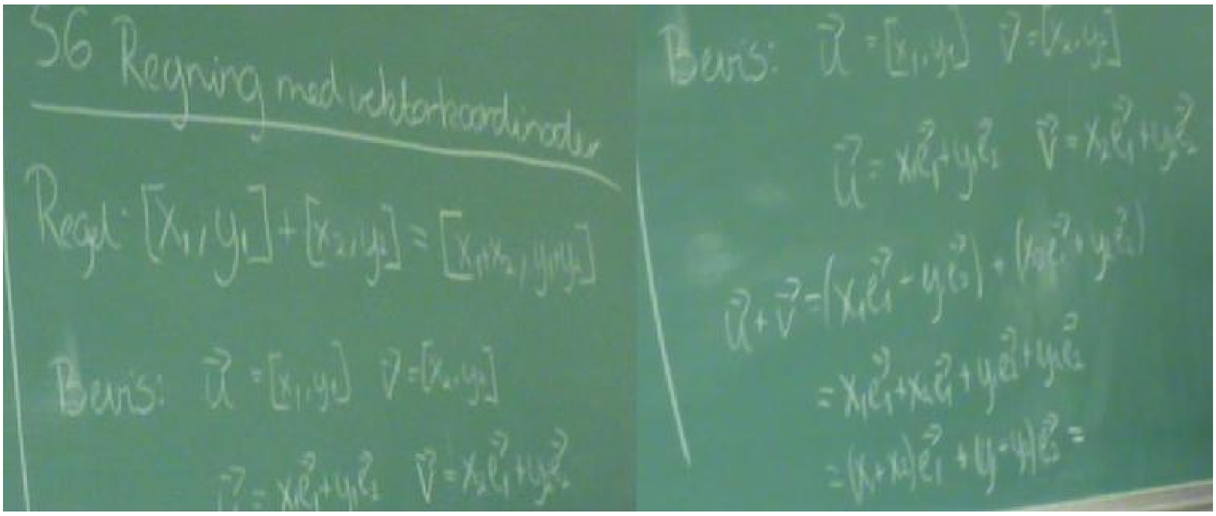
5.1 Observasjon

Observasjonsmaterialet består av videoopptak av undervisningen samt tilhørende lydfil til deler av undervisningen. Lydopptakeren ble lagt på en elevpult for å høre hva elevene sa til hverandre eller læreren under oppgavearbeidet i timene. I denne seksjonen blir data relevante for oppgavens problemstilling presentert.

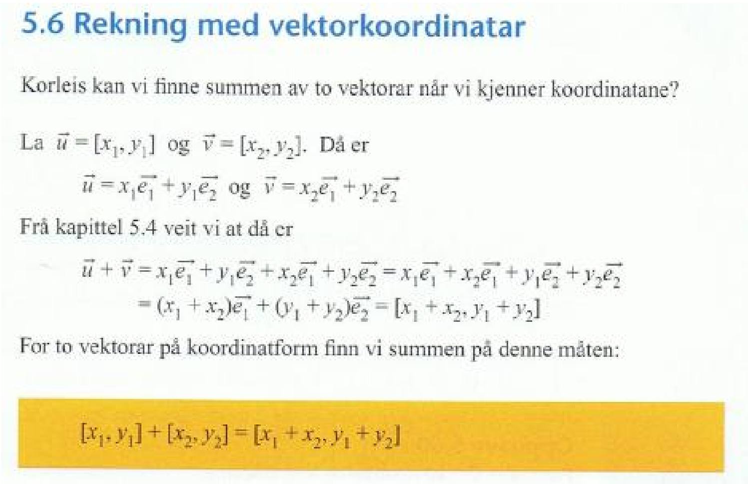
5.1.1 Bruk av tid i undervisningen

I all hovedsak bestod mattematikktimene av at læreren formidlet matematikk til elevene fra tavlen, etterfulgt av oppgaveløsing. Hvor mye tid som ble brukt til formidling og eget arbeid varierte fra time til time, se Vedlegg 9: Oversikt over innhold og tidsbruk i undervisningen**.** Noe fast mønster i bruk av tid var ikke å finne. Når elevene ønsket det gikk læreren igjennom oppgaver fra leksa eller oppgaver som mange strevde med i timen. Alle mattematikktimene knyttet til kapittel 5 om vektorer utgjorde 598 minutter. Totalt i arbeidet med kapittel 5 brukte læreren 152 minutter på å formidle nytt stoff til elevene og gå gjennom tekster og bevis i læreboken. Elevene fikk til sammen 291 minutter til å arbeide med oppgavene. Videre brukte læreren 55 minutter av den totale tiden på å gå gjennom oppgaver eller eksempler på tavlen etter elevenes ønske. Prøven varte i 100 minutter.

Arbeidsformene i timene bestod av at læreren snakket, underviste og gikk igjennom nytt stoff og oppgaver på tavlen og at elevene arbeidet med oppgaver. Læreren brukte læreboken aktivt i undervisningen ved å skrive informasjon fra boken på tavlen og henvise til sider, oppgaver, formler og forklaringer i boken. Informasjonen læreren skrev på tavlen var i hovedsak det samme som stod i læreboken, eventuelt forklart med hennes egne ord eller med mer omfattende utregninger. Nedenfor følger et eksempel på likheten mellom informasjonen på tavlen, se *Figur 3* og i læreboken, se *Figur 4*.



Figur 3: Utsnitt fra tavlen, fjerde undervisningstime, andre undervisningsuke



5.6 Rekning med vektorkoordinatar

Korleis kan vi finne summen av to vektorar når vi kjenner koordinatane?

La $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Då er

$$\vec{u} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} \text{ og } \vec{v} = x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2}$$

Frå kapittel 5.4 veit vi at då er

$$\vec{u} + \vec{v} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + y_2\vec{e_2}$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{e_1} + (y_1 + y_2)\vec{e_2} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

For to vektorar på koordinatform finn vi summen på denne måten:

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

Figur 4: Utdrag fra læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 173)

Av eksempelet ser man at læreren brukte samme overskrift som i boken og presenterte den samme regelen. Hun gjennomførte i hovedsak den samme utregningen, med unntak av noen parenteser.

Elevene kunne velge om de ville arbeide individuelt eller samarbeide med andre. De hadde ikke faste plasser, så de kunne samarbeide med forskjellige elever fra gang til gang. Noen grupperinger virket mer vanlige enn andre. Elevene arbeidet ikke alltid med oppgavene til stoffet de nettopp hadde gjennomgått, fordi de ikke hadde kommet så langt. I så tilfelle begynte de å arbeide der de var. Noen elever var dypt konsentrert under oppgavearbeidet og arbeidet effektivt. Andre arbeidet mens de pratet mye med sidemannen. Ofte var samtalene av utenomfaglig karakter, mens andre ganger var det kommentarer om oppgavene eller faget. Noen så ut til å arbeide bedre når de kunne prate om litt annet i tillegg til å regne. Flere ganger så det ut til at enkelte elever ble forstyrret av praten, så det er usikkert om det var arbeidsro for alle. Læreren ga elevene oppgaver fra læreboken i lekse på slutten av timene.

Læreren hadde laget en framdriftsplan i forkant av undervisningen, se Vedlegg 5: Framdriftsplan for kapittel 5, Vektorer. I planen stod det hvilke kapitler som skulle arbeides med i timene. Planen ble fulgt, og i tillegg gikk læreren gjennom oppgaver som elevene hadde strevd med i lekse.

5.1.2 Elevenes reaksjon når de ser ut til å stå fast

Etter å ha sett gjennom opptakene fra undervisningen har jeg definert fire ulike kategorier om elevenes reaksjoner når de ser ut til å stå fast. At elevene står fast kan jeg ikke vite med sikkerhet, men når elevene slutter å skrive, holder seg til hodet med et kroppsspråk som viser at de tenker ekstra hardt, henvender seg til andre, blar frem og tilbake i boken etter å ha stoppet opp en stund, så har jeg tolket det som at de står fast. Fremgangsmåten elevene bruker når de står fast kan gi meg informasjon om hvilke kilder elevene ser ut til å benytte for å løse oppgaver, samt hvor viktig eller nyttig de syntes læreboken er.

Jeg har definert følgende kategorier:

1. Elevene ser ut til å løse problemet selv.
   Når elevene gir inntrykk av å stå fast ser det ut til at eleven klarer å løse problemet ved å se igjennom utregningen han eller hun har skrevet. Etterpå ser det ut som at elevene tenker på det som har blitt gjort. Videre visker elevene ut og skriver på nytt før arbeidet fortsetter. Elevene ser ut til å ha løst et problem helt uten hjelpemidler. Innenfor kategorien kommer ikke skrivefeil eller andre feil som gjør at elevene benytter viskelær. Medregnet er kun situasjonene der elevene først viser tydelig tegn til å stå fast.

2. Elevene bruker medelever.
   Jeg identifiserer reaksjonene innenfor denne kategorien som følger: elevene gir inntrykk av å ikke klare oppgaven selv og står fast, men ser ut til å bruke medelever for å komme videre. Det ser ut som om elevene ser på andre elevers arbeide for å komme videre eller løse oppgaven, eller de stiller hverandre spørsmål. Også elever som tilsynelatende diskuterer oppgaven for å komme videre faller inn under denne kategorien. På grunn av at elevene småprater mye er det vanskelig å skille mellom når elevene stiller hverandre spørsmål og når de diskuterer oppgaven seg imellom. Selv om de to reaksjonene er forskjellige faller de i denne oppgaven inn under samme kategori.

3. Elevene bruker læreboken.
   Elevene stopper noen ganger opp i arbeidet og begynner å bla i boken. Etter å ha bladd og lest i boken fortsetter de på oppgavene. Handlingene forstås som at de bruker boken aktivt for å løse oppgaven. Det samme gjelder for fasiten. Elever som ser ut til å bruke fasiten før de har løst oppgaven ferdig faller inn under denne kategorien. I oppgaven skilles det ikke mellom det å bruke læreboken som oppslagsverk eller det å sjekke fasiten for å se om de forstår noe mer av problemet når de allerede vet svaret.

4. Elevene får hjelp av læreren.
   Hvis elevene står helt fast, rekker de opp hånden og spør læreren om hjelp. Andre ganger kommer læreren bort og ser på arbeidet elevene gjør. Hvis elevene ser ut til å stå fast får de hjelp av læreren. Kategorien inkluderer både når elevene etterspør hjelp og når de blir tilbudt hjelp.

Under registreringen ser jeg på kategoriene hver for seg, men også kombinasjoner av dem. Et eksempel er at elevene først blar i boken, så snakker med sidemann for til slutt å spørre læreren. Kombinasjonene følger ikke nødvendigvis rekkefølgen beskrevet i kategoriene i *Tabell 4*. Tallene i *Tabell 4* viser hvor mange ganger elevene gjør hver enkelt reaksjon etter først å gi tydelige tegn til å stå fast. Elevene ser i læreboken, henvender seg til hverandre og får hjelp av læreren flere ganger enn beskrevet i *Tabell 4*, men da viser de ikke tydelige tegn til å stå fast først.

Tabell 4: Registrering av elevenes reaksjon når de ser ut til å stå fast

	Ida	Ask	Ulf	Pål	Gry	Tom	Alf	Eli	Dag	Mia
Elevene ser ut til å løse problemet selv				1	1					
Elevene bruker medelever	3	2	3	1	2	3		6	6	1
Elevene bruker læreboken	2		3		4	2	1			1
Elevene får hjelp av læreren	5	6		5	3	4	8	2	1	
Kombinasjon mellom at elevene bruker medelever og læreboken	1	1	2	1	1	2		7	7	3
Kombinasjon mellom at elevene bruker medelever og får hjelp av læreren	8	6	1	1	4	4		9	9	2
Kombinasjon mellom at elevene bruker læreboken og får hjelp av læreren					3	2				3
Kombinasjon mellom at elevene bruker medelever, læreboken og får hjelp av læreren	2	1						1	1	

Tabellen viser at min tolkning tyder på at elevene er avhengige av å kunne diskutere, prate med eller spørre hverandre, i tillegg til å kunne bruke læreren. Kun to elever ser ut til å ha løst et problem helt av seg selv etter at de har vist tegn til å stå fast.

Det er tydelig at elevene har ulike reaksjonsmønstre, hvilket er helt naturlig siden de er forskjellige individer. Videre ser det ut til at elevene som arbeider mye sammen har samme reaksjonsmønstre, eksempelvis Eli og Dag eller Ida og Ask. Hensikten med å undersøke hvilke handlinger elevene utøver når de ser ut til å stå fast, er å se hvordan elevene bruker læreboken. Alle elevene bruker læreboken en eller flere ganger når de ser ut til å stå fast, men det varierer fra elev til elev om det er kun læreboken som blir brukt eller om elevene bruker flere kilder til informasjon. Flere elever bruker læreboken i tillegg til å henvende seg til medelever eller lærer oftere enn hva de kun bruker læreboken.

Det kan se ut som at hver elev har en reaksjon eller kombinasjon av reaksjoner som sitt hovedmønster, men det varierer fra elev til elev. Elevene bruker i større grad hverandre og læreren som informasjonskilde enn hva de bruker læreboken. Det kan tyde på at elevene ikke ser på læreboken som primærkilde til informasjon om hvordan de skal løse oppgavene. I tillegg er elevene flittige brukere av lærebokens fasit og sjekker om svarene er riktige etter hver oppgave.

Under oppgaveløsingen bruker elevene læreboken på flere måter. Flere elever studerer fagteksten som står mellom oppgavene. Etter å studere teksten begynner de på neste oppgave. Eli, Dag, Gry, Tom, Pål, Ulf og Mia er eksempler på dette. I tillegg blar disse elevene litt fram og tilbake i læreboken flere av gangene de står fast. Alf leser hele kapittelet om vektorer før han i det hele tatt begynner å arbeide med oppgaver. Fasiten blir og brukt på forskjellige måter. Alle elevene sjekker ofte om svaret de får er rett. Om svaret er feil studerer noen oppgaveteksten på nytt, mens andre titter på fagteksten og eksemplene. Ask og Ida sjekker fasiten når de ikke vet hva de skal gjøre på en oppgave, antakelig for å se om de forstår noe mer da. De studerer ikke fagtekstene i læreboken så nøye, men leser oppgaveteksten flere ganger. De bruker mest det som står på tavlen, seg selv og læreren under arbeidet.

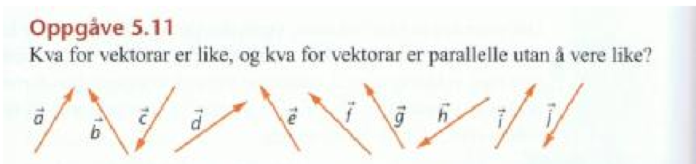
Jeg kan ikke se noen regelmessighet i hvor lenge elevene bruker læreboken de spør andre om hjelp når de står fast. Noen ganger bruker de lite tid, andre ganger mer tid. Det varierer fra oppgave til oppgave og fra dag til dag. Læreren bruker mye tid med elevene når de arbeider. Hun er med elevene stort sett hele tiden. De få gangene hun blir overflødig, når ingen elever trenger hjelp eller veiledning, stiller hun seg ved kateteret og titter i læreboken. Når læreren hjelper elevene henviser hun flere ganger til læreboken. Noen ganger peker hun på regler og forklaringer i boken, andre ganger på tavlen, og mange ganger forklarer hun elevene selv uten å bruke hjelpemidler.

5.1.3 Elevers forståelse for matematikk

Karakteristikken av elevenes forståelse av matematikk kan ikke beskrives med sikkerhet, av den grunn at man ikke har tilgang til et annet menneskes indre verden. Likevel kan jeg få inntrykk av deres forståelse og tanker gjennom utsagn og handlinger. Utdragene som følger kan gi meg informasjon om hvordan elevene tenker eller forstår den matematikken de holder på med

Utdrag 1

Flere ganger arbeider elevene sammen med oppgaver, de hjelper hverandre, men ikke alle virker like sikre på svaret. Noen ganger får man inntrykk av at de skriver ned et svar bare fordi kameraten sier det. Et eksempel på dette får jeg i den aller første timen klassen har om vektorer. Ask, Ida og Ulf arbeider med oppgave 5.11, se *Figur 5*. Oppgaven går ut på at de skal avgjøre hvilke vektorer som er like, og hvilke som er parallelle uten å være like. I læreboken er det tegnet opp ti vektorer. I forkant av episoden spør elevene læreren om hvordan de skal notere ned svarene, samt at Ask spør læreren om areal er skalar.



Figur 5: Oppgave 5.11 fra læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 156)

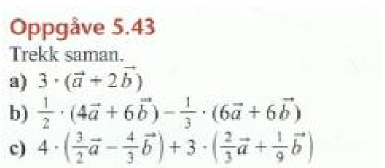
Tabell 5: Utdrag 1

Nr	Tid video	Tid Lydfil	Hvem	Utsagn	Handling	Kommentar
1	28:39	00:03:55	Ida	Og så b da (3) er den lik noken, g?		
2	28:44	00:04:00		(5)	Ask studerer oppgaven i boken si	

3	28:49	00:04:05	Ask	Ja		
4	28:51	00:04:07	Ulf	Og g, e ()	Ulf ser i boken	
5	28:53	00:04:09	Ask	Hm?		
6	28:54	00:04:10	Ida	Hæ?		
7	28:56	00:04:12	Ask	Ka du sa? B og g er like?		
8	28:58	00:04:14	Ulf	B, g og e er lik		
9	29:00	00:04:16	Ask	E og?		
10	29:01	00:04:17	Ulf	Mhm		
11	29:01	00:04:17		(3)	Alle ser i lærebøkene sine	
12	29:05	00:04:21	Ask	Nei, den er kortare		
13	29:06	00:04:22	Ulf	Er den det?		
14	29:07	00:04:23	Ida	NEI		
15	29:07	00:04:23	Ulf	Det er den ikkje		
16	29:08	00:04:24	Ida	Heh		
17	29:09	00:04:25	Ask	Nei, kanskje ikkje		Ask virker ikke sikker
18	29:11	00:04:27	Ida	Skal vi bare skrive ein erlik til da?		Ida virker heller ikke sikker
19	29:13	00:04:29	Ask	Ja:		Det kan virke som om Ask bare godtar svaret uten å være sikker på om det er rett

Ida spør om det er noen av vektorene som er lik $\vec{b}$ og foreslår $\vec{g}$ (1). Ask er enig (2), og Ulf foreslår også $\vec{e}$ (4). Ask mener at $\vec{e}$ er kortere enn de andre (12), men Ulf stiller spørsmålstegn ved om det er rett (13), og Ida er enig med Ulf i at $\vec{e}$ også er lik (14). Ask gir seg. Han sier ikke at de har rett, men han bruker uttrykket ”kanskje ikke” (17). Det kan tyde på at han ikke er sikker. At Ida spør om de bare skal skrive ned et likhetstegn (18) til kan være fordi hun er usikker på notasjonen, men tonefallet hennes gir meg inntrykk av at hun ikke er sikker på svaret. Selv om hverken Ask eller Ida virker overbevist om at Ulf gir dem riktig svar skriver de det ned likevel. Etterpå arbeider elevene videre med oppgaven. Ask og Ida arbeider tett sammen og får ofte hjelp av Ulf.
Utdraget er et eksempel på at elevene bruker hverandre for å komme videre i oppgaven.

Utdrag 2
Andre ganger virker det som om elevene spør om hjelp fordi de blander regler de har lært tidligere. Under arbeidet med oppgave 5.43 b, se ***Figur 6***, må elevene multiplisere en brøk med et heltall. Det er ikke noe problem. Det kan være fordi brøkens teller er 1. Når Ida og Ulf kommer til oppgave 5.43 c må de multiplisere et heltall med en brøk. Tallene de arbeider med er 4 og $\frac{3}{2}$. Her oppstår problemer for begge to. Ida er usikker på hvordan hun skal gjøre det.


Oppgåve 5.43
Trekk saman.
a) $3 \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$
b) $\frac{1}{2} \cdot (4\vec{a} + 6\vec{b}) - \frac{1}{3} \cdot (6\vec{a} + 6\vec{b})$
c) $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}\right)$

Figur 6: Oppgave 5.43 fra læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 168)

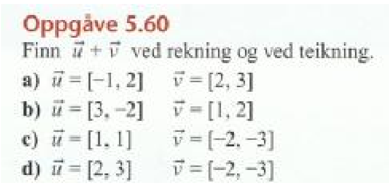
Tabell 6: Utdrag 2

Nr	Tid	Hvem	Utsagn	Handling
1	20:14	Ida	Eg huskar ikkje korleis eg gongar med brøk	Skriver opp mattestykket i boken si.
2	20:15		(2)	Ulf skriver ferdig før han svarer
3	20:17	Ulf	Det er nett sånn som dele	
4	20:19	Ida	Nei hehe (.) Ja, ja, men eg gangar jo inn eit tal med brøk likavel()	
5	20:26	Ulf	Ka? (.) Oppe ()	
6	20:29	Ida	Ka då brøk?	
7	20:30	Ulf	() []	
8	20:32	Ask	[]	
9	20: 33	Alle	Latter	
10	20:37	Ida	Gangar fire med tre liksom	
11	20:38	Ulf	Men () to gangar fire	Peker i læreboken
12	20:42	Ida	Då blir det jo, [(.)det blir?	
13	20:43	Ulf	[Då blir det åtte, plusse på åtte på tre.	
14	20:47	Ask	Okei, du [], du kan ikkje [lære nokon matte altså, det blir for dumt	
15	20:48	Ida	[Latter	
16	20:51	Ida	Hallo (.)[]?	Ida rekker opp hånden
17	20:54		(2)	Ask studerer det Ida har skrevet. Ida tar ned hånden igjen
18	20:56	Ask	() Det er jo [der sant	Peker i boken til Ida
19	20:56	Ida	[() tre, fire ganger tre er tolv, sant, () Hehe	
20	21:02	Ask	HÆ?	
21	21:03	Ida	()	
22	21:05	Ask	<u>Her</u> er det =	
23	21:05	Ida	= drit no i det der hehe, atte når vi skal gange eit heilt tal med brøk, sant	Ida rekker opp hånden igjen
24	21:11	Lær	Ja	Lærer kommer bort
25	21:11	Ida	Skal eg gange berre det talet oppe da?	Ida klør seg i hodet samtidig
26	21:12	Lær	Ja	
27	21:14	Ida	[Der ser du	
28	21:14	Lær	[()	
29	21:18	Ulf	Ja, men når det er tre todeler da (.) da må du skrive åtte todeler må ikkje du? (.) Når det står fire der?	Peker i boken
30	21:23		(2)	
31	21:25	Ida	Hæ?	
32	21:25	Lær	Hæ?	
33	21:25	Ulf	Du må [skrive åtte todeler der når det står fire	
34	21:26	Ida	[Latter	
35	21:26	Lær	[Latter	
36	21:30	Lær	Det er [()	
37	21:31	Ida	[Latter	
38	21:32	Lær	Latter	
39	21:32	Lær	Ja, det er hvis du legger sammen, da må du få fellesnevner da får du åtte todeler og så legger du sammen, men når du ganger, så trenger du ikke fellesnevner, da bare ganger du inn ()	Ida begynner å arbeide for seg selv
40	21:42	Ida	Tolv todeler blir det da faktisk	

Ulf sier at å multiplisere et heltall og en brøk er akkurat som å dele (3). Ida er ikke enig med han, og mener hun må gange tre med fire (10), altså multiplisere teller med teller. Ulf mener at han må multiplisere to og fire, og legge til tre (11 og 13). Han mener at han må finne fellesnevner og addere de to brøkene. Ida gir seg ikke, men rekker opp hånden (16). Hun begynner å diskutere med Ask (18-22), men spør læreren likevel. Læreren bekrefter Ida sin tankegang (26) men Ulf er ikke enig. Ulf presenterer hvordan han tenker (29) men hverken læreren eller Ida ser ut til å forstå det (31 og 32). Læreren forklarer Ulf hva han må gjøre (39). De arbeider videre alle sammen.

Ulf regner oppgaver der han må bruke multiplikasjon, men han klarer det ikke når teller ikke er 1. Å multiplisere et heltall med en brøk har vært pensum for Ulf i mange år. Situasjonen kan være et resultat av en slurvefeil, og at han er ukonsentrert, eller så kan det være at Ulf strever med regneregler for brøkregning. Det er usikkert.
I utdraget benytter Ida og Ulf hverandre, læreboken og spør til slutt læreren når de står fast og ikke kommer videre i oppgaven.

Utdrag 3
Flere ganger hender det at elevene ikke forsøker å løse oppgavene før de henvender seg enten til andre elever eller læreren for å få hjelp. Ask henvender seg til Ida uten å prøve å løse oppgaven først når de skal addere vektorer ved tegning og regning. Han skal begynne på oppgave 5.60 a, se ***Figur 7*** for oppgavetekst.


Oppgåve 5.60
Finn $\vec{u} + \vec{v}$ ved rekning og ved teikning.
a) $\vec{u} = [-1, 2]$ $\vec{v} = [2, 3]$
b) $\vec{u} = [3, -2]$ $\vec{v} = [1, 2]$
c) $\vec{u} = [1, 1]$ $\vec{v} = [-2, -3]$
d) $\vec{u} = [2, 3]$ $\vec{v} = [-2, -3]$

Figur 7: Oppgave 5.60 fra læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 174)

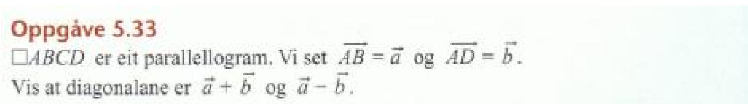
Tabell 7: Utdrag 3

Nr	Tid	Hvem	Utsagn	Handling
1	24:03	Ask	Koss skriver du opp dette her da?	
2	24:04		(7)	Ida blar opp i fasiten. Ask ser på arbeidet til Ida og griner på nesa.
3	24:11	Ida	Eg veit ikkje om eg har skreve det rett	
4	24:12		(8)	Ask skriver i boken si og Ida sjekker fasit
5	24:20	Ida	Oi, ska vi teikne og, det har ikkje eg sett	Ida ser på oppgaveteksten igjen
6	24:23	Ask	()	
7	24:24	Ida	Hehe Fortel det då	
8	24:25	Ask	Ka, ka vi skal gjer? (.) Nei, pluss. (.) Det var verre. Plusse (på det)	
9	24:34	Ida	Hehe Vektor u pluss vektor v, (så er det bare å) skrive det om igjen da	Ser på Ask
10	24:40	Ask	Minus ein	Ask skriver i boken si, snakker til seg selv mens han skriver
11	24:42		(7)	Ask skriver i boken, Ida ser i læreboken
12	24:49	Ida	Om dei ()	Ida studerer oppgaveteksten i læreboken
13	24:53	Ask	Er lik (.) kossen har du gjort det da? Eg kunne ikkje gjer det, eg eg skjønar ikkje kossen du har gjort det [(eg fulgte ikkje med da)	Ask bøyer seg over boken til Ida

14	24:58	Ulf	[Ein komma fem, []?	Ulf spør Ida
15	25:00	Ida	Ja (.) Ja	
16	25:02	Ask	Ka du gjorde her?	Peker i boken
17	25:05	Ida	Plussa den til de:r, og den der med den, sånn	Ida peker i boken si
18	25:10	Ask	Altså minus ein og pluss to og to pluss tre?	Ask peker i boken til Ida
19	25:15	Ida	Mhm	
20	25:15		(4)	Ask snur seg tilbake og begynner å skrive i boken si
21	25:19	Ask	Jaja	Trekker på skuldrene

Når Ask henvender seg til Ida (1), har han ikke skrevet oppgaven inn i boken si. Han begynner å skrive i boken og Ida sjekker om hun har rett svar (4). Han henvender seg til Ida igjen (8) og får en helt overfladisk forklaring fra Ida (9). Ask henvender seg til Ida enda en gang, studerer boken hennes og spør hvordan hun har gjort det (13). Ulf sjekker med Ida om svaret hans er rett (14). Ask spør enda en gang om hva Ida gjorde og peker på et bestemt sted i boken til Ida (16). Ida forklarer Ask hva hun gjorde (17) og Ask sjekker om han har forstått framgangsmåten hennes (18). Han snur seg tilbake og begynner å løse oppgaven i sin egen bok (20). Han sier jaja (21), men gir ikke inntrykk av å ha forstått oppgaven. Når han har regnet ferdig kontrollerer han svaret sitt med Ida sitt.
Når Ask står fast benytter han seg av Ida sine notater og hennes kunnskap for å komme videre i oppgaven.

Utdrag 4
Enkelte elever diskuterer oppgavene og reglene de bruker. Når de er uenige vil de vite hvem som har rett og slår opp i boken, ser på tavlen og diskuterer. Eli og Dag blir uenige om $\vec{u} - \vec{v}$ er det samme som $\vec{v} - \vec{u}$ under arbeidet med oppgave 5.33, se *Figur 8* for oppgavetekst.


Oppgåve 5.33
□$ABCD$ er eit parallellogram. Vi set $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Vis at diagonalane er $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$.

Figur 8: Oppgave 5.33 fra læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 163)

Tabell 8: Utdrag 4

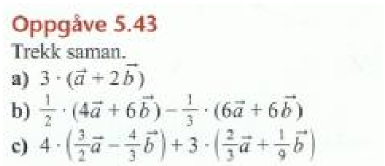
Nr	Tid video	Tid lydfil	Hvem	Utsagn	Handling	Kommentar
1	24:55	00:22:22	Eli	Vis at diagonalen er a pluss b	Begge sitter bøyd over bøkene. De deler både lærebok og arbeidsbok. Begge peker i på en tegning i arbeidsboken når de prater.	
2	24:57	00:22:24	Dag	Den der er a , og der er det a pluss b, ja da får vi den diagonalen.		
3	25:01	00:22:28		(3)		
4	25:04	00:22:31	Eli	Mhm		
5	25:05	00:22:32	Dag	Mhm og så he:r (.) så har vi a: minus b, og da får vi den diago, nei (.) nei, nei, nei, det blir feil, vi har funne den diagonalen, og så skal vi finne den (.) Da begynner vi med b og så får vi: minus a		
6	25:22	00:22:49	Eli	Ja, no har vi funne den here diagonalen		
7	25:24	00:22:51	Dag	Ja		
8	25:25	00:22:52	Eli	Okei (.) Det er den og så skal vi finn (.) [()		
9	25:30	00:22:57	Dag	[Og så skal vi finn		

				den diagonalen der () og det er den der, sant? Og den der er jo det samme som BC:, og [så får CD		
10	25:37	00:23:04	Eli	[Hæ		
11	25:38	00:23:05	Dag	BC, CD		
12	25:41	00:23:08	Eli	Det er jo minus		
13	25:44	00:23:11	Dag	Ja (.) Nei, () b minus a,		
14	25:48	00:23:15	Eli	Ne:i, a minus b		
15	25:51	00:23:18	Dag	Ja men b minus a og a minus b er akkurat det samme (.) men hvis du ser på tegningen så vil det her egentlig se:i		
16	25:59	00:23:26	Eli	Det blir itj det samma		
17	26:01	00:23:28	Dag	Jo		
18	26:02	00:23:29	Eli	A minus b og b minus a?		
19	26:04	00:23:31	Dag	Ja: (.) det gir same svaret		
20	26:04	00:23:31		(3)		
21	26:07	00:23:34	Eli	Hm (.) Det visst itj æ nei		
22	26:09	00:23:36	Dag	Gjerkje det det? (.) Eg trodde det var sånn (når det var pluss da) Jo det=		
23	26:13	00:23:40	Eli	=Ja:=		
24	26:14	00:23:41	Dag	=Ho har skreve det der til og med og u minus v og v minus u er akkurat det samme.	Peker på tavlen. De ser dit begge to.	På tavlen står det $\vec{u}-\vec{v}$ og $\vec{v}-\vec{u}$ under hverandre, men det står ikke at det er det samme. På tavlen står det eksempel med tall for å vise at $u-v$ og $v-u$ ikke er det samme, men Eli og Dag ser eksempelet. De tolker det slik at $\vec{u}-\vec{v} = \vec{v}-\vec{u}$
25	26:19	00:23:46	Eli	(Ja det I begynnelsen der, [ja)		
26	26:21	00:23:48	Dag	[mhm (.) Nettopp, ja for hvis du ser på tegningen ikke sant [],	De ser ned i arbeidsboken igjen	
27	26:27	00:23:54	Eli	Ja: men		
28	26:28	00:23:55	Dag	Når du ser på tegningen, [hvis vi finner den, sant?		
29	26:29	00:23:56	Eli	[JA::		
30	26:32	00:23:59	Eli	Ja		
31	26:33	00:24:00	Dag	Den der, da () da kan du ta a minus b, ja okei greit, da er det () du har rett. Koffor måtte du har rett?		Dag skjønner plutselig at han har tatt feil
32	26:43	00:24:10	Eli	Koffor har æ rett?		
33	26:44	00:24:11	Dag	Hæ: nei for atte du kan, eg tenkte at du måtte begynne liksom de:r og så gå sånn sånn og så ser du og du kan jo for så vidt begynne der og gå sånn (.) Det har ingenting å sei (.) Så det er DC CB	Peker i boken mens han snakker.	Dag har hele tiden trodd at han måtte begynne i hjørnet B på parallellogramme t, men det trenger han ikke.

						Diagonalen kan starte i D og gå til B.

Eli og Dag skal vise at diagonalen i et parallellogram er $\vec{a} + \vec{b}$ (1). De finner fort den ene diagonalen (2) og skal finne den andre diagonalen (8). Dag begynner å tenke høyt (9), men Eli virker ikke enig (10). De diskuterer om det er $\vec{b} - \vec{a}$ eller $\vec{a} - \vec{b}$ (11-14) før Dag kommenterer at det er det samme (15). Eli er ikke enig (16). Dag blir usikker og minner om at det er jo slik når det er pluss (22). Videre ser de på tavlen, og der har læreren skrevet under hverandre $\vec{u} - \vec{v}$ og $\vec{v} - \vec{u}$. Elevene tolker det slik at det er det samme (24). Dag skal vise Eli på tegningen også, men oppdager at det ikke er slik, at Eli hadde rett fra starten av (26-31). Eli lurer på hvorfor hun har rett (32) og Dag forklarer (33). Elevene går videre i arbeidet.
Eli og Dag diskuterer oppgaven og bruker dermed hverandre når de står fast.

Utdrag 5
Elevene forklarer innimellom for hverandre hvordan de tenker når de er uenige om svaret eller når de ikke er sikre på hvordan de skal løse oppgaven. Før utdraget sitter Eli og Dag og arbeider konsentrert hver for seg med oppgave 5.43 b, se *Figur 9* for oppgavetekst. Handlingen starter når Eli har løst oppgaven ferdig.


Oppgåve 5.43
Trekk saman.
a) $3 \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$
b) $\frac{1}{2} \cdot (4\vec{a} + 6\vec{b}) - \frac{1}{3} \cdot (6\vec{a} + 6\vec{b})$
c) $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}\right)$

Figur 9: Oppgave 5.43 fra læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 168)

Tabell 9: Utdrag 5

Nr	**Tid video**	**Tid lydfil**	**Hvem**	**Utsagn**	**Handling**	**Kommentar**
1	33:12	00:33:20	Eli	Blir det berre b vektor?		
2	33:13	00:33:21		(2)	Eli sjekker fasiten	
3	33:15	00:33:23	Dag	Hm?		
4	33:16	00:33:24	Eli	Æ får b vektor æ		
5	33:17	00:33:25	Dag	Ja, eg e ikkje komt så langt enno, eg (.) E::h (3) Ka eg holder på med no då? [], hjelp meg no da (3) To ja, (.) () (3) Okei (4) Så eg finne: a:		Dag snakker mest til seg selv
6				(11)	Eli skriver neste oppgåve inn i boken si, mens Dag regner.	
7				Koffor blir det berre b-vektor? (.) Må ikkje vi gange og sånt?		
8	33:55	00:34:03	Eli	Jo, 2a går bort minus 2	Eli peker i boken si	
9	33:57	00:34:05	Dag	Ja, det er det, <u>der,</u> må ikkje vi [ta:	Dag peker i boken til Eli	
10	33:58	00:34:06	Eli	[Ta tre b minus to b, det blir b	Eli peker i boken til Dag	
11	34:01	00:34:09	Dag	Måtte ikkje vi, må ikkje vi gange det?		

12	34:02	00:34:10		(2)	Dag blar i læreboken	
13	34:04	00:34:12	Eli	(Skal vi se) Du har tre b'a, så tar du bort to, så får du berre b=		
14	34:10	00:34:18	Dag	=Åja, men sånn som her, så har du () og da må du jo gange det sammen (.) Der og er det sånn pluss og så ([)	Ser på et eksempel i læreboken	
15	34:17	00:34:25	Eli	[Men det er jo tal, du har jo ikkje to vektorar her, du har berre ein vektor	Eli peker i læreboken	
16	34:21	00:34:29	Dag	Åja, men () pluss der	Dag peker i læreboken	
17	34:25	00:34:33	Eli	Ja men det hjelper ikkje, når det er minus så blir det minus		
18	34:27	00:34:35	Dag	Ja det blir jo () ja, glem det (.) gløym det gløym det gløym det, gløym det, gløym det=		Dag blandet saman to parenteser uten tegn mellom og to parenteser skilt med pluss- eller minustegn
19	34:32	00:34:40	Eli	=Ja, men æ tenker vanlig bokstavregning, æ (.) () (.) æ tenkt tre minus to er lik ein=		Eli har sett at regneregler hun er vant med stemmer med regneregler i vektorregning
20	34:29	00:34:47	Dag	=ja men eg tenkte heilt feil, for eg tenkte atte inni parentesen, så måtte du sette inn gange i mellom og men det var jo feil		

Eli spør Dag om svaret bare blir $\vec{b}$ (1). Hun sjekker fasiten (2) og Dag regner oppgaven ferdig (5-6). Dag har nok ikke fått samme svaret, for han spør Eli om hvorfor det blir bare $\vec{b}$ og spør om ikke han må gange og sånt (7). Eli forklarer Dag hva hun har gjort (8-10), men Dag lurer fortsatt på om ikke han måtte gange (11). Eli prøver å forklare en gang til (12), før de bruker læreboken for å se på et eksempel der (12). Dag forklarer fremgangsmåten i eksempelet (14), men Eli skjønner at Dag sin forklaring er feil (15). Dag blandet sammen multiplikasjon og addisjon/ subtraksjon av to parenteser. Eli oppklarer det for han (17). Dag forstår feilen sin (18) og Eli kommenterer at hun tenker på samme måte med vektorer som hun gjør ved vanlig bokstavregning (19). Til slutt forklarer Dag hva han gjorde feil (20).
Utdraget viser at Dag står fast under arbeidet med oppgaven. Han både diskuterer oppgaven med Eli og bruker læreboken for å løse oppgaven.

Utdrag 6
Enkelte elever er svært aktive i undervisningen uavhengig om de vet svaret med sikkerhet eller ikke, slik som i følgende utdrag. Læreren går gjennom beviset for vektorkoordinatene til vektoren mellom to punkt på tavlen. I utdraget nedenfor oppsummerer hun beviset og sjekker om elevene forstår regelen.

Tabell 10: Utdrag 6

Nr	Tid	Hvem	Utsagn	Handling	Kommentar
1	15:26	Lær	Da har vi vist at hvis vi skal finne vektoren	Noen elever	

			mellom to punkt så tar vi koordinatene til de to punktene og så på x-plassen så tar vi da x-verdiene minus hverandre, og vi starter med den verdien der vektoren starter eller slutter?	skriver i boken si, andre ser på tavlen	
2	15:45		(2)		
3	15:46	Ask	Startar		Ask gjetter
4	15:46		(2)		
5	15:48	Lær	Slutter		Læreren hjelper
6	15:48	Ask	Slutte::r he[hehe (lurte deg)	Ask tulle-ler	
7	15:50	Lær	[hehe der vektoren slutter, ikke sant, den vektoren her går i fra A til B og vi starta med koordinaten til B. Så vi tar først koordinatene der den slutter minus start, slutt minus start, slutt minus start	Ask kaster på hodet og gjør seg til. Læreren peker på tavlen	Det virker som om Ask gjør seg til fordi han svarer feil.
8	16:02		(8)		Læreren gir elevene tid til å la informasjonen synke inn.
9	16:10	Lær	Det er egentlig det som er teorien på dette kapittelet her, eller avsnittet her, da tror jeg vi bruker tida til å regne på det		
10	16:17	Ask	Kan ikkje du trekke sammen til y, nei, x y (.) x [y		
11	16:22	Lær	[nei (.) det kan du ikke, for du aner jo ikke hva x og y er for noen ting, derfor så må du jo bare si at de verdiene som er oppgitt er x to og x en, det vil jo være forskjellig fra gang til gang, så du kan ikke regne sammen dette her uten å vite hvilke tall det er		
12	16:36	Ask	Du veit jo atte x at begge xane er akkurat det same talet	Ask trekker på skuldrene	Ask viser ikke forståelse for at x1 og x2 kan ha ulik verdi
13	16:40	Lær	Ne:i, ikke samme tall(.) x, den ene xen, den [(.) det står en her og der og så det vil være helt forskjellig		
14	16:45	Ask	[jaja (.) Jajajajajaja	Ask smiler og lager litt grimaser	Det er usikkert om Ask forstod dette, eller om han bare sa ja. Det at Ask ikke klarer å bruke regelen selv etterpå kan tyde på at han ikke forstod likevel.
15	16:47		(7)	Elevene begynner å jobbe	
16	16:54	Lær	Prøv dere på 5.70, så der får dere liksom brukt den der i praksis, den regelen som vi gikk igjennom nå.		

Læreren oppsummerer beviset de har gått gjennom og sjekker at elevene har fått med seg regelen (1). Elevene svarer ikke (2), men Ask prøver seg (3). Læreren hjelper han (5) og Ask får svaret rett (6). Læreren oppsummerer beviset ferdig og gir beskjed om at elevene kan arbeide med oppgavene (7-9). Ask spør om ikke $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ kan trekkes sammen til $[x, y]$ (10). Læreren forklarer at det ikke er mulig, for man vet ikke hvilke tall x_1, x_2, y_1 eller

y_2 er (11). Ask mener at begge x'ene er sammen tallet (12), men læreren viser at det ikke stemmer (14). Ask sier seg enig (14) og klassen begynner å arbeide med oppgaver (15).

Utdrag 7

Læreren holder på å bevise $t \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ på tavlen. Se Vedlegg 8: Transkribert materiale som ikke er presentert i oppgaven for transkribering av hele beviset. Hun følger beviset i læreboken på s. 169. Tegningen på tavlen er den samme som i læreboken. De tegner opp og setter navn på alle sidene i figuren.

Tabell 11: Utdrag 7

Nr	Tid	Hvem	Utsagn	Handling	Kommentar
51	07:38	Lær	Nå [har vi to trekanter i figuren, og hva kan vi si om de to trekantene?		
52	07:39	Ask	[(Greit)		
53	07:43		(7)	Noen elever ser på tavlen, andre skriver i bøkene sine	Læreren venter på svar
54	07:50	Eli	Formlike		Veldig lavt
55	07:51	Lær	Ja		
56	07:51	Ask	Dei har to felles e:h (.) nei, eg veit [ikkje		
57	07:53	Pål	[dei er formlike=		
58	07:55	Lær	=de er formlike, og hvorfor er de formlike, hvordan kan vi si det, kan du klare det []		
59	08:01	Eli	Dei har ein felles vinkel i a:[og den e: bc og de e parallell, så er det jo berre () forlengelse av det (på en måte) [eller dæm e, ja	Demonsterer med armene når hun prater	
60	08:03	Lær	[Mhm		
61	08:10	Lær	[ja		
62	08:12	Lær	Ja, vi har to felles vinkler, fordi atte a den er jo, eller det er en felles vinkel her, men det blir jo da de er jo lik, for den lille trekanten og den store trekanten og i tillegg så er disse to sidene parallelle og da veit vi, da blir jo disse (.) den vinkeln her også lik, og da har vi to like vinkler, da veit vi at de er formlike, helt riktig.		

Læreren spør elevene om de kan si noe om de to trekantene i figuren (51). Det tar litt tid før Eli finner ut at de er formlike (52-53). Eli sier dette veldig lavt, så det er ikke alle som får det med seg. Ask prøver seg på en forklaring (56) og Pål sier at de er formlike (57). Læreren bekrefter svaret og spør hvorfor de er formlike (58) og Eli forklarer (59). Læreren oppsummerer forklaringen til Eli (62). Læreren og klassen fortetter med beviset på tavlen.

5.2 Test

Testen, se Vedlegg 2: Test til kapittel 5: Vektorer, ble brukt til flere formål. Både læreren og jeg brukte testen i etterkant, derfor den måtte tilfredsstille flere behov. Jeg brukte testen i forhold til datainnsamling i masteroppgaven og læreren som vurdering av hva elevene hadde lært. Enkelte element i testen var svært vanskelig for noen elever, hvilket var helt nødvendig når den ble brukt til å sette karakter i faget. Testen var laget slik at alle skulle klare noe, men ikke alle skulle klare alt. De ulike oppgavene tok for seg ulike deler av pensum. I noen oppgaver i testen fikk elevene beskrevet om de skulle løse oppgaver ved tegning eller regning.

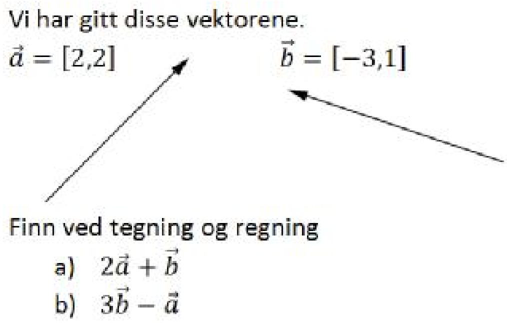
Hensikten var å undersøke om elevene hadde et korrekt bilde av matematikken i tankene, men strevet med utregningene. I oppgaver der det ikke ble spesifisert om oppgaven skulle løses ved tegning eller regning kunne elevene løse oppgavene slik de selv ønsket.

En av elevene var ikke til stede under gjennomføringen av testen. Datainnsamlingen består derfor av ni besvarelser. Under testen fikk elevene mulighet til å stille læreren spørsmål hvis de stod fast. Læreren vurderte hva hun kunne svare på og hva elevene burde kunne. Definisjonen av et trapes og hvordan man regner fra m/s til km/h ble skrevet opp på tavlen fordi mange elever trengte hjelp til det.

I kategoriseringen av elevenes besvarelser i forhold til fremgangsmåte har jeg ikke skilt mellom hvorvidt de har utført alt av mellomregning eller om hoppet over noen steg. Det viktige er om de i hovedsak brukte samme fremgangsmåte.

5.2.1 Oppgave 1

Oppgaven, se *Figur 10*, var tenkt å være en enkel oppgave som alle burde klare slik at de kom i gang med prøven uten store vanskeligheter. Jeg ønsket å se om elevene forstod hva som lå bak begrepene vektoraddisjon og vektorsubtraksjon ved at de tegnet, og om de kunne utføre operasjonene vektoraddisjon og vektorsubtraksjon med koordinater.



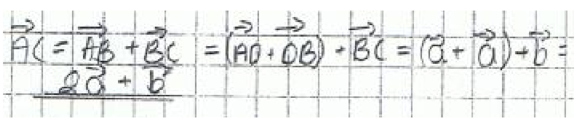
Figur 10: Oppgave 1 fra testen

Elevenes løsninger:

Tabell 12: Oppgave 1a, regning

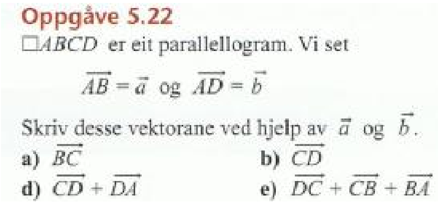
Elev	**Framgangsmåte**
Mia, Ulf, Gry, Pål, Ask, Eli, Tom og Dag	Regnet ut med vektorkoordinater på standard måte: $2[2,2] + [-3,1] = [4,4] + [-3,1] = [4-3, 4+1] = [1,5]$
Ida	Regnet ut helt uten vektorkoordinater. Hun har kalt hjørnene i trekanten vektorene lager A, B og C og vist at $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Alle elevene utenom Ida løste oppgaven på samme måte. Utregningen varierte litt, men alle var varianter av standard prosedyre som presentert i *Tabell 12*. Elevene som regnet ut på standard måte viste at de behersket vektoraddisjon med koordinater. Ida løste ikke oppgaven ved hjelp av koordinatene oppgitt i oppgaveteksten, men ved å sette inn $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i stedet for hjørnene hun beskrev figuren med, se *Figur 11*.



Figur 11: Ida sin besvarelse, oppgave 1a ved regning

I undervisningen før testen arbeidet elevene med oppgaver som oppgave 5.22 fra læreboken, se *Figur 12*, der de fikk oppgitt et parallellogram ABCD der to gitte vektorer ble kalt $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Elevene skulle så skrive vektorer gitt ved navn på hjørnene i figuren ved hjelp av $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Oppgaveteksten i testen ba elevene finne ved regning $2\vec{a} + \vec{b}$. Oppgaveteksten presiserte ikke at regning skulle gjøres med vektorkoordiater, men teksten oppga heller ingen hjørner i en figur der vektorene skulle erstattes med $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Ida kan ha blitt forvirret og forsøkt å løse oppgaven på best mulig måte, eller hun kan i øyeblikket ha glemt hvordan man utfører vektoraddisjon på koordinatform. Det kan og være at Ida ikke kunne eller husket hvordan hun skulle utføre vektoraddisjon på koordinatform.


Oppgåve 5.22

□$ABCD$ er eit parallellogram. Vi set

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

Skriv desse vektorane ved hjelp av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

a) $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{CD}$

d) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ **e)** $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

Figur 12: Oppgave 5.22 i læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 160)

Prosedyrene elevene bruker i oppgaven benyttes begge i læreboken. Ida sin prosedyre hører til en annen oppgavetype, men er like fullt presentert. Prosedyren de resterende elevene bruker blir presentert under regning med vektorkoordinater, både ved regel, eksempel og oppgaver.

Tabell 13: Oppgave 1a, tegning

Elev	**Framgangsmåte**
Mia, Ida og Ulf	Tegnet opp vektorene og vektorsummen på arket, men ikke nøyaktig. Startpunkt til $\vec{b}$ i endepunkt til $2\vec{a}$.
Gry, Pål og Ask	Tegnet opp vektorene og vektorsummen i et koordinatsystem. Startpunkt til $\vec{b}$ i endepunkt til $2\vec{a}$.
Eli, Tom og Dag	Tegnet opp vektorene og vektorsummen i riktig forhold på arket. Startpunkt til $\vec{b}$ i endepunkt til $2\vec{a}$.

Alle elevene klarte å løse oppgaven, men de valgte tre forskjellige metoder. Tre elever skisserte summen, mens de resterende tegnet nøyaktig, enten i et koordinatsystem eller rett på arket. At noen valgte å tegne i riktig forhold, enten i eller utenfor koordinatsystemet, kan være fordi de ønsket å gjøre alt så nøyaktig som mulig under en prøve. En annen årsak til nøyaktighet kan være at de var usikre på framgangsmåten og derfor ønsket å forsikre seg om det ble rett. Årsaken til at enkelte elever valgte å lage en skisse i stedet for å tegne nøyaktig kan ha vært at elevene følte de hadde dårlig tid på prøven og derfor ønsket å skyndte seg videre med oppgavene. Alle metodene er akseptable, og jeg kan ikke si noe om hvorfor de ulike elevene valgte de ulike metodene.

Prosedyrene elevene bruker til å løse oppgaven er alle representert i læreboken. Å tegne opp vektorene som piler på arket blir introdusert under sum av vektorer som en regel og i et eksempel. Addisjon i koordinatsystemet presenteres i boken under regning med vektorkoordinater i et eksempel.

Tabell 14: Oppgave 1b, regning

Elev	**Framgangsmåte**
Mia, Gry, Pål, Ask, Eli, Tom og Dag	Regnet ut med vektorkoordinater på standard måte: $3[-3,1] - [2,2] = [-9,3] - [2,2] = [-9-2, 3-2] = [-11,1]$

Ida	Regnet ut helt uten vektorkoordinater. Hun kalte hjørnene i trekanten vektorene lager A, B og C og vist at $\overrightarrow{AC} = 3\vec{b} + \vec{a}$.
Ulf	Regnet ut med vektorkoordinater på standard måte, men regnefeil ga galt svar: $3[-3,1] - [2,2] = [-9,1] - [2,2] = [-9-2, 1-2] = [-11,-1]$

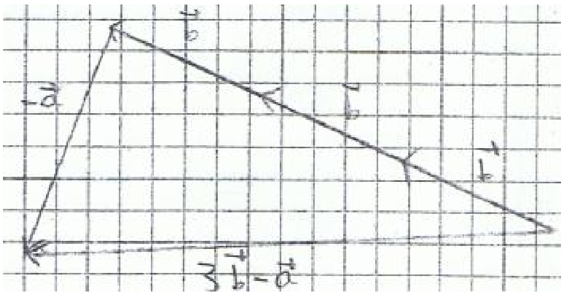
Slik som i oppgave 1a regnet alle elevene utenom Ida oppgaven med en variant av vanlig standard prosedyre slik de hadde lært i timen. Ulf hadde rett prosedyre, men en regnefeil slik at svaret ble galt. Han glemte at når man skal multiplisere en vektor med et tall må man multiplisere både x- og y-verdien med tallet. Han multipliserte kun x-verdien og fikk dermed feil svar. Trolig var feilen en regnefeil da han utførte samme operasjonen rett i oppgave 1a. Ida fortsatte med å sette inn $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i stedet for å regne ut vektordifferansen oppgaveteksten spurte etter.

Prosedyrene elevene benytter for å løse oppgaven er presentert i læreboken. Utregningen med vektorkoordinater er introdusert under regning med vektorkoordinater. Ida sin metode brukes under en annen oppgavetype, som forklart under elevenes løsninger av oppgave 1a ved regning.

Tabell 15: Oppgave 1b, tegning

Elev	**Framgangsmåte**
Gry, Pål og Ask	Tegnet opp vektorene og vektordifferansen i et koordinatsystem. Startpunkt til $-\vec{a}$ i endepunktet til $3\vec{b}$.
Tom	Tegnet opp vektorene og vektordifferansen i korrekt forhold på arket. Startpunkt til $-\vec{a}$ i endepunktet til $3\vec{b}$.
Eli og Dag	Tegnet opp vektorene og vektordifferansen i korrekt forhold på arket. Felles startpunkt for vektorene.
Mia og Ida	Tegnet opp vektorene og vektordifferansen i på arket, men ikke nøyaktig. Startpunkt til $-\vec{a}$ i endepunktet til $3\vec{b}$.
Ulf	Tegnet opp vektorene og vektordifferansen i på arket, men feil og ikke nøyaktig.

I undervisningen valgte elevene selv hvilken strategi de brukte når de regnet vektordifferanse. Noen brukte felles startpunkt for vektorene, mens andre valgte å ha startpunktet til den andre vektoren i endepunktet til den første vektoren. Kun to elever løste oppgaven med felles startpunkt for vektorene. Elevene som tegnet vektorsummen i oppgave 1a inn i et koordinatsystem, brukte samme strategi i denne oppgaven. De hadde startpunktet til $-\vec{a}$ i endepunktet til $3\vec{b}$. Ulf hadde en regnefeil i oppgave 1b, som gjorde at svaret ble feil. Tegningen til Ulf stemte overens med utregingen han utførte, og ble dermed feil, se *Figur 13*. Det er usikkert om Ulf tegnet eller regnet vektordifferansen først, så om feilen oppstod når han tegnet eller regnet ut svaret vites ikke. Det er rimelig å anta at regnefeilen oppstod først, og at tegningen oppstod etterpå, for prøven viste ingen tegn til at han hadde visket ut eller strøket over.



Figur 13: Ulf sin besvarelse av oppgave 1b ved tegning

Fremgangsmåtene elevene benytter er presentert i læreboken. Prosedyren som tar utgangspunkt i koordinatsystemet bir presentert i et eksempel under regning med vektorkoordinater. Å tegne vektordifferansen som piler på arket presenteres under vektordifferanse, både i fagteksten og i et eksempel. Læreboken kaller det å ha startpunkt i den ene vektorens endepunkt for metode 1, og det å ha felles startpunkt for vektorene for metode 2.

5.2.2 Oppgave 2

Denne oppgaven krevde at elevene kunne bruke et koordinatsystem og klarte å finne ut om vektorer var like. Se *Figur 14* for oppgavetekst. Jeg lot det være opp til elevene å velge hvordan de ville finne ut av hvilke vektorer som var like. Elevene måtte ha forståelse for begrepet parallellitet for å kunne løse 2b, i tillegg til å kunne tegne rette linjer inn i et koordinatsystem ut i fra en gitt likning. Hensikten var å undersøke elevenes forståelse for begrepet parallellitet. Elevenes løsninger av oppgave 2c ville kunne gi informasjon om deres forståelse av nullvektor. I oppgave 2d kunne elevene regne ut sidene på to forskjellige måter. Min tanke var at elevene skulle finne avstanden mellom to punkter, men en annen mulighet var å finne selve vektorkoordinatene først og regne ut lengdene av vektorene etterpå. Oppgaven kunne gi informasjon om hvilke begreper elevene koplet sammen og hvilke sammenhenger som eventuelt ikke var tilstede.

Tegn inn punktene $A = (0,0)$, $B = (3,1)$, $C = (4,5)$, $D = (1,4)$ i et koordinatsystem.

a) Hvilke av vektorene $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{AC}$ og $\vec{BD}$ er lik hverandre? Begrunn svaret ditt.

b) Tegn inn linja y gitt ved ligningen $y = \frac{1}{3}x - 2$ i det samme koordinatsystemet.
Hvilke av vektorene $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BD}$ vil du si er parallell(e) med linja y? Begrunn svaret ditt.

c) Finn summen av $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$. Begrunn svaret ditt.

d) Regn ut lengdene av sidene i figuren ABCD

Figur 14: Oppgave 2 fra testen

Elevenes løsninger:

Tabell 16: Oppgave 2a

Elev	**Framgangsmåte**
Mia	Skrev at $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AD}$ er like fordi de var parallelle og hadde samme retning.
Ida	Listet opp koordinatene til alle vektorene i oppgaveteksten. Skrev at $\overrightarrow{AB}$ var parallell med $\overrightarrow{CD}$, men ikke lik, for de gikk i motsatt retning, mens $\overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AD}$ var lik.
Ulf	Skrev at $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ fordi figuren var et parallellogram
Gry	Regnet ut koordinatene til fire vektorer. Skrev at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ og

	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ fordi lengden og retningen var lik. Kommenterte at da var $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.
Pål	Skrev at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ fordi $\overrightarrow{AB} = [3,1]$ og $\overrightarrow{DC} = [3,1]$, men at $\overrightarrow{DC}$ var motsatt retta som $\overrightarrow{CD}$, derfor var $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ motsatt like store. Videre skrev han $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ fordi $\overrightarrow{AD} = [1,4]$ og $\overrightarrow{BC} = [1,4]$. Disse var like lange og retta samme retning.
Ask	Skriver at $AD[3,1] = BC[3,1]$ og $AB[1,4] = DC[1,4]$
Eli	Regnet ut alle koordinatene til vektorene i oppgaveteksten. Skrev at $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = [1,4]$ og $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} = [3,1]$. De var like fordi de hadde samme vektorkoordinater – lik retning og like lang.
Tom	Skrev at $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{BC}$ fordi de hadde samme regning og lengde. Koordinatene deres var like, nemlig $[1,4]$.
Dag	Listet opp alle koordinatene til vektorene i oppgaveteksten. Skrev at man så da at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ fordi $\overrightarrow{CD}$ var motsatt av $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ og $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Oppgaveteksten ba elevene om å begrunne svarene. Flere av elevene hadde samme svar, men de begrunnet dem forskjellig. Derfor hadde elevene ulike framgangsmåter. Oppgaveteksten ba om at elevene skulle finne hvilke vektorer som var like hverandre, blant seks gitte vektorer. Mia, Ida, Ulf og Tom holdt seg til akkurat de seks vektorene og svarte at $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{BC}$ var like. De resterende ga riktige svar, men oppga også andre like vektorer enn de seks nevnt i oppgaveteksten. Grunnen til at de oppga flere vektorer enn nevnt i oppgaveteksten kan være at elevene ønsket å vise at de hadde forstått begrepet like vektorer, men det kan og være at elevene ikke leste oppgaveteksten godt nok og derfor oppga alle like vektorer de fant. Elevene begrunnet svarene sine på forskjellige måter. Gry, Pål, Eli og Tom forklarte at like vektorer har lik retning og lengde i tillegg til å ha like vektorkoordinater, mens Dag begrunnet kun med like vektorkoordinater. Både Mia og Ida begrunnet svaret med at vektorene er like fordi de var parallelle og hadde samme retning, men Ida hadde i tillegg brukt vektorkoordinatene som begrunnelse. Ulf mente vektorene var like fordi figuren utgjorde et parallellogram.

Læreboken har to regler som omhandler like vektorer. I den første står det at ” to vektorar er like dersom dei har den same retninga og same lengda” (Oldervoll et al., 2007, s. 155). Den andre regelen omhandler vektorer på koordinatform der det står at ”to vektorar er like dersom og berre dersom vektorkoordinatane er parvis like” (Oldervoll et al., 2007, s. 172). Elevene som begrunner like vektorer med lik retning og lengde eller henviser til like vektorkoordinater og bruker derfor fremgangsmåter som introduseres i læreboken. Mia bruker ikke en metode hentet fra læreboken fordi hun begrunner like vektorer med parallellitet og lik retning. Læreboken presiserer at to og to sider i et parallellogram er parvis parallelle og like lange. Ulf bruker parallellogram som forklaring på hvorfor vektorene er like, men forklarer ikke hvordan han vet at det er et parallellogram.

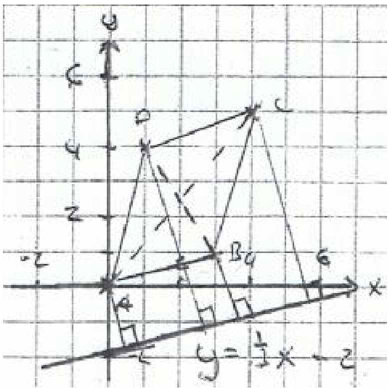
Tabell 17: Oppgave 2b

Elev	**Framgangsmåte**
Mia	Skrev at linja var parallell med $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{BC}$ fordi de økte eller minket med $\frac{1}{3}x$ per $-2y$.
Ida og Tom	Skrev at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ var parallelle med linja. Ga ingen begrunnelse.
Ulf, Pål, Ask og Eli	Skrev at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ var parallelle med linja fordi de hadde samme

	stigningstall.
Gry	Skrev at $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{y}$ fordi lengden og retningen på begge var [3,1].
Dag	$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ var parallelle med linja fordi to punkt på hver vektor stod vinkelrett på y.

De fleste elevene klarte å løse denne oppgaven. Gry fant bare en parallell vektor, men svarte i forrige oppgave at $\overrightarrow{AB}$ var parallell med $\overrightarrow{DC}$, så det er uvisst hvorfor hun ikke svarte begge vektorene i denne oppgaven. Den eneste eleven som ga helt feil svar på oppgaven var Mia. Hun hadde tegnet inn linja y feil, og fikk dermed feil svar.

Oppgaveteksten ba elevene begrunne svarene sine. Ida og Tom ga ingen begrunnelse, de skrev kun svarsetningen. Dag mente at vektorene var parallelle med linja fordi to punkt på hver vektor stod vinkelrett på y. Begrunnelsen manglet at den vinkelrette linja også måtte stå vinkelrett på vektorpilen. Dag presiserte ikke dette på tegningen han lagde, se ***Figur 15***. De resterende elevene begrunnet parallelliteten med at linja y og vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ hadde samme stigningstall.



Figur 15: Dag sin tegning av informasjonen i oppgave 2

Læreboken skriver at vektorer er parallelle dersom de har samme eller motsatt retning, men ingen oppgaver, fagtekst, regler eller eksempler i kapittelet omhandler en rett linje. Gry bruker begrunnelsen lik retning i sitt svar. Selv om Mia har helt feil svar på oppgaven handler begrunnelsen hennes om at det øker eller minker med samme tall. Flere elever begrunner parallelliteten med samme stigningstall, som kan være en annen måte å formulere samme eller motsatt retning. Dermed kan fremgangsmåten til de aller fleste elevene gjenkjennes i læreboken. Dag har en helt egen måte å løse oppgaven på som ikke kan sammenliknes med noe i kapittel 5 i læreboken. Det kan være Dag har kjennskap til parallellitet fra tidligere og prøver å overføre kunnskap han har om eksempelvis parallelle linjer til dette temaet.

Tabell 18: Oppgave 2c

Elev	**Framgangsmåte**
Mia og Ask	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = A = [0,0]$.
Ida, Ulf og Tom	Regnet ut med koordinater og fikk svaret [0,0].
Gry og Dag og Eli	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
Pål	Regnet ut med koordinater og fikk svaret $[0,0] = \vec{0}$.

Elevene valgte ulike måter å løse oppgaven på. Noen regnet ut med koordinater, mens andre brukte kun navnene på vektorene. Fire av ni elever gjenkjente summen som nullvektor.

Oppgaveteksten ba elevene begrunne svarene sine. Dag, Ask og Ida ga ingen begrunnelse, mens Tom og Mia forklarte at den gitte vektorsum gjorde at man ikke kom noen vei, man gikk fra A til A. Eli skrev at ved vektorsum kunne man stryke alle mellomleddene, så vektorene gikk fra A til A. Pål og Ulf begrunnet utregningen med at man startet og sluttet i samme punkt, dermed fikk $[0,0]$. Forklaringen som skilte seg ut var Gry sin. Hun skrev at $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ og $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ og satte det inn i regnestykket gitt i oppgaveteksten og regnet ut. Hensikten med oppgaven var å se om elevene gjenkjente summen som nullvektor, hvilket fire elever gjorde.

Elevenes prosedyre som kun tar hensyn til bokstavene, er beskrevet i læreboken under sum av vektorer. Prosedyren med koordinater er presentert under regning med vektorkoordinater i fagteksten, eksemplene og som en regel. Læreboken skriver ingen steder at $[0,0] = \vec{0}$, hverken i kapittel 5 eller i fasiten tilhørende kapittelet.

Tabell 19: Oppgave 2d

Elev	**Framgangsmåte**
Mia, Ulf, Gry, Eli og Dag	Kommenterte at to og to sider var like lange, og regnet ut lengden av vektorene på vanlig måte $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ og $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
Ida og Tom	Regnet ut lengden av alle fire vektorene på vanlig måte.
Pål	Skrev at to og to sider var like lange fordi det var et parallellogram, og at $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = [3,1]$ og $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = [1,4]$.
Ask	Kommenterte at to og to sider var like lange og regnet ut $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$ og $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}$

Oppgaveteksten spurte etter lengden av sidene i figuren ABCD. Pål oppga riktignok at to og to sider var like lange fordi figuren var et parallellogram, men i stedet for å regne ut sidene skrev han opp vektorkoordinatene. Det er usikkert om Pål visste hvordan man regnet ut lengden av vektorer. Ask viste at han kunne regne ut lengden, men en regnefeil i utregningen av $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ gjorde at det ene svaret ble feil. Av de resterende elevene forklarte fem elever at to og to sider var like lange, slik at de bare trengte å regne ut to sider. Ida og Tom regnet ut alle sidene hver for seg. Det er usikkert om de også visste at to og to sider var like lange før de begynte på utregningen.

Alle elevene utenom Pål bruker regelen for lengen av vektorer som beskrives under lengde og avstand i læreboken. Regelen er uthevet med gul bakgrunn, den forklares i fagteksten og benyttes i et eksempel. Det er uvisst hvilken fremgangsmåte Pål brukte for å finne svaret.

5.2.3 Oppgave 3

Oppgaven, se *Figur 16*, var et praktisk eksempel liknende det elevene fikk presentert i læreboken. Elevene var vant til et elveløp og elvas strømninger. Oppgavene handlet om en robåt som skulle krysse elven, slik som oppgave 5.23, se *Figur 17*. Ved å bruke situasjonen med fly og sidevind håpet jeg å finne ut om elevene klarte å bruke det de hadde lært i andre situasjoner enn den opprinnelige situasjonen de ble presentert for. Elevene skulle løse oppgaven ved tegning og regning.

Et fly går fra byen A til byen B som ligger 600 km rett nord for A. Flyet har en fart på 600 km/h. Det blåser fra vest med en styrke på 15 m/s. Flygeren tar ikke hensyn til sidevinden. Finn både ved tegning og regning hvor flyet er etter en time. Oppgi svaret med avstand fra B i km, i tillegg til retning.

Figur 16: Oppgave 3 fra testen


Oppgåve 5.23

Dei to breddene til ei elv er heilt rette og parallelle. Elva er 50 m brei. Vatnet renn 0,5 m/s. Knut skal ro over elva og ror med ein fart på 1 m/s rekna i forhold til vatnet. Han ror i ei retning som er vinkelrett på elvebredda.

a) Kor lang tid bruker Knut over elva?

b) Kvar treffer Knut elvebredda på motsett side?

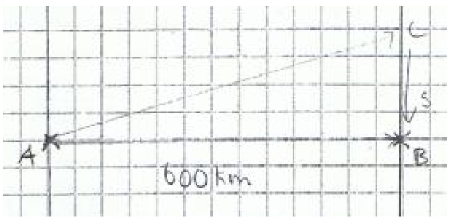
Figur 17: Oppgave 5.23 fra læreboken (Oldervoll et al., 2007 s. 161)

Elevenes løsninger:

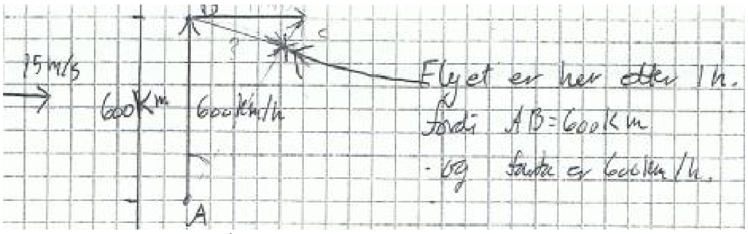
Tabell 20: Oppgave 3, tegning

Elev	**Framgangsmåte**
Mia	Tegnet en skisse av informasjonen i oppgaveteksten. Vektoren for sidevinden sluttet i B og startet i et punkt kalt C. Mia mente flyet var i punkt C etter en time (vest for byen B).
Ida	Tegnet en skisse av informasjonen i oppgaveteksten. Tegnet ikke inn hvor flyet var etter en time.
Ulf, Gry, Ask, Tom og Dag	Tegnet en skisse av informasjonen i oppgaveteksten der sidevindens vektor startet i B. Flyet var kommet til sluttpunktet for sidevindens vektor etter en time (øst for byen B).
Pål og Eli	Tegnet en skisse av informasjonen i oppgaveteksten der sidevindens vektor startet i B. Sidevindens vektor sluttet i et punkt kalt C. De mente flyet etter en time var langs vektoren mellom A og C men ikke fullt i C fordi det kun hadde fløyet 600 km.

Elevene forstod oppgaven litt forskjellig. Løsningene ved tegning viste at fem elever hadde funnet ut at etter en time var flyet rett øst for byen B. Ida hadde kun tegnet opp informasjonen, ikke markert hvor flyet var etter en time. Mia lot vind-vektoren slutte i B og mente dermed at flyet endte opp vest for B, selv om det var vestavind i oppgaveteksten, se *Figur 18*. Pål og Eli løste oppgaven annerledes enn de andre, se *Figur 19*. De registrerte punkt C slik som Ulf, Gry, Ask, Tom og Dag, men mente at flyet ikke kom fram til C fordi det fløy 600 km/h og dermed nådde kun 600 km, men i retning mot C. Flyet endte dermed sørøst for byen B.



Figur 18: Utdrag av Mia sin besvarelse av oppgave 3



Figur 19: Utdrag av Pål sin besvarelse av oppgave 3

Prosedyren de fem elevene som fant ut at flyet endte opp øst for byen B bruker, kan sammenliknes med fremgangsmåten i et eksempel under vektorsum i læreboken. Et eksempel med robåten i læreboken omhandler vektordifferanse, der vannets fartsvektor blir snudd på tegningen, slik som Mia snur sin vindvektor og på den måten ender opp vest for byen B. Fremgangsmåten til Mia kan dermed sammenliknes med et eksempel i læreboken selv om konteksten i oppgavene er forskjellige. Oppgavene som omhandler robåten i læreboken presiserer at Knut ror med en fart regnet i forhold til vannet. Jeg presiserte ikke for elevene om de skulle regne i forhold til land eller luft. Det kan være årsaken til at Pål og Eli fikk et annerledes svar.

Tabell 21: Oppgave 3 regning

Elev	**Framgangsmåte**
Mia	$\frac{3600\,s}{15\,m/s} = 240\,m$. Flyet var 0,24 km vest for B.
Ida	$1\,m/s \cdot 15 = 1{,}5\,km/h$. $\frac{600}{1{,}5} = 400\,km$. Etter 1 time var de komt 400 km lengre.
Ulf	$15\,m/s = 54\,km/h$. $\overrightarrow{AB} + \vec{v} = 600\,km + 54\,km = 654\,km$. Flyet var 54 km frå B, NØN.
Gry	Flyet etter 1 time: $s = t \cdot v = 3600\,s \cdot 166{,}66\,m/s = 599976\,m \approx 600\,km$. Etter en time var flyet 600 km øst for B.
Pål	$s = v \cdot t = 600\,km/h \cdot 1\,h = 600\,km$ frå start. $BC = 15m/s \cdot 3600\,s = 54000\,m = 54\,km$. Flyet var 54 km frå mål etter ein time. Det var sør-aust for B.
Ask	$s = t \cdot v = 1\,t \cdot 600km/t = 600\,km$. $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 166{,}67^2\,m/s + 15^2\,m/s$. $AC = \sqrt{166{,}67^2\,m/s + 15^2\,m/s} \approx 167{,}3\,m/s$. $s = t \cdot v = 3600\,s \cdot 167{,}3\frac{m}{s} = 602280\,m = 602{,}280\,km$.
Eli	$15\,m/s = 15 \cdot 3{,}6 = 54\,km/h$. Han fløy i en time med en fart på 600 km/h, og ble tatt med 54 km vest av vinden. Han endte opp 54 km fra by B. ?
Tom	Flyet hamna 54 km rett aust for B.
Dag	$3600\,s \cdot 15\,m/s = 54000\,m = 54\,km$. Han var 54 km frå B.

Ingen elever hadde helt lik fremgangsmåte og svar. Hensikten var at elevene skulle oppgi svaret i både avstand og retning fra byen B. Samtlige elever oppga en avstand fra B, men fire elever oppga ingen retning. Ulf hadde korrekt tegning og avstand fra byen B, men oppga retningen NØN. Det kan være at retningen var oppgitt i forhold til byen A. Videre hadde Ulf i utregningen sett bort fra at en vektor hadde både en lengde og en retning og regnet kun med lengden. Deler av utregningen stemte ikke overens med svaret han ga på oppgaven. Det kan tenkes at Ulf så hva svaret måtte være, men ikke visste hvordan han skulle regne det ut.

Elevene ga uttrykk under prøven for at oppgaven var vanskelig. De fikk oppgitt formelen for å regne fra m/s til km/h. Det er vanskelig å vite hva de ulike elevene tenke. Ida så ut til å ha prøvd ut en idé, uten hell. Mia, Gry og Ask tok alle utgangspunkt i formelen $s = t \cdot v$, men enten husket elevene feil formel, eller så satte de inn flyets fart i stedet for vindstyrken i formelen og dermed fått feil svar.

Pål og Eli brukte en formel og fant at strekningen var 600 km. De kom fram til at flyet kun hadde fløyet 600 km og viste på tegningen at flyet var sør-øst for byen B. I utregningen kom de likevel fram til at flyet var 54 km fra B. Svarene stemte ikke overens med hverandre. Eli noterte et spørsmålstegn ved svaret sitt, som kunne være et tegn på at hun så at tegningen og svaret ikke samsvarte. Tom fikk helt rett svar, men hadde ingen utregning, mens Dag hadde rett utregning og svar, men oppga ingen retning i forhold til byen B.

Selv om elevene står ovenfor liknende problemstillinger i oppgaver i læreboken er det ingen tekst eller eksempler som beskriver selve utregningen for elevene. Dermed kan jeg ikke sammenlikne elevenes utregninger med metoder presentert i læreboken.

5.2.4 Oppgave 4

Hensikten med oppgaven var at elevene skulle utfordres litt på selve vektorregningen. Se *Figur 20* for oppgavetekst og *Figur 21* for illustrasjon av informasjonen i oppgaveteksten. I 4a skulle elevene vise at de kan finne vektoren mellom to punkt. Videre måtte de vise at de forstod begrepet midtpunkt og klare å regne det ut. Til slutt ville jeg utfordre elevene ved at de måtte lese oppgaveteksten godt, kjenne til egenskapene ved et trapes og forstå begrepene i oppgaveteksten. Jeg ønsket å se om elevene klarte å bruke vektorregning til å finne en gitt figur med bestemte egenskaper.

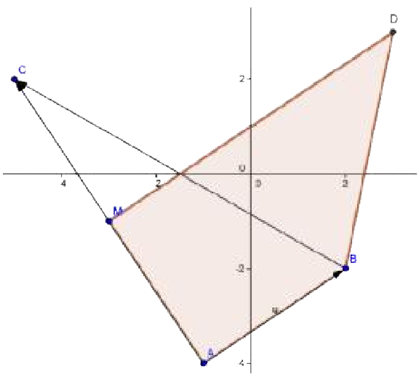
I Δ ABC har hjørnene koordinatene $A = (-1,-4)$, $B = (2,-2)$ og $C = (-5,2)$

a) Finn $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ og $\vec{AC}$. Vis hvordan du tenker eller regner.

b) Finn ved regning koordinatene til midtpunktet M på $\overrightarrow{AC}$

c) Et punkt D ligger slik at punktene A, B, D og M utgjør et trapes der $\overrightarrow{MD}$ er dobbelt så lang som $\vec{AB}$. Finn koordinatene til punktet D ved regning.

Figur 20: Oppgave 4 fra testen



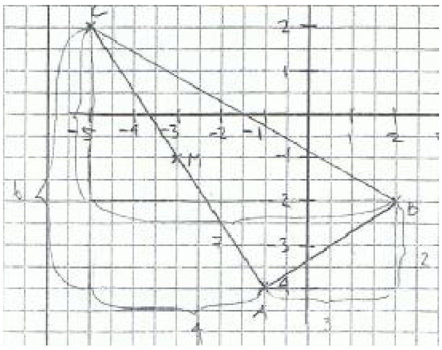
Figur 21: Illustrasjon av informasjonen i oppgave 4

Elevenes løsninger:

Tabell 22: Oppgave 4a

Elev	**Framgangsmåte**
Mia, Tom og Dag	Tegnet vektorene inn i et koordinatsystem, talte på x- og y-aksen mellom punktene og fant at $\overrightarrow{AB} = [3,2]$, $\overrightarrow{BC} = [-7,4]$ og $\overrightarrow{AC} = [-4,6]$.
Ida	$\overrightarrow{AB} = [3,2]$, $\overrightarrow{BC} = [-7,4]$ og $\overrightarrow{AC} = [-4,6]$. *Ingen mulighet til å forstå hvordan hun kom fram til svaret.*
Ulf, Gry, Pål, Ask og Eli	Regnet ut vektorkoordinatene ved å bruke formelen for vektoren mellom to punkt direkte. $\overrightarrow{AB} = [2-(-1), -2-(-4)] = [3,2]$ $\overrightarrow{BC} = [-5-2, 2-(-2)] = [-7,4]$ $\overrightarrow{AC} = [-5-(-1), 2-(-4)] = [-4,6]$

Alle elevene fikk korrekt svar på oppgaven. De fikk beskjed om å vise hvordan de regnet eller tenkte, hvilket alle utenom Ida gjorde. Fem elever valgte å regne ut vektorene, mens tre elever talte langs aksene for å finne koordinatene, se *Figur 22* for tellemetoden. At Ida tegnet opp koordinatsystemet men ikke hadde noen utregning kan tyde på at hun også talte seg fram til vektorkoordinatene.



Figur 22: Mia sin besvarelse på oppgave 4a

Prosedyrene brukt i oppgaven benyttes i læreboken. Tellemetoden kan sammenliknes med formuleringen "av figuren ser vi at $\vec{u} + \vec{v} = [2,-1]$" som brukes i et eksempel i læreboken under regning med vektorkoordinater. Ida kan og ha brukt denne metoden. Fremgangsmåten som bruker formelen for vektoren mellom to punkt presenteres gjennom fagtekst, regel og eksempel under vektoren mellom to punkt.

Tabell 23: Oppgave 4b

Elev	**Framgangsmåte**
Mia, Pål, Eli og Dag	Regnet ut svaret ved å finne koordinatene til $\overrightarrow{AM}$, for så å regne ut $\overrightarrow{OM}$ ved hjelp av $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[-4,6] = [-2,3]$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = [-1,-4] + [-2,3] = [-1+(-2), -4+3]$ $= [-3,-1]$ Mia og Eli kommenterte i tillegg at koordinatene til M ble $(-3,-1)$

Ida og Ulf	Regnet ut svaret ved å bruke at $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = [-1,-4] + \frac{1}{2}[-4,6] = [-1 + (-2), -4 + 3]$ $= [-3,-1]$ Ulf kommenterte i tillegg at koordinatene til M ble $(-3,-1)$.
Gry og Tom	Regnet ut svaret ved å si at $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[-4,6] = [-2,3]$. Gry kommenterte i tillegg at koordinatene til M ble $(-2,3)$.
Ask	Regnet ut svaret ved å regne ut $\overrightarrow{OM}$ ved hjelp av $\overrightarrow{OC}$ og $\overrightarrow{CM}$: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = [-5,2] + [2,-3] = [-5 + 2, 2 - 3] = [-3,-1]$

Oppgaven spurte etter koordinatene til punktet M. Jeg forventet et punktkoordinat til svar, ikke vektorkoordinatene til $\overrightarrow{OM}$. Gry og Tom valgte en strategi som ikke førte frem til rett svar. Det kan være de har forvekslet $\overrightarrow{AM}$ og $\overrightarrow{OM}$ i utregningen. De resterende elevene valgte ganske like strategier. Mia, Pål, Eli og Dag regnet først ut koordinatene til $\overrightarrow{AM}$, for så å bruke informasjonen i videre utregning. Ida, Ulf og Ask regnet ut $\overrightarrow{OM}$ direkte, men Ask brukte punktet C i stedet for punktet A som Ida og Ulf gjorde. Mia, Eli, Ulf og Gry oppga koordinatene til M som et punktkoordinat slik oppgaveteksten spurte om.

Fremgangsmåtene som tar utgangspunkt i å finne "en kjent vei" fra origo til midtpunktet tar alle utgangspunkt i samme prosedyre. I læreboken er den samme prosedyren presentert i to eksempler under vektoren mellom to punkt. Gry og Tom har brukt en prosedyre som ikke gjenkjennes fra læreboken.

Tabell 24: Oppgave 4c

Elev	**Framgangsmåte**
Mia, Ulf, Pål, Eli, Tom og Dag	Regnet ut $\overrightarrow{MD}$, for så å regne ut $\overrightarrow{OD}$ ved hjelp av $\overrightarrow{OM}$ og $\overrightarrow{MD}$: $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AB} = 2[3,2] = [6,4]$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = [-3,-1] + [6,4] = [-3 + 6, -1 + 4] = [3,3]$ Mia, Ulf, Eli og Tom kommenterte at $D = (3,3)$
Ida	Regnet ut ved å bruke at $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AB}$ direkte: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = [-3,-1] + 2[3,4] = [-3,-1] + [6,4]$ $= [-3 + 6, -1 + 4] = [3,3]$
Gry	Regnet ut $\overrightarrow{MD}$, for så å regne ut $\overrightarrow{OD}$ ved hjelp av $\overrightarrow{OM}$ og $\overrightarrow{MD}$: $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AB} = 2[3,2] = [6,4]$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = [-2,3] + [6,4] = [-2 + 6, 3 + 4] = [4,7]$ $D = (4,7)$
Ask	Tegnet korrekt inn D i tegningen av koordinatsystemet, men viste ingen utregning eller svar.

De fleste elevene løste denne oppgaven likt. Syv elever regnet først ut $\overrightarrow{MD}$, for så å regne ut $\overrightarrow{OD}$ ved hjelp av $\overrightarrow{OM}$ og $\overrightarrow{MD}$. Gry skilte seg ut blant elevene som valgte denne fremgangsmåten fordi hun brukte feil punktkoordinater til M. Strategien var rett, men hun hadde en følgefeil fra oppgave 4b. Tom regnet også feil i oppgave 4b, men benyttet likevel riktige punktkoordinater for punktet M i denne oppgaven. Hvorfor han brukte andre tall enn de han fikk til svar i oppgave 4b er usikkert, men det kan være han leste av koordinatene i koordinatsystemet han tegnet. Ida løste oppgaven på noenlunde samme måte som de andre, men hun gjorde ingen mellomregning for å finne $\overrightarrow{MD}$. Ask tegnet inn punktet D i koordinatsystemet, men oppgaveteksten ba om at elevene skulle finne koordinatene til punktet ved regning. Selv om han ikke regnet det ut, har han vist at han forstod hva det vil si at en vektor er dobbelt så lang som en annen. I denne deloppgaven oppgir fem elever svaret som et punktkoordinat. I oppgave 4b er det bare fire elever som gjør det. Det at Tom oppga svaret som punktkoordinat i denne deloppgaven kan tyde på at han vet hva et punktkoordinat er, men muligens glemte å oppgi det i oppgave 4b.

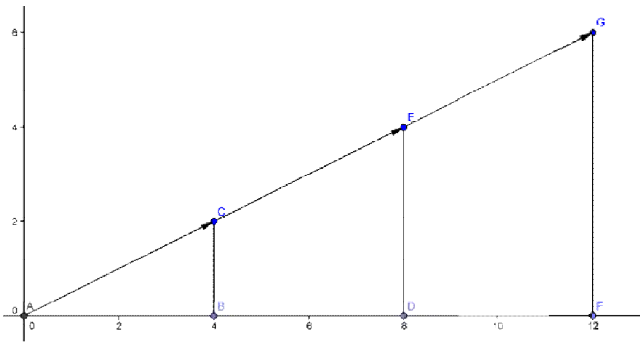
Samtlige elever som regner ut oppgaven bruker en strategi der de går ”en kjent vei” fra origo og fram til punktet D. Som beskrevet under oppgave 4c kan prosedyren gjenkjennes i to eksempler under vektoren mellom to punkt i læreboken.

5.2.5 Oppgave 5

I oppgaven skulle elevene forklare en regel de kjente til med egne ord. De fikk et eksempel for å spore de inn på rett tankegang. Se *Figur 23* for oppgavetekst og *Figur 24* for illustrasjon av informasjonen i oppgaven. Oppgaven var forventet å være svært vanskelig for mange elever, så de fikk et hint om at de kunne bruke formlike trekanter for å finne svaret. Jeg ønsket å se hva elevene egentlig forstod av reglene som ble presentert og bevist både i boken i undervisningen og om de klarte å formulere den med egne ord i stedet for å prøve å huske det som stod i læreboken.

Tegn inn vektorene $[4,2]$ $[8,4]$ og $[12,6]$ i et koordinatsystem. Tegn inn loddrette linjestykker fra endepunktene til vektorene og ned på x-aksen. Forklar ved hjelp av formlike trekanter, og med egne ord hvorfor formelen $t[x,y] = [tx,ty]$ gjelder.

Figur 23: Oppgave 5 fra testen



Figur 24: Illustrasjon av informasjonen i oppgave 5

Elevenes løsninger:

Tabell 25: Oppgave 5

Elev	Framgangsmåte
Mia	Mellom $x = 4$ og $x = 8$ blir altså x ganget med to. Du ser også at $2y$ blir da til $4y$ som også altså er blitt ganget med to. I formlike trekanter i et koordinatsystem ser du denne regelen veldig godt.
Ida	Vi ser at 2 av vinklene i de ulike trekantene er like, både vinkelen som begynner i origo og den som går fra koordinaten og ned på linja er lik.

	Grunnen til at $t[x,y] = [tx,ty]$ Forhold: $\Delta 1 : \Delta 2$ $2[x,y] = [2x,2y]$ $\Delta 1 : \Delta 3$ $3[x,y] = [3x,3y]$ Så vi ser at forholdet mellom x og y er det samme i alle trekantene.
Ulf	Ein ser at vektorane har same retning, men lengda aukar osv.
Gry	$t(AB\overrightarrow{e_1}, BC\overrightarrow{e_2}) = (tAB\overrightarrow{e_1}, tBC\overrightarrow{e_2}) = [tAB, tBC]$ Hvor $AB = x$-linjen og $BC = y$-linjen. Alle trekantene er formlike og regelen gjelder for alle. $< A$ er felles for $\Delta ABC, \Delta ADE$ og ΔAFG. $< B, D$ og F er like fordi linjen står loddrett på x-aksen. Da vil også den siste vinkelen være lik. Vi har bevis at $t[x,y] = [tx,ty]$.
Pål, Ask	Ikke svar
Eli	$< A$ er felles i alle tre trekantene. ABC, ADE og AFG er lik, 90°. Da må også ACB, AED og AGF være lik. $\Delta ABC \sim \Delta ADE \sim \Delta AFG$. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD}$ er en forlenging av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DE}$ er parallell med $\overrightarrow{BC}'$. $\overrightarrow{AD}$ er t ganger så lang som $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DE}$ er t ganger så lang som $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AE}$ er t ganger så lang som $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = t \cdot \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ $t \cdot \overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BC}$ $t[4,2] = t[4,0] + t[0,2] = [4,2]$ $\Delta ABC \sim \Delta ADE \sim \Delta AFG$, derfor gjelder dette alle. Hvis man forlenger 2 linjer og har en parallell, vil det bli formlike trekanter. De formlike trekantene er like, de er bare t ganger så lange.
Tom	$BC \parallel DE \parallel FG$, grunnlinja er felles. $\Delta ABC, \Delta ADE\ og\ \Delta AFG =$ formlike. x og y aukar proporsjonalt, difor vert $t[x,y] = [tx,ty]$.
Dag	$\Delta ABC \sim \Delta ADE \sim \Delta AFG$ fordi A er felles og alle har ein vinkel på 90°. $AD = 2AB = 2x \qquad AB = x$ $AF = 3AB = 3x$ $DE = 2BC = 2y \quad BC = y$ $FG = 3BC = 3y$ t_1 er forholdet mellom trekant ABC og ADF Då er $t = 2$ etter som $AD = 2AB$ og $DE = 2BC$. $t[x,y]$ der x er ei lengd og y ei anna lengd. $t[l_1, l_2]$ $t(l_1 e_1 + l_2 e_2) = [tl_1 e_1 + tl_2 e_2] = [tx,ty]$ $AB = x, \quad = y, \quad t =$forhold $t[x,y] = 2[AB,BC] = [2AB,2BC] = \Delta ADE$ Formelen gjeld.

Alle elevene tegnet opp figuren. Pål og Ask avga ikke noe svar utover tegningen. Det kan se ut til at Mia og Ulf så at regelen gjaldt, men ikke klarte å forklare hvorfor den gjaldt. Ida og Gry forklarte hvorfor trekantene var formlike og at forholdet mellom dem var konstant, men kom ikke med et overbevisende argument for at regelen gjaldt. Tom forsøkte å forklare formlikheten, men en parallell side og felles grunnlinje var ikke nok til å kunne forklare at trekanter er formlike.

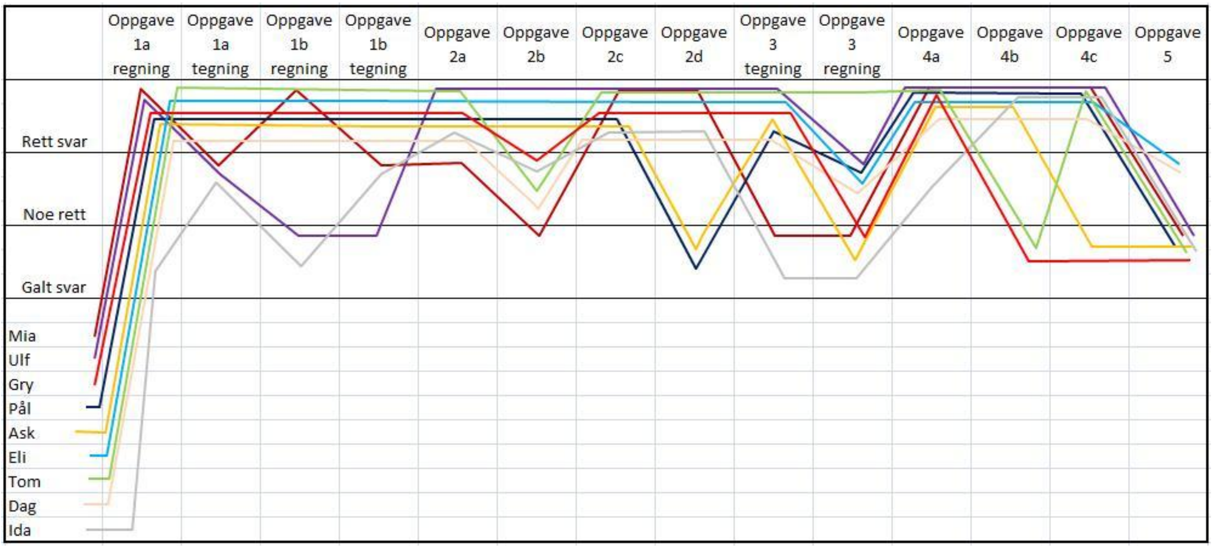
Eli og Dag forklarte begge hvorfor trekantene var formlike. Videre begrunnet Eli godt hvorfor regelen gjaldt ved å finne to ulike måter å skrive $\overrightarrow{AE}$ på. Dag valgte å finne ulike måter å skrive flere vektorer i figuren og endte til slutt opp med å bruke enhetsvektorene. Han brukte ikke vektornotasjon over bokstavene i besvarelsen. Både Eli og Dag så ut til å ha forstått regelen og hvorfor den gjaldt, men Eli kom med bedre argumenter for at det faktisk var slik.

Læreboken beviser regelen i fagteksten, men bruker enhetsvektorer i beviset i stedet for formlike trekanter slik oppgaven ber om. Dag er den eneste eleven som bruker en prosedyre som kan gjenkjennes i læreboken. Han benytter enhetsvektorer i sitt bevis, men gjennomfører det ikke på helt samme måte som i læreboken. De resterende elevenes fremgangsmåter kan ikke sammenliknes med fremgangsmåtene i kapittelet.

Variasjonen blant elevenes svar er stor. Tatt i betraktning at det er få elever, alle følger tett den samme undervisningen, får hjelp av samme lærer og bruker samme lærebok syntes jeg resultatet er overraskende. Til tross for stor variasjon mellom svarene, viser elevene ofte likheter i metode de bruker under utregningen. Hvis man ser bort fra rett svar på oppgavene på testen, men kun vurderer prosedyrene, ser man at de fleste av prosedyrene elevene bruker kan gjenkjennes i læreboken. Fremgangsmåtene elevene bruker for å løse oppgave 1 er fremgangsmåter brukt i kapittel 5 i læreboken. Læreboken har riktignok nøyaktige tegninger, men metodene er fremdeles de samme. I oppgave 2 er alle metodene elevene benytter i læreboken, med unntak av Pål sitt svar på oppgave 2d. Han gjør ingen utregning men oppgir vektorkoordinatene i stedet for hvor lange vektorene er. Metoden syv av elevene bruker for å tegne svaret på oppgave 3 kan gjenkjennes i læreboken, men ikke elevenes fremgangsmåter for å regne ut svaret. Læreboken inneholder ingen eksempler som regner ut svarene på den type oppgaver. Strategiene elevene benytter i oppgave 4, utenom Tom og Gry sin metode for å løse 4b, kan alle finnes igjen i læreboken. Kun metoden Dag bruker for å finne svaret på oppgave 5 kan sammenliknes med metoder fra i kapittel 5 i læreboken. Selv om elevene har feil svar i forhold til oppgaveteksten bruker de i hovedsak metoder som de har fått erfaring med gjennom læreboken. Unntaket er prosedyrene elevene bruker på oppgavetyper som ikke er presentert i læreboken gjennom eksempler eller oppgaver og bevis. At så stor andel av elevenes prosedyrer kan finnes igjen i læreboken kan tyde på at læreboken har stor innvirkning på elevene.

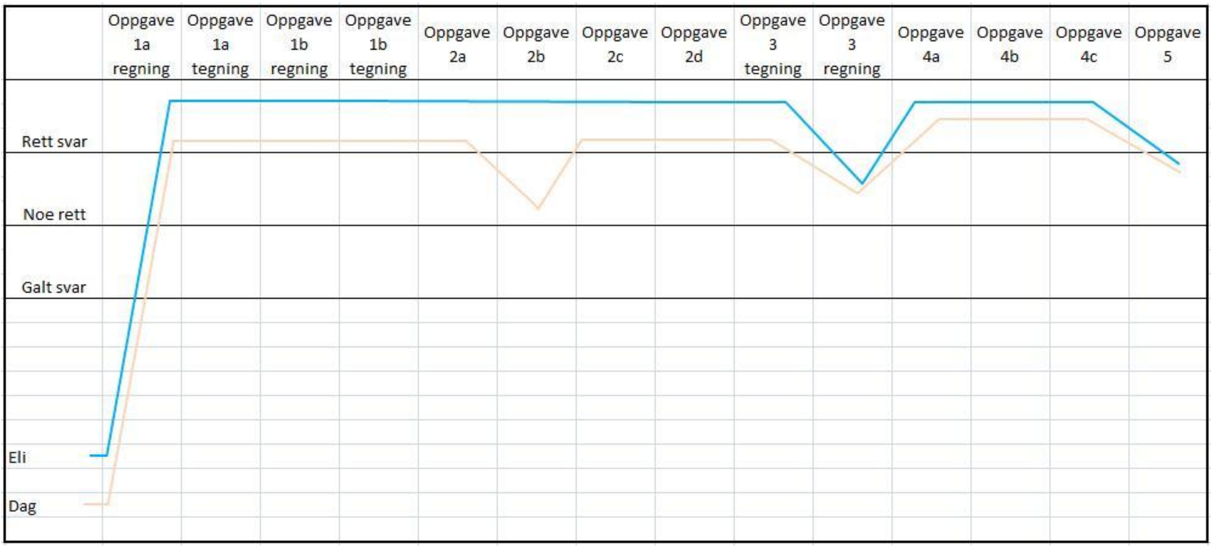
5.2.6 Sammenlikning av besvarelser

For å sammenlikne enkeltelevers besvarelser valgte jeg å lage en oversikt over elevenes svar på prøven, se *Figur 25*. Svarene ble delt inn i tre kategorier: rett, galt og noe rett. Flere ganger viste elevene nesten rett svar, men en liten regnefeil eller unøyaktighet i tegningen gjorde at svaret ikke var helt rett. I tillegg var det ikke alle elevene som begrunnet svarene sine selv om det var påkrevd i oppgaveteksten. Besvarelsene der svaret ikke var helt rett ut i fra oppgaveteksten, ble plassert i midten i diagrammet i en egen kategori: ”noe rett”. Det betyr at elevene fikk noe uttelling for svaret. Sammenlikningen av elevenes svar på testen viser stor variasjon i besvarelsene.



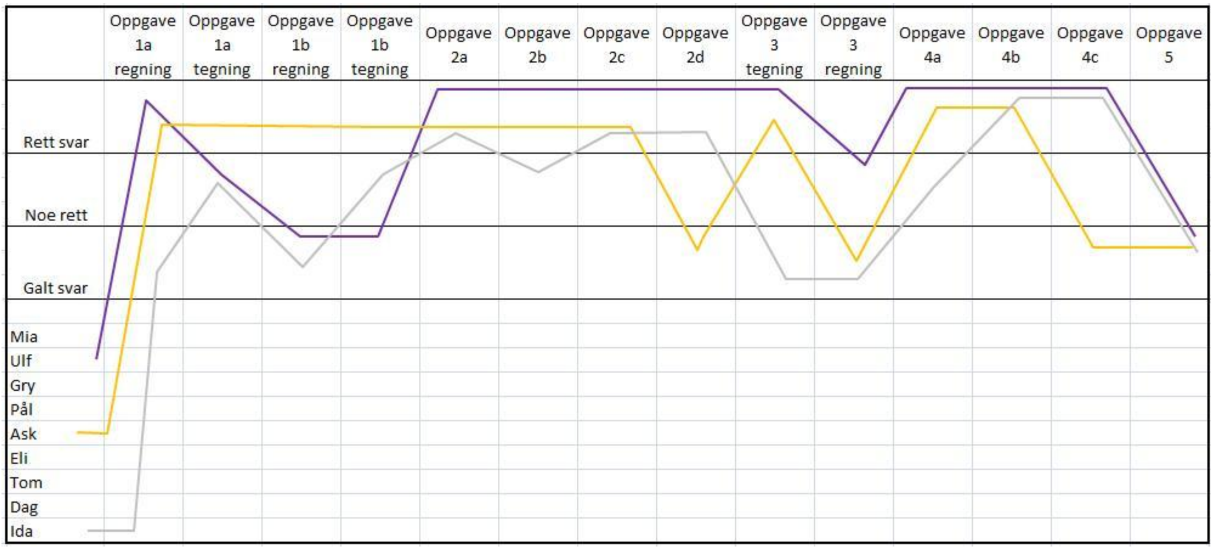
Figur 25: Sammenlikning av elevenes svar på testen

I undervisningen hadde ikke elevene faste plasser, se Vedlegg 10: Klasseromsplassering for oversikt over hvordan elevene satt hver time. Noen mønstre mellom plasseringene er likevel synlig. Eli og Dag satt alltid sammen, og det samme gjelder Ida og Ask. Ulf satt som regel med Ida og Ask, men en gang satt han alene. De resterende elevene hadde ingen regelmessige grupperinger, men Pål satt alene halvparten av timene han var til stede. Tom var den eleven som hadde flest varierende plasseringer, men han satt aldri sammen med Ulf, Ida eller Ask. Ved å sammenlikne elevenes besvarelser finner jeg likheter mellom enkelte elever. Eli og Dag gjorde rett og galt på stort sett de samme oppgavene, se *Figur 26*. Unntaket er oppgave 2b, der Eli hadde rett svar, mens Dag hadde mangelfull begrunnelse.



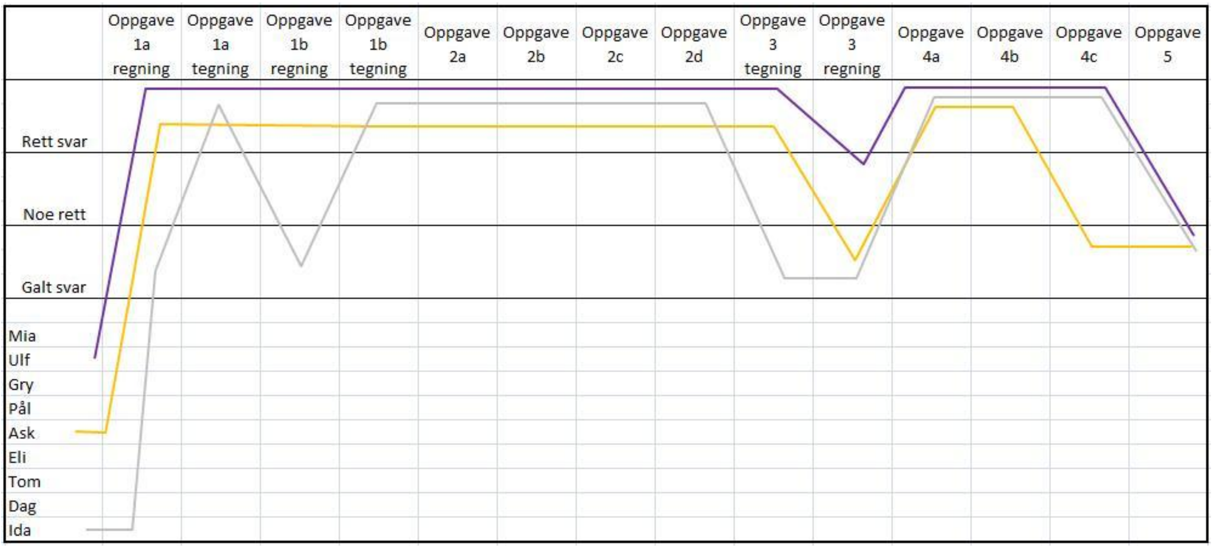
Figur 26: Sammenlikning av Eli og Dag sine svar på testen

Ved å studere andre faste grupperinger, slik som Ida, Ask og Ulf ser man andre resultater. Hvis man studerer besvarelsene til Ida, Ask og Ulf ser man av *Figur 27* at på kun fire av deloppgavene viser de like resultater, oppgave 2a, 2c, 4b og 5. Ida og Ask har i tillegg oppgave 3 ved regning felles. Ulf har flere oppgaver til felles med Ida og Ask hver for seg, slik at han til sammen har åtte resultater felles med Ask og åtte med Ida, se *Figur 27*.



Figur 27: Sammenlikning av Ida, Ask og Ulf sine svar på testen

Dersom man ser bort fra feil som antas å være regnefeil og unøyaktighet ved svarene som skulle tegnes, samt gir elevene helt korrekt svar dersom svarene ikke er begrunnet, vil resultatet se annerledes ut, se *Figur 28*. Ida og Ulf får rett svar på sine unøyaktige tegninger og Ida får rett svar på to besvarelser der svaret var rett, men hun mangler begrunnelse. Ulf og Ask får rett svar der en antatt regnefeil gjør at svaret ble feil. Da er det ni oppgaver der de tre elevene får samme resultat. Her ser man tydelig at Ida, Ask og Ulf har mer til felles enn først antatt.



Figur 28: Sammenlikning av Ida, Ask og Ulf sine svar på testen, sett bort i fra antatte slurvefeil

Blant de resterende elevene i klassen er det ingen tydelige sammenhenger mellom plasseringen og besvarelsene. Elevene som har faste grupperinger i undervisningen viser en tendens til at de mestrer de samme områdene innenfor matematikken. I diskusjonen i neste kapittel vil jeg se nærmere på om elever som sitter sammen bruker boken på liknende måter, og om bruken av læreboken gjør at elever som sitter sammen mestrer og feiler på stort sett de samme oppgavene.

5.3 Intervju

Intervjuene ga meg mulighet til å finne ut mer om elevenes forståelse for matematikk. Elevene fikk spørsmål om hvor godt de kjenner ulike begrep innenfor vektorregningen. Om elevene mente de har god kjennskap til et begrep, men ikke viste det på prøven, kan det tyde på at elevene ikke hadde en korrekt oppfatning av begrepet. Under intervjuene løste elevene oppgaver mens de tenkte høyt. Det kan gi meg indikasjoner på hva slags forståelse for matematikk elevene har. Hensikten med lærerintervjuet var å finne ut mer om lærebokens rolle i undervisningen og hvilke tanker læreren hadde om den. I tillegg ønsket jeg å finne ut hvordan læreren opplevde elevenes bruk av læreboken for å se om lærerens oppfatning samsvarte med inntrykket jeg fikk gjennom observasjonen.

Jeg gjennomførte seks intervjuer, fem elevintervju og ett med læreren. Alle intervjuene ble tatt opp på video med linsedekselet på slik at jeg kun fikk lyden. Nedenfor presenteres først elevintervjuene og deretter intervjuet med læreren.

5.3.1 Elevintervju

Elevene fikk mulighet til å velge om de ønsket å bli intervjuet eller ikke. Alle elevene utenom Eli og Ida krysset av på at det var greit at de ble intervjuet i forbindelse med undervisningen og testen i kapittelet om vektorer. Ida og Eli avga ikke svar på spørsmålet under prøven, men Ida ga beskjed senere om at det var helt greit å bli intervjuet. Elevene til intervjuene ble valgt ut på grunnlag av om de kunne tenke seg å bli intervjuet, samt hvor aktive de var i undervisningen og hvor mye informasjon jeg hadde om hva de tenkte mens de løste oppgaver.

Spørsmålene til intervjuene, se Vedlegg 3: Spørsmål til elevintervju, inneholdt tre introduserende spørsmål for at elevene skulle bli litt vant til intervjusituasjonen. Introduksjonsspørsmålene var av privat karakter og svarene blir ikke presentert i oppgaven. Elevenes svar på spørsmålene blir ikke gjengitt ordrett i oppgaven, men meningsinnholdet ivaretas.

Under bearbeidingen av intervjuene oppdaget jeg at flere av spørsmålene var interessante og ga spennende svar, men ga ikke informasjon knyttet opp mot problemstillingene i oppgaven. Spørsmål 4 handlet om hva elevene syntes om matematikkfaget. Hensikten var å se om motivasjon og interesse kunne være en forklaring på om elevene ikke mestret faget, men denne studien handler om hvorvidt læreboken påvirker elevene, ikke om motivasjon og interesse. I spørsmål 5 skulle elevene gi seg selv karakter på hva de kunne om ulike begrep og tema innenfor vektorregningen. Svarene gir informasjon om elevenes oppfatning av egen kunnskap, men bidrar hverken til å finne ut hva slags matematisk forståelse elevene har, eller forholdet mellom elevene og læreboken. Videre stilte jeg elevene spørsmål om de kunne fortelle meg hva en vektor er. Hensikten med spørsmål 6 var å finne ut noe om elevenes oppfatning av begrepet, fordi jeg hadde en tanke om at det kunne påvirke forståelsen for resten av vektorregningen. Selv om elevene har en unøyaktig forståelse av ett enkelt begrep påvirkes ikke hele karakteristikken av deres matematiske forståelse. Spørsmålet bidrar ikke til informasjon om problemstillingen. Spørsmål 8 og 9 handler om hva elevene syntes var det beste og mest problematiske å arbeide med innenfor vektorregningen, men også disse spørsmålene fokuserer på interesse, motivasjon og problemområder i stedet for matematisk forståelse og elevenes relasjon til læreboken. I spørsmål 10 ble elevene spurt hvilke oppgaver på prøven de syntes var greie eller vanskelige å arbeide med. Hensikten var å finne ut om elevenes oppfatning av hva de kunne stemte overens med prestasjonene på testen. Jeg fant riktignok ut om de hadde mestret noe de syntes var vanskelig eller feilet på noe de syntes var lett, men det er ikke relevant for problemstillingen i denne studien. Spørsmålene fra elevintervjuene som ikke bidrar med interessant informasjon i forhold til problemstillingen er presentert i Vedlegg 11: Presentasjon av elevintervju. Svarene på spørsmål 7, 12, 13 og 14 bidrar til å finne ut av relasjonen mellom elevene og læreboken, samt elevenes matematiske forståelse og blir derfor presentert nedenfor.

Spørsmål 7: Hva synes du om arbeidet du har gjort under kapittelet vektorer?
Arbeidsinnsatsen til elevene kan helt klart påvirke hva de lærer og hvor god forståelse de har for stoffet. Elever som arbeider lite eller ingen ting vil ha lært mindre enn elever som jobber iherdig både på skolen og hjemme. Hensikten med spørsmålet var å se om arbeidsinnsatsen påvirker elevenes prestasjoner og forståelse. I etterkant ser jeg at hensikten jeg hadde med spørsmålet har liten sammenheng med masteroppgavens problemstilling. Spørsmålet gir likevel relevant informasjon fordi elevene svar inneholdt hva de hadde gjort i kapittelet og hvordan de hadde arbeidet i kapittelet. Svarene gir meg mer informasjon om elevenes forhold til læreboken.

Tabell 26: Svar på spørsmål 7

Elev	**Svar**
Ida	Eg er jo fornøgd, men det var eit vanskeleg kapittel for meg. Eit tungt kapittel å forstå. Eg har gjort leksa og oppgavene eg må gjer. Prøvd å forstå det så godt eg kan. Har gjort et par oppgåver i den andre oppgåveboka.
Ask	Heilt greitt, men når det kom til prøven så trur eg kanskje eg burde forberedt meg litt meir. Eg gjorde dei oppgåvene eg skulle gjere, men eg skulle kanskje jobba litt meir med dei, og skjønt dei betre etter eg var ferdig med dei. Eg gjorde alle oppgåvene eg fekk i lekse. Eg var ikkje borti oppgåvene i oppgåveboka.
Pål	Ganske bra. Har gjort oppgåvene, mest mogeleg i timane og resten heime og viss eg følte eg trengte litt meit jobbing, så har et hatt litt ekstra oppgåver i oppgåvesamlinga. Då eg kom tilbake etter å ha vore sjuk måtte eg bare følgje med på det dei hadde gjort, og så tog eg igjen etterpå heime og rekna meg igjennom det.
Ulf	Har jobba greitt. Har gjort det meste me skulle gjer, både i timen og med lekser. Har ikkje jobba med oppgåveboka.
Dag	Faktisk ganske bra. Eg har jobba akkurat sånn som eg har gjort med alle andre kapittel, men jobba bra. Jobber både på skulen og heime. Jobbe bra vil sei at eg har gjort heile kapittelet, alle oppgåvene i kapittelet etter kvart som du jobba, og eit par oppgåver i ekstraboka sånn før prøva.

Elevene virket fornøyde med innsatsen sin, bortsett fra Ask. Dag og Pål arbeidet litt med oppgavene i oppgavesamlingen i tillegg til de i læreboken. Elevene ser ut til å ha arbeidet slik de pleier og mener at å ha gjort leksene og regnet oppgavene i timene er å arbeide bra med faget.

Spørsmål 12: Vet du om situasjoner der vektorregning kan være nyttig, annet enn de som er nevnt i boken og i undervisningen?
Jeg ønsket å finne ut hvorvidt elevene så nytten av vektorregning. Om elevene så hva vektorregning kunne brukes til og klarte å bruke den kunnskapen de hadde om vektorer til å komme på et bruksområde, kunne det være et eksempel på relasjonsforståelse. Spørsmålet gir ikke i seg selv svar på hva slags matematisk forståelse elevene har, men kan være med på å tegne et bilde av forståelsen.

Tabell 27: Svar på spørsmål 12

Elev	Svar
Ida	Hvis du må rekne kor masse kraft du må bruke for å flytte en kasse.
Ask	Må vere viss ein skal måle opp avstandar eller areal. Har nok noe med fysikk å gjere, kraft.
Pål	I fysikken, når me reknar ut arbeid er det nyttig.
Ulf	Knytta mykje opp til fysikken. Energi og sånt.
Dag	Fly (peker på prøva). For eksempel viss du skal ut på ei lang kjøretur, kanskje. Viss du brukar sommerferien på å kjøre gjennom Europa. Så kan det vere greit å ta sånne enkle kor langt du kjem til å køyre den dagen, først reiser me til Sverige, så videre nedover, sant. (Eleven streker opp vektorer på pulten, der en vektor tilsvarer en etappe på reisa). Då har du mange vektorar nedover langs heile vegen der du har tenkt å stoppe og sånt. Kanskje. Eg veit ikkje.

Elevene så forskjellige bruksområder til vektorregning. Eksempelet Ida nevnte er riktignok nevnt i undervisningen, men hun kom på et nytteområde. Ask var svært usikker, og det samme var Dag. Dag forsøkte å skape et liknende eksempel som på prøven uten stort hell. Han virket ikke sikker på om eksempelet han kom med var rett. Både Ulf og Pål knyttet vektorregning opp mot fysikken, men Ulf mente det hadde med energi å gjøre.

Spørsmål 13: I læreboken står det at noen oppgaver skal finnes svar på ved hjelp av tegning, andre ved hjelp av regning. Hva foretrekker du?
Bakgrunnen for spørsmålet var at elevene i undervisningen ga uttrykk for å like det ene bedre enn det andre. Elevenes forståelse for matematikk kan bli påvirket av om de foretrekker å tegne eller regne på grunn av de to ulike arbeidsmåtenes karakter. Spørsmålet kan dermed bidra til å kartlegge elevenes forståelse for matematikk.

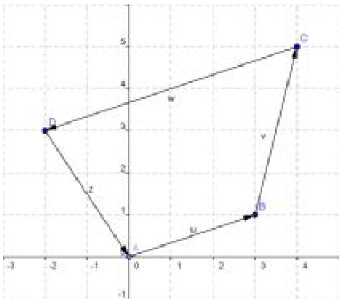
Tabell 28: Svar på spørsmål 13

Elev	Svar
Ida	Alt etter oppgåva. Nokon gonger er det lettare å teikne, for då kan du sjå punkta i staden for å tenke dei i hovudet.
Ask	Viss du skjønar rekning, då går det greitt, men teikning var lettare å forstå i begynnelsen. Når ein først forstod rekning gjekk det lettare det også.
Pål	Det er jo kjedeleg å berre teikne opp då. Reikning eigentleg. Då kan eg tenke litt, men eg likar å lage ei lita skisse i alle fall. Når det berre er teikneoppgåver, då er det ikkje noko gøy.
Ulf	Teikning. Det er som regel greiare og lettare.
Dag	Eg føretrekker ved hjelp av rekning trur eg. Eg veit ikkje heilt for å vere heilt ærleg, eg likar eigentlig begge to, eg har ikkje noko imot nokon av dei. Det er lettare å se svar når du har det på rekning i staden for å se det ut frå ei teikning.

Elevene viste forskjellige preferanser når det gjaldt tegning og regning i oppavene. Noen så an oppgavene, andre likte best å regne, mens andre igjen likte tegning best. Ask likte tegning best i begynnelsen når han ikke forstod, men da forståelsen økte likte han regning bedre.

Spørsmål 14: Denne situasjonen er som i testen dere fikk:
Kan du prøve å tenke høyt mens du løser oppgaven?

a) *Er noen av vektorene i figuren parallelle?*



b) *Finn summen av*
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

Oppgaven ble laget for at jeg skulle få høre hvordan elevene tenker når de gikk fram under enkel vektorregning. Jeg ønsket å bruke en figur der det var tydelig at to sider var parallelle for å kunne utfordre elevene på hvorfor de var parallelle annet enn at de bare ser det. I tillegg valgte jeg å bruke en oppgave liknende oppgaven i testen elevene fikk for å kunne forstå bedre hvordan elevene tenkte når de arbeidet under testen. Situasjonen kan i tillegg gi informasjon om hvordan elevene forstår parallellitet, vektorsum og nullvektor. Jeg presenterer svarene hver for seg.

Tabell 29: Svar på spørsmål 14a

Elev	**Svar**
Ida	u og w, for det er jo eit trapes fordi to sider er parallelle og to er ikkje parallelle. Du ser at dei er parallelle for dei går i rett linje ovenfor kvarandre.
Ask	DC og AB er parallelle fordi to sider er parallelle i ein sånn type firkant, eit trapes. Du ser dei er parallelle fordi det er liksom likt på begge to. Ein opp på y-aksen, då kjem vi til tre på x-aksen, det vil sei dei er begge 3,1.
Pål	Ja, AB og CD, eller vektor AB og vektor DC er parallelle ser det ut som, for begge har stigningstal 1. Nei, da var det ikkje, men viss du går tre bort og ein opp, så er det stigningstalet.
Ulf	AB og DC er parallelle, eller CD. Fordi dei har same stigningsfart, tre bort og ein opp. Den andre er motsatt da, det er det same kossen vei det går.
Dag	Figuren her er eit trapes då, som vil sei at to og to sider er parallelle, og då ser det mest logisk ut som at det er A og B som er parallelle. På AB så ville eg ha skreve [3,1] og på DC ville eg ha skreve [6,2]. Då er dei parallelle fordi at viss eg ser at når eg set it tall t, så du kan gange inn eine vektoren, så får du hin vektoren. Då er dei parallelle.

Ida, Ask og Dag gjenkjente figuren som et trapes. Både Ida og Ask var enige om at to sider i et trapes var parallelle, mens Dag sa at to og to sider var parallelle. Det kan virke som om Dag sa feil, men hadde rett oppfatning, for han oppga kun to parallelle vektorer som svar. Alle utenom Ida forklarte parallelliteten ved hjelp av at de har likt stigningstall.

Tabell 30: Svar på spørsmål 14b

Elev	**Svar**
Ida	Det er jo heile trapeset. Summen blir null for du kjem tilbake der du begynte. Det blir nullvektor.
Ask	Går det an å sei AA, for den går jo frå punkt A til A. Det er nullvektor.

Pål	AB, 0, det er nullvektor.
Ulf	0, han begynner å slutter på same plass. Det er det same som å ta eit tal minus seg sjølv, nullvektor.
Dag	Det er nullvektor. Viss du ser AB og BC, då blir B midtpunkt og det er det same som AC vektor, og det same på CD og DA vektor, så blir D midtpunkt og då får du det same som CA vektor, og då har du AC og CA vektor og då blir C midtpunkt mellom dei og så AA, då er du same plassen som du begynte og da blir det 0.

Alle elevene kjente igjen svaret som nullvektor. De hadde ulike fremgangsmåter. Alle utenom Dag så på figuren for å finne svaret, men Dag så kun på bokstavene i oppgaveteksten.

Kort oppsummert kan man si at elevene måler arbeidet de har gjort ut i fra hvor mye de har arbeidet i læreboken. De ser at vektorregning har ulike bruksområder, men er ikke helt sikre på hvilke. Noen elever liker å tegne, og har behov for det visuelle når de ikke forstår, som en hjelp. Andre liker best å regne fordi det tar kortere tid. Elevene bruker forskjellige fremgangsmåter når de løser oppgaver. Oppgaveløsningene i spørsmål 14 vil bli drøftet nærmere under analysen.

5.3.2 Lærerintervju

Lærerintervjuet ble gjennomført på samme måte som elevintervjuene, der lyden ble tatt opp ved hjelp av videokamera med linsedekselet på. Læreren fikk ni spørsmål knyttet til hennes tanker om elevenes prestasjoner og undervisningen. Se Vedlegg 4: Spørsmål til lærerintervju for spørsmålene til intervjuet.

Læreren hadde hovedfag (cand scient) i fysikk, der ett og et halvt år av hovedfaget bestod av matematikk. Hun jobbet som lærer og studert vekselvis. Fra 2000-2006 arbeidet hun med voksenopplæring og deretter begynte hun å jobbe på skolen studien ble gjennomført på.

Læreren mente elevene var flinke til å arbeide i timen og at de arbeidet godt. Likevel kunne hun ønske at de gjorde litt mer arbeid hjemme. Elevenes innsats innenfor vektorregning mente hun var som innsatsen pleier å være. Hennes inntrykk var at elevene pleide å gjøre lekser hvis de fikk konkrete oppgaver i lekse, men hun opplevde at elevene ofte stod fast. Få elever arbeidet med oppgavesamlingen hjemme, det hendte de tok den fram i undervisningen dersom de var ferdig med oppgavene i læreboken.

Elevenes forståelse for temaet vektorer var læreren litt usikker på. Hun sa at noen ganger trodde hun de har skjønt det, men så oppdaget hun at de ikke har forstått likevel. Forståelsen varierte i klassen. Det var en forskjell på vektorregning og andre temaer i forhold til hvilke elever som syntes vektorregningen gikk greit å arbeide med. Utfordringene innenfor vektorregning handlet ikke om temaene, men oppstod når elevene måtte se sammenhenger og fikk sammensatte oppgaver, hevdet læreren.

Læreren valgte å presentere stoffet for elevene slik som læreboken gjør fordi hun syntes læreboken var bra. Hun forklarte at det var derfor hun valgte den. Videre forklarte hun at hun hadde sett på lærebokens presentasjoner og forsøkt å forklare det på omtrent samme måte, men ved å bruke sine egne ord. Hun påpekte at hun hadde støttet seg mye til boken fordi hun ikke hadde undervist i emnet tidligere.

Læreboken mente hun elevene brukte flittig, men forklarte at bruken varierte fra elev til elev. Noen likte å gå gjennom alle eksemplene, mens andre likte å gå på oppgavene rett etter hun hadde forklart. Hennes inntrykk var at de fleste jobbet med oppgavene og leste boken hvis de ikke fikk til oppgavene.

Undervisningsmateriellet som ble brukt i undervisningen var bare læreboken. I utgangspunktet hadde læreren tenkt å bruke projektor og et dataprogram i undervisningen, men hun fikk ikke programmet til å fungere. Derfor endte hun opp med å bare bruke boken.

Læreren opplevde at elevene spurte fort om hjelp når de stod fast med arbeidet. Hun syntes det var positivt fordi de ikke ga opp, men ga uttrykk for at de ønsket å komme videre. Samtidig mente hun de kunne vært mer selvstendige og forsøkt selv litt mer før de ba om hjelp. Hun kommenterte at hun ga ulike forklaringer til de forskjellige elevene avhengig av hvem de var. Noen fikk hint for å arbeide videre, mens andre fikk en grundigere forklaring.

Da læreren fikk spørsmål om hvordan hun mente elevene best kunne lære trakk hun fram at hun prøvde å behandle de litt forskjellig, avhengig av hvem som trengte hjelp til hva. Hun forsøkte å få elevene til å tenke seg fram til svarene selv og mente det var den beste måten for elevene å lære på. Noen ganger ga hun dem en oppskrift som de kunne følge for å få mer kjennskap til temaet før de for eksempel skulle bevise det etterpå. På den måten fikk de et forhold til det de skulle bevise.

Ut i fra mine observasjoner gjort i undervisningen stemmer lærerens svar godt. Hun mener elevene har problemer med oppgavetyper, ikke matematiske tema. Hennes oppfatning stemmer overens med elevenes svar under intervjuene. Lærerens beskrivelse av undervisningsformen samsvarer med observasjonene gjort i 5.1.1 Bruk av tid i undervisningen, der læreren henviser til læreboken når hun presenterer nytt stoff, skriver informasjon fra læreboken opp på tavlen og bruker fremdriftsplan for undervisningen basert på delkapitlene i boken. Lærerens svar i intervjuet gir informasjon om lærebokens rolle i undervisningen.

Læreren sier hun hjelper elevene på ulike måter, avhengig av hva de kan fra før og hvilket nivå de ligger på. Et eksempel på at elevene får presentert en formel de kan bruke finner man i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, Utdrag 2, nummer 39. Der repeterer Ask og Ida hvordan man multipliserer to brøker.

5.4 Oppsummering

Elevene får omtrent halvparten av alle matematikktimene til å arbeide med oppgaver. Når elevene viser tegn til å stå fast bruker de som regel hverandre eller læreren for å komme videre. Læreboken brukes på flere måter, men de fleste elevene begynner på oppgavene og studerer fagteksten mellom oppgavene. Andre ser kun på fagteksten dersom de står fast på oppgavene.

En elev var ikke til stede da testen ble gjennomført, så dataene omfatter ni besvarelser. Elevene klarer forskjellige oppgaver. Noen har problemer med utregning, andre med tegning eller å begrunne svarene. De fleste prosedyrene elevene benytter i sine besvarelser er prosedyrer presentert i læreboken. Elevene som arbeider sammen fast i undervisningen mestrer i hovedsak de samme oppgavene på testen. Elevenes besvarelser vil bli sett nøyere på i analysen.

Intervjuene består av fem elevintervjuer og ett lærerintervju. Elevene mener oppgave 3 og 5 på prøven var vanskelige. Hvorvidt faget var spennende, interessant og moro eller vanskelig og pyton er avhengig av om elevene mestrer faget. Elevene syntes ikke spesielle tema er vanskelig innenfor vektorregning, men det er avhengig av oppgavetypene. Sammensatte oppgaver og oppgaver som ber om begrunnelse er vanskeligere enn andre. Elevene viser problemer med å forklare hva en vektor er. De er stort sett fornøyd med egen innsats i emnet vektorregning.

Læreren forklarer at hun ikke har undervist i temaet før og støtter seg dermed mye til læreboken. Hun mener elevene har jobbet godt i timene, men at de er raske til å spørre om hjelp hvis de står fast.

6 Analyse og diskusjon

I kapittelet vil de tre problemstillingene bli diskutert opp mot datamaterialet, og det vurderes om det finnes en sammenheng mellom elevenes forståelse for matematikk og måten de bruker læreboken på. Først presenteres lærebokens rolle i undervisningen, deretter hvordan elevene bruker læreboken. Videre diskuteres elevenes forståelse for matematikk og sammenhengen mellom forståelsen og hvordan elevene bruker læreboken.

6.1 Hva er lærebokens rolle i undervisningen?

Som nevnt i innledningen kan lærebokens rolle i undervisningen variere. De to ytterpunktene er at undervisningen er sterkt knyttet opp mot boken, enten gjennom at læreren bruker den mye, eller at elevene bruker den til oppgaveløsing, eller så kan læreren bruke flere kilder og egen erfaring i undervisningen for på den måten å frigjøre undervisningen fra boken. For å finne ut av lærebokens rolle i undervisningen ser jeg på både hvordan elevene og læreren bruker boken. Kildene som gir meg informasjon om lærebokens rolle i undervisningen er arbeidsbøker, intervjuene, observasjon av undervisningen, feltnotatene gjort underveis i observasjonen og framdriftsplanen.

Elevenes arbeidsbøker var delt inn i overskriftene fra læreboken. Først skrev de opp nytt stoff, der teksten tilsvarte teksten på tavlen, etterfulgt av oppgavene tilhørende hver seksjon i læreboken. Arbeidsbøkene viste at elevene øvet til prøven, både ved bruk av kontrolloppgavene de fikk utlevert i timen, og ved oppgaver fra læreboka som de fant nødvendige å øve på. Enkelte elever gjorde også noen få oppgaver i oppgavesamlingen tilknyttet læreverket. Elevene nevnte i intervjuene at de arbeidet med oppgavene i læreboken på skolen og gjorde leksene sine. Leksene var oppgaver fra læreboken, slik som beskrevet i 5.1.1 Bruk av tid i undervisningen. De gjorde mest mulig på skolen, og enkelte regnet flere oppgaver fra læreboken eller oppgavesamlingen hjemme hvis de følte at de trengte mer trening. Da elevene snakket om hva som var vanskelige tema innenfor kapittelet henviste de til oppgaver i læreboken.

Observasjonen av undervisningen og feltnotatene viste at læreren brukte læreboken mye. Hun stod med boken i hånden da hun skrev på tavlen. Overskriftene på tavlen var de samme som i boken og mye av det som ble skrevet på tavlen var avskrift fra læreboken. Læreren forklarte i undervisningen sin egen forståelse av det som stod i læreboken. Når læreren ikke formidlet nytt stoff satt elevene med oppgavearbeid. Oppgavene var hentet fra læreboken. Ingen andre kilder til informasjon enn læreboken ble brukt. Når oppgaver løses på tavlen blir lærebokens løsningsforslag brukt som utgangspunkt for oppgaveregningen. Da klassen øvet til prøven fikk de kontrolloppgaver tilknyttet læreverket. Løsningsforslaget og kontrolloppgavene lå tilgjengelig på lærebokens fagnettsted. Læreren forklarte i sitt intervju at hun valgte å bruke læreboken ”Sinus R1” av Oldervoll et al. (2007) fordi hun syntes den var bra. Hun presiserte at hun ikke hadde erfaring med å undervise om vektorer, og derfor støttet seg mye til læreboken. Videre fortalte hun at hun la opp undervisningen etter boken, fulgte boken og forsøkte å gjøre som boken for deretter å forklare med egne ord. Framdriftsplanen elevene fikk utlevert i timen samsvarer med lærebokens oppbygging. Læreren i min studie var sterkt knyttet til læreboken. Rezat (2010) fant liknende resultater om tyske lærere. Hans studie viste at tyske lærere lente seg mye på læreboken, både i forberedelsene og i undervisningen.

I likhet med Shield (1991) sin studie, brukte læreren i min studie læreboken som en kilde til oppgaver elevene kunne arbeide med både på skolen og hjemme. Den store forskjellen mellom Skield (1991) og mine resultater er at i min studie brukte læreren kun læreboken som kilde i matematikktimene.

Mine forventninger tilsa at læreboken nok ville være viktig i undervisningen, men ikke at den skulle være eneste kilde til oppgaver og informasjon for elevene. I MERG-oppgaven oppdaget jeg riktignok at undervisningen var tett knyttet til læreboken, men også digitale verktøy ble brukt. Jeg trodde at jeg med mine undersøkelser ville finne at det ble brukt oppgaver fra andre kilder som hadde et annet fokus, eller at dynamisk programvare ville bli brukt for å fremme forståelse. Det skjedde ikke. Ut i fra denne undersøkelsen fremstår læreboken som det eneste læremidlet. Læreren hadde riktignok planer om å bruke datamaskin og projektor i undervisningen, men informerte om i intervjuet at hun ikke fikk utstyret til å fungere.

I motsetning til Rezat (2010) og mine resultater fant Shield (1991) ut at læreboken hadde en liten rolle i undervisningen og at lærere foretrakk annet materiell enn læreboken som undervisningsressurs.

6.2 Hvordan bruker elevene læreboken?

Elevene kan bruke læreboken på ulike måter. Eksempler på forskjellige måter å bruke boken kan være å lese tekstene i boken før man løser oppgaver eller løse oppgavene i boken og se på tekstene hvis man står fast. Andre måter er å løse oppgavene i boken og se på fasiten hvis man står fast eller se på fasiten før man i det hele tatt løser oppgavene. Kildene som gir meg informasjon om hvordan elevene bruker læreboken er observasjonen, feltnotatene, intervjuene og elevenes arbeidsbøker. Fotografiene av elevenes arbeidsbøker utgjør en stor del av datamaterialet. Enkelte elever har jeg mer informasjon om enn andre fordi de ble intervjuet. Jeg har heller ikke komplette bildeserier av arbeidsbøker fra alle elevene.

Fordi elevene kan bruke boken på forskjellige måter, presenterer jeg informasjonen i tabeller slik at likheter og forskjeller kommer tydelig fram. Med begrepet ”fagtekst” tilknyttet læreboken menes teksten som forklarer og presenterer matematikken. I læreboken er regler og formler elevene bruker i oppgavene uthevet i rammer med svart tekst på gul bakgrunn. I tabellene og teksten nedenfor refereres de til som regler, formler eller gule rammer. Oppgavene og eksemplene regnes ikke som en del av fagteksten i denne sammenhengen. I tabellene blir notasjonene x, - og tom rute brukt. En x betyr at eleven oppfyller kategorien, en strek betyr at jeg ikke har informasjon om hvorvidt elevene oppfyller kategorien, mens en tom rute betyr at eleven ikke oppfyller kategorien.

Elevenes arbeidsbøker ga meg informasjon om i hvilket omfang elevene brukte læreboken og om de løste oppgaver eller noterte ned informasjon fra andre kilder. I *Tabell 31* presenteres relasjonene mellom elevenes arbeidsbøker og læreboken. Kategorien ”løst samtlige oppgaver fra læreboken” inkluderer både elevene som faktisk løste alle oppgavene selv og de tilfellene der elevene skrev av løsningen fra tavlen. Arbeidsboken inneholder dermed alle oppgavene fra læreboken, enten om elevene løste alle selv, eller de var med på å løse oppgavene i fellesskap på tavlen.

Tabell 31: Forholdet mellom læreboken og elevenes arbeidsbøker

Kategori	**Ida**	**Ask**	**Ulf**	**Pål**	**Tom**	**Eli**	**Dag**	**Mia**	**Gry**	**Alf**
Komplett bildeserie av arbeidsboken	x	x	x	x		x	-	-		x
Løste samtlige oppgaver fra læreboken		x		x	-	x	-	-	-	
All fagtekst i arbeidsboken var fra tavlen	x	x	x	x	x	x	-	-	x	
Løste oppgaver fra oppgavesamlingen				x	-	x	-	-	-	x
Løste kontrolloppgavene	x	x	x	x	-	x	-	-	-	
Løste ingen oppgaver fra læreboken							-	-		x
Fulgte standard prosedyrer presentert i læreboken	x	x	x	x	x	x	-	-	x	
Brukte i hovedsak lærer/ medelever da man så ut til å stå fast	x	x		x		x	x			x
Brukte i hovedsak læreboken da man så ut til å stå fast										
Vekslet mellom å bruke elever, lærer og læreboken da man så ut til å stå fast			x		x			x	x	
Løste et problem helt av seg selv da man så ut til å stå fast				x					x	

Dag hadde hverken arbeidsbok eller lærebok de to første ukene av undervisningen, men skrev i egen arbeidsbok de siste timene før prøven. Datamaterialet inkluderer ikke bilder av arbeidsbøkene til Dag eller Mia. Jeg kan ikke si noe om relasjonene mellom deres arbeidsbøker og læreboken. Siden bildeseriene av arbeidsbøkene til Tom og Mia ikke er komplette har jeg ikke informasjon om deres arbeidsbøker på flere av punktene.

Av *Tabell 31* ser man at Alf var den eneste eleven som ikke løste en eneste oppgave fra læreboken, men kun oppgaver fra oppgavesamlingen. Pål og Eli, Ida og Ulf og Tom og Gry hadde i stor grad samsvarende resultater. Tom og Gry sine arbeidsbøker rapporterte ikke hele bildet av arbeidsbøkene fordi bildeserien ikke var komplett. For Tom og Gry var all fagtekst så langt i arbeidsboken fra tavlen, men det var ikke mulig å vite noe om fagteksten i resten av arbeidsboken. Det er heller ikke mulig å vite om de løste oppgaver fra oppgavesamlingen eller kontrolloppgavene tilhørende kapittelet.

Datamaterialet inneholder ikke informasjon om hvorvidt Dag og Mia sine arbeidsbøker kun inneholdt fagtekst fra tavlen. Likevel viste observasjonen at Mia tok notater fra tavlen, mens Dag ikke noterte i det hele tatt. Eli noterte i tillegg tips og hint som læreren sa i undervisningen.

Observasjonen av undervisningen og feltnotatene ga meg informasjon om hvordan elevene brukte læreboken i oppgaveløsingen, og da spesielt når de så ut til å stå fast. *Tabell 32* viser en oversikt over hvordan alle elevene arbeider under oppgaveløsingen. Kategorien ”brukte fagtekst” betyr at elevene også bruker reglene uthevet i gule rammer, men i kategorien ”brukte reglene” blir ikke resten av fagteksten benyttet.

Tabell 32: Oversikt over hvordan elevene arbeidet under oppgaveløsingen

Kategori	**Ida**	**Ask**	**Ulf**	**Pål**	**Tom**	**Eli**	**Dag**	**Mia**	**Gry**	**Alf**
Brukte fagteksten			x	x		x	x	x		
Brukte eksemplene	x	x	x			x	x	x		
Brukte reglene	x	x								
Brukte fasit	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Så i fasit før man forsøkte å løse oppgaven	x									
Leste fagteksten			x			x	x	x	x	x
Brukte læreren/ medelevene aktivt	x	x	x			x	x	x	x	
Sammenliknet fagtekst i læreboken med teksten på tavlen						x	x			
Studerte tavlen under oppgaveløsingen	x	x								

Elevene så ut til å bruke læreboken på litt forskjellige måter, men en ting hadde de alle til felles, de brukte fasiten til å kontrollere svarene sine. I tillegg løste alle utenom Alf oppgavene tilhørende kapittelet i læreboken. *Tabell 32* viste ikke i hvilket omfang hver enkelt elev brukte læreboken, men av *Vedlegg 12: Kartlegging og analyse av elevenes forståelse for matematikk* kom det fram at Mia, Eli og Dag brukte boken mye. Mia leste all fagtekst, mens Eli og Dag leste kun teksten mellom oppgavene. Alle tre studerte fagtekst og eksempler når de satt fast. I tillegg sammenliknet Eli og Dag fagteksten i læreboken med det som læreren hadde skrevet på tavlen. Ulf brukte ikke læreboken i like stor grad, men studerte også fagtekst og eksempler når han så ut til å stå fast. Pål, Tom, Gry, Ask og Ida brukte læreboken liten grad. Ask og Ida studerte kun eksemplene og reglene uthevet i gule rammer, i tillegg til å studere teksten på tavlen. Gry så ut til å skumme fagteksten hvis hun satt fast, mens Tom og Pål brukte både fagteksten og eksemplene. Alf hadde en helt egen måte å bruke læreboken på. Han leste kapittelet fra begynnelse til slutt uten å løse noen oppgaver skriftlig fra læreboken. Alf brukte fasiten i oppgavesamlingen.

Under intervjuene kom det frem at elevene sammenliknet innsatsen sin i faget med hvor mye de hadde arbeidet i læreboken, om de hadde løst alle oppgavene eller gjort det læreren hadde sagt de skulle gjøre. At elevene vurderte innsatsen ut i fra hvor mange oppgaver de hadde løst i læreboken, kan tyde på at forholdet mellom elevene og læreboken var sterkt og at de brukte læreboken i stor grad.

Elevene brukte læreboken i varierende grad under oppgaveløsingen. Likevel er det tydelig at de hadde en sterk relasjon til læreboken fordi den var kilden til alle oppgavene og erfaringene elevene hadde med vektorregning. Flere av elevene brukte læreboken når de så ut til å stå fast på oppgavene, men ingen brukte i hovedsak læreboken til å komme videre.

Rezat (2010) kartla i sin studie fire årsaker til at elevene brukte læreboken. Han konkluderte med at elever lette etter informasjon i læreboken som kunne brukes i oppgavene i etterkant. Videre kommenterte Rezat (2010) at elevene sjeldent ønsker å forstå matematikken før de brukte den i oppgavene. Rezat (2010) og min studie har ulikt fokus. Likevel kan man se på sammenhenger mellom resultatene. I begge studiene brukte elevene læreboken som en kilde til informasjon om hvordan de kunne løse oppgaver, men svært få elever i min studie brukte læreboken utenom oppgaveløsingen. En mulig årsak kan være at elevene ikke ønsket å forstå matematikken før de brukte den, slik Rezat (2010) beskrev i sin studie, men dette vites ikke.

6.3 Sammenheng mellom bruk av læreboken og elevenes forståelse for matematikk

I denne seksjonen vil jeg karakterisere elevenes forståelse for matematikk, for så å se om det finnes en sammenheng mellom elevenes forståelse og måten de bruker læreboken på. Jeg kan ikke med sikkerhet vite hva elevene tenker, men vil forsøke å beskrive det jeg ser gjennom dataene. Kildene som sier noe om elevenes forståelse er observasjon av undervisningen, feltnotatene, intervjuene, testene og bildene av elevenes arbeidsbøker. Først kartlegges karakteristikken av elevenes forståelse for matematikk. Deretter studeres sammenhengene mellom læreboken og elevenes forståelse.

6.3.1 Kartlegging av karakteristikken av elevenes forståelse for matematikk

Oppgaven tar utgangspunkt i Skemp (1976) sin inndeling av matematisk forståelse, relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, se 2.1 Ulike typer kunnskap og forståelse. Elevene har relasjonsforståelse hvis de vet både hva de skal gjøre og hvorfor. Relasjonsforståese fører til at de har god forståelse for regler og begrep samt relasjonene i mellom dem. Instrumentell forståelse forklares som om at elevene utfører operasjoner uten å vite hvorfor. De kjenner til prosedyrer, men ikke årsaken til at de kan brukes. (Skemp, 1976)

Resultatene fra analysen viser stor variasjon mellom elevene i forhold til måten de bruker læreboken på, hvordan de løser oppgaver og hvilke situasjoner de mestrer. For å illustrere den store variasjonen blant elevene, presenteres all informasjon om kartleggingen av Pål og Ask sin forståelse for matematikk. Jeg velger å bruke Pål og Ask som eksempler for kartleggingen av flere grunner. De er blant elevene som ble intervjuet, jeg har komplett bildeserie av deres arbeidsbøker og de representerer hver sin kategori når det gjelder klassifiseringen av deres forståelse for matematikk. Den detaljerte kartleggingen for de resterende elevene presenteres i *Vedlegg 12: Kartlegging og analyse av elevenes forståelse for matematikk*. Et sammendrag av kartleggingen av elevenes forståelse for matematikk presenteres for alle elevene i *Tabell 33*.

Tabellen tar utgangspunkt i kategorier som gir meg informasjon om hvordan elevene forstår matematikk.

Pål

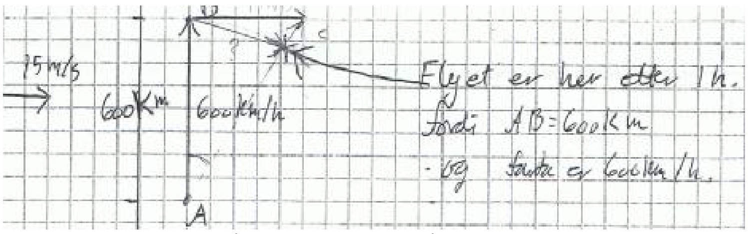
Observasjonen av undervisningen gir ikke et helt nøyaktig bilde av hvordan Pål brukte læreboken fordi han ofte plasserte seg utenfor kameralinsens rekkevidde. Likevel er det tydelig at han fulgte godt med i undervisningen fordi han ofte stilte spørsmål eller svarte på spørsmål fra læreren. Han var aktiv i timen. I tillegg tittet han i læreboken og tok notater fra tavlen mens læreren underviste. Når han brukte læreboken til oppgaveløsing studerte han både fagtekst og eksempler og sjekket fasiten etter at oppgaven var løst.

Pål var ikke fremtredende i noen av utdragene fra 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, men i utdrag 7 svarte han rett på lærerens spørsmål. Pål viste tegn til å stå fast ni ganger i løpet av undervisningsperioden som beskrevet i 5.1.2 Elevenes reaksjon når de ser ut til å stå fast. En gang så han ut til å løse problemet selv, og en gang benyttet han læreboken og spurte en medelev. De resterende syv gangene benyttet han seg enten av medelever eller læreren, men aldri læreboken. Observasjonen kan tyde på at Pål trengte lite hjelp. At han løste en av oppgavene selv uten hjelpemidler, kan tyde på at han klarte å reflektere over det han hadde gjort og oppdaget feilen. Å finne feilen og rette den opp ville kreve at Pål forstod hva han hadde gjort. Dersom han skjønte hva han hadde gjort feil og klarte å rette det opp kan det tenkes han forstod hvorfor det var feil. En annen mulighet var at Pål gjorde en feil mens han fulgte en prosedyre for å løse oppgaven og brukte tid på å finne ut nøyaktig hva han gjorde feil i selve prosedyren.

Under intervjuet forklarte Pål at han var fornøyd med egen innsats. Han gjorde mest mulig arbeid i timene og resten hjemme. Han forklarte at når han trengte mer øving enn oppgavene i læreboken arbeidet han med oppgavesamlingen. Det er ikke mulig å vite om Pål mente at han skulle forstå det han jobbet med eller øve seg på prosedyrene. Pål var borte tre matematikktimer, og informerte om at han arbeidet ekstra mye hjemme i etterkant av fraværsperioden. Pål knyttet vektorregning opp mot fysikk, som er et stort område man kan anvende vektorregning innenfor, men det er uklart om han vet at vektorregning ikke kan benyttes på all fysikk. Kun tegning ved løsing av oppgaver mente Pål var kjedelig, og foretrakk regning fordi han da kunne tenke litt. Likevel presiserte han at han pleide å bruke skisser til oppgavene. I oppgavene under intervjuet begrunnet Pål parallelle vektorer med at de hadde samme stigningstall. Da han løste regneoppgaven fulgte han vektorene oppgitt i oppgaveteksten med blikket på figuren. Pål kjente med en gang igjen hvilken vektorsum det var snakk om og koplet svaret opp mot nullvektor. I intervjuspørsmålene presentert i Vedlegg 11: Presentasjon av elevintervju forteller Pål at han liker oppgaver som har med virkeligheten å gjøre, ikke bare å regne med tall og at han liker fysikk bedre enn matematikk fordi da kan han bruke matematikken. På testen begrunnet Pål parallellitet med samme stigningstall, slik han også gjorde under intervjuet. Oppgaven med vektorsum løste han på forskjellig måte under testen og på intervjuet. Under intervjuet løste han oppgaven kun ved hjelp av bokstavene, men på løste han den ved hjelp av koordinater. Pål så ut til å vite hva han skulle gjøre når han løser oppgavene og hvorfor i og med at han begrunnet svarene sine. Pål viste en annen forståelse av oppgaveteksten i oppgave 3 enn hva jeg mente, se *Figur 29* for oppgavetekst og *Figur 30* for Pål sin løsning. Jeg presiserte ikke om elevene skulle regne flyets fart i forhold til land eller luft. Han mente flyet hadde fløyet 600 km på en time i retning mot punktet som er 54 km øst for by B. Med en fart på 600 km/h er ikke det feil, men det er en annen tolkning av informasjonen i oppgaven enn hva jeg hadde. Han hadde korrekt utregning på oppgaven og så sammenhengen mellom det utregnede svaret og tegningen han hadde laget.

Et fly går fra byen A til byen B som ligger 600 km rett nord for A. Flyet har en fart på 600 km/h. Det blåser fra vest med en styrke på 15 m/s. Flygeren tar ikke hensyn til sidevinden. Finn både ved tegning og regning hvor flyet er etter en time. Oppgi svaret med avstand fra B i km, i tillegg til retning.

Figur 29: oppgave 3 fra testen



Figur 30: Utdrag fra Pål sin besvarelse på oppgave 3

Bildeserien av Arbeidsboken til Pål er komplett. Han gjorde samtlige oppgaver fra kapittelet, kontrolloppgavene og noen oppgaver fra oppgavesamlingen. Fagteksten i arbeidsboken var avskrift fra tavlen. Selv om oppgavene ikke krevde det, begrunnet han flere av svarene. Han utførte selv alle oppgavene med bevis i tillegg til å skrive av de bevisene som ble gjennomgått på tavlen. I slutten av kapittelet gjennomførte han enkelte bevis og oppgaver som et ledd i å øve til prøven. Det kan være Pål pugget oppgaver og prosedyrer, men det kan og være han undersøkte om han kunne bevisene og forstod prosedyrene.

Feltnotatene presiserer at Pål var meget aktiv i timene, svarte på lærerens spørsmål og kom med innspill. Det er ikke mer i feltnotatene som sier noe om hvordan Pål forstår matematikk eller bruker læreboken.

Pål viste flere ganger at han kunne begrunne svarene sine og visste hvorfor han utførte de prosedyrene han gjorde. Han viste forståelse for regler og begrep ved at han var muntlig aktiv i timen og klarte å bruke tidligere tilegnet kunnskap i vektorregningen, eksempelvis å utnytte egenskapene i et parallellogram eller trapes. Selv sa han at han likte å tenke litt, hvilket han viste ved å komme videre i arbeidet med en oppgave der han så ut til å stå fast kun ved å studere det han hadde gjort, men det er ikke samsvarende med at han visste hvorfor han kunne bruke prosedyrene. Selv om Pål klarte å begrunne svarene sine og bruke de rette formlene er ikke det ensbetydende med at han visste hvorfor prosedyrene gjaldt. Det kan være han gjenkjente situasjoner der han har brukt de samme forklaringene og formlene tidligere.

Oppgaver knyttet opp mot virkeligheten er ofte sammensatte og krever mer av en elev enn å bare anvende regler og formler på tall. Det krever at eleven vet hvorfor han kan bruke de ulike reglene og formlene. At Pål likte å anvende matematikken i fysikk og arbeide med oppgaver som kan knyttes opp mot virkelige situasjoner, kan tyde på at Pål visste hvorfor han kunne anvende de prosedyrene han gjorde. Likevel forsøkte han ikke å bevise regelen i oppgave 5 på prøven. Mine tolkninger av datamaterialet tyder på at Pål sin forståelse kan karakteriseres som relasjonsforståelse, men det avviser ikke at Pål viser instrumentell forståelse i flere situasjoner.

Ask

Gjennomgang av videoopptakene fra undervisningen viser tydelig at Ask ofte fulgte med i undervisningen. Han stilte stadig spørsmål til læreren når han virket usikker på om han forstod matematikken rett. I tillegg svarte ofte på lærerens spørsmål. Likevel hendte det flere ganger at Ask hvisket med Ida eller Ulf mens læreren underviste. Læreboken lå oppslått på pulten hele matematikktimen. Ask diskuterte mye med Ida og så hennes arbeid under oppgaveløsingen. Det ser ikke ut som at Ask leste fagteksten, men studerte eksemplene og de uthevede reglene i læreboken. Han så mye opp på tavlen og spurte enten lærer eller medelever med en gang han virket usikker. Fasiten sjekket han ofte.

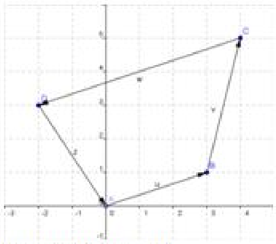
I Utdrag 1 fra 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, var ikke Ask enig med Ulf og Ida om at en vektor var lik to andre. Han trodde den ene vektoren var kortere enn de andre det var snakk om. Uten å måle, bare ved å se i læreboken sa han at den kanskje ikke var kortere, og så skrev han svaret ned i boken si. At Ask brukte ordet kanskje gjør at jeg tolker han som fortsatt usikker. Det kan tyde på at han bare godtok svaret fra Ulf og Ida uten å vite om det var rett.

Under arbeidet med en oppgave i utdrag 3 i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, sa Ask at han ikke skjønte hvordan Ida hadde gjort utregningen og spurte henne hva hun hadde gjort. Han så ikke ut til å være interessert i hvorfor Ida hadde gjort som hun gjorde, men så på utregningen hennes og skrev det samme i arbeidsboken si. Tonefallet i stemmen, at han trakk på skuldrene og sa ”jaja” når han skrev gjorde at han blir forstått som usikker på om han forstod hva Ida egentlig hadde gjort.

Etter at læreren hadde fullført beviset i utdrag 6 presentert i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, ble Ask sittende og studere tavlen. Han spurte om ikke $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ kan trekkes sammen til $[x, y]$, og selv etter at læreren hadde forklart hvorfor det ikke var mulig mente Ask at x_2 og x_1 var det samme tallet. Han viste ingen forståelse for at x_2 og x_1 kan ha ulik verdi. Etter hvert godtok Ask læreren sin forklaring, men det er usikkert om han forstod hva hun faktisk mente fordi han hadde problemer med å bruke regelen etterpå.

Kartleggingen av Ask sine reaksjoner når han så ut til å stå fast viste at han benyttet medelever eller læreren alle seksten gangene han så ut til å stå fast, men brukte i tillegg læreboken to av gangene. Det kan tyde på at Ask var avhengig av å se på andre eller snakke med andre og få vite hva det var han egentlig skulle gjøre for å løse oppgavene. Når han fikk hjelp av læreren og medelever så mange ganger kan det tyde på at han hadde vansker med å resonnere selv.

Under intervjuet sa Ask at han hadde en grei innsats under arbeidet med kapittelet, han gjorde leksene, men ingen oppgaver i oppgavesamlingen. Han forklarte at han innså under prøven at han kunne ha forberedt seg mer enn han gjorde ved å arbeide med ”å skjønne oppgavene bedre”. Det er ikke sikkert hva Ask la i begrepet ”å skjønne oppgavene bedre”, men jeg tolker det slik at å skjønne oppgavene handler om å forstå oppgavene og hvorfor han skulle bruke de ulike reglene, formlene og prosedyrene. Det kan tyde på at Ask ikke visste hvorfor han utførte den matematikken han gjorde. Da han forklarte hva en vektor er virket han veldig usikker fordi han dro på ordene og kom med flere vage forslag. Han mente at vektorregning ble brukt til å måle opp avstand eller areal og at det hadde noe med fysikk og krefter å gjøre. Videre i intervjuet forklarte han at i begynnelsen var det lettest å tegne svar på oppgavene, men at da han begynte å forstå utregningene, gikk det greit å regne. Under intervjuet begrunnet han parallellitet med likt stigningstall. Han trakk også fram egenskapene til trapeset i oppgaven for å begrunne at kun to sider var parallelle. I oppgaven der han skulle finne en vektorsum, se *Figur 31* for oppgavetekst, svarte han med å spørre om det gikk an å si $\overrightarrow{AA}$. Deretter konkluderte han med at svaret ble nullvektor. Det at han spurte om han kunne svare som han gjorde, for så å konkludere, gir grunn til å forstå han som usikker, altså usikker på om han i det hele tatt hadde rett. Det leder meg også til å tenke at han ikke forstod notasjonen for nullvektor.



Finn summen av

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

Figur 31: Oppgave fra intervjuet

På testen begrunnet Ask parallellitet med at stigningstallet var likt slik han gjorde i intervjuet. Han løste vektorsummen på lik måte både i intervjuet og på testen. I oppgave 3 på prøven, se *Figur 29* for oppgavetekst, ga Ask rett svar ved tegning, men utregningen hans bærer preg av stor innsatsvilje der han har brukt formelen for strekning og pythagoras for å finne svaret. Ask studerte strekningen mellom by A og der han mente flyet endte opp, ikke sammenhengen mellom B og der flyet endte slik oppgaveteksten ba om. Det er usikkert om Ask ikke visste hvordan han skulle løse de siste oppgavene på prøven eller om han ikke rakk det før han måtte levere den.

Arbeidsboken til Ask viser at han forsøkte seg på alle oppgaver selv, men at han i tillegg skrev de av fra tavlen, selv om han hadde løst oppgavene. Han løste oppgavene ved å følge prosedyrene presentert i læreboken. Han gjorde samtlige oppgaver i læreboken, i tillegg til kontrolloppgavene. Da han øvet til prøven arbeidet han med kontrolloppgavene og øvet seg på bevis og oppgaver han syntes var utfordrende.

Feltnotatene gir ikke mye informasjon om hvordan Ask tenkte når han løste oppgaver eller så ut til å forstå matematikk, men de forklarer at han en gang studerte teksten på tavlen. Teksten var et bevis han ga muntlig uttrykk for å ikke forstå. I flere minutter etter at de andre elevene begynte med oppgaver studerte Ask beviset på tavlen og så ut til å prøve å forstå det. En annen gang hadde Ask skrevet av et svar på en oppgave fra løsningsforslaget på internett, men han forstod ikke notasjonen i svaret og spurte om hvorfor svaret var slik.

Datamaterialet kan tyde på at Ask ofte var usikker når han arbeidet med vektorregning. Han så ut til å godta svar uten å være overbevist om at de var rette og virket avhengig av lærer og medelever for å komme seg videre når han stod fast. At Ask ikke var sikker på hva vektorregning kunne brukes til kan være en av grunnene til at han syntes det var vanskelig. Selv uttalte Ask på intervjuet at han burde ha skjønt oppgavene bedre. Det kan tyde på at han har problemer med å vite hvilke prosedyrer som skal brukes i ulike situasjoner. På intervjuet klarte Ask å bruke egenskapene til et trapes til å forklare hvorfor kun to vektorer i figuren var parallelle. Det kan tyde på at Ask klarte å se relasjoner mellom vektorregning og tidligere tilegnet kunnskap i enkelte situasjoner. Selv om Ask begrunnet svarene sine og fikk til å løse mange oppgaver viser situasjoner fra undervisningen at han ofte hverken visste hva han skulle gjøre eller hvorfor. Av den grunn tolker jeg datamaterialet slik at Ask sin forståelse som oftest kan karakteriseres som instrumentell forståelse.

Som nevnt ble alle elevene kartlagt på denne måten, se *Vedlegg 12: Kartlegging og analyse av elevenes forståelse for matematikk.* Resultatene fra kartleggingen er presentert i *Tabell 33*.

Alf fulgte ikke det samme undervisningsopplegget som resten av klassen og ble hverken intervjuet eller gjennomførte testen. Grunnet det mangelfulle materialet om Alf, hvordan Alf arbeidet med matematikk og tenkte når han løste oppgaver er det ikke mulig å klassifisere hva slags forståelse Alf har for matematikk. Han er derfor ikke presentert i *Tabell 33*.

I *Tabell 33* betyr kategorien ”lite synlig i undervisningen” at elevene enten hadde stort fravær, plasserte seg utenfor kameralinsens rekkevidde eller satt skjult bak andre elever. Noen av kategoriene omhandler elevenes forståelse, eller mangel på forståelse, for hva som skal gjøres i oppgaver eller hvorfor man kan benytte prosedyrer og regler. De kategoriene tar utgangspunkt i om datamaterialet tyder på at elevene kan, vet eller kan forklare situasjonene. Elevene kan i tillegg ha ytret seg om tema fra kategoriene i undervisningen. I alle kategoriene må man ta forbehold om at forholdene ikke alltid er slik, men at det ofte er slik. For eksempel er det slik at elevene i kategorien ”brukte feil formler” ikke brukte feil formler hver eneste gang, men viste at de i mange sammenhenger ikke brukte riktig formel. Kategorien ”godtok blindt forklaringer fra medelever” betyr det at de godtok deres forklaring uten å få en begrunnelse for hvorfor forklaringen var korrekt.

Tabell 33: Klassifisering av elevenes forståelse for matematikk

Kategori	**Ida**	**Ask**	**Ulf**	**Pål**	**Tom**	**Eli**	**Dag**	**Mia**	**Gry**
Lite synlig i undervisningen				x	x		x	x	
Visste/ kunne forklare hvorfor man kunne benytte regler og prosedyrer			x	x		X	x	x	x
Visste/ kunne forklare hva som skulle gjøres i oppgaver	x	x	x	x	x	X	x	x	x
Ga ikke uttrykk for å vite/ forstå hvorfor man kunne benytte regler og prosedyrer	x	x	x			X	x	x	x
Ga ikke uttrykk for å vite/ forstå hva som skulle gjøres i oppgaver	x	x			x				
Begrunnet ofte svar		x	x	x		X	x	x	x
Viste god forståelse for relasjoner mellom begrep, regler og prosedyrer				x		x	x		x
Godtok blindt forklaringer fra andre elever	x	x				x			
Benyttet tidligere tilegnet kunnskap korrekt	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Viste usikkerhet i forhold til tidligere tilegnet kunnskap	x	x	x		x			x	
Brukte i hovedsak standard prosedyrer i arbeidsboken	x	x	x	x	x	x	-	-	x
Løste sammensatte og mer utfordrende oppgaver ved	x		x		-		-	-	-

avskrift fra tavlen									
Instruerte andre elever							x		
Brukte feil formler	x	x						x	
Svar bar preg av gjetning	x	x						x	
Svarte på spørsmål i undervisningen	x	x	x	x	x	x			
Stilte spørsmål i undervisningen		x		x		x			

Grunnet mangelen på informasjon om arbeidsbøkene til Dag og Mia kan jeg ikke vite om de i hovedsak brukte standard prosedyrer fra læreboken eller løste sammensatte og mer utfordrende oppgaver ved avskrift fra tavlen. Gry og Tom brukte standard prosedyrer i de delene av arbeidsboken jeg har informasjon om, men datamaterialet viser ikke om de løste sammensatte og mer utfordrende oppgaver ved avskrift fra tavlen. Felles for alle elevene var at de benyttet tidligere tilegnet kunnskap korrekt i mange situasjoner. Likevel var det enkelte elever som i tillegg viste usikkerhet om tidligere tilegnet kunnskap flere ganger. Jeg kan finne informasjon om alle kategoriene tilknyttet alle elevene, men hos enkelte elever var bevisene tydeligere enn hos andre. Elevene hadde hver sine reaksjonsmønstre og evner. Ingen av elevene falt innenfor nøyaktig de samme kategoriene i *Tabell 33*. Derfor oppsummerer jeg forståelsen til hver enkelt elev enkeltvis.

Pål

Pål viste flere ganger at han kunne begrunne svarene sine og visste hvorfor han utførte de prosedyrene han gjorde. Han viste forståelse for regler og begrep ved at han var muntlig aktiv i timen og klarte å bruke tidligere tilegnet kunnskap i vektorregningen, eksempelvis å utnytte egenskapene i et parallellogram eller trapes. Selv sa han at han likte å tenke litt, hvilket han viste ved å komme videre i arbeidet med en oppgave der han så ut til å stå fast kun ved å studere det han hadde gjort. Dette er ikke samsvarende med at han visste hvorfor han kunne bruke prosedyrene. Selv om Pål klarte å begrunne svarene sine og bruke de rette formlene er ikke det ensbetydende med at han visste hvorfor prosedyrene gjaldt. Det kan være han gjenkjente situasjoner der han har brukt de samme forklaringene og formlene tidligere. Mine tolkninger av datamaterialet tyder på at Pål sin forståelse kan karakteriseres som relasjonsforståelse, men det avviser ikke at Pål viser instrumentell forståelse i flere situasjoner.

Ulf

Ulf lot flere ganger være å begrunne svarene sine i arbeidsboken, men begrunnet svarene på testen. I arbeidsboken brukte han standardprosedyrer i oppgaveløsningen og han regnet ikke de mer sammensatte og utfordrende oppgavene selv, men skrev de av tavlen når de ble gjennomgått i fellesskap. I tillegg virket han og usikker på enkelte områder av brøkregning. Ulf tok flere ganger hensyn til kun lengden av vektorer, og ikke retningen, og ga et feilaktig eksempel på bruk av vektorer. Det tyder på liten forståelse for vektorregning i virkeligheten. Ulf brukte læreboken flere ganger for å komme seg videre når han så ut til å stå fast. Slik det ser ut klarte han å relatere den matematiske teksten til det han kunne fra før. Dette tyder på at Ulf sin forståelse inkluderer relasjonsforståelse. Mine tolkninger av datamaterialet peker på at Ulf viser både relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, men i større grad viser instrumentell forståelse enn relasjonsforståelse.

Dag

Dag ga ofte uttrykk for at han visste hva som skulle gjøres i oppgaver, men ikke alltid om han forstod hvorfor. I flere tilfeller der han ga uttrykk for å forstå hvorfor, viste han vanskeligheter med å formulere en nøyaktig og korrekt begrunnelse. Han viste ofte god forståelse for begrep og regler, men andre ganger bar besvarelsene preg av gjetning. At han lærte uten lærebok og uten å skrive i arbeidsbok kan tyde på at han ser relasjonene mellom de ulike emnene i vektorregning. Min tolkning av datamaterialet er derfor at Dag hovedsakelig viser relasjonsforståelse, men at instrumentell forståelse også er til stede.

Ask

Datamaterialet kan tyde på at Ask ofte var usikker når han arbeidet med vektorregning. Han så ut til å godta svar uten å være overbevist om at de var korrekte og virket avhengig av lærer og medelever for å komme seg videre når han stod fast. At Ask ikke var sikker på hva vektorregning kunne brukes til, kan være en av grunnene til at han syntes det var vanskelig. Selv uttalte Ask på intervjuet at han burde jobbet med "å skjønne oppgavene bedre", hvilket kan tyde på at han har problemer med å vite hvilke prosedyrer som skal brukes i ulike situasjoner. I flere situasjoner klarte Ask å se relasjoner mellom vektorregning og tidligere tilegnet kunnskap, men viste ofte usikkerhet. Selv om Ask begrunnet svarene sine viser situasjoner fra undervisningen at han ofte hverken visste hva han skulle gjøre eller hvorfor. Av den grunn tolker jeg datamaterialet slik at Ask sin forståelse som oftest kan karakteriseres som instrumentell forståelse.

Ida

Ida så ut til å stå fast flere ganger i oppgavearbeidet uten å vite hva hun skulle gjøre. Da hun fant ut hvordan man kunne komme fram til svaret, ga hun ikke inntrykk av å vite hvorfor hun kunne bruke prosedyrene. Ida uttalte i undervisningen at hun ikke skjønte hvorfor man skulle bruke formlene og så ut til å trenge mye hjelp fra lærer og medelever for å løse oppgavene. På prøven måtte Ida arbeide alene. Hun klarte ikke alle oppgavene selv om hun hadde løst nesten alle oppgavene i undervisningen. Ida lot flere ganger være å begrunne svarene på prøven. Det kan tyde på at Ida ikke visste hvorfor hun fikk de svarene hun gjorde. Enkelte ganger viste Ida at hun kjente til relasjonen mellom begrep og prosedyre, men ikke ofte. Ida ga ikke uttrykk for å vite hvorfor hun kunne bruke prosedyrene hun gjorde, men hun kjente til prosedyrene. Min oppfatning er derfor at Ida sin matematiske forståelse er sterkt preget av instrumentell forståelse.

Eli

Eli så relasjoner mellom begrep og regler og viste flere ganger at hun kunne forklare hvorfor noe var som det var. Hun begrunnet ofte svarene sine. I enkelte situasjoner godtok hun blindt det andre sa og viste manglende forståelse for både hva som skulle gjøres og hvorfor. Eli var aktiv i undervisningen og både svarte på spørsmål fra læreren og stilte spørsmål selv. I arbeidsboken løste hun alle oppgaver selv. Inntrykket mitt er derfor at Eli hovedsakelig har relasjonsforståelse, men det utelukker ikke instrumentell forståelse i flere sammenhenger.

Gry

Gry satt ofte skjult bak andre elever i undervisningen og var meget stille. Hun ble ikke intervjuet og datainnsamlingen av arbeidsboken er ikke komplett. Derfor er det vanskelig å kartlegge hva slags forståelse Gry har for matematikk. Datamaterialet viser at Gry ofte visste hva hun skulle gjøre. Hun begrunnet svarene sine i de oppgavene det var påkrevd, men i enkelte situasjoner så det ut som om hun hadde problemer med å forklare hvorfor matematikken hun brukte kunne brukes. Gry viste flere ganger god kunnskap om sammenhengen mellom ulike emner i matematikken. Jeg tolker derfor datamaterialet slik at Gry har i hovedsak relasjonsforståelse, men instrumentell forståelse i enkelte situasjoner.

Tom
Å kartlegge Tom sin forståelse for matematikk er vanskelig fordi han var lite synlig i undervisningen selv om han var muntlig aktiv. Han ble ikke intervjuet og bildeserien av arbeidsboken er ikke komplett. Likevel gjorde testen det klart at han flere ganger manglet begrunnelse. Det kan tyde på at Tom ikke visste hvorfor svarene han fikk var gyldige. I tillegg manglet han utregning, noe som kan tyde på at han ikke visste hvordan han kom fram til svaret. Datamaterialet tyder ikke på at Tom har utstrakt forståelse av hvorfor han utfører den matematikken han gjør eller på at han har god forståelse for regler og begrep eller relasjonen mellom dem. Det kan tyde på at Tom ofte vet hva han skal gjøre, men ikke hvorfor. Det betyr at mine tolkninger tyder på at hans matematiske forståelse er preget av instrumentell forståelse.

Mia
Å klassifisere Mia sin forståelse for matematikk er vanskelig fordi flere av kildene ikke gir informasjon om hvordan Mia tenker eller arbeider. I enkelte situasjoner brukte hun feil formler og hadde manglefulle eller feilaktige begrunnelser. Jeg finner ikke eksempler som overbeviser meg om at Mia har god forståelse for relasjonen mellom begrep og regler eller viser at hun forstår hvorfor en regel kan brukes. Jeg tolker Mia sin forståelse for matematikk som instrumentell forståelse.

Flere av elevene viser både relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, men den ene forståelsen virker mer fremtredende enn den andre hos enkelte elever. Tavlen gir i hovedsak samme informasjon som læreboken fordi teksten er hentet fra læreboken. Alle regner de samme oppgavene med de samme hjelpemidlene men får likevel ulik forståelse. Spørsmålet som reiser seg er hvordan elevene kan ha fått ulik forståelse. Dermed kan arbeidsmetoden, altså hvordan de bruker tilgjengelige hjelpemidler ha hatt innvirkning. Elevenes hjelpemiddel i tillegg til hverandre og læreren, var læreboken. Læreboken kan ha vært avgjørende for elevenes forståelse, for det er ingen andre kilder til matematikk i undervisningen. Læreren sier selv at hun ikke bruker egen erfaring, for hun har ikke erfaring med undervisning av vektorer, men lener seg helt og holdent til læreboken.

6.3.2 Hvilken rolle har læreboken når det gjelder utvikling av elevenes forståelse?
Basert på presentasjonen av data har læreboken hadde en sentral rolle i undervisningen, og da er det naturlig å tro at den virker inn på elevene. Spørsmålet er om det finnes en relasjon mellom hvordan elevene bruker læreboken og karakteristikken av deres forståelse for matematikk. Det ser ut til at det finnes likheter mellom forståelsen til de elevene som leser fagteksten, og at de vil ha større relasjonsforståelse enn andre elever. Videre tyder resultatene på at elever som kun studerer regler og eksempler vil ha likheter mellom sin forståelse, men at deres forståelse vil bære mer preg av instrumentell forståelse. Som forklart i 6.3.1 Kartlegging av karakteristikken av elevenes forståelse for matematikk er ikke Alf inkludert i denne delen av studien fordi jeg ikke kan uttale meg om hans forståelse for matematikk.

Hvordan elevene brukte læreboken når de arbeidet med oppgaver ble studert i kapittel 6.2 Hvordan bruker elevene læreboken?. Undersøkelsen viste at elevenes bruk av læreboka kunne deles inn i tre kategorier:

1. Elever som leste fagtekst, enten kun mellom oppgavene de løste, eller hele fagteksten til hvert delkapittel. De brukte i tillegg fagteksten, eksempler og fasit i oppgaveløsingen.
2. Elever som brukte fagtekst, eksempler og fasit i oppgaveløsingen.
3. Elever som brukte eksempler, regler uthevet i gule rammer og fasit i oppgaveløsingen.

I 6.3.1 Kartlegging av karakteristikken av elevenes forståelse for matematikk fant jeg ut at elevene hovedsakelig hadde to ulike måter å forstå matematikk på:
1. Relasjonsforståelse, der instrumentell forståelse i tillegg ikke kunne utelukkes
2. Instrumentell forståelse, der relasjonsforståelse også var til stede, men i en vesentlig mindre grad, eller der relasjonsforståelse ikke kunne utelukkes.

Tabell 34: Oversikt over elevenes forståelse for matematikk og hvordan de brukte læreboken til oppgaveløsing

Elev	**Kategori for bruk av læreboken**	**Kategori for matematisk forståelse**
Pål	2	1
Ulf	2	2
Dag	1	1
Ask	3	2
Ida	3	2
Eli	1	1
Gry	1	1
Tom	2	2
Mia	1	2

Eli, Gry og Dag var tre av fire elever med relasjonsforståelse som brukte læreboken på samme måte, nettopp ved å lese fagtekst i tillegg til å bruke den i oppgaveløsingen. Elevene med instrumentell forståelse fordelte seg på alle tre kategoriene av bruk av læreboken. To elever brukte kategori 3, der eksemplene og reglene uthevet i de gule rammene ble brukt. To elever brukte læreboken ved å studere fagtekst og eksempler, det vil si kategori 2 for bruk av læreboken. Mia var den eneste eleven med instrumentell forståelse som leste fagteksten, altså kategori 1. To av de tre elevene som bruker fagtekst, eksempler og fasit i oppgaveløsingen så ut til å ha instrumentell forståelse.

Om jeg hadde valgt en annen inndeling av matematisk kunnskap og forståelse, som omtalt i 2.1 Ulike typer kunnskap og forståelse ville jeg muligens oppdaget andre relasjoner mellom læreboken og elevenes forståelse for matematikk. I Vedlegg 13: Datamaterialet sett opp mot ulike teorier om forståelse av matematikk har jeg sett på kategoriene i klassifiseringen av elevenes forståelse og vurderte de opp mot de andre teoriene kunne omtalt i 2.1 Ulike typer kunnskap og forståelse.

6.5 Oppsummering

Læreboken hadde en veldig sentral rolle i undervisningen. Læreren brukte læreboken som kilde for det som ble skrevet på tavlen. Dessuten var læreboken den eneste kilden til informasjon som læreren og elevene brukte i undervisningen. Observasjonen av undervisningen viste at elevene brukte læreboken på forskjellige måter. Ytterpunktene var fra å lese all fagtekst i kapittelet, til kun å studere reglene uthevet i gule rammer og eksemplene.

Elevene har ulik forståelse for matematikk, der de fleste viser tegn til både relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, men der en av måtene å forstå matematikk på var mest fremtredende hos hver enkelt elev. Ved å studere sammenhengen mellom karakteristikken av elevenes forståelse for matematikk og hvordan de bruker lærebok ser man tendenser til at elevene som leste fagteksten var elever som viste relasjonsforståelse. Elever som ikke brukte fagteksten, men kun regler og eksempler, var elever som viste tegn på instrumentell forståelse.

7 Konklusjon

Denne studien er en casestudie som studerer bruk av lærebok i et enkelt klasserom og forståelsen til enkeltindividene i klassen. Resultatene kan derfor ikke generaliseres til en bredere populasjon.

I dette kapittelet vil jeg først trekke konklusjoner i studien for deretter å diskutere hvilke spørsmål studien reiser videre. Til slutt forklarer jeg ulike tanker og erfaringer jeg har gjort meg underveis i arbeidet med studien.

7.1 Konklusjon

Hva er lærebokens rolle i undervisningen.

Studien viser at læreboken har hatt en stor og sentral rolle i undervisningen. Elevene og læreren har dermed et tett forhold til læreboken. Spørsmålet som reiser seg er hva dette gjør med undervisningen. Blir lærerens formidling kun en videreføring av læreboken slik at lærerens undervisning og læreboken i prinsippet er det samme? Læreren sier selv at hun har valgt å legge opp undervisningen etter læreboken fordi hun har liten erfaring innenfor undervisning av vektorer. I tillegg sier hun at hun presenterer stoffet på samme måte som læreboken, men med egne ord. Hva er da forskjellen for elevene mellom matematikken presentert av læreren og matematikken presentert i læreboken? Læreren kan riktignok forklare matematikken for elevene på flere måter og svare på oppklarende spørsmål. Hun kan og sikre at elevene forstår ved å bruke et språk hun vet at elevene kjenner til. Observasjonen av undervisningen viser at selv om læreren forklarer med egne ord henviser hun ofte til læreboken når hun forklarer. Hun bruker i hovedsak de samme forklaringene som læreboken selv om hun bruker litt andre ord når hun forklarer. Måten læreren presenterer matematikken på for elevene er derfor meget lik den måten læreboken bruker. Forholdet mellom læreboken og læreren er derfor meget tett og sterkt. Det kan være flere grunner til at forholdet er slik. I norsk undervisningskultur er det ikke uvanlig at man først presenterer nytt stoff for så å regne oppgaver. Læreboken følger samme oppsett, der fagtekst, regler og eksempler presenteres før oppgavene.

Hvordan bruker elevene læreboken?

Studien peker på fellestrekk og særtrekk mellom hvordan elevene bruker læreboken. Videre gjør studien det mulig å identifisere noen mer vanlige måter å bruke læreboken på. Bruken varierte fordi elevene ikke gjorde det samme hver eneste gang. Den tydeligste forskjellen mellom måtene å bruke boken på var om elevene leste eller brukte fagteksten i læreboken eller ikke. I *Figur 32* presenteres måtene elevene brukte læreboken på.

	Bruker fagtekst				Bruker ikke fagtekst
	leser hele kapittelet før noen oppgaver blir løst	leser all fagtekst i delkapittelet	leser kun fagtekst mellom oppgavene	leser ikke fagtekst før man sitter fast	
ordinær oppgaveløsing		bruker introduksjonen i delkapittelet	bruker informasjon på tavla	bruker informasjon på tavla, regler uthevet i gult	bruker informasjon på tavla, regler uthevet i gult eller eksemplene
		sjekker fasit	sjekker fasit	sjekker fasit	sjekker fasit
		leser fagtekst	leser fagtekst		
		bruker fagtekst for å løse videre oppgaver	bruker fagtekst for å løse videre oppgaver		
når elevene ser ut til å stå fast		studere eksempler og regler uthevet i gult	studere eksempler og regler uthevet i gult	studere eksempler og regler uthevet i gult	studere eksempler og regler uthevet i gult
		leser fagtekst	leser fagtekst	leser fagtekst	sjekker fasit
		sjekker fasit	sjekker fasit	sjekker fasit	

Figur 32: Modell av elevenes bruk av læreboken i undervisningen

Modellen av elevenes bruk av læreboken i undervisningen tar utgangspunkt i om elevene brukte fagteksten i læreboken eller ikke og bygger på observasjonene gjort i undervisningen. Elevene brukte fagteksten på fire forskjellige måter. Den første kategorien er at eleven leste hele kapittelet før han eller hun i det hele tatt begynte på oppgavene. Kun en elev, Alf, gjorde dette, men han løste ikke oppgaver i læreboken. Han løste generelt få oppgaver og spurte kun lærer om hjelp hvis han stod fast. Derfor er det ikke mer informasjon i *Figur 32* om elever som leser hele kapittelet før oppgaver løses. Studien gir ikke svar på hvordan eleven arbeidet under ordinær oppgaveløsing eller når han så ut til å stå fast. Likevel er det å lese hele kapittelet før man løser oppgaver en måte å bruke læreboken på.

Elever som leste all fagtekst i delkapittelet, leste først teksten mellom delkapittelets overskrift og første oppgave. Etter at de hadde løst oppgavene sjekket de fasit for så enten å lese fagteksten videre i kapittelet eller begynne på neste oppgave, avhengig om det var fagtekst mellom oppgavene eller ikke. Om de stod fast studerte de eksempler og regler uthevet i gule rammer. Trengte de mer hjelp, leste de fagteksten lest igjen. Til slutt brukte de eventuelt fasiten for å se om de kom noe videre ved å vite svaret.

Andre elever leste kun fagteksten mellom oppgavene, og brukte i hovedsak sak læreboken på samme måte som de som leste all fagtekst i kapittelet. Forskjellen var at de brukte informasjonen på tavlen til å begynne på de første oppgavene.

Den siste måten elevene brukte fagteksten på var å ikke studere den før de stod fast på oppgavene. Da brukte de regler og eksempler for å løse oppgavene og fasiten ble sjekket når oppgaven var ferdig løst. Dersom de stod fast studerte de først regler og eksempler enda en gang, og om det ikke løste problemet, leste de fagteksten tilknyttet oppgaven. Om de fortsatt stod fast studerte de fasit for å sjekke om de kunne forstå hva som skulle gjøres når de allerede visste svaret.

Elevene som ikke brukte fagteksten i læreboken leste oppgaveteksten og brukte reglene uthevet i gult og eksempler for å løse oppgavene. Til slutt sjekket de fasiten for å finne ut om de hadde rett svar. Dersom de stod fast studerte de eksemplene og reglene på nytt og om de fortsatt satt fast sjekket de i likhet med de andre kategoriene fasiten for å undersøke om de da forstod hva som skulle gjøres i oppgaven.

Læreboken ble ikke alltid brukt i den rekkefølgen, variasjoner oppstod selvsagt. Eksempelvis kunne fasiten sjekkes tidligere enn beskrevet i modellen eller at elevene ikke studerte eksempler og regler før de startet på oppgavene. I tillegg var lærer tilgjengelig for elevene. Læreren påvirket modellen i stor grad fordi elevene kunne når som helst i prosessen spørre læreren. Når medelever også var lett tilgjengelig påvirket også de modellen fordi elevene kunne diskutere med hverandre, forklare hverandre eller de kunne studere hverandres besvarelser. Læreren behandlet elevene forskjellig i forhold til hva slags hjelp elevene fikk. At læreren stilte elevene forskjellige spørsmål kan ha ført til at de brukte boken forskjellig. Da kunne enkelte finne informasjonen selv mens andre fikk den oppgitt av læreren. Det kan ha påvirket hvordan læreboken ble brukt. At elevene kunne spørre læreren når som helst i løsningsprosessen kan ha ført til at elevene ikke forsøkte å løse oppgaven selv fordi de kunne få forklart av læreren hva de skulle gjøre.

Jeg hadde forventet at elevene brukte mer tid på å løse oppgaven før de spurte om hjelp enten av lærer eller medelever. Veien for å få hjelp av andre var veldig kort, og på den måten slapp elevene å tenke og forstå selv. De fikk gjort oppgaven uansett. Jeg trodde elevene ville brukt læreboken mer aktivt og være mer selvstendige i oppgaveløsingen enn hva de var. Det kan tenkes at kulturen i klasserommet, der det var akseptert at elevene arbeidet sammen og pratet underveis påvirket hvordan de brukte læreboken. Dersom elevene satt en og en og ikke kunne spørre hverandre om hjelp kan det tenkes det ville ha påvirket deres bruk av læreboken.

Er det mulig å finne noen sammenheng mellom hvordan elevene bruker læreboken og karakteristikken av deres forståelse for matematikk?

Elevers forståelse er skjult kunnskap og er ikke målbart. Mine tolkninger av elevenes forståelse er dermed spekulative, og ikke faktakunnskap. Selv om jeg har konkludert med at mine tolkninger tyder på at en elev har enten relasjonsforståelse eller instrumentell forståelse, så betyr ikke det at mine utsagt er fakta. Konklusjonene med hensyn til elevenes forståelse gjenspeiler kun mine tolkninger av datamaterialet om elevenes forståelse.

Materialet er ikke entydig, men viser tendenser til at elevene som viser relasjonsforståelse i større grad leser fagtekst og bruker fagteksten, reglene og eksemplene i oppgaveløsingen enn elever som viser instrumentell forståelse. En mulighet kan være at elever med relasjonsforståelse har større evne til å nyttegjøre seg forklaringene i læreboken, slik at teksten i læreboken oppfattes som mer meningsfull for dem enn for elever med instrumentell forståelse. At elevene leser teksten kan bidra til utviklingen av relasjonsforståelsen. I tillegg tyder resultatet på at elevene som kun bruker eksemplene og reglene under oppgaveløsingen oftere har instrumentell forståelse enn elever som bruker fagteksten. En årsak kan være at de ikke leser og tilegner seg kunnskap om sammenhengen mellom begreper og regler som blir presentert i fagteksten, eller at de ikke klarer å nyttegjøre seg teksten de leser.

At sammenhengen mellom bruken av læreboken og elevenes forståelse for matematikk ikke er tydeligere er overraskende fordi elevene deler i stor grad de samme erfaringene med matematikken. De følger alle den samme undervisningen, bruker den samme læreboken og løser de samme oppgavene. Selv om denne studien i hovedsak har i sett bort fra lærerens rolle i undervisningen er det likevel viktig å fremheve noe av det læreren sa under intervjuet. Læreren opplyste om at hun så an elevene i forhold til hvordan de fikk hjelp. Enkelte elever fikk beskjed om hva de skulle gjøre for å løse oppgaven, mens andre elever heller fikk hint og tips om hva de kunne gjøre for å komme videre i oppgaven. Det vil si at lærerens påvirkning varierte fra elev til elev og var en faktor i undervisningen elevene ikke hadde felles. I studien var læreren dessuten hele tiden tilgjengelig for elevene. Hun gikk rundt og veiledet og hjalp elever selv om de i utgangspunktet ikke ba om hjelp. Elever som ønsket hjelp lurte ofte på det samme, så elever som satt sammen lyttet alle til læreren når en av dem fikk hjelp.

Studien tyder på at selv om undervisningen var så sterkt knyttet til læreboken hadde måten læreren hjalp elevene på stor innvirkning på elevenes forståelse for matematikk. Noen elever ble inspirert til å utvikle relasjoner mellom begreper og prosedyrer mens andre elever fikk beskjed om hvordan de kunne fullføre prosedyren. På den måten fikk elevene ulike muligheter til å utvikle relasjonsforståelse og instrumentell forståelse. Arbeidsmiljøet påvirket også elevenes utvikling av forståelse fordi de hadde lov til å prate med hverandre, stille hverandre spørsmål og studere hverandres fremgangsmåter under hele prosessen. Enkelte elever henvendte seg da til andre før de i det hele tatt forsøkte å løse oppgaven selv. Dette er forhold som ble beskrevet, men som ikke er analysert i oppgaven selv om det kunne være av betydning. Det ligger utenfor denne oppgavens rammer. Elevenes forkunnskap og tidligere undervisning og erfaring med matematikk kan også ha påvirket deres forståelse for matematikk, men ble ikke behandlet i denne studien.

Oppsummering
Masterstudien viser at læreboken hadde en sentral og enestående rolle i undervisningen. Den var den eneste kilden elevene og læreren brukte for å arbeide med vektorregning. Elevene brukte læreboken på ulike måter, og alle elevene hadde sitt mønster. Bruken av læreboken kunne skilles hovedsakelig mellom hvorvidt elevene leste fagteksten eller ikke. Studien tyder på at læreren hadde trolig større innvirkning på elevenes forståelse enn læreboken. Studien peker på at elever med relasjonsforståelse så ut til å nyttegjøre seg av tekstene i læreboka bedre enn elever med instrumentell forståelse. Elever som ikke leste fagteksten i læreboken viste i hovedsak instrumentell forståelse.

7.2 Videre studier

Masteroppgaven reiser flere spørsmål som ikke kan svares på ved hjelp av de metodene og datamaterialet som er tilgjengelig. Videre ville det vært interessant å undersøke

- om noen måter å bruke læreboken på mer effektive enn andre
- hva slags interaksjon mellom teksten og den enkelte elev påvirker hvor effektiv teksten er
- hvordan elevenes forståelse påvirkes av at læreren er mer fristilt fra læreboken
- hvordan elevenes forkunnskap og tidligere undervisning og erfaring med matematikk påvirker elevenes forståelse
- hvordan elevenes arbeidsmiljø påvirker elevenes forståelse

7.3 Erfaringer og lærdom underveis

Under arbeidet med masteroppgaven har jeg fått erfaring med forskerrollen, og har oppdaget underveis at jeg ikke alltid gjorde de beste valgene.

Da jeg utformet intervjuene var jeg svært fornøyd med spørsmålene og syntes jeg hadde laget gode, presise spørsmål som ville gi meg svar på akkurat det jeg ville vite. Jeg forberedte meg til gjennomføringen av intervjuene ved å tenke gjennom hvilke svar jeg kunne få fra elevene og hvordan jeg skulle be dem utdype svarene, stille oppfølgingsspørsmål og få fram den informasjonen jeg var ute etter. Jeg tenkte ikke over hvordan jeg skulle analysere eller presentere intervjuene. Da analysearbeidet begynte oppdaget jeg at intervjuene overhodet ikke ga meg den informasjonen jeg spurte etter. Jeg spurte ikke elevene om hva de mente med flere utsagn, ba dem ikke utdype svarene sine og kom ikke med alle oppfølgingsspørsmålene jeg hadde tenkt. Det førte til at jeg under arbeidet med å analysere intervjuene oppdaget at flere av spørsmålene ikke var relevante for akkurat min problemstilling, i tillegg til at elevene hadde ikke tifredsstillende svar på flere av spørsmålene. Jeg har lært at man bør tenke igjennom hvordan man vil analysere intervjuene før man gjennomfører intervjuet, i tillegg til å kartlegge hvilken informasjon spørsmålene gir. På den måten kan man være sikrere på at spørsmålene en stiller er relevante for problemstillingen og at man kan bruke intervjuene i større grad i analysen enn jeg har gjort.

Feltnotatene er en annen metode for innsamling av data jeg burde tenkt mer igjennom før jeg utførte undersøkelsene. Under analysen oppdaget jeg at notatene ga meg lite informasjon i ettertid. Jeg burde vært mer bevisst på hva jeg skulle se etter og hva jeg skulle notert før jeg begynte observasjon av undervisningen.

I forkant av datainnsamlingen hadde jeg belaget meg på å gjennomføre en spørreundersøkelse. Jeg trodde at informasjonen jeg fikk gjennom datainnsamlingen var dekkende nok, slik at jeg vurderte spørreundersøkelsen som overflødig. I tillegg ønsket jeg ikke å bruke mer av elevenes tid enn jeg allerede hadde gjort. Under arbeidet med analysen oppdaget jeg at det kunne vært interessant å ha informasjon om elevenes tidligere erfaring med matematikk. Jeg burde ikke undervurdert hvilken informasjon spørreundersøkelsen kunne bidra med.

Arbeidet med denne oppgaven har tatt meg tre år. Samtidig med oppgaveskrivingen har jeg fått arbeidserfaring fra læreryrket i barne- og ungdomsskolen. Arbeidserfaringen har gitt meg bedre kunnskap om elevers forståelse, men også latt meg erfare forskjellen mellom teori og praksis. I tillegg har jeg fått innsikt i hvordan en lærerhverdag er. Jeg oppdaget at lærerhverdagen er travel, uten god tid til planlegging av undervisning. Det er ikke lett å sette fingeren på hvordan min oppfatning har forandret seg i løpet av de tre årene, men i dag opplever jeg virkeligheten og undervisningssituasjoner som mer nyansert enn det svart/hvitt bildet jeg til tider kunne ha før jeg fikk arbeidserfaring. Arbeidet med masteroppgaven har gjort at jeg har fått erfaring med forskerrollen, fått prøve ut ulike metoder for innsamling av data, lært å kjenne andre mennesker på en ny måte og fått større innsikt i både oppgaveskriving og læreryrket. Ikke minst har masteroppgaven lært meg mye om meg selv, både som privatperson og lærer. I min hverdag som matematikklærer vil jeg gjøre en innsats for at elevene skal engasjere seg i teksten på en slik måte at de søker relasjonsforståelse. For min del handler det ikke enten om tekstene i læreboken eller elevenes tilnærming til læreboken, men jeg betrakter de to elementene som utfyllende og uatskillelige.

Jeg har kjent på mange følelser underveis, men jeg sitter igjen med følelsen av mestring. Arbeidet har gitt meg økt kunnskap om hvordan elever kan forstå matematikk og hva slags forståelse for matematikk jeg drømmer om og ønsker at mine fremtidige elever skal få.

8 Litteratur

Alrø, H. & Dirckinck-Holmfeld, L. (1997). *Videoobservation*. Aalborg, Danmark: Aalborg Universitetsforlag.

American Association for the Advancement of Science (2000). Middle Grades Mathematics Textbooks: A Benchmarks-Based Evaluation. http://www.project2061.org/publications/textbook/mgmth/report/default.htm

Bryman, A.(2004). *Social Research Methods*. Oxford, England: Oxford University Press

Bø, O. (1995). *FoU-metodikk*. Oslo, Norge: Tano.

Eisenhart, M., & Borko, H. (1993). D*esigning classroom research: Themes, issues, and struggles*. Boston: Allyn & Bacon.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A ”Proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 116-140.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: A Introductory analysis. In Hiebert, J (Eds.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics (pp. 1-27)*, Hillsdale New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kvale, S. & S. Brinkmann (2009). *Interview introduktion til et håndværk.* København, Danmark: Hans Reitzel.

Oldervoll, T., Orskaug, O. & Vaaje, A. (2003). *Cosinus for ettårig forkurs*. Oslo, Norge: Cappelen.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2007): *Sinus R1 grunnbok i matematikk : studiespesialiserende program*. Oslo, Norge: Cappelen.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics, 33 (5)*, 158-175.

Pepin, B. & Haggerty, L. (2003). Mathematics textbooks and their use by teachers: A window into the education world of particular countries. In J. van den Akker, W. Kuiper, & U. Hameyer (Eds.), *Curriculum landscapes and trends (pp. 73-100)*. Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Pring, R. (2004). *Philosophy of educational research*. London, England: Continuum.

Rezat (2006). The Structures of German Mathematics Textbooks, *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics, 38 (6)*, 482-487.

Rezat (2010). The Utilization og Mathematics Textbook as Instruments for Learning. *Procedings og CERME 6, January 28th-February 1st 2009*. Lyon France: INRP 2010

Rinvold, R. A. (2003). *Avbildninger og symmetri*. Bergen, Norge: Caspar forlag.

Schwandt, T. A. (2007). *The SAGE dictionary of qualitative inquiry*. Los Angeles, California: Sage Publications.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Shield, M. (1989): Mathematics Teachers' Preferences in Textbook Characteristics. *Mathematics Education Research Journal*, *1 (1)*, 11-15.

Shield, M. (1991): Mathematics Textbooks: How Are They Used?, *Australian Journal of Reading*, *14 (1)*, 60-68.

SinusR1. (2008). http://sinusr1.cappelendamm.no/c182404/sammendrag/vis.html

Skemp, R. (1976): Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Statistisk sentralbyrå. (2011). Folkemengd etter alder, kjønn, sivilstand og statsborgarskap Retrieved April 12, 2011 from http://www.ssb.no/emner/02/01/10/folkemengde

Utdanningsdirektoratet. (n.d). Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram Retrieved August 19, 2010 from http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=168732

Wittrock, M. C. & American Educational Research Association (1986): *Handbook of research on teaching a project of the American Educational Research Association*. New York: Macmillan.

Vedlegg 1: Informasjonsskriv til elever

Forespørsel om å delta i observasjon, test og intervju i forbindelse med masteroppgave i matematikkdidaktikk

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder og holder nå på med den avsluttende masteroppgaven. Temaet for oppgaven er lærebokens rolle i undervisningen, og jeg skal undersøke hvordan læreboken påvirker den kunnskapen elevene får. Jeg er interessert i å finne ut om læreboken gir elevene forskjellig læringsutbytte, og om måten elevene bruker læreboken på har innvirkning kunnskapen elevene sitter igjen med.

For å finne ut av dette, ønsker jeg å videofilme undervisning i en klasse i matematikk R1 på videregående skole og teste elevene i etterkant av undervisningen. Testen vil ta utgangspunkt i temaet i undervisningen. Med bakgrunn i testene har jeg lyst til å gjennomføre intervju med noen få elever og gi et spørreskjema til hele klassen. Elevene vil få mulighet til å krysse av på testen om de ønsker å bli intervjuet. Jeg vil kontakte elevene som skal bli intervjuet og sammen blir vi enige om tid og sted for intervjuene.

Videofilmen vil jeg bruke til å analysere undervisningen og se hvordan elevene bruker læreboken i undervisningen. Testen vil bestå av helt vanlige matematikkoppgaver, og jeg ønsker å teste elevenes ferdigheter og forståelse innenfor vektorregning. Intervjuet vil handle om hvordan du forstår temaet vektorer og hvordan du tenkte når du løste oppgavene i testen. Spørreskjemaet vil handle om hvorfor du valgte matematikk og dine tanker om matematikkfaget.

Det er helt frivillig å være med på prosjektet, og du vil når som helst ha mulighet til å trekke deg fra prosjektet, uten å måtte gi en begrunnelse. Hvis du trekker deg vil jeg se bort fra all informasjon som er blitt registrert om deg. Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt og det er ingen elever som vil kunne gjenkjennes i den ferdige oppgaven. Opplysningene anonymiseres når oppgaven er ferdig i løpet av 2009.

Dersom du har lyst til å delta i studien er det fint om du fyller ut samtykkeerklæringen nedenfor og leverer den til meg eller læreren din[redacted] Jeg ber deg informere dine foreldre om studien, enten muntlig eller ved å vise dem brevet.
Hvis du har noen spørsmål eller noe du lurer på er det bare å ta kontakt på telefonnummer [redacted], eller sende meg en e-post på [redacted]. Du kan også kontakte min veileder, Professor Simon Goodchild ved Universitetet i Agder, fakultet for realfag på e-post [redacted].

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste A/S.

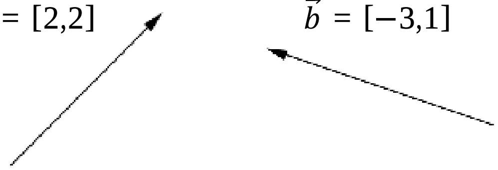
Vennlig hilsen
Gunhild Skåsheim

Samtykkeerklæring
Jeg har mottatt informasjon om studien om lærebokens rolle i undervisningen og ønsker å delta i studien:
Signatur:…………………………………………… Telefon:………………………………

Vedlegg 2: Test til kapittel 5: Vektorer

Test til kapittel 5: Vektorer **Navn:**______________________________

Oppgave 1
Vi har gitt disse vektorene.
$\vec{a} = [2,2]$ $\vec{b} = [-3,1]$



Finn ved tegning og regning
a) $2\vec{a} + \vec{b}$
b) $3\vec{b} - \vec{a}$

Oppgave 2
Tegn inn punktene $A = (0,0), B = (3,1), C = (4,5), D = (1,4)$ i et koordinatsystem.
a) Hvilke av vektorene $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BD}$ er lik hverandre? Begrunn svaret ditt.
b) Tegn inn linja y gitt ved ligningen $y = \frac{1}{3}x - 2$ i det samme koordinatsystemet. Hvilke av vektorene $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BD}$ vil du si er parallell(e) med linja y? Begrunn svaret ditt.
c) Finn summen av $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. Begrunn svaret ditt.
d) Regn ut lengdene av sidene i figuren ABCD

Oppgave 3
Et fly går fra byen A til byen B som ligger 600 km rett nord for A. Flyet har en fart på 600 km/h. Det blåser fra vest med en styrke på 15 m/s. Flygeren tar ikke hensyn til sidevinden. Finn både ved tegning og regning hvor flyet er etter en time. Oppgi svaret med avstand fra B i km, i tillegg til retning.

Oppgave 4
I Δ ABC har hjørnene koordinatene $A = (-1,-4), B = (2,-2)$ og $C = (-5,2)$
a) Finn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AC}$. Vis hvordan du tenker eller regner.
b) Finn ved regning koordinatene til midtpunktet M på $\overrightarrow{AC}$
c) Et punkt D ligger slik at punktene A, B, D og M utgjør et trapes der $\overrightarrow{MD}$ er dobbelt så lang som $\overrightarrow{AB}$. Finn koordinatene til punktet D ved regning.

Oppgave 5
Tegn inn vektorene $[4,2]$ $[8,4]$ og $[12,6]$ i et koordinatsystem. Tegn inn loddrette linjestykker fra endepunktene til vektorene og ned på x-aksen. Forklar ved hjelp av formlike trekanter, og med egne ord hvorfor formelen $t[x,y] = [tx, ty]$ gjelder.

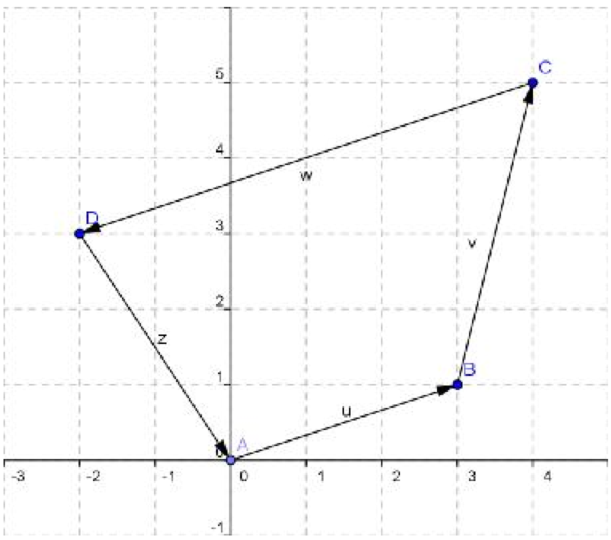
Sett kryss der det passer:

☐ Jeg synes det er greit å bli intervjuet i forbindelse med undervisning og test i kapittelet om vektorer

☐ Jeg synes *ikke* det er greit å bli intervjuet i forbindelse med undervisning og test i kapittelet om vektorer.

Vedlegg 3: Spørsmål til elevintervju

1. Hvor lenge har du vært elev på denne skolen?
2. Hvilken ungdomsskole har du gått på?
3. Hva planlegger du å gjøre etter videregående skole?
4. Hva synes du om matematikkfaget?
5. Hvis du ser på disse begrepene og temaene, kan du gi deg selv en karakter på hvert punkt som sier hva du kan om begrepene eller temaene? (Karakterene fra 1-6, der 1 er ingenting og 6 er alt)
   - Skalar
   - Enhetsvektor
   - Sum av vektorer
   - Differanse av vektorer
   - Vektoren mellom to punkter
   - Lengden av vektorer
   - Avstanden mellom to punkter
6. Kan du fortelle meg hva en vektor er?
7. Hva synes du om arbeidet du har gjort under kapittelet vektorer?
8. Hva synes du er det beste/ morsomste å arbeide med innenfor vektorregning?
9. Hva oppfatter du som vanskeligst/ mest problematisk innenfor vektorregning?
10. Hvilke oppgaver på prøven synes du var greie å arbeide med?
11. Hvilke oppgaver på prøven synes du var vanskelige å arbeide med?
12. Vet du om situasjoner der vektorregning kan være nyttig, annet enn de som er nevnt i boken og i undervisningen?
13. I læreboken står det at noen oppgaver skal finnes svar på ved hjelp av tegning, andre ved hjelp av regning. Hva foretrekker du?
14. Denne situasjonen er som i testen dere fikk:



Kan du prøve å tenke høyt mens du løser oppgaven?

a) Er noen av vektorene i figuren parallelle?
b)Finn summen av $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

Vedlegg 4: Spørsmål til lærerintervju

1. Hvordan ser du på elevene innsats i matematikkfaget, og hva med innsatsen innenfor kapittelet om vektorregning?
2. Hvordan opplever du elevenes forståelse for temaet vektorer?
3. Hvilke temaer innenfor vektorer tror du er utfordrende for elevene?
4. Hvilke valg gjorde du i forkant av undervisningen når det gjelder hvordan stoffet skulle bli presentert for elevene?
5. Hvordan mener du at læreboken blir brukt av elevene?
6. Hvilket undervisningsmateriell brukte du i undervisningen om vektorer?
7. Hvordan opplever du elevenes reaksjoner når de står fast med arbeidet?
8. Hvordan tenker du at elevene best kan lære, og hvordan kan du hjelpe dem på best mulig måte?
9. Hva slags utdannelse og arbeidserfaring har du?

Vedlegg 5: Framdriftsplan for kapittel 5, Vektorer

Tabell 35: Framdriftsplan

Dag	Tema
mandag 19. jan	5.1 Vektor og skalar 5.2 Sum av vektorer
onsdag 21. jan	5.2 Sum av vektorer
torsdag 22. jan	5.3 Vektordifferanse
mandag 26. jan	5.4 Produkt av tall og vektorer
onsdag 28. jan	5.5 Vektorer på koordinatform
torsdag 29. jan	5.6 Regning med vektorkoordinater
mandag 2. feb	5.7 Vektoren mellom to punkter 5.8 Lengde og avstand
onsdag 4. feb	Repetisjon
torsdag 5. feb	Prøve kap 5

Vedlegg 6: Rapport fra Pilottest

Tirsdag 06.01.09 gjennomførte jeg pilottesten på en videregående skole i faget R1. For at det skulle være mulig å gjennomføre testen, ble jeg enig med faglærer om at det skulle være valgfritt for elevene om de ønsket å arbeide med testen, og at de hadde den ikke som prøve, men som individuelle arbeidsoppgaver. Elevene betraktet min test som en forberedelse til prøven de skulle ha neste uke. Elevene fikk lov til å bruke boken hvis de stod fast, men kun hvis de kommenterte bruken av boken i oppgaven. Læreboken ble kun brukt en gang av en elev, og da til å finne en formel. Jeg fikk inn ni besvarelser. Jeg har valgt å kommentere hver deloppgave i rapporten for at det skal bli mest mulig oversiktelig.

Oppgave 1
Elevene løste oppgavene litt forskjellig. Fem elever tegnet opp vektorene og regnet ut vektorsummen med koordinater, men en av dem tegnet ikke opp svarvektoren. En elev regnet ut vektorsummen rett, og tegnet inn de ulike vektorene i koordinatsystemet, men både $\vec{b}$ og $2\vec{a}$ starter i origo. Vektoren mellom $\vec{b}$ og $2\vec{a}$ sine endepunkt tilsvarte dermed ikke vektorsummen, men vektordifferansen. To elever regnet ut vektorsummen med koordinater og de tegnet opp vektorene i koordinatsystemet. Den ene av dem forklarte at eleven plusset sammen x-verdiene og y-verdiene for å finne svaret. En elev løste oppgaven kun ved rekning.

Det så ut som at elevene løste oppgaven på noenlunde samme måte. Noen elever tegnet inn vektorene i koordinatsystemet, mens andre valgte å tegne dem for seg selv. Svarene kan tyde på at de fleste elevene hadde en god forståelse for hvordan man tegnet en vektor og vektorsum. I tillegg kunne man se om elevene behersket vektorsum på koordinatform. Alle elevene førte utregningen av vektorsummen på samme måte. Det kan være et tegn på at elevene husket prosedyren godt. At enkelte elever lot være å løse oppgaven ved tegning, kan være et tegn på manglende forståelse for den grafiske presentasjonen ved vektorregning. Det kan også hende at eleven trodde man kunne velge mellom tegning eller regning, eller rett og slett glemte å tegne opp. Den ene eleven som tegnet vektorsum som vektordifferanse kan hende at gjorde en slurvefeil, men det kan og være at eleven hadde problemer med å tegne inn vektorsummen. Vektorene var korrekt tegnet opp hver for seg ut i fra origo og utregningen ga riktig svar, men vektorsummen på tegningen var ikke lik svaret på utregningen. Jeg beholder oppgaven som den er på pilottesten.

Oppgave 2a
Elevene svarte på forskjellige måter. Elevene skulle finne ut hvilke vektorer som var lik hverandre. Like vektorer har samme retning og samme lengde. Fire elever svarte at $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, og to av dem begrunnet det. Begrunnelsene tok utgangspunkt i koordinatene og like vektorer. To elever svarte at $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, der den ene begrunnet det ut i fra egenskapene til parallellogrammet og kommenterte at DC var motsatt retta. Da tror ikke jeg at eleven hadde forstått eller husket hva like vektorer var, for det at den var motsatt retta gjør nettopp at de ikke er like. $\overrightarrow{DC}$ var ikke et alternativ ut i fra oppgaveteksten. En elev svarte med tre svar, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, men uten begrunnelse. $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{DC}$ var ikke et alternativ ut i fra oppgaveteksten, men svarene eleven gav var alle like vektorer. Det kan tyde på at denne eleven forstod hva begrepet betyr.

En elev skrev opp alle vektorene som var lik hverandre mellom alle punktene på figuren, og svarte med de vektorene som er like ut i fra vektorene fra oppgave 2a. Handlingen tyder på god forståelse for begrepet like vektorer. En elev svarte at $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, men motsatt retta, som kan tyde på en mangelfull forståelse av begrepet like vektorer. Det virket som at eleven så at de var parallelle og at de var motsatt retta, men koblet ikke det med at de dermed ikke var like. Jeg synes oppgaven kan gi meg gode indikasjoner på om elevene forstår hva som kjennetegner like vektorer, og hvorvidt de blander med parallelle vektorer.

Oppgave 2b

Fire elever svarte at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, og at de var parallelle med linja y A og B hadde samme avstand ned til linja, eller hadde samme stigningstall. En elev svarte at $\overrightarrow{AB}$ var lik linja y, og at $\overrightarrow{CD}$ var parallell, men hadde motsatt retning. Det kan være denne eleven leste oppgaveteksten dårlig, eller blandet med oppgave 2b siden han skrev at en vektor var lik linja y. Det at han presiserte at $\overrightarrow{CD}$ var parallell med linja, men motsatt retta, gjør at jeg tror ikke han fullt ut forstod hva det ville si at en vektor og en linje var parallelle. Det kan også være at han forstod det, men bare presiserte at vektoren hadde negativ retning. En elev svarte at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ var parallelle med y fordi de aldri ville skjære hverandre. En elev svarte $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ uten begrunnelse og en elev mente at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ var lik linja y på grunn av at vektorene og linja hadde samme stigningstall. En elev avga ikke svar.

Flere av elevene sa at vektorene var lik linja, men en vektor kan aldri være lik en linje. Av denne oppgaven synes jeg det ser ut som om noen elever blander parallellitet og likhet, men samtidig virker det som at flere elever forstår egenskapene ved parallellitet, som var hensikten med oppgaven. Jeg hadde sett for meg at elevene skulle svare ut i fra vektorene nevnt i oppgave 2a, men det gjorde de ikke. For å finne ut om elevene har kunnskap om at to vektorer kan være parallelle, men ikke like, slik som $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$, vil jeg presisere dette i oppgaveteksten.

Oppgave 2c

Tre elever svarte $[0,0]$etter å ha regnet det ut. En av dem kommenterte at dette var det samme som $\vec{0}$, men to av dem ga ingen referanse til $\vec{0}$. Det kan være fordi de syntes vektorkoordinatene var et godt svar og ikke behøvde å nevne nullvektoren. Det kan også hende at elevene ikke kjente igjen at dette var nullvektoren. Det vites ikke. To elever regnet ut og fikk svaret 0. De ga ingen referanse til vektorkoordinater i svaret, selv om de hadde regnestykker med koordinater. Da kan man stille seg spørsmål om de mente $\vec{0}$, men glemte å sette på vektortegnet, eller om de bare mente at summen ble 0. Elevene regnet seg frem til dette, men de skrev bare opp regnestykket med koordinater og videre at svaret var 0. Hvordan de kom frem til svaret er usikkert, for det var ingen utregning. En annen elev som også fikk svaret 0 argumenterte med at to og to vektorer var parallelle, men motsatt retta. Hvorvidt elevene forstod at dette hadde med $\vec{0}$ å gjøre er usikkert. To elever fikk helt andre svar. Den ene fikk svaret $[2,8]$ ved å regne ut. Årsaken var at elevene bruker koordinatene til $\overrightarrow{DC}$ i stedet for $\overrightarrow{CD}$. Den andre hadde en fortegnsfeil i utregningen som ga feil vektorkoordinater, og eleven endte opp med svaret $[-6,0]$. På grunn av regnefeilen er det ikke mulig å si noe om elevenes kjennskap til eller forståelse av $\vec{0}$.

Oppgave 2d
Fire elever svarte ikke på oppgaven, der en av dem kommenterte at de ikke har lært det enda. To elever regnet det ut ved å bruke vektorkoordinatene: $AB = DC = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3{,}16cm$, og samme prosedyre for den andre lengden. En annen elev regnet ut på samme måte og skrev opp de samme tallene, men på grunn av regnefeil fikk eleven feil svar. Jeg tror alle som svarte på oppgaven har forstått hvordan man regner ut lengden av en vektor, men om de bare kan prosedyren eller om de forstår hvorfor de regner ut som de gjør kan jeg ikke si noe om. Den ene av elevene kommenterte at han bruker en formel. En elev fant lengden ved å ta utgangspunkt i punktene i stedet for vektorkoordinatene og fikk rett svar. Jeg kan ikke si noe om elevenes forståelse av vektorers lengde ut i fra oppgaven. Den siste eleven løste oppgaven ved å si at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow AB = DC$ og $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \rightarrow AD = BC$. Jeg kan ikke si om eleven visste hvordan man regnet ut lengden av vektorer, men det er nærliggende å tro at eleven ikke kunne det, for oppgaven var ganske tydelig på at elevene skulle regne ut lengdene på sidene i figuren ABCD.

Oppgave 3
Elevene hadde ganske store problemer med denne oppgaven. Det kan skyldes at læreren ikke har fokusert på denne typen oppgaver i boken fordi ingen av elevene hadde fysikk som valgfag, og læreren vurderte oppgavene som mer rettet mot fysikk enn matematikk. En elev hadde riktig tegning, men svarte at flyet bruker 1 time på å nå bestemmelsesstedet. Eleven forklarte ikke hvor flyet var etter 1 time. En annen elev fant ut at strekningen mellom A og B var 600 km, vinden flyttet flyet 2,49 km, og at flyet hadde fløyet 602,49 km. Eleven svarte ikke hvor flyet befant seg når det hadde flydd 1 time. En annen elev svarte at vinden flytter flyet 4,17 km øst for B etter 1 h. Eleven hadde av en eller annen grunn fått et annet tall på vindstyrken, men det virket som om han har forstått prinsippet med oppgaven. En elev regnet ut ved hjelp av formelen $s = v * t$ og fant ut at flyet var etter en time 54 km øst for B. Denne eleven oppga riktig svar og hadde en riktig utregning. Det kan se ut som at eleven forstod hva de ulike tallene i oppgaven betød og leste oppgaven godt nok til å forstå at det var flyets posisjon etter 1 time oppgaven spurte etter. En annen elev regnet ut at 15 m/s tilsvarer 54km/h, og det var hele svaret. Hva eleven mente med 54 km/h vet jeg ikke, så svaret var ikke tilfredsstillende. Det kan virke som at det var det eneste eleven klarte med oppgaven og at han ga opp å regne på det. En elev ga ikke noe svar, mens to elever fant ut at $600km + 54km = 654km$. Jeg er ikke sikker på hvorfor elevene tror at det er et svar, men det kan ha sammenheng med vektorsum og vektorkoordinater. Det er vanskelig å si hva elevene egentlig kan om temaet. En elev svarte at flyet er 54km fra B, men presiserte ikke retningen. Jeg kan tenke meg at eleven så det på tegningen sin, men ikke så behovet for å skrive det. Flyet er jo 54 km fra B likevel. Jeg kan tenke meg å presisere hva denne oppgaven spør etter til neste test, for at flere elever skal kunne klare å løse den.

Oppgave 4a
Oppgaven ser ut til å ha vært ganske enkel for elevene. Tre elever skrev ingen utregning, men skrev vektorene og deres koordinater direkte på svararket. Jeg kan ikke si noen ting om hva de har tenkt. Det kan være at de talte seg frem til svaret og skrev det opp. Tre elever regnet ut ved å bruke at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ og tilsvarende for de to andre vektorene. Jeg tror elevene tok utgangspunkt i punktene siden deres koordinater var oppgitt og brukt en formel de har lært i undervisningen. En av de tre elevene løste kun $\overrightarrow{AB}$ på den måten, og skrev at på de resterende vektorene talte avstanden i koordinatsystemet og kom frem til vektorene på den måten. Det kan hende eleven ønsket å vise at han behersket utregningen, men talte på de to andre, for det var mindre å skrive eller mindre tidkrevende. Tre elever regnet ut ved hjelp av punktene, at

$\overrightarrow{AB} = (2,-2) - (-1,-4) = [3,2]$ osv. De fikk alle tre rett svar. Jeg tror elevene fant en metode som de likte, og så brukte den. Jeg klarer ikke si så mye om hvordan elevene tenker, men ut i fra svarene ser det ut til at alle har ferdigheter som gjør at de klarer å finne koordinatene til en vektor mellom to punkt.

Oppgave 4b

Elevene løste oppgaven på ganske forskjellige måter, og bare noen få ga et fullgodt svar. To elever løste oppgaven ved å skrive at $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ fordi M var midt på $\overrightarrow{AC}$. Videre skrev elevene at $\frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{[-4,6]}{2} = [3,2]$. Den ene eleven skriver her at $M = (-3,1)$, mens den andre eleven regnet videre ut at $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = [-1,-4] + [-2,3] = [-3,-1]$ som ga at $M = (-3,1)$. Det virker som om begge elevene hadde rimelig god forståelse for det de holder på med. Likevel kan det være at den ene eleven tok en liten snarvei på slutten fordi han ikke var sikker på hvordan han skulle regne det ut. To andre elever regnet ikke ut, og oppga heller ikke noen koordinater på punktet M, men skrev $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ der $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$. Mer skrev de ikke. Jeg er ikke sikker på hvorfor de skrev det slik, men det kan tenkes at elevene mente de hadde funnet punktet M, selv om oppgaven tydelig spurte etter koordinatene til M. Det kan også være at elevene ikke forstod hvordan de skulle komme seg videre på oppgaven, men jeg kan ikke si noe sikkert. To elever svarte at $\overrightarrow{AM} = [-2,3]$, men ikke noe videre. Jeg vet ikke hvordan de kom fram til dette eller hva de har tenkt. Det kan hende elevene syntes oppgaven var for vanskelig og dermed ikke prøvde seg på noe mer. Det er ikke ut til at elevene visste hvordan de fant midtpunktet på $\overrightarrow{AC}$, for de ga ikke noe forsøk i det hele tatt. En elev gjorde et forsøk med å skrive at $M = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}[-1,-4] = [-0.5,-2]$. Eleven brukte feil koordinater på $\overrightarrow{AC}$, og fikk dermed helt feil svar. Det kan tenkes eleven ga opp etter at tallene ikke stemte med tegningen. Det er vanskelig å si hvordan eleven tenkte. Eleven klarte å løse veldig mange andre oppgaver, så det er nærliggende å tro at det var en slurvefeil som fikk eleven til å stoppe opp. En annen elev løste oppgaven ved å bruke $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, og fikk rett svar, men krysset over det. Det er vanskelig å kunne si noe om hvorfor eleven gjorde det, men det kan være at eleven forsøkte noe, og så krysset over fordi han trodde det var feil. Det er ikke lett å si noe om denne situasjonen. Den siste eleven regnet ut hvor M var ut i fra punktkoordinatene, helt uten å ta hensyn til vektorregning: $M = \frac{A+C}{2} = \frac{(-1,-4)+(-5,2)}{2} = \frac{(-6,-2)}{2} = (-3,-1)$. Det ser ut til at eleven fant en metode helt selv, i og med at den ikke liknet på noen av de andre elevenes utregninger. Det kan tyde på en god forståelse for hva et midtpunkt er og sammenhengen mellom to punkter.

Ut i fra oppgaven er det vanskelig å si noe om hva elevene forstår og kan, men jeg ser hvorvidt de har ferdighetene til å regne ut et midtpunkt og om de forstår hva et midtpunkt er.

Oppgave 4c

Tre elever svarte ikke på oppgaven. Fire elever svarte at $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AB} = 2[3,2] = [6,4]$ To av dem tok videre utgangspunkt i M, tegnet inn $\overrightarrow{MD}$ og fant D på den måten, mens en annen regnet videre $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MO}$ og kom på den måten frem til at $D = (3,3)$. En annen elev svarte ved å blande punkter og vektorer på følgende måte: $D = M + 2\overrightarrow{AB} = (-3,-1) + (6,4) = (3,3)$. Det virker som om elevene hadde god forståelse for hvordan de finner et punkt ut i fra gitte kriterier, og godt begrep om hva egenskapene til et trapes. Den siste eleven løste oppgaven ved å først finne $\overrightarrow{AM}$, så regnet han ut av $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AM} = 2\frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \overrightarrow{AC}$. Eleven kommenterte at $\overrightarrow{MD}$ er parallell med $\overrightarrow{AB}$ og går i positiv x-retning. Deretter skrev han at $\overrightarrow{MD} = [6,4] \rightarrow D = (3,3)$. Det ser ut til at alle elevene som svarte på oppgaven har hatt en forståelse for hvordan man finner er punkt ut i fra litt informasjon, men elevene ser ut til å ha tenkt på en annen måte enn meg. Jeg hadde sett for meg at alle elevene skulle svare med punktkoordinatene til D, men oppgaveteksten ber ikke elevene gjøre det. Det er tydelig at elevene har funnet D når de oppgir $\overrightarrow{MD}$ også, men på en annen måte enn jeg hadde tenkt. Her blir jeg nødt til å revidere oppgaven.

Oppgave 5
Tre elever svarte ikke på oppgaven. Jeg tror årsaken kan være både tidsmangel og at de ikke klarte eller forstod oppgaven. Under elevenes arbeid med oppgaven sa de tydelig ifra at de ikke forstod hva oppgaven gikk ut på. Tre elever tegnet opp figuren som beskrevet i oppgaven, men de gjorde ikke noe mer. En elev hadde rett tegning, satte inn 4 for x og 6 for y i formelen i oppgaveteksten og skrev at vi fikk en sammenheng mellom de to minste trekantene i figuren der $[x, y]$var den minste trekanten og ved $t = 2$ blir $[tx, ty]$ den neste trekanten, og de var formlike. Jeg synes det var vanskelig å bedømme hvorvidt denne eleven så ut til å forstå oppgaven. For det første brukte eleven feil koordinater, men tanken var jo riktig. Jeg synes ikke begrunnelsen var en god besvarelse, for eleven kommenterte bare at trekantene var formlike, ikke at formlikheten viste at formelen var riktig.

En annen elev skrev at $\vec{b}$ var to ganger så lang som $\vec{a}$, og hvis man satt 2 utenfor [4,2], og ganget inn, så fikk man $\vec{b}$. Dette tilsvarte $t[x, y] = [tx, ty]$. Jeg tror eleven forstod formelen, men på grunn av manglende referanser til formlike trekanter, kan det være at eleven ikke skjønte hva formlike trekanter hadde å gjøre med oppgaven. Det kan jeg ikke si med sikkerhet. En elev tegnet opp vektorene fra oppgaveteksten, men ikke alle ut i fra origo. Eleven kommenterte at trekantene var formlike, men ga ikke noen besvarelse i forhold til formelen. Jeg tror ikke eleven helt skjønte oppgaven, med det kan ha sammenheng med at eleven fikk en helt annen figur enn de andre elevene og meg.

Denne oppgaven virket veldig vanskelig for elevene. Jeg kan presisere i oppgaveteksten at vektorene skal tegnes ut i fra origo, men det er ikke sikkert det hjelper. Oppgaven er nok litt annerledes enn elevene er vant med, men det betyr ikke at den bør fjernes fra testen. Jeg tror oppgaven kan gi meg en pekepinn på hvor abstrakt elevene klarer å tenke, og om de klarer å sette seg inn i hva formelen egentlig gjør. Jeg tror alle elevene klarer å forklare at regelen gjelder i det spesielle tilfellet oppgaven nevner, men vanskeligheten oppstår når de skal forklare ved bruk av formlike trekanter. Det er ikke å forvente at alle elever skal klare alle oppgavene på testen, rett og slett fordi den skal brukes til karaktersetting i tillegg til min datainnsamling, så denne oppgaven er det ikke alle som vil klare.

Generelt
Alle feil elevene gjør som kan være fordi de ikke forstår temaet eller oppgavestillingen, men det kan også være at elevene gjør slurvefeil. Dermed er det vanskelig å kunne si sikkert om elevene forstår et tema, eller ikke. Det er også vanskelig å vite hva elevene tenker når de løser oppgavene. Jeg kan ikke vite hva noen tenker, men jeg kan ane og tro. Dette vil være viktig å huske på når jeg skal analysere testen fra forskningsutvalget.

Pilottesten har gitt meg mye informasjon om hvordan jeg tenker i forhold til enkelte elever, for jeg har en helt annen måte å forstå enkelte oppgaver på. Dette gjør at jeg må presisere enkelte oppgaver for å få oppgavene som jeg hadde tenkt i utgangspunktet. Det kan hende det er lurt å la enkelte oppgaver være som de er, selv om elevene løste de annerledes enn hva jeg hadde tenkt, for elevenes svar kan ha gitt meg god informasjon likevel.

Vedlegg 7: Transkripsjonsnøkkel

Tabell 36: Transkripsjonsnøkkel

Forklaring	**Eksempel**
Utvidede klammeparenteser markerer overlapping mellom utsagn	A: Men jeg sa jo at [du ikke skulle gjøre det. B: [Jeg vet hva du sa.
Likhetstegn viser at en person overtar ordet etter det andre	A: Det var så koselig = B: = Ja, dette må vi gjøre igjen
Tall i parenteser markerer pauser på tre sekunder eller mer. Pausene er avrundet til nærmeste hele sekund. Punktum inni parentesen angir en pause som er under tre sekunder.	A: Hm (.) Jeg er ikke sikker. (3) Jo, nå vet jeg det.
En eller flere kolon markerer en forlengelse av den vokalen de står etter.	A: Ne:i, jeg tror ikke det.
Understreking angir ord som er uttalt med større vekt; ord skrevet med store bokstaver er uttalt med et høyere volum enn samtalen rundt utsagnet.	A: Det er <u>kun</u> din feil. B: Det er det IKKE!
Parenteser markerer at materialet inne i klammene ikke kan høres, eller at det er tvil om nøyaktigheten.	A: Hva ( ) i går? B: Jeg gikk på (ski).
Notasjoner for at noen ler	Hehe Latter
Klammeparenteser indikerer at transkripsjon har blitt utelatt med vilje. Materiellet i klammeparenteser er anonymisering av det som blir sagt.	A: Kan du hjelpe meg, [ ]?

I transkripsjonene har alle elevene fiktive navn. Læreren kalles Lær og jeg kalles Gun. Alle elevene har fått tildelt navn på tre bokstaver der navnet korresponderer med elevens kjønn. Navnene blir brukt gjennom hele masteroppgaven.

Vedlegg 8: Transkribert materiale som ikke er presentert i oppgaven

Hendelsen er fra andre undervisningstime i den andre undervisningsuken.
Læreren går igjennom tre regneregler for produkt mellom tall og vektorer. De skal nå bevise den ene regelen.

Tabell 37: Transkribert materiale som ikke er presentert i oppgaven

Nr	Tid	Hvem	Utsagn	Handling	Kommentar
1	03:27	Lær	Vi skal nå bevise det som står på s. 169, den første regelen		
2	03:33		(4)	Lærer skriver på tavlen. Elevene gjør seg klare til å skrive beviset inn i boken si.	
3	03:37	Ask	(Få sjå ka dei kallar eit bevis inni her)		
4	03:37	Ida	Hehe		
5	03:39		(9)		
6	03:48	Lær	Det er b vektor, (skal vi se om dere finner det) er lik t gange a vektor pluss t ganger b vektor		
7	03:57	Ask	Okei, tar det derre derre stor plass?		
8	04:01	Lær	Ja, litt, litt plass tar det		
9	04:02	(Ida)	()		
10	04:04	Lær	De har brukt nesten en side i boken på det		
11	04:06		(3)		
12	04:09	Lær	Da ser vi at det er to vektorer det er snakk om, den ene er a vektor og den andre b vektor, så da starter vi med å tegne opp de to vektorene. Der tegner jeg sånn at det ser sånn cirka ut som det gjorde i boken: Den er a vektor (.) Og så tar vi med en gang og så legger i sammen i tegninga så vi tar og så tegner b vektor rett bakom a vektor.	Læreren tegner og skriver på tavlen. elevene skriver i bøkene sine	
13	04:33		(3)		
14	04:36	Lær	Der har vi a pluss b vektor (.) Hvis vi nå setter på navn på dette her at vi kan kalle starten (.) for a og så der a vektor slutter og b begynner for b og så setter vi opp C der (.) Hvis vi da trekker linja (.) imellom a og c, så ser vi at (.) og tegner på en vektor der, så får vi at ac vektor den er lik		
15	05:04		(2)		
16	05:06	Lær	Ja, []		
17	05:07	Dag	A pluss b		
18	05:08	Lær	Ja, den er lik [a pluss b ja og så skal vi egentlig si a vektor pluss b vektor,		

			det er helt riktig.		
19	05:08	Dag	[eller a vektor pluss b vektor		
20	05:14		(2)		
21	05:16	Lær	Hvis vi nå tar og så forlenger vi (.)både (.) a vektor og (3) og så forlenger vi ac vektor (3) og så tar vi og så tegner opp de, vi kaller den slutten for d og den for e og da skal vi tegne den slik at de er [parallell med vektor b		
22	05:44	Ask	[det følger jo ikke ()	Setter seg med armene i kors og lager en oppgitt mine.	
23	05:47	Ida	Koffor det?		
24	05:48	Ask	eg får ikkje plass til noko oppi der	Peker i boken si	Ask virker frustrert for han har for liten plass til tegningen i boken si
25	05:49	Lær	Er dere med, altså ble det ikke helt kanskje parallelt på tegninga mi, men disse to skal altså nå være parallelle. Vi har altså laga bd vektor, jeg har ikke tegna på vektorpil, det burde jeg jo gjøre, og så har vi da (.) at den og så forlenge den linja her, og så forlenget den på en sånn måte at når vi da tegner opp de, så er den er parallell med bc		
26	06:11		(6)	Læreren ser i læreboken, elevene skriver.	
27	06:17	Lær	Sånn altså, vi kan jo skrive opp det at (.) bc (.) den er da parallell med d (.) e, sånn at vi veit det	Hun skriver videre på tavlen. Hun lager en skillestrek	
28	06:25	Ask	Det blir ikkje min heller (sånn atte det gjør noe)		
29	06:31	Ida	Heh		
30	06:32	Lær	Hvis vi da finner ad vektor og det, nå bare tegner jeg en figur, jeg har ikke sagt liksom hvor mye lenger ad er enn ab, men jeg kan jo si hvertfall at ad	Snakker og peker på tegningen på tavlen	

			den er jo lenger enn ab, og vi kan finne et eller annet tall som vi kan gange med ab for å så finne ad, ikke sant	Skriver videre på tavlen	
31	06:51	Ida	(.) ne:i ()		
32	06:52	Lær	Og da kan vi for eksempel kalle det tallet for t. Vi veit ikke hvor stort det er, men vi kan da ta og gange ab med et eller annet tall for å så finne ad. Nå regner vi helt generelt, så vi har jo ikke liksom at den er tre eller fire eller noe sånt, det vet vi ikke, [med det er bare		
33	07:06	Ask	[ka var det du gjor no, tegna du ein strek til bare (.) eller har du berre ()	Peker mot tavlen	Ask så ikke at hun tegnet skillestreken og forstår ikke sammenhengen på tavlen
34	07:10	Lær	() Den streken er bare liksom bare for å så skille [() og så fortsette bortover		
35	07:14	Ask	[Okei		
36	07:15	Ask	()		
37	07:17	Lær	Slags sideskift		
38	07:18		(2)		
39	07:20	Lær	Og ab vektor det vet vi er det samme som		
40	07:22		(3)		Lærer venter på svar
41	07:25	Lær	a[b		
42	07:25	Ida	[a, eller vektor a		
43	07:26	Lær	Ja		
44	07:26		(4)		
45	07:30	Ask	Hæ?		
46	07:31	Lær	Så da kan vi skrive t gange a vektor		
47	07:32	Ask	Ja, ptjæh		Ask gjør seg til litt. usikkert om han egentlig forstod.
48	07:34	Ida	Hm		
49	07:35	Ask	U?		
50	07:36	Ida	()		
51	07:38	Lær	Nå [har vi to trekanter i figuren, og hva kan vi si om de to trekantene?		
52	07:39	Ask	[(Greit)		
53	07:43		(7)	Noen elever ser på tavlen,	Læreren venter på svar

				andre skriver i bøkene sine	
54	07:50	Eli	Formlike		
55	07:51	Lær	Ja		
56	07:51	Ask	Dei har to felles e:h (.) nei, eg veit [ikkje		
57	07:53	Pål	[dei er formlike=		
58	07:55	Lær	=de er formlike, og hvorfor er de formlike, hvordan kan vi si det, kan du klare det []		
59	08:01	Eli	Dei har ein felles vinkel i a:[og den e: bc og de e parallell, så er det jo berre () forlengelse av det (på en måte) [eller dæm e, ja	Demonstere r med armene når hun prater	
60	08:03	Lær	[Mhm		
61	08:10	Lær	[ja		
62	08:12	Lær	Ja, vi har to felles vinkler, fordi atte a den er jo, eller det er en felles vinkel her, men det blir jo da de er jo lik, for den lille trekanten og den store trekanten og i tillegg så er disse to sidene parallelle og da veit vi, da blir jo disse (.) den vinkeln her også lik, og da har vi to like vinkler, da veit vi at de er formlike, helt riktig. Og så veit vi også hva forholdet er i mellom de to trekantene, hva er forholdstallet mellom de to trekantene her?		
63	08:38	Ask	Er ikkje vinkel c og e lik og?		
64	08:41	Lær	Jo (.) Dem blir også like (.) Helt like		
65	08:43	()	()		
66	08:45	Lær	Hva er forholdstallet []=		
67	08:47	Tom	=Eg veit ikkje, ein?		
68	08:48	Ida	Kan du ta ()		
69	08:49	Lær	N:[ei, for det veit vi ikke, for vi kan ikke bruke tallet, generelt, ja		
70	08:50	(Tom)	[([)		
71	08:50	Pål	[ab delt på bd		
72	08:55	Lær	Ja(.) Ja		
73	08:59	Pål	E det det?		
74	09:00	Lær	Hvis vi tar		
75	09:02	Ask	Herlig	Nikker til Pål	
76	09:03	Lær	Ab (.) delt på ad		
77	09:06	Pål	Ja		
78	09:07	(Alf)	(Kor kom den t'en der frå?)		
79	09:09	()	[()		
80	09:09	()	[()		

81	09:10	Pål	Det er u, det er ukjent		
82	09:12	()	([)		
83	09:13	()	[([)		
84	09:15	Ask	[Det er et eller anna tall, fem eller [to eller	Snakker til Alf	
85	09:16	Eli	[Ja, men ()		
86	09:18	Lær	Hvis vi tar s:j vi finner forholdet, nå var det, dette er litt sånn [(på siden) s:j s:j, hvis vi tar ad delt på ab, og ad det er det samme som		Læreren hysjer på elevene
87	09:22	Ask	[()		Alf henger ikke med. Ask prøver å forklare han, men læreren ber han være stille.
88	09:29	Pål	E:m t ganger a		
89	09:31	Lær	Ja		
90	09:31	Ask	No er det ikkje noko vektorstrekar		
91	09:33	Lær	Det kan vi godt ha med, men nå ser eg egentlig mest på sidene i: trekanten, så da var det ikkje så nøye å ha det, men vi bør egentlig ha det med siden det er vektorer vi holder på med(.) Os, hva blir tallet da?		
92	09:45	Pål	T		
93	09:46	Lær	Ja (.) Så <u>forholdstallet</u> imellom de to her, altså det betyr at den store trekanten er t ganger så stor som den lille (.) hvis vi ser på sidene		
94	09:56	Pål	Åja		
95	09:57		(5)	Læreren skriver på tavlen	
96	10:02	Lær	Den der er litt sånn parentes den utregninga der, den er sånn som vi egentlig kan tenke. DE, hvor stor er de		
97	10:12	Ida	Akkurat passe		Kommentaren kan være et tegn på kjedsomhet.
98	10:13	Lær	Jahaha, akkurat passe stor, det kan du [si		
99	10:14	Mia	[b vektor gange [t		
100	10:16	Pål	[t gange bc		
101	10:18	Lær	Mhm (.) det er fordi vi veit at forholdet i denne trekanten er t ikke	Pål sukker	

			sant, vi veit at ad den er t ganger så lang som ab og da må de være t ganger så lang som bc		
102	10:34		(6)		
103	10:40	Lær	Er alle med på det?		
104	10:40		(2)		Læreren venter på svar
105	10:42	Pål	Ja		
106	10:43	Lær	Er det logisk?		
107	10:43		(3)		Læreren får ikke noe svar, ingen nikk, ingenting, bortsett fra Pål. Hun går likevel videre
108	10:46	Lær	Og da tar vi og så setter inn for bc og hva kan vi putte inn der?		
109	10:50	Eli	B vektor		
110	10:51	Lær	Ja, der kan vi putte inn b vektor (3) Så de vektor er altså det samme som t gange b vektor, og ad vektor er det samme som t gange a vektor, og da er vi kommet til ae vektor, og der har vi ikke sagt noe ennå		
111	11:04		(3)		Læreren venter på svar
112	11:07	Ask	A (.) e er lik t gange ac		
113	11:11	Lær	Mhm t gange ac vektor, men så har vi lyst til å så bruke a’er og b’er		
114	11:17		(3)		Venter på nytt svar
115	11:20	Pål	A pluss b		
116	11:22	Lær	Mhm. Vi veit at ac vektor, det er det samme som a pluss b, vi har skrevet det her, vi ser det også på figuren, a pluss b, så kan vi putte inn a pluss b i stedet for ac		
117	11:32		(10)	Læreren skriver på tavlen	
118	11:42	Lær	Da har vi ett uttrykk for ae vektor, så ser vi det er det samme som t ganger a vektor pluss b vektor. Så vet vi også at ae vektor, (.) det er det samme, hvis vi ser på den store trekanten, hva får vi da?		
119	11:53		(4)		Venter på svar igjen

120	11:57	Ask	Hæ?		
121	11:58	Lær	Hvis vi skal legge sammen ae, finne ae vektor og så ser vi på den sto:re trekanten. hvilke to vektorer, hvilke to vektorer legger vi i sammen da?		
122	12:05	Pål	Mm[mm t a c og t: ce e:h ()		
123	12:06	Ask	[Ac og ce		
124	12:10	Ask	Er ikkje det det, då? Ac pluss ce		
125	12:12	Lær	AC?		
126	12:13	Pål	([)		
127	12:14	Lær	[Hvis vi ser den sto:re trekanten e oppi her,		
128	12:17	Pål	T gange b pluss t [gange a		
129	12:19	()	[()		
130	12:20	Lær	Ja, jeg tenkte bare så enkelt foreløpig, vi tar bare ad pluss de		
131	12:25	Ask	Åja		
132	12:25		(4)		
133	12:29	Ask	(Men er ikke) det det samme som ac og ce?		Ask henvender seg til Ida
134	12:31	Ida	Jo		
135	12:31	Lær	Og SÅ kan vi sette inn hvor lang ad er		
136	12:35	Ask	Er det det samme som ac og ce, kunne eg ha skreve det og?		
137	12:37	Pål	Ta då liksom		
138	12:39	Lær	Ac:=		
139	12:41	Ask	=Pluss ce det er jo		
140	12:42	Ida	Det blir jo[()		
141	12:	Lær	[JA, DET KUNNE DU, men du veit så lite om ce at derfor så lønner det seg ikke, men at det er jo riktig		
142	12:47		(2)		
143	12:49	Pål	Ja, ad er jo det samme som t gange a vektor,	Peker på tavlen	
144	12:52	Lær	Mhm		
145	12:53	Pål	Pluss de som va: (.) t pluss b, vektor b		
146	12:58	Lær	Gange vektor b, ja		
147	13:00	Pål	Ja ()		
148	13:01	Lær	Ja, da har vi regnet ut ae, ae vektor på to forskjellige måter og fått to forskjellige svar, som ser ikke helt like ut i hvert fall, og hvis både dette her skal være ae vektor, og dette her skal være ae vektor, hva vet vi om de her da?		
149	13:17	Lær	Ja, []		
150	13:17	Pål	De må vere like		

151	13:18	Lær	Ja, da må de være like		
152	13:19	Ida	(det e jo)	Rekker opp handa	
153	13:21	Lær	Og da vet vi altså siden denne står for ae vektor og denne her er ae vektor, så finner vi da ut at t gange a vektor pluss b vektor må være likt med t ganger a vektor pluss t gange b vektor	Skriver på tavlen	
154	13:37	Ask	Vent nå: litt he:r		Snakker mest til seg selv
155	13:38		(3)		
156	13:41	Lær	Så vi har altså på to forskjellige måter regna oss fram til hva ae vektor er og da må jo de to svarene være like og da fant vi ut at den ene måten å regne ut ae vektor på er t gange a vektor pluss b vektor og den andre måten var visst t gange a vektor pluss t gange b vektor og da må de to være like. (.) Hang dere med på mellomregninga, eller er det noe dere hvis dere vil spørre om?	Peker på det hun har skrevet på tavlen	
157	14:08	Ida	Er vi ferdige då?		
158	14:10	Lær	Da er vi ferdig med beviset		

Etter episoden fortsetter elevene å løse oppgaver fra læreboken.

Vedlegg 9: Oversikt over innhold og tidsbruk i undervisningen

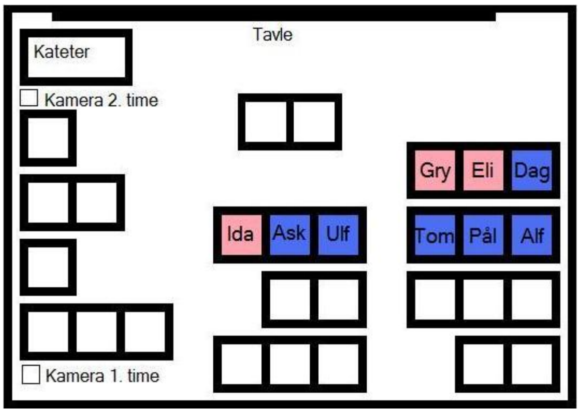
Nedenfor følger en oversikt over innhold og tidsbruk i undervisningen. Formidling betyr at læreren introduserer nytt stoff og underviser fra tavlen. Arbeid betyr den tiden elevene hadde disponibelt til å arbeide med oppgaver, enten alene eller med andre. Gjennomgang betyr at læreren har gått igjennom oppgaver på tavlen, enten fra leksa eller som elevene strever med i timen.

Tabell 38: Oversikt over innhold og tidsbruk i undervisningen

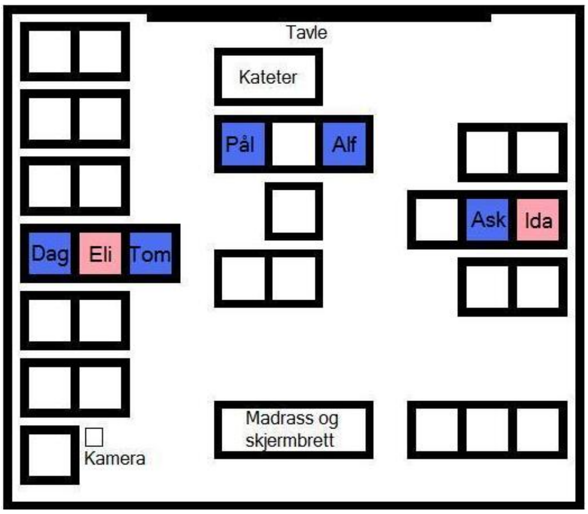
Uke nr.	Time nr.	Antall minutter	Arbeidsmetode	Tema
1	1	22	formidling	kapittel 5.1
		14	arbeid	
	2	15	formidling	kapittel 5.2
		25	arbeid	
	3	7	formidling	kapittel 5.2 (bevis s. 161)
		30	arbeid	
	4	20	gjennomgang	oppgave 5.24
		8	formidling	5.3
		12	arbeid	
	5	11	arbeid	
		5	gjennomgang	oppgave 5.31
		24	arbeid	
2	1	15	formidling	kapittel 5.4 s. 165-166
		22	arbeid	
	2	13	formidling	kapittel 5.4 s. 167-169
		26	arbeid	
	3	25	gjennomgang	oppgave 5.44, oppgave 5.45
		8	formidling	kapittel 5.5
		4	arbeid	
	4	5	gjennomgang	eksempel s. 172
		9	formidling	kapittel 5.6
		25	arbeid	
	5	17	formidling	kapittel 5.6 s. 176
		20	arbeid	
3	1	17	formidling	kapittel 5.7
		21	arbeid	
	2	21	formidling	kapittel 5.8
		18	arbeid	
	3	39	arbeid	øve til prøven
	4	100	prøve	
	5			

Vedlegg 10: Klasseromsplassering

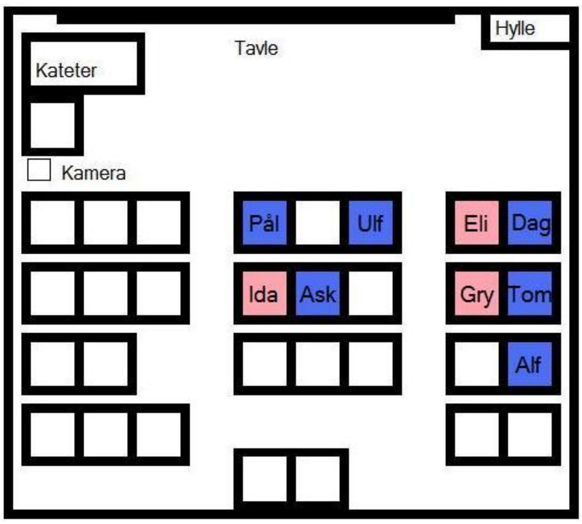
Nedenfor følger bilder av elevenes plassering de ulike undervisningstimene. Videokameraets plassering er markert på bildene. Klasserommene brukt mandag og torsdag lå i hovedbygningen, mens rommet som ble brukt onsdager lå i en sidebygning.



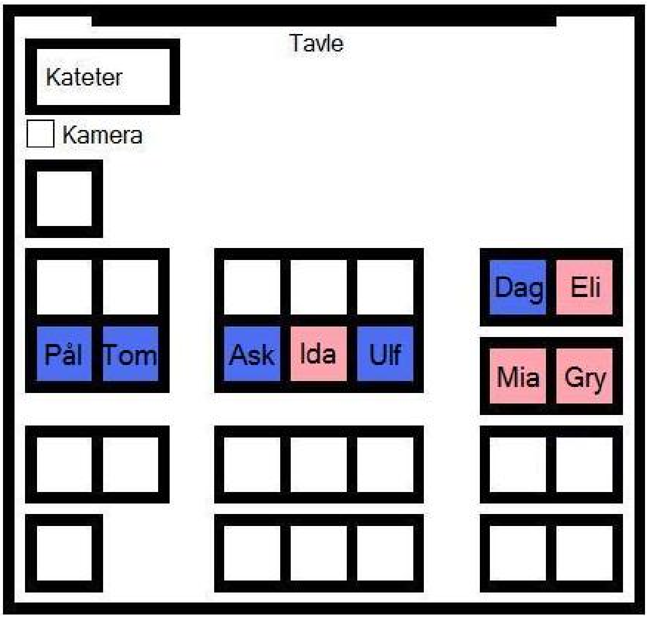
Figur 33: Uke 1, første og andre time



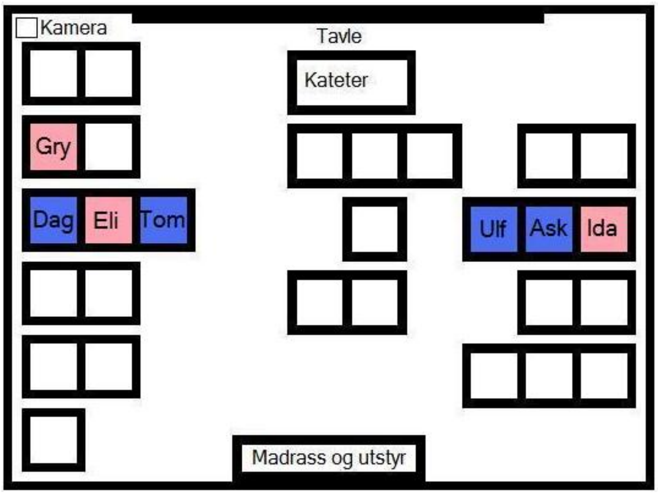
Figur 34: Uke 1, tredje time



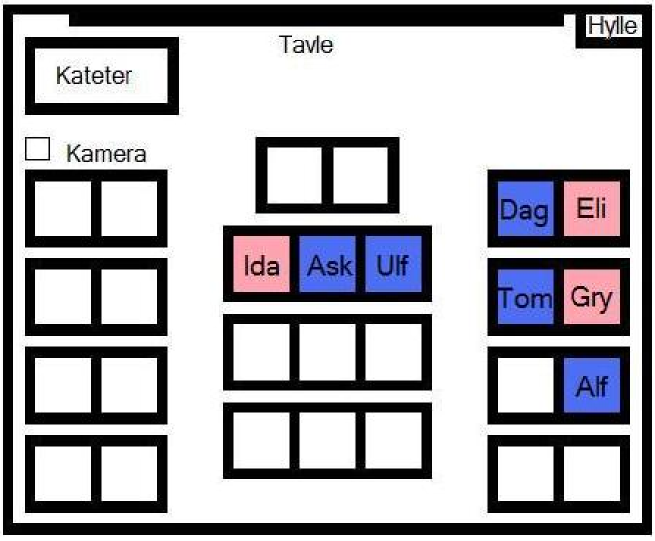
Figur 35: Uke 1, fjerde og femte time



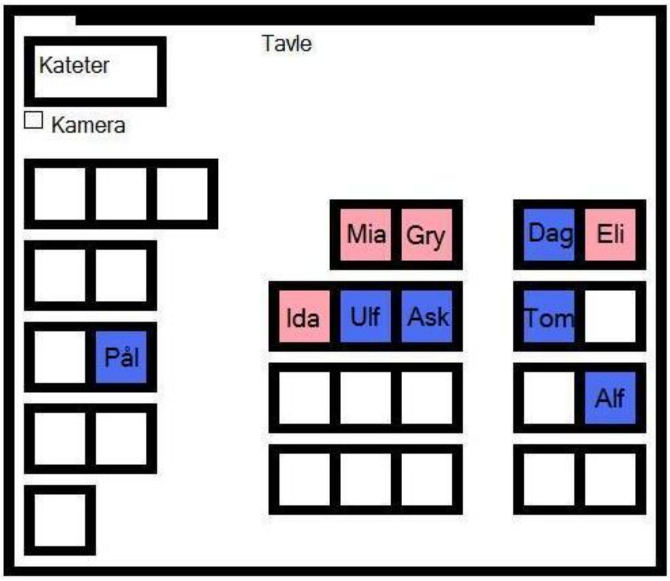
Figur 36: Uke 2, første og andre time



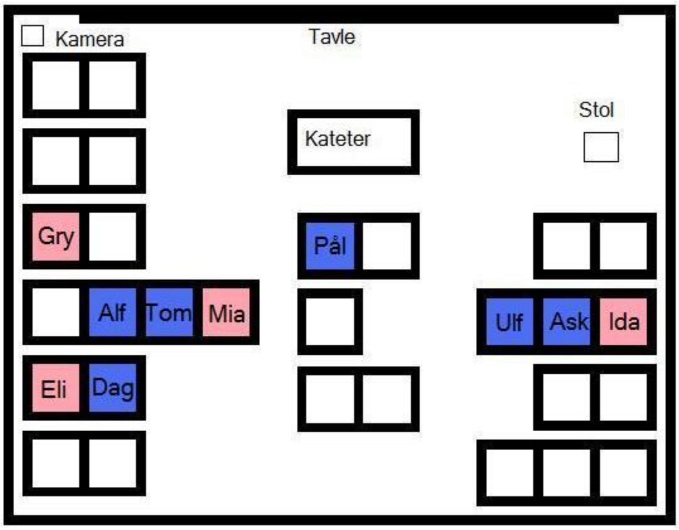
Figur 37: Uke 2, tredje time



Figur 38: Uke 2, fjerde og femte time



Figur 39: Uke 3, første og andre time



Figur 40: Uke 3, tredje time

Vedlegg 11: Presentasjon av elevintervju

Under presentasjonen av intervjuene oppdaget jeg at flere av spørsmålene var interessante, men ikke ga informasjon relevant til problemstillingene i masteroppgaven, slik som beskrevet i 5.3.1 Elevintervju. Spørsmålene er like fullt en del av avhandlingen og bidrar til et helhetsinntrykk av elevene. Nedenfor presenteres spørsmålene som ble stilt under intervjuet, men som ikke bidrar til relevant informasjon i forhold til problemstillingene.

Spørsmål 4: Hva synes du om matematikkfaget?
Hensikten var å vite hva elevene syntes om faget. Interessen for faget kunne påvirke ferdighetsnivået og omvendt. Hvis elevene syntes de ikke mestret noen ting i faget kan det tenkes det var vanskelig å motivere seg til å arbeide videre eller mer. Tanken var å finne ut om motivasjon og interesse kunne være en faktor som påvirket elevenes forståelse for matematikk, men det er ikke tema for oppgaven. Spørsmålet er derfor lite relevant i forhold til problemstillingene.

Tabell 39: Svar på spørsmål 4

Elev	**Svar**
Ida	Matematikk er greit så lenge eg forstår det, når man forstår er det moro, hvis ikke er det et drittfag.
Ask	Det er heilt greitt hvis du arbeidar med det, gjer leksane og føl med i timane. Hvis ein sluntrar unna er det ikkje eit greitt fag.
Pål	Det er heil greitt, gøy å finne ut av ting. Fysikk er litt gøyare, for då får du brukt matematikken til å rekne ut konkrete ting.
Ulf	Vanskeleg fordi eg ikkje får det til. Om faget er gøy avhenger av om du får det til eller ikkje.
Dag	(Jeg har glemt å stille Dag dette spørsmålet)

Elevenes interesse for faget ser ut til å være avhengig av graden av mestring. Når de ikke klarer å løse eller forstå oppgaver eller er faget frustrerende, kjedelig og vanskelig, men hvis de forstår og klarer å løse oppgavene er det greit, gøy og moro.

Spørsmål 5: Hvis du ser på disse begrepene og temaene, kan du gi deg selv en karakter på hvert punkt som sier hva du kan om begrepene eller temaene? (Karakterene fra 1-6, der 1 er ingenting og 6 er alt)
Bakgrunnen for spørsmålet var at jeg ville vite hva elevene selv mente de kunne og kjente til. Spørsmålet gir meg informasjon om elevenes oppfatning av egen kunnskap, og jeg kan finne ut om deres oppfatning stemmer overens med prestasjonene på testen. Spørsmålet bidrar ikke til å finne ut hva slags forståelse elevene har for matematikk og kan heller ikke gi meg informasjon om elevenes forhold til læreboken. Slik jeg vurderer det er spørsmålet interessant, men ikke relevant for problemstillingene i studien.

Tabell 40: Svar på spørsmål 5

Begrep\Elev	**Ida**	**Ask**	**Pål**	**Ulf**	**Dag**
Skalar	4	5	5	1	5
Enhetsvektor	2	4	1	2	1, 6 ved hint
Sum av vektorer	3-4	6	6	5	6
Differanse av vektorer	3 eller 4	5	6	5	6
Vektoren mellom to punkt	4	4	5	5	6

Lengden av vektorer	4	4-5	6	4	6
Avstanden mellom to punkt	3-4	5	6	3	6

Elevene har varierende oppfatning av hva de kan. Noen elever mener at de kan middels, andre kan enten alt eller ingenting. I analysen vil jeg se på hva elevene mener de kan opp mot deres prestasjoner på testen.

Spørsmål 6: Kan du fortelle meg hva en vektor er?
Hensikten med spørsmålet var å få innsikt i hvordan elevene oppfatter en vektor. En feilaktig eller lite presis forståelse av begrepet kan påvirke forståelsen for regneregler og andre emner innenfor vektorregning. Spørsmålet kan riktignok fortelle meg om de har en korrekt oppfatning av begrepet vektorer, men bidrar ikke til å klassifisere elevenes matematiske forståelse. Selv om elevene har en feil eller upresis oppfatning av ett begrep kan deres matematiske forståelse både være relasjonsforståelse og instrumentell forståelse. Spørsmålet bidrar ikke til å finne informasjon om problemstillingen.

Tabell 41: Svar på spørsmål 6

Elev	Svar
Ida	En pil med koordinater, med retning og lengde der det har masse å sei.
Ask	En pil som viser retning og lengd.
Pål	Vektor er ein størrelse som har retning og eining (enhet).
Ulf	Det har en retning og verdi.
Dag	Ein vektor er ei lengd med retning.

Flere av elevene virker usikre når de svarer. Flere gir inntrykk av å gjette. De vet at en vektor består av to komponenter, men ikke alle er like sikre selv om de oppgir både lengde og retning. Elevene har lært at en vektor er en størrelse med regning og lengde gjennom læreboken (Oldervoll et al., 2007), men det er kun Pål som svarer at en vektor er en størrelse. Ida og Ask sier at en vektor er en pil, mens Dag mener det er en lengde. Ulf kommenterer bare hva en vektor har, ikke hva det er.

Spørsmål 8: Hva synes du er det beste/ morsomste å arbeide med innenfor vektorregning?
Å vite hva elevene syntes er interessant kan gi meg en pekepinn på hvilke emner elevene interesserer seg for og dermed kanskje har større forståelse for. Hensikten med spørsmålet var å kartlegge interesseområder i vektorregning, men svarene gir informasjon om hva slags oppgavetyper elevene foretrekker. Selv om informasjonen om oppgavetypene gir meg interessant tilleggsinformasjon bidrar ikke spørsmålet til å finne ut av hva slags matematisk forståelse elevene har, eller hvordan de bruker læreboken.

Tabell 42: Svar på spørsmål 8

Elev	**Svar**
Ida	Eg synest ikkje vektorrekning var noko gøy. Eg mestra det berre heilt i begynnelsen når me teikna dei. Det var det lettaste.
Ask	Eg var ganske god på å sette saman to vektorar da. Viss du hadde to vektorar som, nei eg veit ikkje kos eg ska forklare det. Du skulle finne lengda mellom dei med ei tredje vektor. (vektoraddisjon)
Pål	Det må bli oppgåver når ein skal finne ut for eksempel kor lang tid det tar og dei oppgåvene med elva. Likar dei oppgåvene best, for der spør dei om noke virkeleg, ikkje berre tal. Det er oppgåver som har med virkeligheten og gjere da.
Ulf	Oppgåver der det står veldig konkret kva ein skal gjere er greitt, men sånn som elvebredden og når du begynner med cosinus, då var eg ikkje heilt med.

Dag	Det blir den med minst skriving på, så det blir vel sum av vektorer. Viss eg skal like noko, så må eg ha bruk for detta seinare, og vektorar veit eg ikkje om eg kjem til å få bruk for seinare. Eg er litt skeptisk eigentlig, men dess mindre skriving desto betre eigentlig.

Elevene har forskjellig oppfatning av hva som gjør noe morsomt å jobbe med. Selv om både Ask og Dag liker vektoraddisjon best gir de forskjellige begrunnelser. Ask liker vektoraddisjon fordi han mestrer det, Dag fordi det utgjør minst skriving. I tillegg sier Dag at for at han skal like noe må han se hvilken nytte det kan ha for han senere. Ulf liker oppgaver der det står godt beskrevet hva man skal gjøre best. Ida knytter også hva som er morsomt opp til mestring og like derfor tegning av vektorer best. Pål skiller seg ut ved at han liker virkelighetsnære oppgaver.

Spørsmål 9: Hva oppfatter du som vanskeligst/ mest problematisk innenfor vektorregning?
Elevene kan ha mindre forståelse eller prestert dårlige på prøven innenfor emner de syntes er vanskelige eller problematiske. Hensikten med spørsmålet var å kartlegge problemområder innenfor vektorregningen, men informasjonen gir kan ikke bidra med informasjon relatert til problemstillingene.

Tabell 43: Svar på spørsmål 9

Elev	**Svar**
Ida	Når me begynte med sånn tid og fart og kor langt det var og kor langt han var komt på viss avstand og når det var sånne lange tekstoppgåver. Vanskeligst med tekstoppgåver er å plassere ka som var ka og sette opp på rett formel på de.
Ask	Nei, det veit eg ikkje, eg er veldig dårlig på bevis.
Pål	Det kan eg ikkje svare på. Eg kjem ikkje på det akkurat nå.
Ulf	Litt løse oppgåver kor eg ikkje heil skjønar kva eg skal gjere.
Dag	Da blir, det var det med han som skulle over den elva, først så skulle du legge inn cosinus og vi var nødt til å tenke fartvektorar og avstandsvektorar og skille dei fra kvarandre og sånn. Det er vel kanskje det vanskeligste.

Hva elevene syntes var vanskelig å jobbe med innenfor vektorregning varierer. Både Ida og Dag nevner oppgavene med robåten over elva, men Ida synes i liket med Ulf at tekstoppgaver der det ikke står konkret beskrevet hva man skal gjøre er vanskeligst. Ask er usikker, men nevner at han ikke er så god når det kommer til bevis. Pål kommer ikke på hva som er vanskelig. Det ser ut til at emnet innenfor vektorregning ikke er avgjørende når det gjelder hva elevene oppfatter som vanskelig, men oppgavetypen.

Spørsmål 10: Hvilke oppgaver på prøven synes du var greie å arbeide med?
Jeg ønsket å finne ut hva elevene syntes gikk bra på prøven og finne ut om det stemte med prestasjonene. Elevene satt med spørsmålene på prøven foran seg når de skulle svare slik at de lettere skulle huske oppgavene. I etterkant ser jeg at spørsmålet ikke kan koples direkte til problemstillingen for masteroppgaven, men kan sammen med elevenes testbesvarelser bidra til å finne ut om elevene har feilet på oppgaver de syntes var greie å arbeide med.

Tabell 44: Svar på spørsmål 10

Elev	**Svar**
Ida	Oppgåve 1
Ask	Eg klarte ikkje oppgåve 5 og oppgåve 3 sleit eg litt med, me resten gjekk litt greitt.
Pål	Heile oppgåve 1, 3 såg nå grei ut, og 4. Dei var greie å arbeide med fordi eg fekk

	dei til.
Ulf	Oppgåve 1 og 2 kanskje.
Dag	Oppgåve 1 synest eg var grei i alle fall, oppgåve 3 og 4

Elevene liker oppgavene de tror de fikk rett svar på. Alle synes oppgave 1 er grei å arbeide med. Alle elevene svarer først hva de syntes var vanskelig, for så å vurdere oppgavene som er igjen.

Spørsmål 11: Hvilke oppgaver på prøven synes du var vanskelige å arbeide med?
Hensikten med spørsmålet var å finne ut om elevenes oppfatning stemmer overens med prestasjonene. På den måten kan jeg finne ut om elevene har mestret noe de syntes var vanskelig. I likhet med spørsmål 10 bidrar ikke spørsmålet til informasjon om elevenes forståelse eller hvordan de bruker læreboken.

Tabell 45: Svar på spørsmål 11

Elev	**Svar**
Ida	Oppgåve 3 og 5. Å bevise var vanskeleg, og så skjønte eg ikkje ka slags formlar eg skulle bruke og korleis eg skulle rekne ut trearen.
Ask	Oppgåve 3 og 5, dei var eg ikkje gode på.
Pål	Oppgåve 5, og så var det ein annen, eg lurar på om det var noko på 4 og. Det var vanskeleg fordi du skulle forklare med ord, og bevise. Det er ikkje så lett synes eg.
Ulf	Oppgåve 5. Bevis er eg ikkje noko god på.
Dag	Oppgåve 5 og begrunnelsesdelen på oppgåve 2. Oppgåve 5 var vanskeleg fordi eg visste eigentleg korleis eg skulle bevise den formelen der og då, men eg fekk det berre ikkje ut.

Elevene er helt enige om at oppgave 5 var vanskelig. Noen fordi de ikke liker bevis, mens andre fordi de ikke klarer å forklare slik de ønsket. Både Ask og Ida synes oppgave 3 er vanskelig.

Vedlegg 12: Kartlegging og analyse av elevenes forståelse for matematikk

Nedenfor følger en grundig kartlegging av hvordan elevene bruker læreboken, samt kartlegging og analyse av elevenes forståelse for matematikk. Elevene blir presentert enkeltvis.

Pål
Observasjonen av undervisningen ga ikke et helt nøyaktig bilde av hvordan Pål brukte læreboken fordi han ofte plasserte seg utenfor kameralinsens rekkevidde. Likevel var det tydelig at han fulgte godt med i undervisningen fordi han ofte stilte spørsmål eller svarte på spørsmål fra læreren. Han var aktiv i timen. I tillegg tittet han i læreboken og tok notater fra tavlen mens læreren underviste. Når han brukte læreboken til oppgaveløsing studerte han både fagtekst og eksempler og sjekket fasiten etter at oppgaven var løst.

Pål var ikke fremtredende i noen av utdragene fra 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, men i utdrag 7 svarte han rett på lærerens spørsmål. Pål viste tegn til å stå fast ni ganger i løpet av undervisningsperioden. En gang så han ut til å løse problemet helt av seg selv, og en gang benyttet han læreboken og spurte en medelev. De resterende syv gangene benyttet han seg enten av medelever eller læreren, men aldri læreboken. Observasjonen kan tyde på at Pål trengte lite hjelp. At han løste en av oppgavene helt av seg selv kan tyde på at han klarte å reflektere over det han har gjort og oppdaget feilen. Å finne feilen og rette den opp krever at man forstår hva man har gjort feil. Når man skjønner hva man har gjort feil og klarer å rette det opp, kan det og være man forstår hvorfor det var feil. En annen mulighet var at Pål gjorde en feil mens han fulgte en prosedyre for å løse oppgaven og brukte tid på å finne ut nøyaktig hva han gjorde feil.

Pål forklarte under intervjuet at han var fornøyd med egen innsats. Han gjorde mest mulig arbeid i timene og resten hjemme. Han forklarte at når han trengte mer øving enn oppgavene i læreboken arbeidet han med oppgavesamlingen. Det er ikke mulig å vite om Pål mente at han skulle forstå det han jobbet med eller øve seg på prosedyrene. Pål var borte tre matematikktimer. Han informerte om at han arbeidet ekstra mye hjemme i etterkant av fraværsperioden. Pål knyttet vektorregning opp mot fysikk, som er et stort område man kan anvende vektorregning innenfor, men det er uklart om Pål visste at vektorregning ikke kan brukes anvendes på all fysikk. Å bare tegne på oppgaver mente Pål var kjedelig og foretrakk regning fordi han da kunne tenke litt. Likevel presiserte han at han pleide å bruke skisser til oppgavene. Pål begrunnet de parallelle vektorene i intervjuoppgaven med at de hadde samme stigningstall. Da han løste regneoppgaven fulgte han vektorene i oppgaven med blikket på figuren. Pål kjente med en gang igjen hvilken vektorsum det var snakk om og koplet svaret opp mot nullvektor. I intervjuspørsmålene presentert i Vedlegg 11: Presentasjon av elevintervju fortalte Pål at han likte oppgaver som hadde med virkeligheten å gjøre, ikke bare å regne med tall og at han likte fysikk bedre enn matematikk fordi da kunne han bruke matematikken.

På testen tegnet Pål inn vektorene i oppgave 1 i et koordinatsystem. Like vektorer begrunnet han både med like vektorkoordinater og ved at de var like lange og hadde samme retning. Han brukte samme stigningstall som forklaring for parallellitet, slik han gjorde på intervjuet. På testen regnet han ut vektorsummen med svar nullvektor med koordinater i stedet for ved hjelp av bokstavene slik han gjorde på intervjuet. Også på testen gjenkjente han nullvektor. I oppgave 2d brukte han egenskapene til et parallellogram slik at han bare trengte å regne ut lengden av to sider i figuren. Han brukte kjent kunnskap og anvendte på vektorregning. Pål så ut til å vite hva han skulle gjøre når han løste oppgavene og hvorfor i og med at han begrunnet svarene sine. Pål viste en annen forståelse av oppgaveteksten i oppgave 3 enn hva jeg mente. Jeg presiserte ikke om elevene skulle regne 600 km/h i forhold til land eller luft. Han mente flyet hadde fløyet 600 km på en time, og med en fart på 600 km/h er ikke det feil. Han hadde korrekt utregning på oppgaven og så sammenhengen mellom det utregnede svaret og tegningen han hadde laget. I oppgave 4 viste han tydelig at han brukte en formel for å finne vektoren mellom to punkt og at han klarte å finne en vektor ved å finne en vektorsum som tilsvarer vektoren. Han hoppet ikke over ledd i utregningen. Pål ga ikke svar på oppgave 5.

Bildeserien av Arbeidsboken til Pål er komplett. Han har gjort samtlige oppgaver fra kapittelet, kontrolloppgavene og noen oppgaver fra oppgavesamlingen. Fagteksten i arbeidsboken var avskrift fra tavlen. Selv om oppgavene ikke krevde det, begrunnet han flere av svarene. Han utførte selv alle oppgavene med bevis i tillegg til å skrive av de bevisene som ble gjennomgått på tavlen. I slutten av kapittelet gjennomførte han bevis og oppgaver han kategoriserte som utfordrende som et ledd i å øve til prøven. Det kan være Pål pugget oppgaver og prosedyrer, men det kan og være han undersøkte om han kunne bevisene og forstod prosedyrene.

Feltnotatene presiserte at Pål var meget aktiv i timene, svarte på lærerens spørsmål og kom med innspill. Det var ikke mer i feltnotatene som sa noe om hvordan Pål forstod matematikk eller brukte læreboken.

Pål viste flere ganger at han kunne begrunne svarene sine og visste hvorfor han utførte de prosedyrene han gjorde. Han viste forståelse for regler og begrep ved at han var muntlig aktiv i timen og klarte å bruke tidligere tilegnet kunnskap i vektorregningen, eksempelvis å utnytte egenskapene i et parallellogram eller trapes. Selv sa han at han likte å tenke litt, hvilket han viste ved å komme videre i arbeidet med en oppgave der han så ut til å stå fast kun ved å studere det han hadde gjort, men det er ikke samsvarende med at han visste hvorfor han kunne bruke prosedyrene. Selv om Pål klarte å begrunne svarene sine og bruke de rette formlene er ikke det ensbetydende med at han visste hvorfor prosedyrene gjaldt. Det kan være han gjenkjente situasjoner der han har brukt de samme forklaringene og formlene tidligere.

Oppgaver knyttet opp mot virkeligheten er ofte sammensatte og krever mer av en elev enn å bare anvende regler og formler på tall, og krever at man vet hvorfor man kan bruke de ulike reglene og formlene. At Pål likte å anvende matematikken i fysikk og arbeide med oppgaver som kunne knyttes opp mot virkelige situasjoner kan tyde på at Pål visste hvorfor han kunne bruke prosedyrene han gjorde. Likevel forsøkte han ikke å bevise regelen i oppgave 5 på prøven. Mine tolkninger av datamaterialet tyder på at Pål sin forståelse kan karakteriseres som relasjonsforståelse, men det avviser ikke at Pål viser instrumentell forståelse i flere situasjoner.

Ulf

Ved å studere observasjon av undervisningen og feltnotatene så man at Ulf tok notater av det som ble skrevet på tavlen og var aktiv i undervisningen ved at han svarte på spørsmål læreren stilte. Flere ganger hvisket han også med Ida og Ask mens læreren presenterte nytt stoff. Han leste i læreboken flere ganger, der det så ut til at han studerte både fagtekst og eksempler under oppgaveløsingen. Etter at han var ferdig med en oppgave sjekket han som regel fasiten.

I utdrag 1 fra 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, så Ulf at to vektorer var like og sa det til Ask og Ida. Han ga ingen begrunnelse for hvorfor de var like. Ask var i utgangspunktet uenig, men likevel godtok både Ida og Ask svaret til Ulf. Det er vanskelig å vite hva som var grunnen til at begge to godtok Ulf sitt svar uten noen forklaring, men det kan være de var vant med at Ulf ofte hadde rett og aksepterte svaret hans av den grunn.

I forkant av utdrag 2 i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, klarte Ulf å multiplisere en stambrøk med et heltall. I utdraget forklarte han Ida at å gange med brøk var akkurat som å dele. Han mente man måtte finne fellesnevner for å kunne regne ut når man skulle multiplisere heltall med brøk. Læreren forklarte at det ikke var nødvendig å finne fellesnevner, men at man bare kunne gange inn. Selv om Ulf mestret å multiplisere brøk med heltall klarte han ikke å multiplisere heltall med brøk uten å få hjelp først. Tvetydigheten kan tyde på at Ulf ikke vet hvorfor regnereglene tilknyttet multiplikasjon, brøk og heltall gjelder.

Ulf spurte om Ida fikk det samme svaret som han i utdrag 3 i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk. Det kan virke som om han stilte Ida spørsmålet for å slippe å slå opp i fasiten. At Ulf spurte Ida kan tyde på at han var usikker på om han hadde rett, eller rett og slett at han bare kontrollerte svaret sitt.

Kartleggingen av Ulf sine reaksjoner når han så ut til å stå fast viste at han studerte arbeidet sitt først, før han brukte medelever eller læreboken. Ulf så ut til å titte en del på hva andre elever gjorde og brukte medelevene aktivt for å komme seg videre med oppgavene.

Kartleggingen viste at fire av ni ganger brukte han kun medelever eller lærer for å komme videre. Fem ganger brukte han læreboken, men to av dem brukte han i tillegg læreren. Resultatene kan tyde på at Ulf forstod fagteksten i læreboken. Fagteksten var ny matematikk for elevene. Dermed kan det være at de knyttet gammel kunnskap opp mot den nye for at de skulle forstå det de leste, altså skapte relasjoner.

I intervjuet forklarte Ulf at han arbeidet med oppgavene både hjemme og på skolen. Han hadde gjort det meste de skulle gjøre både i timen og med leksene, men ikke arbeidet i oppgavesamlingen. Videre i intervjuet knyttet Ulf vektorregning opp mot fysikk og utregning av energi. Utregning av energi er ikke en vektor. Han foretrakk å løse oppgaver ved tegning fordi det var enklere og lettere. I oppgaven under intervjuet begrunnet han parallellitet med samme stigningsfart. Ulf refererte egentlig til begrepet stigningstall, men det kan virke som at han sa feil. Oppgaven med vektorsum løste han umiddelbart og svarte null fordi den begynte og sluttet på samme plass. I tillegg sammenliknet han vektorsummen i oppgaven med at man tok et tall minus seg selv. Til slutt kommenterte han at svaret var nullvektor.

På testen regnet Ulf helt rett på oppgave 1a med vektoraddisjon, men han tegnet unøyaktig. I oppgave 1b, med vektordifferanse, gjorde han antagelig en regnefeil som resulterte i feil svar. Tegningen av vektordifferansen samsvarte med utregningen. Det kan se ut som om Ulf egentlig kunne vektorsum og vektordifferanse, men at han slurvet i utregningen og tegningen av vektorene. Dersom Ulf hadde tegnet opp nøyaktig kunne han ha oppdaget regnefeilen fordi de to løsningene av oppgaven ville vært forskjellige fra hverandre. Ulf begrunnet like vektorer i oppgave 2 med at figuren er et parallellogram, men han forklarte ikke hvorfor det var et parallellogram. Videre begrunnet han parallellitet med likt stigningstall. At han begrunnet parallellitet med stigningstall på prøven og stigningsfart under intervjuet kan tyde på at han sa feil under intervjuet. Vektorsummen i oppgave 2c regnet han ut med vektorkoordinater og oppga [0,0] til svar, i motsetning til i intervjuet der han kun studerte figuren. I 2d benyttet han egenskapene ved et parallellogram og regnet derfor bare ut lengden til to av sidene i figuren. Ulf begrunnet svarene sine men gjenkjente en figur som et parallellogram uten å forklare hvorfor. I oppgave 3 løste Ulf oppgaven helt rett ved tegning, men ved regning regnet han ut en vektorsum, men tok ikke hensyn til retningen, kun lengden av vektorene. I tillegg oppga han retningen fra by A, ikke by B som oppgaven spurte etter. Likevel viste Ulf at han forstod oppgaven og hva han skulle gjøre for å finne svaret. På oppgave 4 brukte Ulf formelen for å fine vektoren mellom to punkt direkte. I oppgavene 4b og 4c oppga han svarene som punktkoordinater. Det kan tyde på at Ulf forstod sammenhengen mellom vektorer og punktkoordinat. Ulf førte ikke noe bevis i oppgave 5, men så at vektorene har samme retningen og at lengden øker. Det kan virke som om han så at regelen gjelder men ikke klarte å forklare hvorfor.

En undersøkelse av arbeidsboken til Ulf viser at han hadde gjort nesten alle oppgavene og at all fagtekst var hentet fra tavlen. I tillegg til oppgavene hadde han arbeidet med kontrolloppgavene, men ingen oppgaver fra oppgavesamlingen. Han fulgte standard prosedyre når han løste oppgavene i arbeidsboken. Oppgavene gjennomgått i fellesskap skrev han kun av tavlen, løste de ikke selv i tillegg.

Ulf brukte forskjellige prosedyrer på å finne samme vektorsum under intervjuet og på prøven. Det kan være Ulf ønsket å gjøre alt med korrekte prosedyrer og steg for steg på prøven, men det kan og være at Ulf ikke umiddelbart gjenkjente summen som nullvektor. I intervjuet snakket han om stigningsfart, men det at han brukte begrepet stigningstall på testen kan tyde på at han bare sa feil under intervjuet. Ulf begrunnet ikke hvordan han visste at figuren i oppgave 2 på testen var et parallellogram, og han klarte ikke å gjøre beviset i oppgave 5. I arbeidsboken brukte han standardprosedyrer i oppgaveløsningen og han regnet ikke de mer sammensatte og utfordrende oppgavene selv, men skrev de av tavlen når de ble gjennomgått i fellesskap. Ulf virket og usikker på enkelte områder av brøkregning. I tillegg tok Ulf kun hensyn til lengden under utregningen av en vektorsum, hvilket tyder på liten forståelse for vektorregning i virkeligheten. Dette kan tyde på at Ulf sin matematiske forståelse er preget av instrumentell forståelse. Likevel ga han begrunnelse for svarene på testen, og det at han ikke begrunnet hvorfor figuren i oppgave 2 var et parallellogram kan være fordi det var opplagt. I tillegg brukte han læreboken flere ganger for å komme seg videre når han så ut til å stå fast, som tyder på at han klarte å relatere den matematiske teksten til det han kunne fra før. Dette tyder på at Ulf sin forståelse inkluderer relasjonsforståelse. Mine tolkninger av datamaterialet peker på at Ulf viser både relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, men i større grad viser instrumentell forståelse enn relasjonsforståelse.

Dag

I observasjonen så Dag ut til å følge godt med i undervisningen. Noen ganger nikket han, andre ganger rynket han på øyenbrynene eller så mer intenst opp mot tavlen mens han lente haken i håndflaten, og han svarte lavt på spørsmålene læreren stilte. Jeg tolker kroppsspråket slik at han fulgte godt med. Dag tok ingen notater i undervisningen, og hadde hverken lærebok eller kladdebok, men brukte læreboken til Eli og arbeidet sammen med Eli i hennes kladdebok. Han leste fagteksten i læreboken og sammenliknet det som stod skrevet på tavlen med teksten i læreboken. Det kan se ut som at han kun leste fagteksten mellom oppgavene, men at han brukte fagtekst og eksempler under oppgaveløsingen og sjekket fasit etter at oppgaven var løst. Dag var aktiv i timene og arbeidet mye muntlig med oppgavene. Helt i slutten av andre undervisningsuke fant Dag frem ei arbeidsbok etter oppfordring fra læreren.

Selv om Dag hverken hadde lærebok eller skrev noen ting, klarte han likevel å forklare de andre elevene. Datamaterialet inneholder ingen bilder av arbeidsboken til Dag.

Eli og Dag var uenige om en regel i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, utdrag 4. Dag trodde at $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$, men Eli mente det ikke var tilfelle. De tolket teksten på tavlen som at Dag sin oppfatning ble bekreftet på tavlen. Dag så tilbake i arbeidsboken og skulle vise Eli at det stemte på tegningen, men oppdaget da at det var feil. Han forklarte hvorfor Eli i utgangspunktet hadde rett, men ikke hvorfor $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$. Det kan være Dag forstod at $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$, men ikke visste hvordan han skulle forklare at regelen gjaldt.

I 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, utdrag 5, forvekslet Dag regnereglene for multiplikasjon og addisjon/subtraksjon av parenteser. Eli oppdaget hva Dag gjorde feil og forklarte. Til slutt gjentok Dag for seg selv hva han hadde gjort feil. Om Dag forstod hvorfor regnereglene han brukte gjaldt er usikkert, for Eli forklarte kun hvorfor Dag hadde feil ved å si han blandet multiplikasjon og addisjon/subtraksjon.

I undervisningen viste Dag tegn til å stå fast 24 ganger, der han benyttet medelever eller lærer eller begge kategoriene for å komme seg videre alle gangene. Han diskuterte med Mia alle gangene utenom en, og brukte læreboken i tillegg til Mia syv av gangene. Det kan være Dag var avhengig av å diskutere med Mia for å komme videre i arbeidet, men tatt i betraktning at de to arbeidet tett sammen, delte lærebok og kun skrev i Mia sin arbeidsbok, kan det hende at diskusjonen var nødvendig for at de skulle bli enige om hva de skulle skrive og hvordan forstå begrepene. At Dag kun brukte læreboken sammen med Mia kan tyde på at han var avhengig av Mia for å nyttegjøre seg læreboken, men det er mer trolig et resultat av at de hadde en lærebok på deling.

Dag mente under intervjuet at han hadde jobbet med kapittelet som han pleide, både på skolen og hjemme. Han hadde jobbet bra, som han mente var å gjøre hele kapittelet, alle oppgavene underveis og noen i oppgavesamlingen før prøven. Det er usikkert hvordan Dag jobbet hjemme siden han ikke hadde lærebok, men det kan være han samarbeidet med andre elever hjemme. Han forsøkte å finne et eksempel til hva vektorregning kan brukes til, men det virket som om han forstod selv at eksempelet hans ikke gjaldt. Videre fortalte Dag at han foretrakk regning framfor tegning fordi det var lettere å se svaret når man regnet enn ut fra en tegning. Under oppgaveløsingen forklarte Dag parallellitet ved at den ene vektoren var en multiplum av den andre. Under løsingen av vektorsummen så han kun på bokstavene i oppgaveteksten, ikke på figuren, og han forklarte hvorfor han kunne forkorte slik at svaret ble $\vec{0}$.

På testen løste Dag oppgave 1 helt korrekt der han brukte felles startpunkt for vektorene ved vektordifferanse. Han begrunnet like vektorer med like koordinater i oppgave 2. Videre forklarte han parallellitet med at to punkt på hver vektor stod vinkelrett på linja, men et punkt kan ikke stå vinkelrett på en linje. Det kan se ut som om Dag så relasjonen til parallelle linjer men husket ikke alle kriteriene for at linjene skulle være parallelle. På testen hadde Dag problemer med å begrunne parallellitet til tross for at han hadde en god forklaring under intervjuet. Variasjonen i begrunnelsene av parallellitet kan avhenge av at den ene situasjonen handlet om to parallelle vektorer, mens den andre handlet om parallellitet mellom en vektor og ei linje. I oppgave 2d kommenterte han at to og to sider i figuren var like lange, men forklarte ikke hvorfor. Dag løste oppgave 3 helt rett, både ved tegning og regning. I oppgave 4a talte han på aksene for å finne vektorkoordinatene selv om han oppga under intervjuet at han foretrakk å regne enn å finne svaret på en tegning. For å finne midtpunktet i oppgave 4b og 4c gikk han en kjent vei mellom origo og punktet han skulle finne, men oppga ikke svaret som punktkoordinat. Det kan tyde på at Dag ikke hadde forståelse for forskjellen mellom vektorkoordinatene mellom origo og et punkt og koordinatene til punktet. Dag vekslet mellom flere måter å bevise setningen i oppgave 5, og han brukte ikke vektornotasjon i besvarelsen. Han ser ut til å ha forstått hva reglen går ut på og hvorfor den gjaldt, men hadde problemer med å strukturere og skrive ned tankene. Selv om Dag begrunnet like vektorer med like koordinater hadde han problemer med å begrunne parallellitet, til tross for at han hadde en god forklaring under intervjuet.

Feltnotatene viste at Dag gjentatte ganger instruerte Eli, som kunne være fordi de arbeidet tett sammen og kun skrev svarene i Eli sin arbeidsbok. At Dag instruerte kan tyde på at han visste hva han skulle gjøre, men det er usikkert på om Dag visste hvorfor han kunne bruke reglene han gjorde. Selv om han ikke hadde lærebok eller arbeidsbok selv klarte han å forklare de andre elevene om de lurte på noe, hvilket kan tyde på at Dag forstod relasjonene mellom begrepene og reglene i vektorregningen raskt.

Dag ga ofte uttrykk for hva som skulle gjøres i oppgaver, men ikke alltid hvorfor. Flere ganger viste han god forståelse for begrep og regler, andre ganger bar besvarelsene preg av gjetning. At han lærte uten lærebok og uten å skrive i arbeidsbok kan tyde på at han ser relasjonene mellom de ulike emnene i vektorregning. Besvarelsen på oppgave 5 bar preg av at Dag forstod hvorfor regelen gjaldt, men hadde vanskeligheter med å formulere svaret. Min tolkning av datamaterialet er derfor at Dag hovedsakelig viser relasjonsforståelse, men at instrumentell forståelse også er til stede.

Ask

Etter å ha sett gjennom videoopptakene fra undervisningen er tydelig at Ask ofte fulgte med i undervisningen fordi han stadig stilte spørsmål til læreren når han var usikker på om han forstod matematikken rett, og svarte ofte på lærerens spørsmål. Likevel hendte det flere ganger at Ask hvisket med Ida eller Ulf mens læreren underviste. Læreboken lå oppslått på pulten hele matematikktimen. Ask diskuterte mye med og så på Ida under oppgaveløsingen. Det ser ikke ut som at Ask leste fagteksten, men studerte eksemplene og de uthevede reglene i læreboken. Han så mye opp på tavlen og spurte enten lærer eller medelever med en gang han virket usikker. Fasiten sjekket han ofte.

I Utdrag 1 fra 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, var ikke Ask enig med Ulf og Ida om at en vektor var lik to andre. Han trodde den ene vektoren var kortere enn de andre det var snakk om. Uten å måle, bare ved å se i læreboken sa han at den kanskje ikke var kortere, og så skrev han svaret ned i boken si. At Ask brukte ordet kanskje gjør at jeg tolker han som fortsatt usikker. Det kan tyde på at han bare godtok svaret fra Ulf og Ida uten å vite om det var rett.

Under arbeidet med en oppgave i utdrag 3 i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, sa Ask at han ikke skjønte hvordan Ida hadde gjort utregningen og spurte henne hva hun hadde gjort. Han så ikke ut til å være interessert i hvorfor Ida hadde gjort som hun gjorde, men så på utregningen hennes og skrev det samme i arbeidsboken si. Tonefallet i stemmen, at han trakk på skuldrene og sa jaja når han skrev gjorde at han virket usikker på om han forstod hva Ida egentlig hadde gjort.

Etter at læreren hadde fullført beviset i utdrag 6 presentert i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, ble Ask sittende og studere tavlen. Han spurte om ikke $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ kan trekkes sammen til $[x, y]$, og selv etter at læreren hadde forklart hvorfor det ikke var mulig mente Ask at x_2 og x_1 var det samme tallet. Han viste ingen forståelse for at x_2 og x_1 kunne ha ulik verdi. Etter hvert godtok Ask læreren sin forklaring, men det er usikkert om han forstod hva hun faktisk mente, for han hadde problemer med å bruke regelen etterpå.

Kartleggingen av Ask sine reaksjoner når han så ut til å stå fast viste at han benyttet medelever eller læreren alle seksten gangene han så ut til å stå fast, men brukte i tillegg læreboken to av gangene. Det kan tyde på at Ask var avhengig av å se på andre eller snakke med andre og få vite hva det er han egentlig skulle gjøre for å løse oppgavene. Når han fikk hjelp av læreren og medelever så mange ganger kan det tyde på at han hadde vansker med å resonnere selv.

Under intervjuet sa Ask at han hadde en grei innsats under arbeidet med kapittelet, han gjorde leksene, men ingen oppgaver i oppgavesamlingen. Han forklarte at han innså under prøven at han kunne forberedt seg mer enn han hadde ved å skjønne oppgavene bedre. Det er ikke sikkert hva Ask la i begrepet å skjønne oppgavene bedre, men jeg tolker det slik at å skjønne oppgavene handler om å forstå oppgavene og hvorfor man kunne bruke de ulike reglene, formlene og prosedyrene. Det kan tyde på at Ask ikke visste hvorfor han utførte den matematikken han gjorde. Da han forklarte hva en vektor var virket han veldig usikker fordi han dro på ordene og kom med flere vage forslag. Han mente man brukte vektorregning til å måle opp avstand eller areal og at det hadde noe med fysikk og krefter å gjøre. Videre i intervjuet forklarte han at i begynnelsen var det lettest å tegne svar på oppgavene, men når han begynte å forstå utregningene gikk det greit å regne. De parallelle vektorene i oppgaven han løste under intervjuet begrunnet han med likt stigningstall og han trakk fram egenskapene til firkanten trapes og påpekte at bare to sider kan være parallelle. På utregningsoppgaven svarte han med å spørre om det gikk an å si $\overrightarrow{AA}$, for så å konkludere med at svaret ble nullvektor. At han spurte om han kunne svare på måten han gjorde gjør at han virket usikker på om han i det hele tatt hadde rett.

Ask klarte seg utmerket på oppgave 1 på prøven. Han hadde rett utregning og brukte et koordinatsystem til å tegne inn vektorene. På oppgave 2 begrunnet han like vektorer med at de hadde like koordinater og parallellitet med at stigningstallet var likt slik han gjorde i intervjuet. På 2c skrev Ask opp bokstavene i oppgaveteksten og at de var lik A som igjen er $[0,0]$. Det er usikkert om Ask skrev opp punktkoordinatene til punkt A som vektorkoordinater eller om han faktisk så at svaret ble $[0,0]$. At Ask ikke skrev $\overrightarrow{AA}$, men kun A uten vektornotasjon kan tyde på at han ikke gjenkjente at dette var nullvektor. Likevel gjenkjente Ask under intervjuet at samme vektorsum kunne være $\overrightarrow{AA}$ og dermed nullvektor. Hvorvidt dette var et enkelttilfelle eller noe Ask faktisk kunne, er usikkert i og med at han gjorde forskjellig på testen og intervjuet. I oppgave 3 ga Ask rett svar ved tegning, men utregningen hans bærer preg av stor innsatsvilje der han brukte formelen for strekning og pythagoras. Ask studerte strekningen mellom by A og der han mente flyet endte opp, ikke sammenhengen mellom B og der flyet endte slik oppgaveteksten ba om. I oppgave 4 brukte Ask formelen for vektoren mellom to punkt direkte og fant midtpunktet på en vektor ved å gå en kjent vei fra origo til midtpunktet. I likhet med oppgave 3 klarte Ask på oppgave 4c å tegne inn punktet han skulle finne ved regning, men denne gangen uten utregning. Han hadde heller ikke svart på oppgave 5. Det er usikkert om Ask ikke visste hvordan han skulle løse de siste oppgavene eller om han ikke rakk det før han måtte levere prøven.

Arbeidsboken til Ask viser at han forsøkte seg på alle oppgaver selv, men at han skrev de av fra tavlen selv om han hadde løst oppgavene. Han løste oppgavene ved å følge prosedyrene presentert i læreboken. Han gjorde samtlige oppgaver i læreboken, i tillegg til kontrolloppgavene. Da han øvet til prøven arbeidet han med kontrolloppgavene og øvet seg på bevis og oppgaver han syntes var utfordrende.

Feltnotatene ga ikke mye informasjon om hvordan Ask tenkte når han løste oppgaver eller så ut til å forstå matematikk, men de forklarte at han en gang studerte teksten på tavlen som var et bevis han ga muntlig uttrykk for å ikke forstå. I flere minutter etter at de andre elevene begynte med oppgaver studerte Ask beviset på tavlen og så ut til å prøve å forstå det. En annen gang hadde Ask skrevet av et svar på en oppgave fra løsningsforslaget på internett, men han forstod ikke notasjonen i svaret og spurte om hvorfor svaret var slik.

Datamaterialet kan tyde på at Ask ofte var usikker når han arbeidet med vektorregning. Han så ut til å godta svar uten å være overbevist om at de var rette og virket avhengig av lærer og medelever for å komme seg videre når han stod fast. At Ask ikke var sikker på hva vektorregning kunne brukes til kan være en av grunnene til at han syntes det var vanskelig. Selv uttalte Ask på intervjuet at han burde skjønt oppgavene bedre, hvilket kan tyde på at han hadde problemer med å vite hvilke prosedyrer som skulle brukes i ulike situasjoner. På intervjuet klarte Ask å bruke egenskapene til et trapes til å forklare hvorfor kun to vektorer i figuren var parallell. Det kan tyde på at Ask klarte å se relasjoner mellom vektorregning og tidligere tilegnet kunnskap i enkelte situasjoner. Selv om Ask begrunnet svarene sine og fikk til å løse mange oppgaver viser situasjoner fra undervisningen at han ofte hverken visste hva han skulle gjøre eller hvorfor. Av den grunn tolker jeg datamaterialet slik at Ask sin forståelse som oftest kan karakteriseres som instrumentell forståelse.

Ida
Observasjonen av undervisningen og feltnotatene viser at Ida fulgte noe med i undervisningen, men hun satt ofte og lekte med et viskelær eller hvisket med Ask eller Ulf. Tonefallet i stemmen hennes når hun svarte på spørsmål tyder på at hun ofte gjettet på svarene. Det kan være Ida gjettet fordi hun ikke forstod matematikken, men det kan og være fordi hun var opptatt av noe annet enn undervisningen. Ida skrev av alt som ble skrevet på tavlen. Hun hadde læreboken liggende på pulten, slått opp på de sidene læreren gikk gjennom. Når hun arbeidet med oppgavene leste hun oppgaveteksten i læreboken og studerte teksten på tavlen og det hun hadde skrevet av fra tavlen hvis hun lurte på noe. Dersom hun brukte læreboken når hun stod fast på oppgavene studerte hun oppgaveteksten på nytt, eksemplene og reglene. Hun så ikke ut til å lese fagteksten i læreboken. Ida var nøye med å sjekke fasiten for å kontrollere om hun hadde gjort rett. En gang sjekket hun fasit før hun i det hele tatt forsøkte å løse oppgaven.

I Utdrag 1 presentert i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk arbeidet Ask, Ulf og Ida sammen. Ida kastet seg på ideen Ulf presenterte om at en vektor også var lik, men tonefallet i stemmen hennes gjorde at jeg tolket henne som at hun ikke var overbevist om at Ulf hadde rett. Videre spurte Ida om de bare skulle skrive et likhetstegn til, og hun gjorde akkurat det samme som Ulf og Ask selv om tonefallet og utsagnet ”skal vi bare skrive ein erlik til da?” gjør at hun virket usikker. Hun godtok likevel Ask og Ulf sine svar. Jeg oppfatter situasjonen slik at Ida visste hverken hva hun skulle gjøre, eller hvorfor hun skulle gjøre det.

Ida viser i utdrag 2 presentert i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, at hun ikke visste hvordan man skulle multiplisere heltall med brøk, men rett før utdraget hadde hun klart å multiplisere brøk med heltall. En mulighet kan være at Ida egentlig hadde problemer med begge prosedyrene, men at tallene når hun skulle multiplisere brøk med heltall var enklere å forstå, fordi brøken var en stambrøk. Da ser det ikke ut som om Ida visste hvorfor hun kunne utføre prosedyren. At Ida faktisk kunne multiplisere brøk med heltall, men ikke heltall med bøk er en annen mulighet, som kan tyde på mangelfulle relasjoner mellom hennes begrepsstrukturer.

Ida forklarete Ask i utdrag 3, 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, hva hun gjorde for å løse en oppgave, men ikke hvorfor hun brukte nettopp den fremgangsmåten. Årsaken til at Ida forklarte kun hvordan og ikke hvorfor kan være flere, blant annet at Ask faktisk bare spurte om hvordan man skulle skrive opp utregningen. Ida svarte Ask at hun ikke visste om hun hadde gjort det rett, så det kan også være at også Ida var usikker på hvordan man skulle føre oppgaven. Hvis så er tilfelle kan det tyde på at Ida utførte en prosedyre uten å vite hvorfor. Etter å ha studert Ida sine reaksjoner når hun så ut til å stå fast i undervisningen ser det ut som om Ida var avhengig av å benytte medelever eller læreren for å komme videre. Kun to av 23 ganger Ida så ut til å stå fast, brukte hun kun læreboken for å komme seg videre. Alle de andre gangene brukte hun enten læreren eller medelevene for å løse oppgaven. Det kan være Ida henvendte seg til medelever eller lærer fordi hun hadde problemer med å forstå det som stod i læreboken. En annen mulighet er at Ida så på medelevers arbeid eller fikk forklart av medelever eller lærer hva hun skulle gjøre og at å henvende seg til andre derfor var en mer lettvint måte å komme seg videre i arbeidet på. Hvis Ida så på andres arbeid og gjorde det samme selv er det ikke sikkert hun visste hvorfor hun utførte prosedyrene.

På testen klarte ikke Ida alle oppgavene. På oppgave 1 trolig misforstod hun hele oppgaven og regnet ikke med vektorkoordinater som hun skulle. Dessuten tegnet hun opp vektorene unøyaktig. Oppgaven var tenkt å være enkel slik at alle kom i gang med prøven og visste at de hadde en oppgave de mestret. At Ida ikke fikk til oppgaven kan ha med nervøsitet i en prøvesituasjon å gjøre, eller at hun ble forvirret av oppgaveteksten. På oppgave 2a begrunnet hun like vektorer med at de hadde like vektorkoordinater, men på 2b ga hun et svar uten begrunnelse selv om det var påkrevd i oppgaveteksten. I 2c regnet hun ut svaret med vektorkoordinater, men hun kunne ha gjenkjent at vektorsummen ble $\vec{0}$ ut i fra oppgaveteksten og sluppet utregningen. Da hun skulle regne ut lengden av sidene i parallellogrammet regnet hun ut alle fire sidene selv om to og to sider i et parallellogram er like lange. Det er uvisst om Ida så denne relasjonen. Ida ser ikke ut til å ha forstått oppgave 3. Hun har kun tegnet opp informasjonen i oppgaveteksten og forsøkt å bruke tallene i oppgaveteksten til å regne ut svaret, men det kan virke som om hun har sett noen tall og forsøkt å gjøre noe med dem. Det ser ikke ut til at Ida forstod hvordan man regnet om fra m/s til km/h selv om læreren skrev opp på tavlen hvordan man skulle gjøre det, eller vurdert om svaret kan se ut til å stemme. Min oppfatning er at Ida forsøkte å gjøre noe med tallene i oppgaven for å få et svar, men visste ikke hva hun skulle gjøre. I oppgave 4 manglet Ida igjen begrunnelse der oppgaveteksten ba om det. I oppgave 4b og 4c viste hun at hun mestret vektoraddisjon selv om ikke fikk det til i oppgave 1. I tillegg gjennomførte hun ikke hele utregningen, men hoppet over flere ledd. Det kan tyde på at hun hadde god forståelse for hvordan man fant koordinatene til et punkt ved regning. På oppgave 5 begrunnet Ida formlikheten mellom trekantene og viste på den måten at hun brukte tidligere tilegnet kunnskap.

Under intervjuet sa Ida at hun syntes kapittelet var vanskelig å forstå, men at hun gjorde oppgavene hun måtte i boken. Likevel klarte hun å finne et nytt bruksområde til eksempelet i læreboken når hun ble bedt om å finne andre bruksområder til vektorregning enn de nevnt i undervisningen. Om hun foretrakk tegning eller regning var avhengig av oppgaven, men hun forklarte at det ofte var greit å ha det visuelle å se på. I oppgaven hun skulle løse under intervjuet begrunnet hun parallellitet med at de gikk i rett linje ovenfor hverandre. Det kan være Ida hadde et lite matematisk ordforråd eller syntes det var vanskelig å uttrykke seg muntlig i matematikk. En annen mulighet er at Ida så hva som var parallelt, men var usikker på hvordan hun skulle forklare årsaken. I oppgaven der Ida skulle finne en vektorsum hoppet hun over regningen. Hun gjenkjente med en gang at dette var $\vec{0}$´og forklarte hvorfor. Hun beskrev arbeidet hun hadde gjort ut i fra hva hun hadde gjort i læreboken. Dokumentasjonen av Ida sin arbeidsbok er komplett og all fagtekst var avskrift fra læreboken.

I arbeidsboken var alle oppgavene til kapittelet løst rett, men flere bevis og sammensatte oppgaver var skrevet av tavlen i undervisningen. Hun hadde ikke løst dem selv. Alle oppgavene fulgte utregninger presentert i læreboken. De oppgavene som ikke var hentet fra læreboken er fra kontrolloppgavene utlevert i undervisningen.

Selv om hun gjorde alle oppgavene fikk hun mye hjelp og veiledning i timene, i motsetning til på prøven, der hun var helt uten hjelpemidler. Det resulterte i at hun ikke mestret alle oppgavene. At Ida var avhengig av hjelp og veiledning for å få rett svar på oppgavene kan tyde på at hun ikke visste hvorfor hun utførte de prosedyrene hun gjorde, hun bare gjorde som i læreboken og som hun fikk beskjed om.

Feltnotatene viste at Ida en gang slo opp i fasiten før hun svarte på oppgaven, og at hun gjorde det for å sjekke om hun kunne klare oppgaven. Hun spurte læreren om de måtte tegne med vektorene, eller om de bare kan regne med dem, og om hun kunne tegne rundt i hele koordinatsystemet eller om hun måtte tegne vektorene ut i fra origo. Ida ga uttrykk for at å tegne de på forskjellige steder i koordinatsystemet gjorde at hun ikke trengte å tegne så mange koordinatsystem, og det ville være mer lettvint. Det kan tyde på at Ida ikke hadde forståelse for at en vektor ikke nødvendigvis starter i origo, men at hun visste hvordan tegne opp vektorene. Videre stod det i feltnotatene at Ida regnet ut lengden av en vektor i stedet for å finne vektoren mellom to punkt. Hun brukte bare en formel fra læreboken, men sjekket ikke om det var rett formel først. Det kan tyde på at hun ikke har innsikt i hvorfor man kunne benytte de ulike formlene. Flere ganger uttrykte hun at hun ikke hadde noen ideer om hvordan hun skulle angripe oppgavene og at dette var for komplisert for henne og at hun ikke skjønte hvorfor man kunne bruke formlene. Det kan tyde på at Ida ofte utførte det hun fikk beskjed om uten å ta hensyn til hvorfor hun kunne bruke prosedyrene.

Ida så ut til å stå fast flere ganger i oppgavearbeidet og ikke visste hva hun skulle gjøre. Da hun fant ut hvordan man kunne komme fram til svaret, ga hun ikke inntrykk av å vite hvorfor hun kunne bruke prosedyrene. Ida uttalte faktisk i undervisningen at hun ikke skjønte hvorfor man kunne bruke formlene og så ut til å trenge mye hjelp fra lærer og medelever for å løse oppgavene. På prøven måtte Ida stå på egne ben, og hun klarte ikke alle oppgavene selv om hun hadde løst nesten alle oppgavene i undervisningen. Ida lot flere ganger være å begrunne svarene på prøven. Det kan tyde på at Ida ikke visste hvorfor hun fikk de svarene hun gjorde. Enkelte ganger viste Ida at hun kjente til relasjonen mellom begrep og prosedyre, slik som under intervjuet da hun skulle regne ut en vektorsum. På prøven fikk elevene akkurat samme oppgave, men der brukte hun en annen strategi og gjenkjente ikke svaret som $\vec{0}$ slik hun gjorde under intervjuet. Ida gir ikke uttrykk for å vite hvorfor hun kan bruke prosedyrene hun gjør, men hun kjenner til prosedyrene. Min oppfatning er derfor at Ida sin matematiske forståelse er sterkt preget av instrumentell forståelse.

Eli

Ved å studere opptakene fra undervisningen ser man at Eli fulgte med i undervisningen fordi hun ofte svarte på spørsmål fra læreren eller stilte læreren spørsmål. I tilegg noterte hun ned det som ble skrevet på tavlen. Eli arbeidet med oppgavene i læreboken og sjekket fasiten etter hver oppgave. Hun leste fagteksten i læreboken flere ganger, men det kan se ut som at hun kun leste fagteksten mellom oppgavene, ikke fagteksten før oppgavene i hvert delkapittel. Noen få ganger leste Eli i læreboken mens læreren underviste ved tavlen. Ved felles gjennomgang av oppgaver som hun allerede hadde regnet ut sammenliknet Eli egen utrekning med det som ble skrevet på tavlen. Hun delte lærebok med Dag gjennom nesten hele kapittelet.

I utdrag 4 i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, var Eli sikker på at $\vec{a} - \vec{b}$ ikke var det samme som $\vec{b} - \vec{a}$, men ble usikker mens hun diskuterte med Dag. Eli begynte å tro hun tok feil fordi de misforstod teksten på tavlen. Dag oppdaget likevel at Eli hadde rett, Eli lurte på hvorfor og Dag forklarte. Eli godtok uten forklaring da Dag sa at $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$. Det kan være et tegn på at Eli hverken forstod hvorfor det var feil eller hvorfor hun mente at $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$.

Eli og Dag forsøkte i utdrag 5 presentert i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, å finne ut hvorfor Dag hadde feil på en oppgave. Ved hjelp av å studere et eksempel og lytte til Dag forklare fremgangsmåten i eksempelet fant Eli ut hvor Dag hadde gjort feil og forklarte han. Videre fortalte Eli at hun tenkte med vektorer på samme måte som når hun regnet med bokstaver. Utsagnet tyder på at Eli hadde oppdaget likheter mellom kjent kunnskap og den nye kunnskapen om vektorregning. I utdrag 6 fra 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk, forklarte Eli for hele klassen hvorfor to trekanter var formlike.

Da Eli stod fast på oppgavene så det ut til at hun både studerte fagteksten og eksemplene. Ofte diskuterte hun det som stod i læreboken med Dag, men det er usikkert om det var eksempler eller fagtekst de snakket om. I diskusjonene pekte de og på det som stod på tavlen. Eli viste tegn til å stå fast 25 ganger i undervisningen. Alle gangene brukte hun enten en medelev eller lærer for å komme videre, men åtte ganger brukte hun i tillegg læreboken. Hun diskuterte mye med Dag underveis når hun stod fast. At Eli og Dag diskuterte kan bety at de ble enige om svaret fordi de løste oppgavene i Eli sin bok. I flere tilfeller begrunnet de ovenfor hverandre hvorfor den ene hadde feil eller rett.

På testen løste Eli de fleste oppgavene helt rett. Oppgave 1 løste hun korrekt og var en av de to elevene som hadde felles startpunkt for vektorene i oppgaven med vektordifferanse. Hun begrunnet like vektorer i oppgave 2 med at de hadde like vektorkoordinater og forklarte at det betød at de var like lange og hadde lik retning. Parallellitet begrunnet hun med samme stigningstall. Vektorsummen løste hun kun ved bruk av bokstavene og gjenkjente $\vec{0}$. Hun benyttet egenskapene til et parallellogram ved å si at to og to sider i figuren i oppgave 2d var like lange, men forklarete ikke hvorfor de var like lange. Det ser ut til at Eli, i likhet med utdrag 5, skapte og benyttet relasjoner til andre begrep og regler, men begrunnet ikke hvorfor. En årsak kan være at Eli mente det var opplagt at figuren var et parallellogram. I oppgave 3 hadde Eli lik forståelse av oppgaveteksten som Pål, der hun tegnet inn flyets posisjon etter avstand over land. Svaret er ikke feil, men annerledes enn min intensjon. Hun hadde rett utregning, ser ut til å ha reagert på svaret fordi hun markerte det med et spørsmålstegn. Det kan være Eli så at avstanden i svaret ikke stemmte helt overens med tegningen hun laget. I oppgave 4 oppga Eli svarene som punktkoordinat som kan tyde på at hun visste forskjellen på vektorkoordinatene mellom origo og et punkt, og det punktets koordinater. På oppgave 5 forklarer hun, i likhet med i undervisningen hvorfor trekantene er formlike og finner to ulike måter å skrive $\overrightarrow{AE}$ på. Det tyder på at hun visste hvorfor regelen gjaldt, men hadde problemer med formuleringene.

Bildeserien av Eli sin arbeidsbok var komplett. Den viste at Eli noterte ned det som ble skrevet på tavlen i tillegg til hint og kommentarer læreren sa. Selv om hun hadde løst en oppgave tidligere skrev hun ned hva som ble skrevet på tavlen under felles gjennomgang. Eli løste alle oppgavene i læreboken tilknyttet kapittelet, og i tillegg til mange oppgaver i oppgavesamlingen. Det ser ut som at Eli øvet til prøven ved å løse utvalgte oppgaver fra læreboken, oppgaver fra oppgavesamlingen, kontrolloppgavene samt ved å trene på ulike bevis. Eli fulgte standard prosedyrer presentert i læreboken under arbeidet med oppgavene i læreboken. Hun har løst alle oppgavene og forsøkt bevisene selv. I tillegg løste hun oppgaver fra oppgavesamlingen. Det kan tyde på at Eli brukte mer tid på arbeidet når hun følte behov for det.

Feltnotatene opplyste om at Eli ble instruert flere ganger av Dag. Årsaken kan være at de sammen løste oppgavene i Eli sin arbeidsbok, men instrueringen gjør det usikkert om Eli egentlig forstod oppgavene. Eli ble ikke intervjuet.

Eli så relasjoner mellom begrep og regler og viste flere ganger at hun kunne forklare hvorfor noe var som det var. I andre situasjoner godtok hun blindt det andre sa selv om hun i utgangspunktet var overbevist om at det var feil, eller der andre aksepterte det Eli sa selv om hun ikke forklarte hvorfor. Inntrykket mitt er derfor at Eli har hovedsakelig relasjonsforståelse, men det utelukker ikke instrumentell forståelse i flere sammenhenger.

Gry

Gry ser ut til å ha fulgt godt med i undervisningen ved at hun fokuserte blikket på læreren og tavlen under lærerens presentasjon. I tillegg skrev hun av det som blir skrevet på tavlen og hadde læreboken oppslått på sidene læreren snakket om. Hun leste oppgaveteksten i læreboken nøye og sjekket fasit hyppig. Flere ganger satt hun slik at læreboken ikke var synlig bak de andre elevene. Når hun brukte læreboken så hun ut til å lese fagteksten, men ikke nøye. Det ser ut som om hun lette etter svar eller skummet gjennom teksten.

Gry så ut til å stå fast 18 ganger i løpet av undervisningen. En gang løste hun problemet helt selv ved å studere det hun hadde gjort. Hun brukte læreboken åtte ganger, men fire av dem benyttet hun medelever eller lærer i tillegg. De resterende ni gangene brukte hun enten medelever eller læreren for å komme videre i arbeidet. Selv om Gry brukte læreboken flere ganger når hun står fast ser det ut som om hun har større utbytte av medelever eller lærer. Hun brukte ikke læreboken i stor grad.

På testen løste Gry oppgave 1 korrekt og tegnet vektorene inn i et koordinatsystem. Hun begrunnet like vektorer i oppgave 2 med lik lengde og retning. Selv om hun forklarte at parallellitet ved like vektorkoordinater nevnte hun ikke alle vektorene som var parallelle. Hvorfor hun ikke skrev opp alle vektorene er uvisst, for hun så ut til å ha forstått kriteriene for parallellitet. Videre fant Gry vektorsummen ved å bruke bokstavene i oppgaveteksten og fikk $\vec{0}$ til svar. I likhet med flere andre elever kommenterte hun at to og to sider i figuren i oppgave 2d var like lange, men ikke hvorfor. Det er usikkert om det var fordi hun mente det var opplagt at det var et parallellogram eller ikke tenkte over å forklare hvorfor to og to sider var like lange. På oppgave 3 hadde Gry helt rett tegning, men i formelen for strekning satte hun inn flyets fart i stedet for vindstyrken og fikk dermed feil svar. Feilen kan tyde på at Gry ikke forstod hva det var hun regnet ut. Videre brukte Gry formelen for å finne vektoren mellom to punkt direkte i oppgave 4a. I 4b kan det være Gry forvekslet to vektorer, men det kan og være at Gry ikke forstod sammenhengen mellom punktkoordinatene til midtpunktet og vektorkoordinatene til vektoren mellom origo og midtpunktet. Selv om svaret i oppgave 4c var feil, viste hun at hun kunne finne koordinatene til et punkt ved hjelp av vektoren mellom origo og punktet selv, hvilket tyder på at feilen i 4b oppstod fordi hun ikke tenkte seg godt nok om. Gry klarte å forklare hvorfor trekantene i oppgave 5 var formlike, men kommer ikke med et godt nok argument for at regelen gjelder. Det kan virke som om hun egentlig visste hvorfor regelen gjaldt, men hadde problemer med å formulere det.

Datainnsamlingen av Gry sin arbeidsbok var ikke komplett. Den bestod av arbeidet de to første ukene. Arbeidsboken viste at selv om hun løste en oppgave hadde hun skrevet av tavlen dersom de gikk gjennom oppgaven i fellesskap. Hun gjorde nesten alle oppgavene tilhørende de delene av kapittelet som ble gjennomgått i løpet av de to ukene.

I arbeidsboken fulgte Gry prosedyrene presentert i boken for å løse oppgavene. Feltnotatene fortalte at Gry uttalte i undervisningen at hun alltid hoppet over tegningen fordi hun likte best å regne, men hun hadde både tegnet og regnet i arbeidsboken. Selv om hun likte best regning klarte hun å løse oppgave 3 på prøven ved tegning, ikke regning. Gry snakket lite i undervisningen og under oppgaveløsingen og var derfor ikke med i utdragene i5.1.3 Elevers forståelse for matematikk. Hun ble heller ikke intervjuet.

Datamaterialet viser at Gry ofte visste hva hun skulle gjøre. Hun begrunnet svarene sine i de oppgavene det var påkrevd, men i enkelte situasjoner så det ut som om hun hadde problemer med å forklare hvorfor matematikken hun brukte kunne brukes. Gry viste flere ganger god kunnskap mellom ulike emner i matematikken. Jeg tolker derfor datamaterialet slik at Gry har i hovedsak relasjonsforståelse, men instrumentell forståelse i enkelte situasjoner.

Tom

Observasjonen av undervisningen ga ikke tydelig informasjon om hvordan Tom brukte læreboken fordi pulten hans ikke syntes godt ved kameravinkelen som ble brukt under opptakene. Ofte var en annen elev i veien. Han var derfor ikke med i noen av utdragene i undervisningen, presentert i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk. Tom var muntlig aktiv i undervisningen og tok notater fra tavlen. Det hendte han så i læreboken mens læreren underviste. Under arbeidet med oppgavene jobbet han konsentrert og bladde frem og tilbake i arbeidsboken. Han sjekket ofte fasiten. Tom brukte ikke læreboken mye, men det hendte han satt og så i den. Det er usikkert om han studerte eksempler, oppgavetekst eller fagtekst i læreboken når han så i den fordi han hverken bladde eller beveget hodet. Han satt helt stille og tittet.

Tom viste tegn til å stå fast 17 ganger i løpet av undervisningen, men han varierte mellom metodene han brukte for å komme seg videre. Han brukte læreboken åtte ganger for å komme videre, men seks av gangene brukte han i tillegg medelever eller læreren. De resterende gangene benyttet han medelever eller læreren, eller begge alternativene. Selv om han ikke viste faste reaksjonsmønstre så det ut som om Tom likte å få menneskelig hjelp når han viste tegn til å stå fast. Det kan være et tegn på at han ikke klarte å nyttegjøre seg av tekstene i læreboken, men på den annen side bladde han ofte i arbeidsboken, der all fagtekst var skrevet av tavlen, som igjen var hentet fra læreboken.

På testen viste Tom at han kunne både regne og tegne vektorsum og vektordifferanse. Han hadde rett begrunnelse på hvorfor to vektorer var like, men begrunner ikke hvorfor vektorer var parallelle. Tom regnet ut lengen av alle fire vektorene i oppgave 2d, men det kan være fordi han ville være grundig i en prøvesituasjon. På den annen side kunne det være at han ikke oppdaget at figuren var parallell og dermed kunne gjøre utregningen mer effektiv. Det kan være en sammenheng mellom at Tom ikke begrunnet hvorfor vektorer var parallelle og ikke benyttet parallellogrammet til å effektivisere utregningen. Tom viste både rett tegning og svar på oppgave 3, men han hadde ingen utregning, så det er umulig å vite hvordan han kom fram til svaret. Den manglende begrunnelsen kan tyde på at Tom så svaret, men ikke visste hvordan han skulle regne det ut. På oppgave 4 fant Tom vektorkoordinatene ved å telle seg fram i koordinatsystemet. Tellemetoden kan være et resultat av at Tom så svaret umiddelbart, eller det kan være at han ikke husket formelen for å finne vektoren mellom to punkt. I 4b kan det være Tom forvekslet to vektorer eller hadde planer om å gjøre en snarvei i utregningen, som uansett resulterte i feil svar. En annen mulighet er at Tom ikke forstod hva et midtpunkt var, var litt for rask i utregningen eller ikke forstod sammenhengen mellom vektorregning og punkt. Tom mestret sammenhengen mellom vektorregning og punktkoordinat i 4c, slik at feilen i 4b kan tyde på at han slurvet eller hadde problemer med begrepet midtpunkt. I oppgave 5 så Tom formlikheten mellom trekantene, men kom ikke med en tilstrekkelig begrunnelse for at trekantene var formlike, som kan bety at han ikke kjente godt nok til hvorfor to trekanter er formlike.

Datainnsamlingen av Tom sin arbeidsbok var ikke komplett, men bestod av arbeidet fra de to første ukene. All fagteksten var notater fra tavlen og alle oppgavene som ble gjort var hentet fra læreboken. Han hadde ikke gjort alle oppgavene underveis i kapittelet, men det kan være han løste de etter at bildene av arbeidsboken ble tatt. I arbeidsboken utførte Tom prosedyrene presentert i læreboken til å regne ut oppgavene. I oppgave 5.45 skulle han bevise to regneregler for vektorer, men Tom fant et eksempel for at hver av reglene gjelder. Eksemplene kan tyde på at Tom ikke visste hvordan han skulle utføre beviset, men så at regelen gjaldt. En annen årsak kan være at Tom ikke forstod hva et bevis er.

Feltnotatene påpekte at Tom ofte arbeidet stille, men bladde i arbeidsboken og var opptatt av fasiten i perioder, men notatene inneholdt ikke informasjon om hvordan han forstod matematikk.

Å kartlegge Tom sin forståelse for matematikk var vanskelig fordi han var lite synlig i undervisningen selv om han var muntlig aktiv, han ble ikke intervjuet og bildeserien av arbeidsboken var ikke komplett. Likevel gjorde testen det klart at han flere ganger manglet begrunnelse, som kan tyde på at Tom ikke visste hvorfor svarene han fikk var gyldige. I tillegg manglet han utregning, som kan tyde på at han ikke visste hvordan han kom fram til svaret. I tillegg viste han ikke forståelse for bevis i læreboken ved å bevise med et eksempel. Datamaterialet tyder ikke på utstrakt forståelse av hvorfor Tom utfører den matematikken han gjør eller på at han hadde god forståelse for regler og begrep eller relasjonen mellom dem. Det kan tyde på at Tom ofte visste hva han skal gjøre, men ikke hvorfor, som betyr at mine tolkninger tyder på at hans matematiske forståelse er preget av instrumentell forståelse.

Mia
Mia hadde mye fravær i undervisningen og var bare til stede fem undervisningstimer i tillegg til under prøven. Hun skrev av det som stod på tavlen og så ut til å følge godt med når læreren underviser ved at hun fokuserte blikket på læreren og tavlen. Den første timen hun var til stede fikk hun egen forklaring av læreren som gikk fort gjennom det klassen hadde gått gjennom mens hun var borte. Mia leste fagteksten i læreboken og studerte eksemplene og

brukte læreboken i diskusjon med medelever. Når hun så ut til å stå fast så hun både på fagtekst og eksempler i læreboken, og hun sjekket fasit etter hver oppgave.

Kartleggingen av Mias reaksjoner når hun så ut til å stå fast viste av syv av de 10 gangene hun stod fast brukte hun læreboken, men seks av de brukte hun i tillegg enten medelever eller læreren. De resterende tre gangene benyttet hun seg av medelever eller lærer. At Mia forsøkte å løse oppgavene ved å bruke læreboken kan tyde på at hun ønsket å finne ut av problemene selv.

På testen hadde Mia korrekt utregning av vektorsummen og vektordifferansen i oppgave 1, men tegnet de unøyaktig. Hennes høye fravær kan være en av årsakene til unøyaktigheten, fordi hun ikke fikk presisert på samme måte som resten av klassen at lengde og regning var viktig. Hun begrunnet like vektorer med at de var parallelle og har samme retning, hvilket er to sider av samme sak. Dermed oppstår det tvil om Mia skrev feil eller om hun ikke forstod hva det betød at to vektorer var like eller parallelle. I oppgave 2b tegnet Mia inn linja y feil, som resulterte i at ingen vektorer var parallelle med linja. Det ser ut til at Mia forsøkte å finne et argument for parallellitet likevel. At ingen vektorer var parallelle med linja kunne gjort at Mia forstod at linja var tegnet inn feil, men at hun ikke forstod det bygger oppunder påstanden om at Mia ikke var sikker på hva det betyr at noe var parallelt. I vektorsummen som ble nullvektor regnet hun ut ved hjelp av bokstavene og skrev, som Ask, at vektorsummen ble $A = [0,0]$. A refererer til et punkt, mens $[0,0]$ refererer til en vektor. Derfor er det usikkert om Mia forstod sammenhengen mellom vektorer og punkt. Selv om Mia viste liten forståelse for parallellitet i oppgave 2a og 2b brukte hun i oppgave 2d at figuren er et parallellogram slik at hun bare trengte å regne ut to av sidene. At hun brukte egenskapene til parallellogrammet på den måten kan tyde på at hun hadde forståelse for begrepet parallellitet likevel. En annen mulighet er at Mia hadde brukt denne prosedyren før og dermed visste at hun kunne bruke den igjen. Vindvektoren i oppgave 3 hadde Mia tegnet inn at blåser fra øst, ikke fra vest. Feil retning på vindvektoren kan være fordi Mia ikke kjente til forskjellen på øst og vest, men det kunne og være at Ida ikke var sikker på hva hun skulle gjøre i oppgaven. At den resterende tegningen var rett kan tyde på at det var øst-vest-problematikken hun var usikker på. Det kan se ut som om Mia forsøkte å bruke formelen $strekning = fart \times tid$ men brukte divisjon i stedet for multiplikasjon og dermed fikk feil svar. Tallene hun satte inn for fart og tid var riktige. Hadde Mia holdt orden på benevningene i utregningen ville hun sett at svaret ikke ville vært meter, men $\frac{s^2}{m}$, og da kanskje forstått at utregningen var feil. I oppgave 4a teller Mia seg fram til vektorene. I tillegg mestret hun oppgave 4b og 4c, som tyder på at hun mestret forholdet mellom punkt og vektorer. I oppgave 2c kunne det se ut som om Mia har problemer med sammenhengen mellom vektorer og punkt, At hun mestret det i oppgave 4 kan tyde på at hun ikke var sikker på notasjonen for en vektor som går fra et punkt til det samme punktet i stedet for sammenhengen mellom vektorer og punkt. Mia så at regelen hun skulle bevise i oppgave 5 gjaldt, men klarte ikke å forklare hvorfor.

Mia ble ikke intervjuet fordi hun var lite tilstede i undervisningen. Av samme grunn var hun ikke med i utdragene i 5.1.3 Elevers forståelse for matematikk heller. Datainnsamlingen bestod ikke av noen bilder fra arbeidsboken til Mia fordi hun var fraværende når bildene ble tatt. Feltnotatene viste at Mia var svært opptatt av fasiten i perioder.

Å klassifisere Mia sin forståelse for matematikk er vanskelig fordi flere av kildene ikke gir informasjon om hvordan Mia tenker eller arbeider. At Mia husker feil formel for strekning kan tyde på at hun ikke vet hvorfor hun kan bruke formelen i utgangspunktet, og hun forklarer at en linje og vektor er parallelle selv om det ikke er tilfelle på tegningen. Hun ser ikke ut til å ha rett oppfatning av begrepet parallellitet og kan ikke forklare hvorfor regelen kan brukes. Jeg finner ikke eksempler som overbeviser meg om at Mia har god forståelse for relasjonen mellom begrep og regler eller viser at hun forstår hvorfor en regel kan brukes. Dermed tolker jeg Mia sin forståelse for matematikk som instrumentell forståelse.

Alf

Alf fulgte et annet undervisningsopplegg enn de resterende elevene fordi han syntes det ble for oppstykket om han skulle følge undervisningen. Derfor leste han først hele kapittelet før han arbeidet med de blandede oppgavene i oppgavesamlingen. De første matematikktimene satt han kun og leste før han begynte på arbeidet med de blandede oppgavene i oppgavesamlingen.

Alf fulgte lite med når læreren gikk gjennom nytt stoff. Han satt og leste i læreboken i stedet og stilte læreren spørsmål om det han leste i boken mens læreren holdt på å presentere nytt stoff i henhold til fremdriftsplanen for resten av klassen. Han fikk derfor ikke matematikken presentert på samme måte som de resterende elevene. En time forlot han klasserommet for å lese i læreboken. De gangene han fulgte med på lærerens undervisning tok han ingen notater, så bare ut til å lytte. Det ser ikke ut til at han løste en eneste oppgave i læreboken. Noen få ganger spurte han læreren om hjelp mens han leste. Årsaken er usikker. Det kan være de diskuterte stoffet i stedet for at han fikk hjelp til å løse oppgaver. Da Alf leste i læreboken brukte han veldig lang tid. Årsaker til det kan være at han løste oppgaver fra læreboken i hodet mens han leste, reflekterte over matematikken han leste, eller det kunne være han rett og slett bruke lang tid på å lese. Alf arbeidet med oppgavene i oppgavesamlingen, og han så i fasiten. Både oppgavesamlingen og læreboken lå oppslått på pulten, og han vekslet mellom hvilken han så i.

Alf plasserte seg ofte langt bort fra kameraet, med det resultat at de gangene han diskuterte med eller fikk hjelp av læreren fanget ikke videokameraet opp hva som ble sagt. I observasjonen og feltnotatene var det ingen informasjon om hvordan Alf tenkte eller løste oppgaver. Arbeidsboken til Alf bestod ikke av oppgaver fra læreboken, men fra oppgavesamlingen. Han tok ingen notater fra tavlen. Utregningene i arbeidsboken var enten ikke-eksisterende eller så mangelfulle at det var umulig å vite hvordan han kom fram til svarene. Flere ganger så det ut som om han kun hadde skrevet av informasjonen i oppgaveteksten. Av den grunn virket flere av oppgavene ufullstendige.

Alf ble hverken intervjuet eller gjennomførte testen. Grunnet det mangelfulle materialet om Alf hvordan Alf arbeidet med matematikk og tenkte når han løste oppgaver er det ikke mulig å klassifisere hva slags forståelse Alf har for matematikk.

Vedlegg 13: Datamaterialet sett opp mot ulike teorier om forståelse av matematikk

Som forklart i teorikapittelet valgte jeg å bruke Skemp (1976) sin kategorisering, instrumentell forståelse og relasjonsforståelse for å klassifisere elevenes forståelse for matematikk. Valget mitt betyr ikke at det er den eneste rette måten å kategorisere elevenes forståelse på, men at jeg mente det var det beste i dette tilfellet. I teorikapittelet diskuterte jeg i tillegg Hiebert og Lefevre (1986) sin prosedyrekunnskap og begrepskunnskap, Sfard (1991) inndeling i operasjonell og strukturell forståelse og Gray og Tall (1994) sine kategorier prosedyrekunnskap og prosept.

I denne studien er elevenes forståelse et meget sentralt begrep. Begrepskunnskap og prosept omtaler kunnskap, ikke forståelse. Datamaterialet kan knyttes opp mot elevenes kunnskap, men denne studiens utgangspunkt er elevenes forståelse, og da er instrumentell forståelse og redskapsforståelse mer dekkende. Operasjonell forståelse, strukturell forståelse og prosedyrekunnskap handler om notasjoner, men denne studien kartlegger ikke hvordan elevene forstår notasjoner. Derfor gir ikke de andre teoriene gode bilder på elevenes forståelse ut i fra det fokuset jeg har hatt under datainnsamlingen. Likevel kan kategoriene i *Tabell 33: Klassifisering av elevenes forståelse for matematikk* sees i forhold til de andre teoriene, ikke bare Skemp (1976) sin inndeling. For å illustrere hvordan de andre teoriene kunne bidratt til å beskrive elevenes kunnskap og forståelse for matematikk har jeg tatt utgangspunkt i flere av kategoriene i *Tabell 33: Klassifisering av elevenes forståelse for matematikk* og sett dem opp mot Hiebert og Lefevre (1986), Sfard (1991) og Gray og Tall (1994) sine inndelinger, se *Tabell 46*. Se 2.1 Ulike typer kunnskap og forståelse for en inngående forklaring av min oppfatning av de ulike inndelingene av kunnskap og forståelse.

Tabell 46: Klassifisering av elevenes forståelse sett opp mot andre teorier om inndeling av elevenes forståelse for matematikk

Kategori	**Kan omfatte:**
Visste/kunne forklare hvorfor man kan benyttet regler og prosedyrer	• prosedyrekunnskap fordi elevene vet hvorfor man kan benytte algoritmer og handlinger • begrepskunnskap fordi elevene må ha relasjoner mellom begrep og regler for å kunne forklare hvorfor en regel eller prosedyre gjelder • prosept fordi elevene både må ha kunnskap om begrepene i tillegg til å kunne utføre prosedyren • operasjonell forståelse ved at elevene ser på notasjonene og forstår at de skal utføre en prosedyre • strukturell forståelse ved at elevene ser på notasjonene og oppfatter at de kan være uttrykk for en abstrakt forestilling eller objekt
Visste/kunne forklare hva som skulle gjøres i oppgaver	• begrepskunnskap fordi elevene må ha relasjoner mellom begrep og regler for å kunne forklare hvorfor hva som skal gjøres i en oppgave • operasjonell forståelse ved at elevene ser på notasjonene og forstår hvilke prosedyrer som skal utføres • strukturell forståelse ved at elevene ser på

	notasjonene og oppfatter at de kan være uttrykk for en abstrakt forestilling eller objekt
Ga ikke uttrykk for å vite/ forstå hvorfor man kunne benytte regler og prosedyrer	• prosedyrekunnskap fordi elevene bruker en regel uten å vite hvorfor de kan benytte den • operasjonell forståelse fordi elevene oppfatter notasjonene som at de skal utføre en prosedyre
Begrunnet ofte svar	• begrepskunnskap fordi elevene må ha relasjoner mellom ulike kunnskapsbiter for å kunne forklare hvorfor de løser oppgaven som de gjør eller hvorfor et begrep/konsept er oppfylt • prosept dersom elevene må benytte en prosedyre først, for deretter å forklare hvorfor de har brukt den. Grunnen til forbeholdet er at prosept inneholder begrepskunnskap i tillegg til å bruke prosedyrene¨ • operasjonell og strukturell forståelse dersom elevene betrakter notasjonene som prosesser eller at de representerer abstrakte forestillinger
Viste god forståelse for relasjoner mellom begrep, regler og prosedyrer	• begrepskunnskap fordi relasjonene er biter i nettverket mellom kunnskapsdelene • proseptuell forståelse fordi elevene har begrepskunnskap i tillegg til kunnskap om å bruke prosedyrene
Godtok blindt forklaringer fra andre elever	• prosedyrekunnskap fordi elevene ikke forstår hva de skal gjøre, de bare utfører en oppskrift de får av andre
Benyttet tidligere tilegnet kunnskap korrekt	• operasjonell forståelse dersom notasjonene i den tidligere tilegnete kunnskapen gjenspeiler prosesser, algoritmer og handlinger. • strukturell forståelse dersom notasjonene oppfates som abstrakte forestillinger og objekt • begrepskunnskap fordi man knytter sammen ulike deler av kunnskapen ved å skape relasjoner mellom ny og gammel kunnskap

Av tabellen ser vi at samtlige inndelinger av ulike måter å forstå matematikk på kan beskrive deler av materialet. Dersom andre kategorier enn instrumentell forståelse og redskapsforståelse skulle vært hovedkategoriene for klassifiseringen av elevenes forståelse for matematikk måtte datainnsamlingen hatt et annet fokus for å gi utfyllende svar.