

Masteroppgave i matematikdidaktikk

Fakultet for realfag
Høgskolen i Agder - Våren 2007

Integral og integrasjon

Roger Markussen

Roger Markussen
Integral og integrasjon

Masteroppgave i matematikdidaktikk

Høgskolen i Agder

Fakultet for realfag

2007

Sammendrag

Integrasjon og derivasjon er to viktige begreper som blir behandlet i den videregående skolen. Nesten uten unntak blir derivasjon introdusert før integrasjon. Sannsynligvis fordi man tenker seg at derivasjon er lettest. Jeg mener integrasjon har en enklere geometrisk tolkning enn derivasjon. Det er lettere å se for seg et areal, enn stigningen til en graf i et punkt. I den videregående skolen ligger ikke fokuset på den geometriske tolkningen av integralet, men heller på den mer tekniske biten som blir kalt antiderivasjon. I Kapittel 1 diskuterer vi fordeler og ulemper med denne fremgangsmåten.

Resten av oppgaven skal prøve å gi en begrepsmessig innføring i forskjellige integrasjonsteorier. Oppbygningen følger en ganske kronologisk tankegang. Vi starter med de teoriene mange kjenner fra før. I Kapittel 2 gjennomgår vi integrasjonsteorier som ikke trenger en etablert målteori. Dette er Newtons- og Riemanns teorier, samt litt om Stieltjes integral. Vi sammenlikner disse, og ser på oppbygning og bruksområder. Fokuset ligger i å prøve å gi en forståelse av begrepene som naturlig dukker opp.

Kapittel 3 tar for seg utviklingen av mål- og integrasjonsteorien fra Riemann til Lebesgue. Jeg bruker historien aktivt for å motivere begrepene som trengs for å etablere målteorien.

I Kapittel 4 ser vi på oppbygningen av Lebesgues teori. Her blir relevant målteori forklart, og Lebesgue-integralet blir definert. Jeg prøver å gi et bilde av den nye teorien ved å sammenlikne den med Riemanns teori.

I det siste kapitlet går jeg litt videre mot mer generell målteori. Ser på hvordan et generelt målrom er bygd opp, og hvordan vi kan konstruere slike ved hjelp av Caratheodory-utvidelse. Vi får se et eksempel på hvordan målteorien kan bli brukt for å beskrive sannsynlighetsteori. Til slutt har jeg med en liten introduksjon til et generalisert Riemann integral som første gang ble introdusert i 1912 av Arnaud Denjoy. En av fordelene med dette integralet er at det kan invertere alle deriverte funksjoner.

Høgskolen i Agder
Institutt for matematiske fag, 2007.

Roger Markussen

Summary

Integration and differentiation are two important concepts which is treated in upper secondary school. Almost without exception is the derivative introduced before the integral. Probably because textbook authors think that differentiation is easier than integration. In my opinion integration has an easier geometric interpretation than the one of differentiation. It is easier to have a mental picture of area than a mental picture of the rate of change of a function at a point. In upper secondary school the focus is not on the geometric interpretation, but rather on the more technical part which is called antidifferentiation. In Chapter 1 we discuss the advantages or disadvantages of this procedure.

The remaining part of this thesis focuses mainly on giving a conceptual introduction to different theories of integration. The concepts is presented in an "almost" chronological order. We start with the theories for which many of the readers are familiar. In Chapter 2 we discuss the theories which don't build on measure theory. This is Newton's and Riemann's theories, together with the Stieltjes integral. We compare these and look closer at construction and application of the theories. The main issue is to give an understanding of the concepts as they appear.

Chapter 3 focuses on the development of measure- and integration theory. The relevant theory is being explained, and the Lebesgue-integral is defined. I have tried to give a mental picture of the new theory by comparing it with Riemann's theory.

In the last chapter we take a step towards more general measure theory. We define a general measure space, and we see how measures can be constructed by the Caratheodory-extension theorem. We shall see an example where measure theory is used to describe probability. I end this thesis with a small introduction to the generalized Riemann integral, which was first introduced in 1912 by Arnaud Denjoy. One of the advantages with this integral is that it can invert all derivatives.

Agder University College
Department of Mathematics, 2007.

Roger Markussen

Forord

Det å finne arealet til figurer og etterhvert arealet mellom grafer og akser, har vært av stor interesse for mange matematikere opp gjennom tiden. Integrasjon ble gjennom tiden det viktigste verktøyet vi har for å regne ut arealer og volumer. Matematikken og integrasjonsteorien har utviklet seg. Den blir nå brukt i mange flere sammenhenger enn bare kalkulering av arealer og volumer. Det er helt klart at integrasjonsteori spiller en uhyre sentral rolle i moderne analyse.

Det å avgjøre størrelsen til forskjellige mengder er ikke alltid like lett. For eksempel: Hvor stor er mengden av rasjonale tall? Hvor stor er mengden av irrasjonale tall? Kan vi finne en målemetode som virker på slike mengder? Kan vi kanskje måle alle tenkelige mengder med en slik metode? Disse spørsmålene blir besvart innenfor et matematisk felt som blir kalt målteori. I moderne integrasjonsteori får vi bruk for mye målteori. Faktisk er integrasjonsteorien og målteorien nå blitt så avhengige av hverandre at alt er smeltet sammen til mål- og integrasjonsteori.

Fokuset i oppgaven er å gi et begrepsmessig overblikk innenfor integrasjonsteori. Jeg prøver å følge begrepsutviklingen kronologisk frem til og med Lebesgues teori. Ved å følge en historisk tidslinje tror jeg det blir lettere å gi fornuftige motivasjonsfaktorer for begrepenes betydning. Jeg skal prøve å bygge opp, finne bruksområder og sammenlikne flere forskjellige integrasjonsteorier.

Elever i den videregående skolen trener mye på antiderivasjon. Jeg tror elever vil ha mer igjen for et sterkere fokus på intuitiv forståelse av integrasjon. En matematikklærer med dypere forståelse av integrasjon vil ha bedre forutsetninger for å velge kjernestoff og undervisningsmetoder som stimulerer til forståelse av begrepet. Jeg har skrevet denne oppgaven for at jeg selv skulle få en dypere innsikt i integrasjonsbegrepet, og for at andre matematikklærere skal kunne få et overblikk over denne teorien på en relativt tilgjengelig måte.

Jeg ønsker å rette en stor takk til min veileder, førsteamanuensis Olav Nygaard, for kjempegode råd og kommentarer som uten tvil forbedret oppgaven min kraftig. Du hadde alltid tid til en prat/diskusjon når jeg kom innom kontoret ditt.

Roger Markussen
04-05-2007

Innhold

Kapittel 1. Innledning	1
1. Integralets historie i korte trekk	1
2. Integrasjon i skolen	4
3. Analysens fundamentalteorem	6
Kapittel 2. God gammeldags integrasjon	8
1. Newtons integral	8
2. Riemanns integral	11
3. Sammenlikning av N- & R-integralet	16
4. Uekte integraler	17
5. Riemann-Stieltjes integral	20
Kapittel 3. Perioden fra Riemann til Lebesgue	23
1. Riemanns «Habilitasjon»	23
2. Topologiske små mengder og målteoretiske små mengder	26
3. Ingensteds tette mengder med positivt mål	27
4. Ytre innhold	31
5. Målbare mengder og Fubini's teorem	33
6. Borel's målteori	35
7. Klassifisering av mengder og funksjoner	36
8. Henry Lebesgue	38
Kapittel 4. Lebesgues mål og integrasjonsteori	39
1. Mål og nullmengder	39
2. Lebesgue-målbare mengder	41
3. Målbare funksjoner	44
4. Definisjonen av L-integralet	46
5. Integrerbare funksjoner	47
6. Det normerte rommet L^1 av L-integrerbare funksjoner	49
7. Sammenlikning av R- og L-integralet	52
Kapittel 5. Mer generell mål og integrasjonsteori	57
1. Generell mål- og integrasjonsteori	57
2. Hahn-Caratheodory-utvidelse	58
3. Integral i sannsynlighetsteori	61
4. Det generaliserte Riemann integralet	63
Litteratur	67

KAPITTEL 1

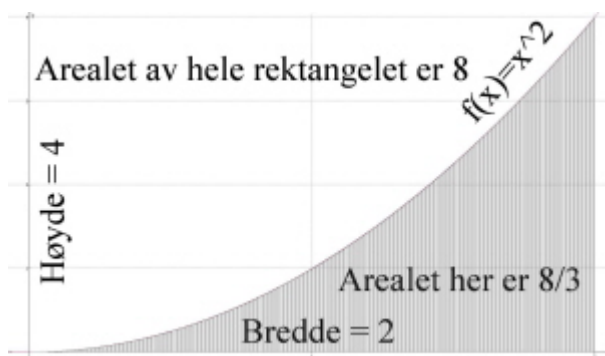
Innledning

1. Integralets historie i korte trekk

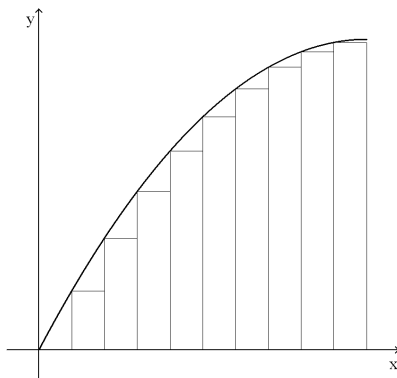
Matematikere har strevd med å bestemme areal og volum av geometriske figurer i mer enn 2000 år. Arkimedes var kanskje den første som brukte integrasjonsliknende metoder for å bestemme arealet av blant annet en sirkel. Han gjorde dette ved å beregne arealet av innskrevne regulære polygoner. Når han økte antall kanter i polygonene ble tilnærmingen til sirkelen bedre. Den beste tilnærmingen gjorde Arkimedes med en 96 kant, som medfører at tilnærmingen til π har en relativ feil på 0,04 % (godt gjort å klare dette med utregninger skrevet i sand) [12].

Arkimedes klarte også å vise at arealet under grafen til $f(x) = x^2$ fra 0 til x var gitt ved formelen $\frac{1}{3}x^3$ (altså viste han $\int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$). Han tenkte seg et rektangel med høyde x^2 og lengde x , og fant ut at arealet under kurven ble nøyaktig $\frac{1}{3}$ av arealet til rektangelet. Se Figur 1. Metoden han brukte var å tilnærme arealet med mange rektangler. Han viste at hvis rektanglene alltid lå under kurven, så ble summen av arealene til rektanglene mindre enn $\frac{1}{3}x^3$ og hvis rektanglene alltid lå over kurven, ble arealet til summen av rektanglene større enn $\frac{1}{3}x^3$. Senere skal vi se at dette blir kalt nedre- og øvre Darboux-summer.

Er det noen forskjell på Arkimedes metode og vår integrasjonsmetode? Selve metoden er helt lik Riemanns integrasjon. Forskjellen ligger i argumentasjonen for at dette virker. Arkimedes argumentasjon bygger på et intuitivt bilde; Arkimedes kunne ha sagt: «dette må stemme bare vi fortsetter å øke antallet rektangler i det uendelige». Denne måten å argumentere på ble kalt «Method of exhaustion». Vår argumentasjon bygger på konvergensteorien



FIGUR 1. Arkimedes klarte denne integrasjonen



FIGUR 2. Leibniz integrasjon

Cauchy gjorde skikkelig rede for på 1820-tallet. Det er verdt å merke at fundamentet for integralet var ekvivalent med «Method of exhaustion» frem til Cauchy.

Starten på den integrasjonsteorien vi kjenner begynte midt på 1600-tallet. Vitenskapsmennene som var i hovedrollen var Isaac Newton (1642 - 1727) og Gottfried Leibniz (1646 - 1716). Teoriene til disse to har ganske forskjellig oppbygning, men det viser seg at de er ekvivalente. Selv om det er Newton som har fått mesteparten av æren, så er notasjonen vi bruker i dag den samme som Leibniz brukte. Leibniz tenkte på å finne arealet under en graf ved å summere arealet av mange små rektangler som lå tett oppunder grafen (se Figur 2). For å finne det riktige arealet tenkte han seg at bredden til disse rektanglene var uendelig liten. Denne bredden kalte han dx . Notasjonen han brukte for å illustrere at disse uendelig små rektanglene skulle summeres var en langstrakt S (\int). Fra dette følger notasjonen $\int f(x) dx$, som vi kjenner godt [7]. Når det ikke er viktig å presisere hvilken «dummy» variabel som gjelder, tar jeg meg friheten til å bruke notasjonen $\int f$.

Disse uendelig små størrelsene ble kalt for infinitesimaler. Det at en regnet med uendelig små størrelser som om de var endelige gjorde at mange var skeptiske til teorien. Matematikerne ble ofte satt i en vanskelig situasjon når de skulle redegjøre for dette. De fant likevel ut at denne måten å regne på var veldig nyttig. Etter å ha feilet i å lage en solid teori rundt infinitesimalene, uttalte Leibniz i 1673 at senere generasjoner fikk rydde opp [7].

Litt senere oppdaget Newton, Leibniz og Joh. Bernoulli (1667 - 1748) uavhengig av hverandre at integrasjon var motsatt operasjon av det å derivere [10]. Som følge av dette kom den første varianten av fundamentalteoremet.

TEOREM 1.1 (Fundamentalteoremet i Kalkulus). *Anta F er en primitiv til f på intervallet $[a, b]$; dvs. $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [a, b]$. Da har vi at*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

I de neste 140 årene, frem til ca 1820, tenkte matematikere på integrasjon som det motsatte av å derivere. Måten det ble gjort på var å finne (når de klarte

dette) en antiderivert (primitiv), og deretter bruke fundamentalteoremet. Denne måten å integrere på kalles Newton-integrasjon, og integralet kalles Newton-integralet (N-integralet). Når begreper som grense, kontinuitet og konvergens ble skikkelig definert på begynnelsen av 1800-tallet var tiden moden for å forandre på synet av integrasjon.

I 1823 publiserte Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en tekst om det å regne med infinitesimaler, her var integrasjonsteorien banebrytende. Cauchy gikk bort fra bildet der integrasjon var definert som det motsatte av å derivere. Han definerte nå integrasjon på en helt annen måte. Noen av grunnene til dette kan være [12].

- Det var klart at arealet under en kurve kunne være fornuftig å snakke om selv om integralet ikke kunne evalueres med bruk av antiderivert og endepunktene til et intervall. Et eksempel er de stykkevise kontinuerlige funksjonene som dukket opp i Fouriers arbeid med rekker med trigonometriske funksjoner (Fourier-rekker).
- En annen grunn kan være at han fant ut at det ikke nødvendigvis fantes en antiderivert til alle funksjoner.
- Cauchys egen forklaring på hvorfor han ville definere integralet som en sum, var at det fungerte.

Måten Cauchy kom frem til sin definisjon av integralet var sannsynligvis ved at han så på arbeid som var gjort av Euler og Lacroix i forbindelse med å approksimere bestemte integral [12].

Det Cauchy gjorde var å anta at $f(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$, han partisjonerte intervallet inn i n deler $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ og laget summen

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

Han var selvfølgelig veldig klar over at S avhenger av både n og verdiene x_i som er valgt. Han gjorde et greit resonnement for at bare n ble stor nok, så ville ikke valget av x_i 'er være viktige. Det var Cauchys nye definisjoner av kontinuitet og grenser som gjorde at dette nå ble en skikkelig definisjon.

Cauchy jobbet ikke så mye med hvilke krav som måtte til for at en funksjon skulle være integrerbar. Han jobbet hovedsakelig med kontinuerlige funksjoner, eller evt. funksjoner med et endelig antall diskontinuiteter på et intervall. Det var Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) som i avhandlingen til sin habilitasjon i 1854 tok tak i disse tingene. Han forandret litt på definisjonen, fant et kriterium for når en funksjon var (Riemann) integrerbar og kom med et flott eksempel på en integrerbar funksjon som har uendelig mange diskontinuiteter i hvert intervall. Faktisk var det slik at mengden av diskontinuiteter til denne funksjonen ligger tett i de reelle tall. Når dette først ble publisert i 1867 (nesten to år etter hans død), ble denne definisjonen sett på som den mest mulig generelle. Det viste seg likevel at Riemann-integralet (R-integralet) hadde noen svakheter. Disse svakhetene kommer vi tilbake til i Kapittel 2.

Etter Riemann var det mange som jobbet med integrasjon i årene fremover mot 1900. Det var i løpet av denne tiden at målteorien begynte å ta form.

I 1902 kom Lebesgue med sin doktoravhandling *Intégrale, Longueur, Aire* (Integral, Lengde, Areal), denne avhandlingen var banebrytende. Lebesgues intensjon var å hankses med ulempene ved R-integralet. Dette klarte han på fremragende måte, og teorien viste seg å være mer fruktbar enn Lebesgue selv kunne tenke seg.

Mål- og integrasjonsteorien utviklet seg raskt utover på 1900-tallet. Det var Lebesgues teori som ble grunnlaget for mye av matematikken som oppsto på denne tiden. Sannsynlighetsteorien var en av de grenene som virkelig fikk nytte av mål- og integrasjonsteorien til Lebesgue. Den store hjernen bak aksiomatiseringen av sannsynlighetsteorien var den russiske matematikeren Andrey Nikolaevich Kolmogorov. Dette ble gjort rundt 1933 og var et gjennombrudd i måten å se på sannsynlighet (vi kan godt si at fundamentet for moderne sannsynlighetsteori ble lagt her). Lebesgues integral (L-integral) har også noen svakheter, blant annet fordi det er et *absolutt integral*. Senere i oppgaven skal vi se hva et absolutt integral er.

Lebesgues teori gjorde ikke så mye for å forenkle fundamentalteoremet. Med motivasjon i å finne et integral der den deriverte alltid er integrerbar, var det Arnaud Denjoy og Oskar Perron klarte å utvikle slike integraler. Dette ble gjort på to veldig forskjellige måter. Det viste seg overaskende nok at integralene var ekvivalente [2]. Rundt 1960 laget Jaroslav Kurzweil og Ralph Henstock en annen definisjon som var ekvivalent med Denjoy-Perron integralet. Denne definisjonen er bare en modifikasjon av Riemanns definisjon, og ble derfor kalt *det generaliserte Riemann integralet*. Det viste seg nemlig at alle R-integrerbare funksjoner, alle N-integrerbare funksjoner og alle L-integrerbare funksjoner var integrerbare med denne metoden, og integralene var de samme. Det samme gjaldt faktisk også for uekte integraler. Denne teorien er faktisk ganske ukjent, selv for matematikere som har arbeidet sitt basert på Lebesgue teori.

2. Integrasjon i skolen

Allerede tidlig i barneskolen skal elevene prøve å bestemme arealer. Ved hjelp av enkle geometriske sammenhenger finner de frem til arealet av rektangler, parallellogrammer, romber, sirkler, osv. Det er først i grunnkurset på videregående skole at de kommer borti integrasjon for å beregne arealet under grafer, og da bare som numeriske løsninger ved hjelp av kalkulatoren. I andre klasse er det vanlig at elevene blir formelt introdusert for integrasjonsbegrepet. Da følger som regel integrasjon som en *naturlig* fortsettelse på derivasjon.

I oppleggene jeg har sett for denne introduksjonen blir integrasjon sagt å være det motsatte av å derivere. Elevene trener i begynnelsen på oppgaver av typen: Anta $f'(x) = x^2$, hva er $f(x)$? Elevene blir nå fortalt at de integrerer x^2 . Er dette en fornuftig introduksjon av integrasjonsbegrepet? Etter min mening skaper denne fremgangsmåten forvirring, og den bidrar til å demotivere elever for videre arbeid med integrasjon. Elevene har så godt som ingen idé om hvorfor de trenger dette, og dermed ingen forståelse av integrasjon som et verktøy for å finne et areal.

Jeg tror det er mange måter å gjøre en god introduksjon til integrasjon på, men jeg er ganske sikker på at felles for disse er en øyeblikkelig motivasjon for «hvorfør gjør vi dette?». Det å gjøre tidlig klart at dette brukes i mange sammenhenger, blant annet for å bestemme arealer, vil være en naturlig motivasjonsfaktor for elever i den videregående skolen. Senere skal en selvfølgelig trekke linjene til derivasjon og fundamentalteoremet.

Bressoud [3] mener integrasjon bør ha en praktisk tilnærming, der en tar utgangspunkt i å finne arealer. Han tror på det genetiske prinsipp innenfor didaktikken, som betyr at progresjonen i undervisningen skal til en viss grad følge historien. Grunnen til at integrasjon ble «funnet opp» var for å bestemme arealer, deretter ble det utviklet metoder for å tilnærme arealet, og på grunnlag av dette kom man frem til solide teorier. Han mener denne rekkefølgen også bør brukes i forbindelse med å introdusere integralbegrepet. Det betyr at antiderivasjon og fundamentalteoremet skal introduseres før Riemann–integralet.

Stein [21] mener det er veldig viktig å tenke over hvilke begreper og metoder det er fornuftig å undervise. Han mener det skal være en sammenheng mellom pensum, vektleggingen av begrepene og spørsmålet om hva elevene kommer borti i praktiske sammenhenger senere. Vi må ikke tenke «Jeg må klatre opp fjellet siden det står her». Blant annet så mener han at å bruke masse tid på antiderivasjon av elementære funksjoner, kan bli litt kunstig tatt i betraktning at svært mange elementære funksjoner *ikke* har en elementær antiderivert. Noe av dette bør likevel gjøres siden veldig mange funksjoner i forbindelse med fysikk og andre naturvitenskaper har elementære ubestemte integraler (antideriverte). I denne forbindelse bør elevene få tilgang til store integrasjonstabeller delvis istedenfor å lære mange «lure» triks for å finne ubestemte integral. Han ønsker mer vekt på numerisk integrasjon og det konseptuelle bilde av integral som areal.

Thurston [24] mener den vanlige måten å undervise derivasjon og integrasjon på er ulogisk. Han ønsker en forandring av notasjon for å gjøre kalkulus mer intuitivt. Han mener blant annet at den deriverte som skrives både som $f'(x)$ og $\frac{dy}{dx}$ ikke er samstemte. Man skriver ofte $f'(3)$ (f derivert i punktet 3), men man skriver aldri $\frac{dy}{d3}$. Han viser til flere paradokser både innenfor derivasjon og integrasjon på grunn av dette. Han legger frem et forslag som ifølge han skal være mye bedre. Han mener også at bruken av konstanten c i forbindelse med ubestemte integral blir upresist brukt. Han mener det bør tenkes over om en ønsker å finne en antiderivert (det er nok i forbindelse med fundamentalteoremet), eller om en vil ha et uttrykk med alle antideriverte. Som regel blir bare c 'en ubetenksomt hengt på den antideriverte, noen ganger unødvendig, andre ganger skulle det ha vært flere konstanter. På dette grunnlaget mener han at vi ikke trenger ubestemte integral i det hele tatt.

Jeg har valgt å vise til en eldre artikkel da denne har noen viktige poeng angående å få frem meningen med matematikken. Dragoo [6] mener det er meningen og den praktiske nytten som er det viktigste å få frem i matematikken. Det finnes de som mener at matematikk består av å bygge opp kunnskap fra bunnen av. Man kan derfor ikke få en god forståelse for f.eks.

funksjoner, hvis man ikke har bygget opp de reelle tall fra bunnen. Forfatteren her mener dette er «gammeldags» og passer bare for de brillante elevene. Han viser til følgende utsagn hentet fra S. P. Thomson: *Du forbyr ikke en person å bruke klokke hvis han ikke vet hvordan man lager den.*

Hvordan skal man få elevene til selv å utforske og se sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon? Dette synes jeg Strang [22] har et veldig interessant synspunkt på. Han mener vi skal «glemme» det meste vi allerede vet om kalkulus. Han tar utgangspunkt i at det bare finnes to funksjoner i verden, $v =$ fart og $f =$ strekning. Med utgangspunkt i dette lager han på en flott måte en diskret modell, som oppfyller alt en elev trenger å vite om sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon. Etter hvert som elevene blir mer avanserte kan en gå til grenseverdier for å ende opp med fundamentalteoremet under litt sterke forutsetninger.

I Norge er det mest vanlig å introdusere derivasjon før integrasjon (Jeg tror dette stemmer for de fleste land). Schuman [20] mener integrasjon som en metode for å finne et areal er lettere å skjønne intuitivt enn stigningstallet i et punkt. Dette bygger på de fleste har et godt etablert bilde av hva areal er, men det er mindre assosiasjoner knyttet til stigning. Forslaget til forfatteren er altså å introdusere integrasjon før derivasjon.

En bok som følger forslaget til Schuman er Tom Apostols Calculus [1]. Apostol skriver følgende i forordet:

«The approach in this book has been suggested by the historical and philosophical development of calculus and analytic geometry. For example, integration is treated before differentiation. Although to some this may seem unusual, it is historically correct and pedagogically sound. Moreover, it is the best way to make meaningful the true connection between the integral and the derivative».

Det er ganske tydelig at også Apostol er tilhenger av det genetiske prinsipp, sammen med blant annet Bressoud. Integrasjonsdelen i denne boken skiller seg litt fra hvordan andre calculusbøker introduserer integrasjon. Apostol bygger opp teorien på en måte som etter min mening gjør det mye lettere og avansere videre til andre integraler som for eksempel Lebesgues integral. Det er nok sannsynligvis mange som mener boken er litt vanskelig som grunnlaget for et første kalkulus kurs.

3. Analysens fundamentalteorem

Fundamentalteoremet er setningen som knytter integrasjon til derivasjon. Det var først på Newtons tid at begrepene integrasjon og derivasjon ble etablert. Det var på denne tiden vi fikk det første fundamentalteoremet. Etter hvert som vi har fått nye måter å integrere på, har også fundamentalteoremet blitt noe endret. Vi ønsker aller helst å ha et teorem som gjør at vi kan integrere alle deriverte funksjoner. Vi sier at vi ønsker å «tilbakestille» alle deriverte funksjoner. Dessverre er det slik at de fleste metodene må legge tilleggskrav på den deriverte for å oppnå dette.

Det første fundamentalteoremet vi skal se på er det eldste. Integrasjonsmetoden vi bruker er Newton-integrasjon.

TEOREM 3.1 (Fundamentalteoremet med N-integralet). *Anta F er en primitiv til f på intervallet $[a, b]$; dvs. $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [a, b]$. Da har vi at*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Legg merke til at her må den deriverte ha en antiderivert for å kunne «tilbakestilles». I det neste fundamentalteoremet skal vi bruke Riemann-integrasjon. Selv om dette er et integral som ble utviklet mye senere enn N-integralet, kan det likevel ikke karakteriseres som en generalisering siden det finnes N-integrerbare funksjoner som ikke er R-integrerbare. Dette medfører at det finnes funksjoner med begrenset derivert i et intervall, som ikke er integrerbare i intervallet. En konsekvens av dette blir omtalt i Kapittel 3.1.

TEOREM 3.2 (Fundamentalteoremet med R-integralet). *Anta F er deriverbar på intervallet $[a, b]$. Hvis $F' = f$ er R-integrerbar på $[a, b]$ så har vi at*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

I fundamentalteoremet med R-integralet, ser vi at vi trenger et litt «kjedelig» tilleggskrav at den deriverte må være integrerbar. Ved å bruke Lebesgue-integrasjon får vi en forbedring av fundamentalteoremet.

TEOREM 3.3 (Fundamentalteoremet med L-integralet). *Anta F er deriverbar på intervallet $[a, b]$. Hvis $F' = f$ er begrenset på $[a, b]$, så er f L-integrerbar på $[a, b]$, og*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Vi kan merke oss at L-integralet er en generalisering av R-integralet men ikke av N-integralet, og fortsatt trenger vi et tilleggskrav om begrensning av den deriverte. Det finnes også et integral som er en generalisering av både L-integralet og N-integralet, og som klarer å tilbake stille alle deriverte. Dette integralet kalles «det generaliserte Riemann-integralet».

TEOREM 3.4 (Fundamentalteoremet med det generaliserte R-integralet). *Anta F er deriverbar på intervallet $[a, b]$. Da er $F' = f$ integrerbar på $[a, b]$, og*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Det generaliserte Riemann-integralet er en ganske ny teori (ca 1960). I denne oppgaven skal jeg konsentrere meg om N, R og L-integralet, da det blir for mye teori hvis en skal prøve å gi et godt bilde av det generaliserte R-integralet. Jeg har likevel valgt å ha med en kort innføring på slutten av Kapittel 5.

KAPITTEL 2

God gammeldags integrasjon

I dette kapitlet skal jeg prøve å bygge opp teorien for Newtons- og Riemanns integraler. Dette er to typer integral som har veldig forskjellig oppbygging. Det ene kommer fra en tid før begreper som grense, kontinuitet og konvergens var skikkelig definert, mens det andre integralet baserer seg på integrasjon som en grenseprosess. Disse to integralene, i tillegg til Stieltjes integral, er de som kan evalueres på en god måte uten bruk av målteori. Jeg skal sammenlikne disse, se på fordeler og ulemper, og prøve å få frem begrensningene til hvert av disse.

Jeg starter med å definere N-integralet, forklare litt om oppbyggingen og få frem noen egenskaper. Deretter blir det samme gjort med R-integralet, for så å sammenlikne. En liten del om Riemann-Stieltjes integral (R-S-integralet) blir avslutningen av dette kapitlet. En del av egenskapene ved R-integralet blir utelatt i dette kapitlet, fordi disse har mer relevans når jeg senere skal sammenlikne R-integralet med L-integralet.

1. Newtons integral

Som jeg forklarte i innledningen, er oppbyggingen av Newtons integral basert på at integrasjon er det motsatte av å derivere. Det å derivere var noe matematikere på 1600-tallet visste en del om. I den følgende argumentasjonen til Newton har jeg valgt å bruke moderne (Leibniz) notasjon. Newton brukte en annen notasjon, men siden denne er mindre kjent, vil det sannsynligvis bare komplisere argumentasjonen å bruke dette.

Newton ønsket, for et gitt funksjonsuttrykk $y = f(x)$, å finne arealet mellom x -aksen og grafen til denne funksjonen. Fiksér et punkt a og la $z = F(x)$ være grafen til f mellom a og x . Da viste Newton at funksjonen f er den deriverte til F . Vi kaller $F(x)$ en antiderivert eller primitiv til $f(x)$. Dette ble redegjort for på følgende måte:

Hvis x øker med Δx så vil arealet øke med $\Delta z = F(x + \Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x$. I grensen $\Delta x \rightarrow 0$ får vi

$$dz = f(x) dx \quad \text{og} \quad \frac{dz}{dx} = f(x).$$

MERKNAD 1.1. Husk at da dette ble utledet hadde ikke begreper som grense, kontinuitet, konvergens og funksjon blitt skikkelig definert.

Nå i moderne tid er det blitt utarbeidet en skikkelig definisjon på N-integralet, og N-integrerbare funksjoner. Følgende definisjon er hentet fra [13].

DEFINISJON 1.2. La $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. En funksjon $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ blir sagt å være N-integrerbar på (a, b) hvis f har en antiderivert F på (a, b) , og hvis de ensidige grensene $F(a+)$ og $F(b-)$ eksisterer og er endelige. Det reelle tallet

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+)$$

er N-integralet til f over intervallet (a, b) .

Måten N-integralet blir brukt på for å finne et areal under en kurve er å finne en antiderivert og deretter bruke fundamentalteoremet.

EKSEMPEL 1.3. La $f(x) = \frac{1}{x}$. Finn arealet begrenset av x -aksen og f når $x \in [1, 5]$.

Løsning:

Vet at en antiderivert til f er $F(x) = \ln x$. Arealet blir $\int_1^5 f(x) dx = [\ln x]_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$.

MERKNAD 1.4. For at vi skal klare å uttrykke en antiderivert, så må den være en elementær funksjon. Selv om den antideriverte eksisterer, så er det altså ikke sikkert at vi klarer å uttrykke den. Svært mange elementære funksjoner har faktisk ikke en elementær antiderivert [21].

Integrasjonsprosessen har en veldig viktig egenskap – den er lineær. Dette betyr at hvis $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f og g er to integrerbare funksjoner så er

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Dette brukes mye når en regner med integraler, og vi skal bruke dette flere ganger senere i oppgaven.

Vi sier at $\mathcal{N}([a, b])$ er mengden av Newton integrerbare funksjoner på intervallet $[a, b]$. Vi skriver som regel bare \mathcal{N} når det ikke er nødvendig å spesifisere intervallet. Hvilke funksjoner ligger i \mathcal{N} ? Her ligger alle funksjoner der vi kan finne en antiderivert på det gitte intervallet. Problemet er at det egentlig er ganske få funksjoner vi kan finne en antiderivert til. Vi kjenner heller ikke til noen spesiell egenskap som karakteriserer disse funksjonene (f.eks. alle monotone funksjoner eller alle kontinuerlige funksjoner). Eksempler på kontinuerlige funksjoner som ikke ligger i \mathcal{N} er $f_1(x) = e^{x^2}$ og $f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Nå skal det også nevnes at i forbindelse med enkle matematiske modeller, så dukker det som regel opp funksjoner som ligger i \mathcal{N} . Dette kommer av at antagelsene for modellen gjøres på en slik måte at beregningene blir greie å jobbe med. Newton-integralet gir oss da muligheten for å løse disse (som regel differensiallikninger) problemene analytisk. Det er ganske ofte at en analytisk løsning gir mer innblikk i løsningen enn f.eks en numerisk løsning. Den viktigste klassen av funksjoner som ligger i \mathcal{N} er sannsynligvis polynomene. Disse har egenskapen at de ligger tett i de kontinuerlige funksjonene [19]. Det betyr at en kontinuerlig funksjon kan tilnærmes vilkårlig bra med et polynom, der tilnærmingen kan gjøres uniformt. Dette gir oss en mulighet for

å jobbe med de «snille» polynomene istedenfor mer kompliserte funksjoner (som kanskje ikke har noen antiderivert).

Nå skal jeg prøve å gi en forklaring på hva det vil si at tilnærmingen kan gjøres uniformt. Dette betyr at en kan finne en følge av polynomer som konvergerer uniformt mot en kontinuerlig funksjon. Uniform konvergens er noe vi kommer bortifra flere ganger senere i oppgaven, derfor ønsker jeg å gi en forståelse for dette begrepet. Det finnes flere måter en funksjonsfølge kan konvergere på, de to mest vanlige er punktvis og uniform konvergens. Først kommer den formelle definisjonen på disse to begrepene, deretter prøver jeg å forklare.

DEFINISJON 1.5. Vi sier at en funksjonsfølge (f_n) konvergerer *punktvis* mot en grensefunksjon f hvis det for alle $\epsilon > 0$ eksisterer $N \in \mathbb{N}$, slik at bare $n > N(\epsilon, x)$, så er $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ for alle x .

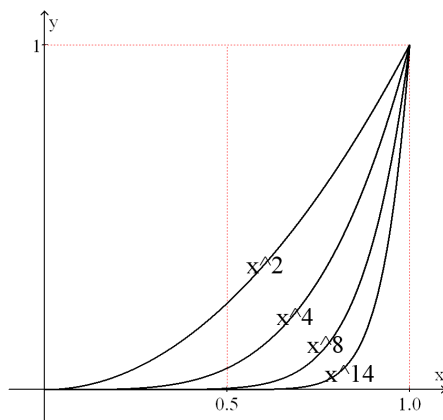
Det kan være greit å tenke på dette som at tallfølgen $(f_n(x))$ konvergerer for hver x . Her kommer den tilsynelatende nesten like definisjonen på uniform konvergens.

DEFINISJON 1.6. Vi sier at en funksjonsfølge (f_n) konvergerer *uniformt* mot en grensefunksjon f hvis det for alle $\epsilon > 0$ eksisterer en $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, som er uavhengig av x , slik at $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ bare $n > N(\epsilon)$.

Hvis en følge konvergerer punktvis kan vi tenke oss at det er en N som virker for hver x . Hvis konvergensten er uniform finnes det én N som virker for alle x 'ene på en gang. Nå følger to eksempler som skal prøve å illustrere bedre (se Figur 1).

EKSEMPEL 1.7. La $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Dette er en funksjon som konvergerer punktvis mot $f(x) = 0$. Konvergensten er ikke uniform siden vi for ethvert valg av N alltid kan velge en x -verdi så nær 1 at $f_N(x)$ er så nær 1 som vi bare ønsker.

Det neste eksemplet bruker den samme funksjonen, bare med et annet definisjonsområde.



FIGUR 1. Punktvis og uniform konvergens

EKSEMPEL 1.8. La $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Dette er en funksjon som konvergerer uniformt mot $f(x) = 0$. Denne funksjonen konvergerer aldri «tregere» enn $f_n(\frac{1}{2})$. Det betyr at vi kan velge N slik at $|f_N(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| < \epsilon$. Siden funksjonen konvergerer raskere for alle andre verdier av x , vet vi at denne N 'en virker for alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Ved første øyekast kan det se ut som det ikke er så stor forskjell mellom punktvis og uniform konvergens, men hvis man jobber litt innenfor analyse finner en fort ut hvor mye strengere uniform konvergens er.

Her følger en rask oppsummering av de viktigste ulempene ved N-integralet.

- Vi blir nødt til å finne en antiderivert for å kunne integrere.
- I forbindelse med funksjonsfølger kan det være vanskelig å vite om alle leddene er integrerbare.
- En funksjon må være gitt ved et funksjonsuttrykk for å gi mening til dette integrasjonsbegrepet.

Nå beveger vi oss videre i integrasjonens verden til Riemanns integral.

2. Riemanns integral

Det er to hovedmetoder å bygge opp R-integralet etter, den ene er Riemanns metode, den andre er Darboux's metode. Jeg velger å bruke Darboux's metode, som jeg mener er noe klarere i forhold til hva integral egentlig er. Det kan også nevnes at Darboux's metode har visse svakheter hvis en skal utvide definisjonen til funksjoner med mer generelle verdier enn bare reelle tall – f.eks komplekse tall. Dette kommer av avhengigheten av at de reelle tallene er en velordnet kropp. Når vi jobber med komplekse tall finnes det ingen slik velordning. Vi kan ikke si at et komplekst tall er større enn et annet. Bartle [2] mener at det er ganske tungt å bevise at Darboux's metoder er ekvivalent med Riemanns.

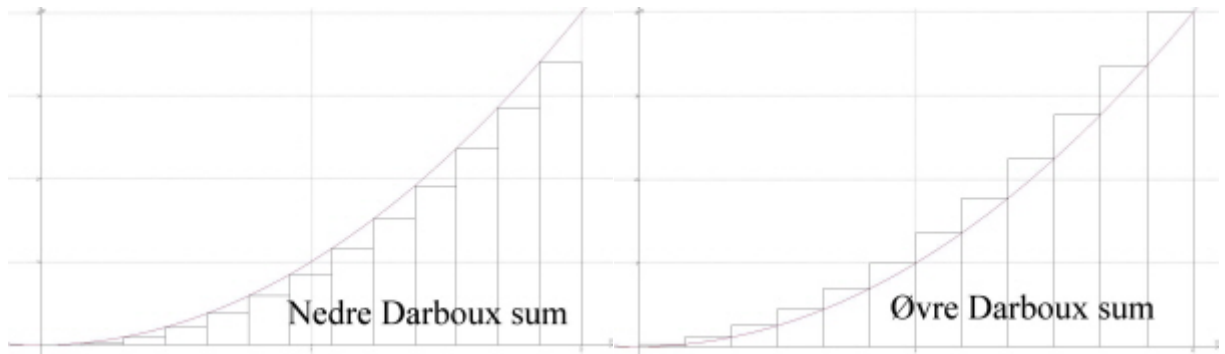
Darboux viste at for alle begrensede funksjoner og alle intervaller $[a, b]$ så eksisterer tre tall m, M og $\Delta \in \mathbb{R}$ definert på følgende måte: $m \in \mathbb{R}$ er største nedre begrensning og $M \in \mathbb{R}$ er den minste øvre begrensningen til f på $[a, b]$. $\Delta = M - m$ blir kalt «variasjonen» til f på $[a, b]$. Darboux presiserte at disse verdiene trengte ikke å bli truffet av f på intervallet. Han var en av de første som skilte mellom supremum og maksimum, og infimum og minimum [11]. Det er likevel slik at på de lukkede intervallene der f er kontinuerlig, så vil supremum være lik maksimum og infimum være lik minimum. Dette kommer som en følge av kompletthetsaksiomet (Det er faktisk en alternativ måte å definere kompletthet på).

La nå f være en vilkårlig begrenset funksjon på $[a, b] \subset \mathbb{R}$. For en vilkårlig partisjon $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ kan vi se på følgende uttrykk:

$$M(n) = M_1\delta_1 + \dots + M_n\delta_n,$$

$$m(n) = m_1\delta_1 + \dots + m_n\delta_n,$$

$$\Delta(n) = \Delta_1\delta_1 + \dots + \Delta_n\delta_n.$$



FIGUR 2. Nedre og øvre Darboux-sum

Her er $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ lengden av det i 'te intervallet, $M_i = \sup\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i = \inf\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\}$ og $\Delta_i = M_i - m_i$. Darboux viste at grenseverdiene til $M(n)$, $m(n)$ og $\Delta(n)$ (når $n \rightarrow \infty$ og $\delta_i \rightarrow 0$) er entydige, endelige og avhenger bare av a , b og f . Vi kaller $M(n)$ for den øvre Darboux-sum, og $m(n)$ for den nedre Darboux-sum (se Figur 2). Grenseverdiene for $M(n)$ og $m(n)$ kalles henholdsvis øvre og nedre Darboux-integral, og skrives henholdsvis $\underline{\int} f(x) dx$ og $\overline{\int} f(x) dx$ [14]. Vi er nå klare for følgende definisjon:

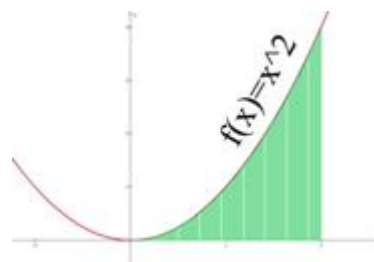
DEFINISJON 2.1. En funksjon f er R-integrerbar hvis og bare hvis $\underline{\int} f(x) dx = \overline{\int} f(x) dx$ og vi definerer Riemann integralet ved $\int f(x) dx = \underline{\int} f(x) dx = \overline{\int} f(x) dx$.

Jeg presiserer at de øvre og nedre Darboux-integralene alltid eksisterer! Her kommer et eksempel på hvordan vi kan bruke definisjonen på R-integrasjon til å finne et areal.

EKSEMPEL 2.2. La $f(x) = x^2$. Bruk definisjonen av R-integralet til å vise at $\int_0^2 f(x) dx$ eksisterer, og finn arealet begrenset av grafen til f og x -aksen når $x \in [0, 2]$ (se Figur 3).

Løsning:

Vi lager en partisjon som består av n like store deler, dvs. lengden på delintervallene blir $\frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$. Legg merke til at f er monoton på intervallet $[0, 2]$,



FIGUR 3. Hjelpesfigur for eksempel 2.2

som betyr at m_i alltid er venstre, og M_i alltid er høyre endepunkt i delintervall i . $m(n) = \sum_{i=1}^n \frac{(2(i-1))^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{8(i-1)^2}{n^3}$ og $M(n) = \sum_{i=1}^n \frac{2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{8i^2}{n^3}$ som viser at $M(n) = m(n) + \frac{8n^2}{n^3}$, og da er det opplagt at $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \int f(x) dx = \int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} m(n)$ som gir at $f(x) = x^2$ er integrerbar. Velger nå å regne ut $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{8i^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 12n^2 + 4n}{3n^3} = \frac{8}{3}$. Altså er $\int_0^2 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

I eksemplet over har jeg valgt en måte å partisjonere intervallet $[0, 2]$ på, nemlig å bare la alle delene være like store. Kunne det tenkes at jeg kunne fått et annet svar hvis jeg hadde partisjonert på en annen måte? Nei, R-integralet er uavhengig av hvilken måte du partisjonerer intervallet på, bare lengden av det største intervallet går mot null. Dette kan vi argumentere for på følgende måte: Uansett hvilken partisjon vi har valgt, kan vi lage en ny partisjon \mathcal{P} der alle intervallene er like lange og mindre enn det minste av intervallene i den andre partisjonen. Det er alltid slik at

$$\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in J} f(x) \quad \text{og} \quad \inf_{x \in I} f(x) \geq \inf_{x \in J} f(x)$$

dersom $I \subset J$ er intervaller. Dette medfører at \mathcal{P} alltid vil gi en Darboux-sum som er en bedre tilnærming til arealet.

Vi sier at \mathcal{R} er mengden av de Riemann integrerbare funksjonene. Det er naturlig å spørre seg hvilke funksjoner som ligger i \mathcal{R} ? Det fullstendige svaret får vi i neste Kapittel, men vi skal se på noen funksjoner her også. Riemann viste at alle monotone funksjoner ligger i \mathcal{R} (husk at vi snakker om begrensede funksjoner). Dette betyr at alle funksjoner med begrenset variasjon ligger i \mathcal{R} . Dette stemmer fordi alle funksjoner med begrenset variasjon er differansen mellom to monotone funksjoner [5].

Darboux var den første som viste at alle kontinuerlige funksjoner ligger i \mathcal{R} . Er det flere funksjoner i \mathcal{R} ? Ja, mange flere. Riemann kom med et eksempel på en funksjon i \mathcal{R} som hadde uendelig mange diskontinuiteter på ethvert delintervall. Det er lett å vise at alle funksjoner med et endelig antall diskontinuiteter ligger i \mathcal{R} .

Hvilke «rare» begrensede funksjoner ligger ikke i \mathcal{R} ? Funksjonene trenger egentlig ikke å være så veldig rare, men de må være «veldig diskontinuerlige». Et eksempel, er en funksjon som blir kalt Dirichlets monster. Den er definert slik:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ er rasjonal} \\ 0 & x \text{ er irrasjonal} \end{cases} .$$

Heretter skriver vi denne funksjonen som $f = 1_{\mathbb{Q}}$, dette kaller vi en karakteristisk funksjon over \mathbb{Q}^1 . Det er ikke vanskelig å vise at denne ikke ligger i \mathcal{R} . Vi observerer at uansett hvor lite intervall vi velger så vil maksimumsverdien være 1 og minimumsverdien være 0. Fra definisjonen har vi at forskjellen mellom supremum og infimum på ethvert delintervall må kunne bli så liten

¹Generelt har vi at en karakteristisk funksjon $f(x) = 1_A$ har verdien 1 når $x \in A$ og 0 ellers.

vi ønsker bare ved å gjøre partisjonen fin nok. Det at en partisjon er fin nok, betyr rett og slett at lengden på det største intervallet er lite nok.

Mye av arbeidet i forbindelse med matematisk analyse er å lage grense- og konvergensteorier. Derfor blir den følgende ulempen med R-integralet karakterisert som alvorlig i moderne analyse. Det er nemlig mulig å finne (punktvis) konvergente funksjonsfølger f_n som er R-integrerbare for alle n , men der grensefunksjonen ikke er integrerbar. Nå følger et eksempel som viser dette.

EKSEMPEL 2.3. La $f_n(x) = 1_{\mathbb{Q}_n}$, der $\mathbb{Q}_n = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, q_i er en oppramsing av n forskjellige rasjonale tall. Det er nå klart at $f_n \in \mathcal{R}$ siden det bare er endelig mange steder $f_n \neq 0$. Vi ser at $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1_{\mathbb{Q}} \notin \mathcal{R}$.

Det er faktisk også mulig at grensen til en funksjonsfølge kan ligge i \mathcal{R} , men at $\lim \int f_n \neq \int f$. Her kommer et eksempel som viser dette også.

EKSEMPEL 2.4. La $f_n(x) = n1_{[0, \frac{1}{n}]}$. Da er $\lim \int f_n = 1 \neq \int f = 0$, fordi $\lim f_n = 0$.

Problemene kan omgås ved å kreve uniform konvergens, men det er et veldig strengt krav. Det finnes mange punktvis grenser der alt går greit, derfor hadde det vært ønskelig med et svakere krav enn uniform konvergens. Det finnes et konvergensteorem for R-integralet som har litt svakere krav. Dette kalles Riemanns begrensede konvergensteorem (noen steder kalles det Arzela's begrensede konvergensteorem [17]). Dette teoremet ble vist av den italienske matematikeren Cesare Arzela i 1885 [9].

TEOREM 2.5. [Riemanns begrensede konvergensteorem] La (f_n) være en følge av R-integrerbare funksjoner på intervallet $[a, b]$. Anta at $f_n \rightarrow f$ punktvis og at f er R-integrerbar på $[a, b]$. Anta videre at $|f_n| \leq K$, der K er en reell konstant, da har vi at

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Beviset for dette resultatet er ganske tungt når vi ikke skal involvere målteori [16]. Senere i oppgaven skal vi se at resultatet bare er et spesialtilfelle av Lebesgues dominerte konvergensteorem.

Vi så i Kapittel 1.3 at vi ikke kunne være sikre på at en begrenset funksjon sin deriverte var Riemann integrerbar. Her kommer et eksempel som viser dette.

EKSEMPEL 2.6. En funksjon som er deriverbar på $[-1, 1]$ er

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}.$$

Den deriverte til denne funksjonen er ubegrenset på intervallet $[-1, 1]$, som medfører at den ikke er R-integrerbar her. Det finnes også eksempler på at den deriverte er begrenset, men likevel ikke R-integrerbar.

2.1. Det normerte vektorrommet \mathcal{R}^1 . For å kunne lage mye god teori rundt en mengde med visse egenskaper, er det ofte veldig nyttig hvis denne mengden er et vektorrom. Det viser seg at \mathcal{R} er et vektorrom (vi lar skalarkroppen være \mathbb{R}).

TEOREM 2.7. La $f, g \in \mathcal{R}$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Da har vi at

$$(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}.$$

Dette betyr at \mathcal{R} er et vektorrom.

Det at \mathcal{R} er et vektorrom betyr at enhver lineærkombinasjon av R-integrerbare funksjoner igjen er R-integrerbare. Det er også naturlig å gi vektorrommet et avstandsmål slik at vi kan snakke om konvergens av følger av funksjoner i \mathcal{R} . For å kunne gjøre dette på en fornuftig måte bør vi se på vektorrommet over et intervall. Vi sier nå at $\mathcal{R}(I)$ er mengden av R-integrerbare funksjoner på intervallet I . $\mathcal{R}(I)$ er et vektorrom for alle intervaller $I \subset \mathbb{R}$.

En måte å definere et avstandsmål på $\mathcal{R}(I)$ er å si at avstanden mellom to funksjoner f og g er gitt ved: $\|f - g\| = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$. Vi har nå definert en norm på $\mathcal{R}(I)^2$. Det betyr at hver funksjon i $\mathcal{R}(I)$ har blitt tildelt en lengde som er gitt ved: $\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$. Vi sier nå at en funksjonsfølge $\{f_n\}$ konvergerer til en funksjon f hvis $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$. Problemet med dette normerte vektorrommet er at det bare er en annen måte å si at vi trenger uniform konvergens for å få frem våre ønskede egenskaper. Vi husker fra tidligere at dette var et uønsket strengt krav.

Da vi definerte normen over tok vi ikke hensyn til at vi jobbet med integrasjon. Kan det hende at vi kan definere en annen norm, som er relatert til integrasjon, og som gir oss flere konvergente følger av funksjoner? En god kandidat må være: $\|f\| = \int_I |f(x)| dx$ for $f \in \mathcal{R}(I)^3$. Vi kaller denne normen for \mathcal{R}^1 -norm, og vektorrommet $\mathcal{R}(I)$ med denne normen for $\mathcal{R}^1(I)$. Dette er en norm som har mange av egenskapene vi ønsker, men dessverre har R-integrasjon en svakhet som gjør at vi kommer opp i noen problemer med dette normerte vektorrommet. Problemet er mangel på kompletthet. Jeg skal nå prøve å forklare hva det betyr at et normert vektorrom er komplett.

Vi husker fra reell analyse at alle Cauchy-følger av reelle tall er konvergente. Dette er en annen måte å si at \mathbb{R} er komplett på. Det er dessverre ikke alltid slik at Cauchy-følger er konvergente i normerte vektorrom. La oss først få fullstendig klarhet i hva en Cauchy-følge i vektorrommet $\mathcal{R}^1(I)$ er:

DEFINISJON 2.8. En følge $(f_n) \subset \mathcal{R}^1(I)$ er *Cauchy* hvis det for alle $\epsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $\int_I |f_n - f_m| < \epsilon$ når bare $n, m > N$.

En følge er altså Cauchy hvis avstanden mellom to funksjoner i følga kan gjøres så liten vi bare ønsker, når den minste av indeksene til funksjonene er langt nok ute i følga. Vi kan finne følger som er Cauchy, men som likevel hopper ut av $\mathcal{R}^1(I)$ når vi går til grensen. For å finne eksempel på dette

²Senere i oppgaven skal vi se på den presise definisjonen av norm-begrepet.

³Legg merke til at $\|f\|$ er et endelig tall, siden f er en begrenset funksjon på I .

trenger vi bare å se på Eksempel 2.3. Denne følga er opplagt Cauchy siden avstanden mellom to punkter alltid er 0. Altså er ikke $\mathcal{R}^1(I)$ komplett.

Hvorfor er det så viktig at et vektorrom skal være komplett? Fra reell analyse husker vi at det aksiomet som skiller de rasjonale tallene fra de reelle var kompletthetsaksiomet. Altså kan vi si at å jobbe med et vektorrom som ikke er komplett, blir som å jobbe med rasjonale tall istedenfor reelle tall. Det er altså mulig å konstruere mye mer matematisk struktur hvis vi jobber under kompletthet. I Kapittel 4 skal vi se at geniet Henry Lebesgue løser dette problemet ved å definere en generalisering av R-integralet (L-integralet).

Her følger en rask oppsummering av de viktigste ulempene ved R-integralet.

- Det oppstår problemer når vi skal integrere over mer kompliserte mengder enn intervaller. Et enkelt eksempel på dette er funksjonen $f = 1_Q$.
- Vi kan risikere at grensefunksjonen f til en Cauchy følge av R-integrerbare funksjoner (f_n) ikke er R-integrerbar. Det kan også hende at $\lim \int f_n \neq \int f$ når f er R-integrerbar.
- Vi kan finne funksjoner f som er deriverbare på et begrenset intervall $[a, b]$, men integralet til den deriverte eksisterer ikke. Faktisk kan også den deriverte være begrenset, og integralet eksisterer fortsatt ikke. Igjen har vi at når integralet eksisterer, kan det likevel hende at $\int f' \neq f$.
- Vektorrommet $\mathcal{R}^1(I)$ er ikke komplett.

3. Sammenlikning av N- & R-integralet

Newton og Riemanns integrasjonsteori er veldig forskjellig. N-integralet bygger på en observasjon om at derivasjon og integrasjon er motsatte operasjoner. Fundamentet til dette integralet bygger på litt vage teorier om bruken av uendelig små størrelser (infinitesimaler). R-integralet bygger på et ønske om å lage en geometrisk metode for å avgjøre arealet under en graf. Denne teorien er solid begrunnet ved hjelp av grense- og konvergensteorien til Cauchy og komplettheten til de reelle tall⁴.

Hvordan skal vi gå frem for å sammenlikne en ren analytisk teori som N-integralet er, og R-integralets geometriske teori? Jeg tror vi må finne ut hva hver av dem kan brukes til. Jeg begynner med å diskutere litt rundt de sterke sidene til N-integralet. Det første som må nevnes er brukervennligheten. Hvis du først har plukket frem en N-integrerbar funksjon og funnet en antiderivert, så er det bare å sette inn grensene og fundamentalteoremet produserer integralet. Hvis du husker tilbake til Eksempel 2.2, minnes du sikkert at ting var litt mer tungvinte med R-integralet.

I forbindelse med å lage matematiske modeller av virkeligheten, dukker det ofte opp relativt enkle differensiallikninger. Disse kan gjerne løses ved å bruke N-integralet som verktøy. Den store fordelen med denne fremgangsmåten er at løsningen(e) produseres analytisk. Analytiske løsninger gir ofte større

⁴Denne teorien har selvfølgelig utviklet seg siden Cauchy, men jeg velger likevel å kalle teorien hans.

innblikk i modellens struktur og dynamikk. Dette fører igjen til at modellen kan utvikles lengre og dypere enn hvis løsningene blir produsert numerisk. Av denne grunn blir N-integralet veldig mye brukt i forbindelse med å søke grunnleggende forklaringer på naturfenomener.

Riemann-integralet har en stor fordel fremfor Newton-integralet, det er at vi ikke trenger noe funksjonsuttrykk. Hvis vi f.eks bare har grafen til en funksjon, gir R-integralets geometriske oppbygning oss en fremgangsmåte for å bestemme arealet. Dette gjør at fundamentet til R-integralet brukes for å definere numeriske integrasjonsmetoder. Spesielt kan vi trekke frem at R-integralets oppbygning gjør det mulig å bestemme arealer under funksjonsgrafer der funksjonen er gitt som en rekke. N-integralet kan også klare dette, men bare hvis man kan finne en antiderivert til hvert ledd, og ledd for ledd integrasjon er mulig.

Vi har kontinuerlige funksjoner som ikke er N-integrerbare, f.eks $f(x) = e^{-x^2}$ som blir brukt mye i sannsynlighetsteori. Her fungerer R-integralet ypperlig selv om utregningen som regel må gjøres numerisk. Det er faktisk verdt å nevne at de R-integrerbare funksjonene som vi faktisk regner ut for hånd, nesten alltid er N-integrerbare og derfor blir behandlet som sådan.

4. Uekte integraler

Vi skal nå se integraler på formen: $\int_a^\infty f$, $(\int_{-\infty}^a f)$ og $\int_{-\infty}^\infty f$, eller $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Alternativet $\int_{-\infty}^a f$ har jeg satt i parentes siden argumentasjonen er helt analog med $\int_a^\infty f$. Vi snakker altså om bestemte integraler der enten integrasjonsintervallet eller funksjonen er ubegrenset. Disse kalles uekte integraler. Det er verdt å påpeke at uekte integraler ikke regnes som en del av de R-integrerbare funksjonene. La oss først gå gjennom hvordan uekte integraler er definert. Vi lar først intervallet være ubegrenset. Det finnes to muligheter: enten $\int_a^\infty f$ ($\int_{-\infty}^a f$) eller $\int_{-\infty}^\infty f$. Vi ser på disse mulighetene hver for seg.

DEFINISJON 4.1. La $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være en funksjon som er integrerbar på alle intervaller $[a, b]$, der $b > a$. Dersom integralet $\int_a^b f \rightarrow L < \infty$ når $b \rightarrow \infty$, sier vi at integralet $\int_a^\infty f$ konvergerer og vi skriver

$$\int_a^\infty f = L.$$

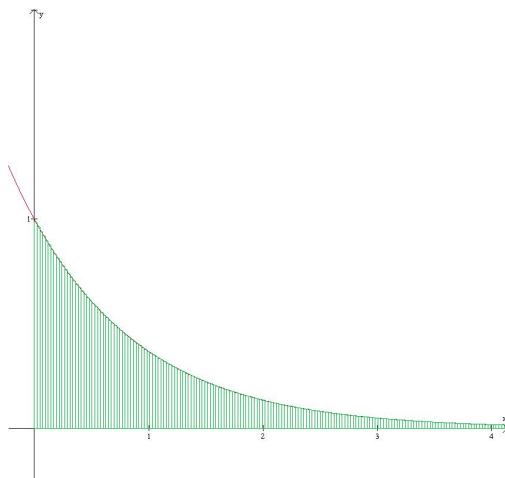
Dersom integralet ikke konvergerer, sier vi at det divergerer.

En metode for å regne ut verdien til et uekte integral på denne formen er å først finne en antiderivert og deretter ta grenseverdien. Her kommer et eksempel som viser dette (eksemplet er hentet fra [18]).

EKSEMPEL 4.2. Avgjør om $\int_0^\infty e^{-x} dx$ konvergerer, og finn eventuelt verdien.

Vi ser at

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} + 1$$



FIGUR 4. $f(x) = e^{-x}$

som går mot 1 når $b \rightarrow \infty$. Altså konvergerer integralet, og $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Den geometriske tolkningen er at det skraverte område i Figur 4 har areal 1 selv om vi hadde sett uendelig langt ut på x -aksen.

Det kan sikkert være greit med et eksempel der integralet er divergent også.

EKSEMPEL 4.3. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergerer fordi $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$.

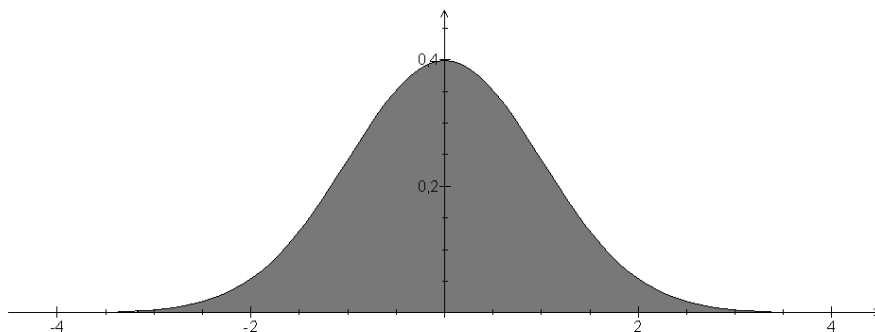
Dersom vi skal integrere over en mengde som er ubegrenset i begge retninger, må vi trø litt varsomt. Vi begynner med definisjonen.

DEFINISJON 4.4. Dersom $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er integrerbar på alle intervaller $[a, b]$, sier vi at integralet $\int_{-\infty}^\infty f$ konvergerer hvis begge de to integralene $\int_0^\infty f$ og $\int_{-\infty}^0 f$ konvergerer. Da definerer vi

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f.$$

Noen synes kanskje denne definisjonen virket unødvendig komplisert. Hvorfor kan vi ikke bare si at hvis integralet $\int_{-b}^b f \rightarrow L < \infty$ når $b \rightarrow \infty$, så er $\int_{-\infty}^\infty f = L$? Grunnen til dette er at det finnes funksjoner f slik at $\int_{-\infty}^\infty f$ med denne definisjonen er et endelig tall, men $\int_{-\infty}^0 f$ og $\int_0^\infty f$ divergerer. Et eksempel på dette er funksjonen $f(x) = x$. Det som gjør at dette kan skje er at uendelighetene oppveier hverandre, vi får altså $\infty - \infty$. Dette gjør at de vanlige regnereglene for integraler ikke lenger gjelder.

Har vi noen gang bruk for integraler over ubegrensede mengder? Ja, dette blir brukt mye innenfor både matematikk og fysikk. Det mest kjente eksempelet er kanskje i forbindelse med standard normalfordeling i statistikken. Her integrerer man funksjonen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ fra $-\infty$ til ∞ (integralet blir 1, se Figur 5). Vi vet jo alle hvor mye denne teorien blir brukt – innenfor utallige områder.



FIGUR 5. Standard normalfordeling

Nå går vi videre og ser på integrasjon over intervaller der funksjonen har en eller flere vertikale asymptoter. Igjen finnes det flere måter dette kan skje på. Vi ser først på når et av endepunktene til integrasjonsintervallet er en vertikal asymptote. I definisjonen antar vi dette skjer i høyre endepunkt (b), men det er klart at det blir tilsvarende for venstre endepunkt.

DEFINISJON 4.5. Dersom $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ er integrerbar på alle intervaller $[a, y]$, der $y < b$ sier vi at integralet $\int_a^b f$ konvergerer hvis grenseverdien $\lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f$ eksisterer. I så fall skriver vi

$$\int_a^b f = \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f.$$

Vi ser at det er samme fremgangsmåte som blir brukt her, først finner vi uttrykket for et begrenset intervall, for så å ta grenseverdien. Vi skal se at den samme metoden også blir brukt hvis vi har vertikal asymptote i begge endepunktene.

DEFINISJON 4.6. La $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ være integrerbar på alle intervaller $[c, d]$, der $a < c < d < b$ og la $y \in (a, b)$. Vi sier at integralet $\int_a^b f$ konvergerer dersom begge integralene $\int_a^y f$ og $\int_y^b f$ konvergerer for alle $y \in [a, b]$. I så fall er

$$\int_a^b f = \int_a^y f + \int_y^b f.$$

Hvis det nå er flere vertikale asymptoter inne i integrasjonsintervallet kan vi bare dele inn intervallet i flere delintervaller med uendelighetene i hvert av endepunktene, for deretter å summere integralene. Jeg ønsker å vise et eksempel på hvor galt ting kan gå hvis man ikke er forsiktig.

EKSEMPEL 4.7. Det finnes et teorem som sier at integralet $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergerer for $p < 1$ og divergerer ellers. Det betyr at $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ divergerer. Men la oss nå late som vi «glemte» at funksjonen vår har noen uendelighet. Vi regner ut på vanlig måte;

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1} \right) = -2.$$

Svaret blir negativt for en funksjon som alltid er positiv!

Det hender at vi ønsker å avgjøre om et integral konvergerer eller ikke, uten å være særlig interessert i selve verdien. Da er det mulig å bruke sammenlikningskriteriet.

KRITERIUM 4.8. La $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være to funksjoner som er integrerbare på alle intervaller $[a, b]$, $a < b$ og anta at $f \geq g$ på hele intervallet.

Hvis $\int_a^\infty f$ konvergerer, så gjør $\int_a^\infty g$ det også.

Hvis $\int_a^\infty g$ divergerer, så gjør $\int_a^\infty f$ det også.

Vi skal senere se at det er mange uekte integraler som ikke lenger blir uekte når vi bruker L-integrasjon. Nå skal vi skifte over til en integrasjonsmetode som er litt mer ukjent enn de tidligere metodene. Vi setter nå over til Stieltjes integrasjonsmetode.

5. Riemann-Stieltjes integral

Riemann-Stieltjes integral (R-S-integralet) er en generalisering av R-integralet. Jeg starter med å definere R-S-integralet på en måte som ikke er den mest mulig generelle. Dette gjør jeg fordi jeg mener det gir et litt enklere bilde av grunnidéen ved metoden. Etter denne definisjonen skal vi se på sammenhengen mellom R-S-integralet og integrasjon ved substitusjon. Først må vi vite hva en strengt voksende funksjon er.

DEFINISJON 5.1. En funksjon f sies å være *strengt voksende* på et intervall $[a, b]$ hvis $f(x) > f(y)$ for alle $x > y$, der $x, y \in [a, b]$.

Under følger definisjonen til R-S-integralet.

DEFINISJON 5.2. La f være en kontinuerlig funksjon og g være en strengt voksende funksjon, begge definert på intervallet $[a, b]$. For en vilkårlig partisjon $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, se på den øvre Darboux-summen

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)[(g(x_{i+1}) - g(x_i))],$$

og den nedre Darboux-summen

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(d_i)[(g(x_{i+1}) - g(x_i))],$$

der $c_i, d_i \in [x_{i+1}, x_i]$ og $f(c_i), f(d_i)$ er hhv. den maksimale og minimale funksjonsverdien på delintervall i . Punktene c_i, d_i eksisterer på et lukket og begrenset intervall fordi f er kontinuerlig.

Hvis disse to summene konvergerer mot samme verdi L når lengden av partisjonen går mot 0, skriver vi at

$$\int_a^b f(x) dg(x) = L.$$

Det er også vanlig å bruke notasjonen $\int_a^b f dg$, som jeg kommer til å bruke. Dette leses: Riemann-Stieltjes-integralet av f med hensyn på g over intervallet $[a, b]$. Det hender ofte at f blir kalt integranden og g integratoren.

Definisjonen av R-S-integralet er gjort noe forenklet for å gjøre det enklere å legge merke til forskjellen mellom R-integralet og R-S-integralet. I Definisjon 5.2 har jeg sagt at f skal være kontinuerlig. Dette er egentlig ikke nødvendig, men det er lettere å få frem poengene på denne måten. Funksjonen g trenger heller ikke å være monoton. Glem disse detaljene, så vi kan komme til poenget.

Den første tingen vi skal merke oss er at hvis vi har integralet $\int_a^b f dg(x)$ og $g(x) = x$, så er dette det samme som $\int_a^b f dx$. Da er altså R-S-integralet og R-integralet det samme. Med dette i tankene, er det lett å se hvordan R-S-integralet er en generalisering av R-integralet. Hvis det er slik at integratoren g er deriverbar på hele intervallet, så er det ofte slik at

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Det kanskje noen som synes jeg må si noe mer enn at det er ofte slik. Det er faktisk alltid slik hvis g er *absolutt kontinuerlig*. Dette er et krav som er sterkere enn kontinuerlig. Før vi går videre skal vi repetere definisjonen av kontinuitet.

DEFINISJON 5.3. En funksjon f er *kontinuerlig* i punktet a hvis det for alle $\epsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at når $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Vi sier at en funksjon f er kontinuerlig på et intervall $[a, b]$ dersom f er kontinuerlig på alle punkter i $[a, b]$.

En funksjon er absolutt kontinuerlig hvis den er et integral. Med dette mener jeg at g er absolutt kontinuerlig hvis $g(x) = \int_a^x f(x) dx$ der f er en begrenset integrerbar funksjon. Nå ser vi på definisjonen av absolutt kontinuitet.

DEFINISJON 5.4. En funksjon f er *absolutt kontinuerlig* på intervallet $[a, b]$ hvis det for alle $\epsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\sum_{i=1}^n |f(d_i) - f(c_i)| < \epsilon$ når bare $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ er en endelig samling av ikke-overlappende intervaller i $[a, b]$ som oppfyller at $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$.

Vi ser at definisjonen på kontinuitet er den samme som definisjonen av absolutt kontinuitet når $n = 1$.

Nå skal vi se på integrasjon ved substitusjon. Vi begynner med et teorem vi lærte på kalkuluskurset.

TEOREM 5.5. Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar og strengt monoton. La h være den omvendte funksjonen til g , og anta at $h'(x)$ er kontinuerlig. Da er

$$(2) \quad \int f[g(x)] dx = \int f(u)h'(u) du|_{u=g(x)}$$

der $\int f(u)h'(u) du|_{u=g(x)}$ er funksjonen vi får ved først å integrere $f(u)h'(u)$ og så erstatte u med $g(x)$.

Det at h er den omvendte funksjonen til g betyr at når $u = g(x)$ så er $x = h(u)$. Nå ser du sikkert sammenhengen mellom høyre side av Likning (1) og Likning (2). Vi ser at Teorem 5.5 bare gjelder hvis substitusjonsfunksjonen $u = g(x)$ er deriverbar. Dette er et litt strengere krav enn for integratoren i et Stieltjes integral, der det er nok med absolutt kontinuitet. Det er altså mulig for en funksjon å være absolutt kontinuerlig uten å være deriverbar.

La oss se på et eksempel der vi bruker integrasjon ved substitusjon.

EKSEMPEL 5.6. Regn ut $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$.

Vi begynner med å sette $z = \sqrt{x}$ og legger merke til at denne funksjonen er deriverbar og strengt voksende på $[0, \pi^2]$. Da er $x = z^2$ og $dx = 2z dz$, som gir

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \int \sin z \cdot 2z dz = 2 \int z \sin z dz.$$

Det siste av disse integralene kan vi løse ved hjelp av delvis integrasjon om vi setter $u = z$ og $v' = \sin z$. Siden $u' = 1$ og $v = -\cos z$, gir dette

$$\begin{aligned} 2 \int z \sin z dz &= 2 \left(-z \cos z + \int 1 \cos z dz \right) \\ &= -2z \cos z + 2 \sin z + c. \end{aligned}$$

Vi setter nå inn $z = \sqrt{x}$ som gir oss

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt{x} dx &= 2 \int z \sin z dz = -2z \cos z + 2 \sin z + c \\ &= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

Da dette er et bestemt integral trenger vi bare en antiderivert når vi setter inn grensene. Altså er

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx = [-2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x}]_0^{\pi^2} = -2\pi \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - (-2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 2\pi.$$

Hvis vi lar $h(z) = z^2$ kan vi tenke på integralet $\int \sin z \cdot 2z dz$ som R-S-integralet $\int \sin z dh(z) = \int \sin z h'(z) dz$ (Se Likning 1).

Den mest vanlige anvendelsen av Stieltjes integral er i forbindelse med sannsynlighetsteori, men da snakker vi som regel om Lebesgue-Stieltjes-integral som vi skal se på senere.

Jeg har lyst til å avslutte integrasjon ved substitusjon med en liten merknad.

MERKNAD 5.7. I forbindelse med integrasjonsregning bruker man ofte $\frac{du}{dx}$ som en brøk, og sier f.eks at $f \frac{du}{dx} = g \Rightarrow f du = g dx$. Dette er egentlig helt meningsløst, for det finnes ingen god tolkning av hva dx skal bety, annet enn å fortelle oss hvilken variabel vi bruker. Grunnen til at man likevel bruker denne notasjonen er at ting blir lettere å huske, og det virker. Denne måten å kalkulere på blir ofte referert til som *formell regning* [18].

KAPITTEL 3

Perioden fra Riemann til Lebesgue

I dette kapitlet skal jeg følge den historiske utviklingen av målteori fra ca 1870 og frem mot Lebesgues teori, som ble etablert i starten av det tjuende århundre. Hvilke motivasjonsfaktorer var det som gjorde at Lebesgue gjorde det han gjorde? Hvilke resultater og problemer hadde Lebesgue å jobbe med? Jeg skal konsentrere meg om begrepene etter hvert som de dukker opp. Målet er å gi leseren en begrepsmessig forståelse av bakgrunnen for den målteoretiske utviklingen som skjedde frem mot 1900. Den historiske delen av dette kapitlet er i all hovedsak hentet fra Thomas Hawkins «Lebesgue's theory of integration» [11] og William Dunhams «The calculus gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue» [7].

1. Riemanns «Habiltasjon»

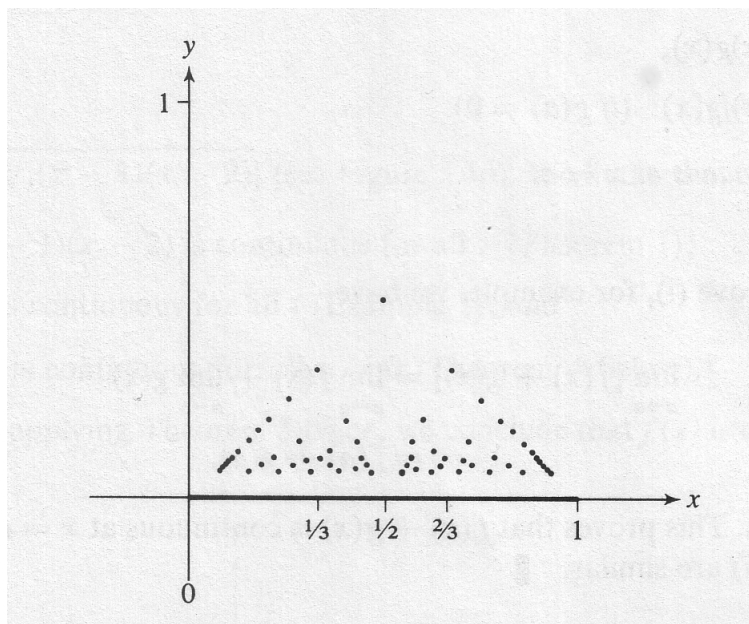
Det er lett å uttrykke seg som at det var «problemene» med Riemann-integralet som var drivkraften for å utvikle målteori og generalisere integralet. Det var ikke tilfelle. Riemanns definisjon ble gjort som et biprodukt av hans «Habiltasjon» (1854), som handlet om hvordan man kunne representere funksjoner ved hjelp av trigonometriske rekker. Da dette ble publisert i 1867 (nesten to år etter Riemanns død), ble denne definisjonen sett på som den mest mulig generelle. Helt frem mot 1900 var fortsatt ikke «problemene» med Riemann-integralet tenkt på som problemer. Et velkjent unntak er Karl Weierstrass som kritiserte Riemanns definisjon ganske hardt [11].

Mye av grunnen til at Riemanns definisjon ble så høyt ansett var at hans integral kunne integrere funksjoner som var diskontinuerlige i uendelig mange punkter på ethvert intervall. Riemann viste et eksempel på en slik funksjon i sin «Habiltasjon». En del år senere hadde matematikeren Johannes Karl Thomae et slikt eksempel som i tillegg var mye enklere enn Riemanns. Dette eksemplet skal vi nå se på (eksempelet er hentet fra [7]).

EKSEMPEL 1.1. Først ser vi på funksjonen definert på intervallet $(0, 1)$. Den ser ut som følger:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{hvis } x = \frac{p}{q} \text{ i redusert form,} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

Altså er, $r(\frac{1}{5}) = r(\frac{2}{5}) = r(\frac{4}{10}) = \frac{1}{5}$, mens $r(\pi) = r(e) = 0$. Denne funksjonen blir kalt for «linjal funksjonen» (se Figur 1). Vi skal vise at denne funksjonen er kontinuerlig på alle irrasjonale tall i $(0, 1)$. Det er viktig å vite at en funksjon f er kontinuerlig i punktet a hvis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. La nå $a \in$



FIGUR 1. Linjalfunksjonen

$(0, 1)$ være vilkårlig, se på $\lim_{x \rightarrow a} r(x)$. Jeg skal ikke bevise at dette alltid blir 0, men jeg skal prøve å forklare det med ord.

Hver funksjonsverdi $r(x)$ er på formen $\frac{1}{n}$ eller 0. I ethvert intervall rundt a så finnes det bare endelig mange x 'er, som gir funksjonverdier som er større enn $\frac{1}{n}$. Det betyr at vi kan finne et intervall $(a - \delta, a + \delta)$ som ikke inneholder noen slike x 'er (bare trekk intervallet innenfor den innerste). Dette betyr at $r(x) < \frac{1}{n}$ for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$ bortsett fra eventuelt $x = a$. Altså kan r bli så liten vi ønsker bare ved å velge lite nok intervall om a . Da følger det fra Cauchy's definisjon av grense at $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$ for alle $x \in (0, 1)$.

Det at r er kontinuertlig på alle irrasjonale tall i $(0, 1)$ følger nå greit siden $r(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} r(x)$ når a er irrasjonal. Vi ser også at $r(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \neq 0 = \lim_{x \rightarrow a} r(x)$ som gir diskontinuitet i de rasjonale punktene. Det går nå fint å vise at r er R-integrerbar ved å bruke et av kriteriene som følger under. Senere skal vi se at Lebesgues teori gir oss et teorem som sier at en funksjon er R-integrerbar hvis og bare hvis funksjonen er kontinuertlig *nesten overalt*. Betydningen av nesten overalt kan foreløpig bare tenkes på som den naturlige forståelsen av ordet. Begrepet blir definert når vi får kjennskap til målteori.

MERKNAD 1.2. I en undervisningssituasjon kan det være interessant å se på en funksjon på denne formen. Skoleforklaringen til kontinuitet er at grafen skal være sammenhengende. Det er ikke så lett å se for seg grafen til $r(x)$ som sammenhengende i alle irrasjonale punkter. Kanskje kan slike eksempler være med på øke forståelsen og dybden i mange matematiske definisjoner.

Riemann kom med to ekvivalente formuleringer av hva som gjorde en funksjon integrerbar. Han sa at normen til en partisjon P , skrevet $\|P\|$, er lengden til

det største delintervallet, og han kalte oscillasjonen til en funksjon på hvert delintervall i for D_i . Det første av Riemanns kriterier er da:

KRITERIUM 1.3. *En funksjon er integrerbar hvis og bare hvis*

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \dots + D_n\delta_n) = 0,$$

der δ_i er lengden til delintervall i .

Før vi ser på det andre kriteriet må vi definere $s(P, \sigma)$ som summen av de δ_i der oscillasjonen D_i er større enn σ . En funksjon er da integrerbar hvis og bare hvis den oppfyller følgende kriterium.

KRITERIUM 1.4. *For alle $\epsilon > 0$ og $\sigma > 0$ eksisterer $d > 0$ og en partisjon P slik at når $\|P\| \leq d$ så er $s(P, \sigma) < \epsilon$.*

Dere, som meg, synes kanskje det er vanskelig å tolke betydningen av kriteriet ovenfor. Litt uformelt sagt betyr Kriterium 1.4 følgende: Det finnes en partisjon slik at summen av lengdene av delintervallene som har oscillasjon større enn en gitt verdi, kan gjøres vilkårlig liten.

De som kjenner til Jordans konsepter om målbarhet og «ytre innhold» (Outer content), vil sikkert kjenne igjen disse to kriteriene som nettopp dette. Vi må da huske at teorien til Jordan ble etablert nesten 40 år etter Riemanns «Habilitation», og han hadde ingen mulighet for å se dette fra et målteoretisk synspunkt.

Funksjonsbegrepet hadde ikke noe tydelig definisjon på denne tiden. Riemann var en av få matematikere som tenkte på en funksjon som en vilkårlig korrespondanse $x \rightarrow f(x)$. Andre matematikere som Cauchy og Fourier snakket også om «totalt vilkårlige funksjoner», men det viste seg at de i praksis tenkte på funksjoner med analytiske uttrykk. Dette «nye» synet på funksjoner produserte etterhvert mange ikke-intuitive korrespondanser. Disse var med på klargjøre flere aspekter i forbindelse med utviklingen av mål- og integrasjonsteorien.

Fourier postulerte i 1822 at alle begrensede funksjoner definert på $(-a, a)$ kan bli uttrykt på formen

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{a}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{a})],$$

der koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos(\frac{n\pi x}{a}) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin(\frac{n\pi x}{a}) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vi sier at en funksjon er gitt ved en Fourier rekke hvis den er gitt på denne formen. Fourier's postulat er feil, men oppgaven å finne hvilke funksjoner

som kan uttrykkes ved en Fourier rekke viste seg å være fruktbar i forbindelse med integrasjonsteorien. To av delspørsmålene som dukket opp under denne behandlingen var

- (1) Hvilke funksjoner kan integreres?
- (2) Når er det lov å integrere ledd for ledd i en uendelig rekke?

Grunnen til at jeg har valgt å trekke frem disse to spørsmålene er at de lå som en motivasjon for veldig mye av jobben som ble gjort i utviklingen vi nå skal se litt nærmere på.

2. Topologiske små mengder og målteoretiske små mengder

En av de første matematikerne som reagerte på den nye integrasjonsteorien til Riemann var Hermann Hankel (1839-1873). Han studerte i Göttingen en stund i 1860, og Riemann var en av hans forelesere. Riemann gjorde et sterkt inntrykk på Hankel.

Dirichlet hadde tidligere definert en funksjon til å være en vilkårlig korrespondanse $x \rightarrow f(x)$. Hankel påpekte at funksjoner slik som Dirichlet hadde definert dem ikke har noen generelle egenskaper. Derfor må alle ideer om hvordan «gamle» funksjoner virket vike, og vi må se på analysen av de «nye» funksjonene med nye øyne. Alle mulige relasjoner mellom to variabler måtte tas med i analysen.

Hankel delte inn funksjoner i flere klasser. Kontinuerlige funksjoner var en klasse. En ganske lik klasse var de funksjonene som er kontinuerlige bortsett fra i endelig mange punkter. Disse to klassene utgjorde egentlig alle de «gamle» funksjonene. Riemann hadde gitt eksempel på funksjoner som hadde uendelig mange diskontinuiteter i alle begrensede intervall. Disse funksjonene delte Hankel inn i to klasser, som han kalte *punktvis diskontinuerlige funksjoner* og *totalt diskontinuerlige funksjoner*. Basisen for denne inndelingen lå i om funksjonene var integrerbare eller ikke.

Hankel kalte mengden S_α for mengden av diskontinuiteter til en funksjon der «hoppet» er større enn α . I moderne notasjon får vi følgende definisjon.

DEFINISJON 2.1. Hvis S_α ligger ingensteds tett for alle $\alpha > 0$, så er funksjonen punktvis diskontinuerlig. Hvis det eksisterer α , slik at S_α ligger tett, så er funksjonen totalt diskontinuerlig.

For å forklare hva en ingensteds tett mengde er, er det greit med noen flere definisjoner.

DEFINISJON 2.2. *Tillukningen* til en mengde A er den minste lukkede mengden som inneholder A .

Det *indre* til en mengde A er unioen av alle åpne mengder i A .

Nå er vi klare for definisjonen:

DEFINISJON 2.3. En mengde A ligger *ingensteds tett* i en annen mengde B hvis ethvert åpent intervall $(\alpha, \beta) \subset B$ inneholder et åpent delintervall $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$, slik at $(a, b) \cap A = \emptyset$.

Navnet sier mye om dette begrepet. En mengde er ingensteds tett hvis den ikke er tett i noen åpne delintervaller. Mange plasser vil du se en annen definisjon av ingensteds tett, vi tar med dette som et resultat.

TEOREM 2.4. *En mengde er ingensteds tett hvis det indre av tillukningen er tomt.*

Legg spesielt merke til rekkefølgen. Det er ikke det samme å ta det indre av tillukningen, som å ta tillukningen av det indre. Et eksempel som illustrerer dette er de rasjonale tallene som vi vet ligger tett i de reelle tallene.

Det er også veldig viktig å vite hva en tett delmengde av en mengde er. Her følger definisjonen:

DEFINISJON 2.5. En delmengde A ligger *tett* i en annen mengde B hvis ethvert åpent intervall i B inneholder minst et element fra A .

Legg merke til at ingensteds tett ikke er det motsatte av å være tett. Det er veldig mange mengder som er tette på noen intervaller, men ikke på alle. Eksempler på ingensteds tette delmengder av \mathbb{R} er: \mathbb{Z} og $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Hankel kom med et teorem som illustrerer godt hvor vanskelig det er å se mulighetene til ingensteds tette mengder.

TEOREM 2.6. *En funksjon er integrerbar hvis og bare hvis den er punktvis diskontinuerlig.*

Dette teoremet er feil! Hankel hadde helt rett i at en funksjon ikke kan være integrerbar hvis funksjonen er totalt diskontinuerlig, men som vi skal se etterhvert ble det konstruert ingensteds tette mengder som ikke er av mål 0 (Det er nå kjent at en funksjon er integrerbar hvis og bare hvis mengden av diskontinuiteter har mål 0).

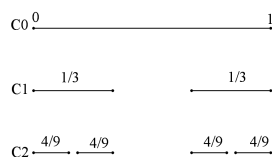
Hankel gjorde her en feil mange andre matematikere også gjorde på denne tiden. Han antok at topologiske små mengder (ingensteds tette) også var målteoretiske små mengder (mål 0). Hankel kjente selvfølgelig ikke til målteoretiske mengder, men han tenkte nok at ingensteds tette mengder kan dekkes av intervaller med vilkårlig liten total lengde.

Hankel hadde ikke en fullgod forståelse av uendelige mengder, men han hadde klart å sette fingeren på at det er mengden av diskontinuiteter som bestemmer integrerbarheten til en funksjon. Han hadde også klart å vise at punktene der en funksjon er kontinuerlig må ligge tett i definisjonsmengden, for at funksjonen skal være integrerbar.

3. Ingensteds tette mengder med positivt mål

Det var mange store matematikere som jobbet med spørsmål rundt integrerbarhet og egenskaper til uendelige mengder fra 1870 til 1880. Jeg skal her nevne noen som hadde stor betydning for utviklingen av mål- og integrasjonsteorien¹.

¹Det er klart det er mange store matematikere som blir utelatt, men det er ikke til å unngå da dette er et relativt kort sammendrag.



FIGUR 2. Cantormengden

En av de mest entusiastiske eksponentene for Riemanns integrasjonsteori var *Paul du Bois-Reymond* (1831-1889). Han var helt overbevist om at Riemanns definisjon av integralet var av den mest mulig generelle art, og at den svakeste restriksjonen en funksjon kunne ha, var at den skulle være integrerbar. Også du Bois-Reymond gjorde noen feil siden han ikke så mulighetene til ingensteds tette mengder. Han var også en av de første som stilte spørsmålet om når en kontinuerlig funksjon var et integral. Det var Lebesgue som først utredet dette fullstendig, men også Harnack skjønnte tidligere at dette hadde med absolutt kontinuitet å gjøre.

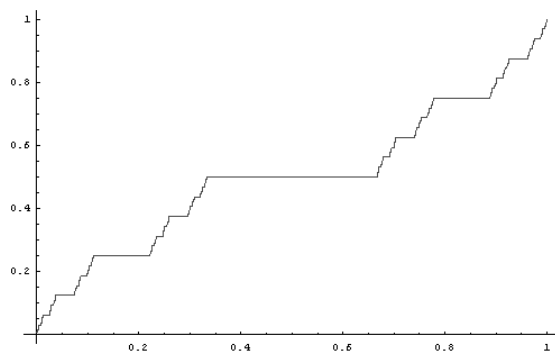
Den første som klarte å konstruere ingensteds tette mengder med positivt mål var engelskmannen *Henry J. S. Smith* (1826-1883). Han kom i 1875 med et moteksempel til Hankels proposisjon som sa at punktvis kontinuerlige funksjoner alltid er integrerbare. Konstruksjonen har mange likheter med konstruksjon av *Cantormengder* som mange kjenner til. Smith var også den første som viste at de rasjonale tallene kan dekket av et tellbart antall intervaller med vilkårlig liten total lengde (\mathbb{Q} har mål 0 i \mathbb{R}). Selv om vi ennå ikke «vet» hva et mål er synes jeg det virker fornuftig å komme med eksempler når nye begreper dukker opp. I det følgende eksemplet kan dere tenke på mål som «intervall-lengder». La oss nå gå gjennom konstruksjonen av en ingensteds tett mengde med positivt mål.

EKSEMPEL 3.1. Vi begynner med intervallet $[0, 1]$. Fjerner så den midtre tredelen, slik at vi står igjen med intervallene $[0, \frac{1}{3}]$ og $[\frac{2}{3}, 1]$, unionen av disse mengdene kaller vi C_1 . Deretter tar vi bort den midtre nidelen av hvert av de to intervallene, og kaller unionen av de gjenværende intervallene for C_2 . Neste gang tar vi bort den midtre 27-delen (3^3) og sier at dette er C_3 , osv... Så kaller vi

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

for *Cantormengden* (se Figur 2).

Dette blir opplagt en ingensteds tett mengde siden hver gang vi velger en åpen mengde i $[0, 1]$, så har vi alltid fjernet et intervall som ligger i denne mengden. Hvor lange er nå lengdene vi har igjen? Først har vi igjen $(1 - \frac{1}{3})$, så har vi igjen $(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{9})$. Når vi har gjort dette n ganger så har vi igjen $(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{3^3}) \cdots (1 - \frac{1}{3^n})$. Da dette forsettes i det uendelige sitter vi igjen med $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{3^n})$. Dette produktet er større enn 0 [11].



FIGUR 3. Lebesgue-funksjonen

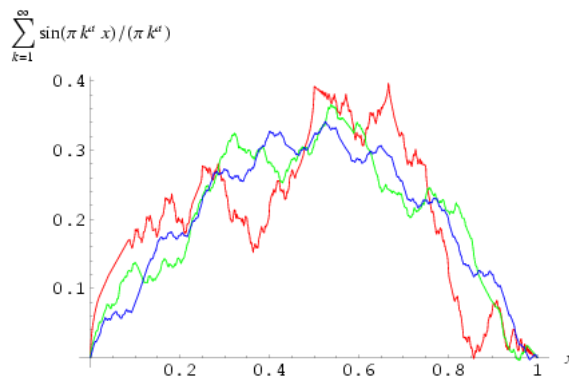
En måte å se dette på, er å tenke på summen av det vi har tatt bort. Først tok vi bort $\frac{1}{3}$, deretter tok vi bort $\frac{1}{9}$ av det som var igjen, altså $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$, fortsetter du samme tankegang kommer du sikkert frem til følgende uttrykk for den totale lengden av det som er borte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3(1+2+3+\dots+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}$, siden denne summen helt sikkert er ekte mindre enn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ følger det at produktet er større enn 0.

En Cantormengde kan også ha lengde 0. Dette kan du få til ved den samme konstruksjonen, men du må bare dele hvert intervall i 3 istedenfor 3^n . Dette er blir da et kjempefint eksempel på en overtellbar mengde som ikke har lengde. Denne mengden skal vi bruke senere i Eksempel 3.2 for å konstruere Lebesgue-funksjonen.

Det ble raskt ganske mange matematikere som var oppmerksom på disse utvidede egenskapene til de ingensteds tette mengdene. Ved å konstruere funksjoner som var basert på disse egenskapene ble det nå utviklet et mye større arsenal av ikke-integrerbare funksjoner (som også var punktvis diskontinuerlige). Dette bredere synet på mulighetene til de (nye) funksjonene, gjorde at konstruksjon av moteksempler etterhvert ble et veldig viktig verktøy. Nå følger et eksempel på en meget ikke-intuitiv funksjon som vi kaller Lebesgue-funksjonen (den kalles også Cantor-Lebesgue funksjonen) (Se Figur 3).

EKSEMPEL 3.2. Vi må starte med å konstruere en Cantormengde C som har mål 0. Dette gjøres på tilsvarende måte som i Eksempel 3.1, med den forskjellen at vi deler i tre hver gang. Vi deler først inn intervallet $[0, 1]$ i tre, tar vekk den midterste delen (som et åpent intervall), så deler vi hvert av de intervallene vi har igjen inn i tre, o.s.v. Anta nå at vi beskriver alle tallene på intervallet $[0, 1]$ i tretallsystemet. Dette kan gjøres på følgende måte: $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = 0, a_1 a_2 \dots$, med $a_k = 0, 1$ eller 2 . Da er x et punkt i Cantormengden hvis og bare hvis alle a_k 'ene er 0 eller 2. Nå er vi klare for å definere Lebesgue-funksjonen.

Anta $x \in [0, 1]$ har tretalls utvikling (a_n) , altså $x = 0, a_1 a_2 \dots$ med $a_n = 0, 1$ eller 2 . Definer nå N som den første indeksen n der $a_n = 1$ og la $N = \infty$



FIGUR 4. Illustrasjon av ingensteds deriverbar kontinuerlig funksjon (hentet fra <http://mathworld.wolfram.com>)

hvis ingen av a_n er 1 (som betyr at $x \in C$). La nå $b_n = \frac{a_n}{2}$ når $n < N$ og $b_N = 1$, og la $L(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{2^n}$ for alle $x \in [0, 1]$.

Det er helt klart at funksjonen er monotont økende og at $L(0) = 0$ og $L(1) = 1$. Likevel er den konstant på de midtre tredelene (komplementet til Cantormengden), slik at all økningen skjer på Cantormengden. Da Cantormengden har mål 0 betyr det at L vokser fra 0 til 1 bare på en mengde av mål 0. Det er da ganske utrolig at dette er en kontinuerlig funksjon!

En som gjorde mye arbeid på egenskapene til uendelige mengder var *Georg Cantor* (1845-1918). Han jobbet svært mye med tellbarhet og overtellbarhet. Han viste blant annet at de reelle tallene ikke er tellbare. Mye av utviklingen til punktmengdetopologi kan også tilskrives Cantor.

Det ble gjort endel oppdagelser i forbindelse med deriverbarheten til kontinuerlige funksjoner. Det var lenge slik at de fleste trodde at kontinuerlige funksjoner var deriverbare «nesten overalt». *Phillipe Gilbert* (1832-1892) kom i 1873 med et eksempel på en kontinuerlig funksjon som ikke var deriverbar på en tett delmengde av definisjonsmengden. Han påpekte likevel at det var umulig å konstruere en kontinuerlig funksjon som var ingensteds deriverbar. Allerede to år senere, i 1875, motbeviste Darboux dette med følgende eksempel (se Figur 4 for liknende funksjon).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [(n+1)!x]}{n!}.$$

Også eksempler på kontinuerlige funksjoner som ikke var *stykkevis monotone* eller av *begrenset variasjon* kom i dette tidsrommet. La oss se på hva disse begrepene betyr.

DEFINISJON 3.3. En funksjon f er *stykkevis monoton* på intervallet $[a, b]$ hvis det finnes en partisjon $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, slik at f er monoton på alle delintervallene $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Rent intuitivt virker det svært naturlig (i hvert fall for meg) at alle kontinuerlige funksjoner skal være stykkevis monotone. Et eksempel på at dette

ikke stemmer er linjal-funksjonen i Eksempel 1.1. På denne tiden var det nettopp ikke-intuitive funksjoner som sto i sentrum. Det neste begrepet vi skal se på er begrenset variasjon.

DEFINISJON 3.4. La $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vi definerer *variasjonen* til f over intervallet $[a, b]$ til å være

$$\text{Var}(f, [a, b]) = \sup_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\},$$

der supremum blir tatt over alle mulige partisjoner \mathcal{P} av $[a, b]$. Vi sier at en funksjon f er av *begrenset variasjon* på $[a, b]$ hvis $\text{Var}(f, [a, b]) < \infty$.

Sagt med ord, er en funksjon av begrenset variasjon på et lukket intervall hvis summen av alle differanser mellom toppene og bunnene til funksjonen er begrenset. Det kan også vises at funksjoner av begrenset variasjon alltid kan beskrives som en differanse mellom to monotone funksjoner.

Gaston Darboux (1842-1917) kom i 1875 med sin definisjon av integralet. Denne viste seg å være ekvivalent med Riemanns definisjon. Darboux gjorde mye jobb i dette tidsrommet, og er godt husket for en enorm nøyaktighet i sin matematikk.

Andre matematikere som bør nevnes som store bidragsytere i tidsperioden 1870-1880 er: *Axel Harnack*, *Ulisse Dini*, *Vito Volterra*, *Karl Weierstrass* og *Giulio Ascoli*.

4. Ytre innhold

Den første matematikeren som introduserte begrepet *ytre innhold* (outer content) til en mengde var Otto Stoltz (1842-1905) i 1881. Han mente at areal og volum skulle bli definert ved hjelp av integral. Ytre innhold til en vilkårlig delmengde E av et intervall $[a, b]$ ble definert som den minste totale lengden til et endelig antall delintervaller som dekker E . Sagt med moderne notasjon

$$C_e(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^k l(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^k I_n \right\},$$

der C_e (content exterior) er «ytre innhold» og $l(I_n)$ er lengden av delintervall n . Stolz utvidet senere denne definisjonen til også å gjelde delmengder i planet. En av de store fordelene med denne «målemetoden», er at den kan måle alle delmengder av \mathbb{R} (og \mathbb{R}^2).

MERKNAD 4.1. Senere skal jeg snakke om både innhold og mål. Forskjellen på disse to er at innhold innebærer at dekningsmengden er en endelig union, og mål innebærer at dekningsmengden kan være tellbar uendelig union.

Litt senere, i 1884, definerte Cantor en ekvivalent definisjon av ytre innhold som gjaldt i \mathbb{R}^n . Han var også den første som viste interesse for additiviteten til «målemetoden» (ytre innhold). Additiviteten til en «målemetode» μ betyr at hvis P og Q er to disjunkte mengder, så er $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q)$.

Dessverre holder ikke additiviteten til ytre innhold C_e . Grunnen til dette er at ytre innhold ikke skiller mellom mengden og dens tillukning. Et eksempel som illustrerer dette er at hvis P er mengden av irrasjonale tall på intervallet $[0, 1]$, og Q er de rasjonale tallene på samme intervall, da er $C_e(P) = C_e(Q) = C_e([0, 1]) = 1$.

Axel Harnack begynte på samme tid å vise interesse for hva som skjer hvis vi lar det være lov med uendelig mange dekningsmengder i definisjonen av «ytre innhold». Han konkluderte med at dette umulig kunne være en matnyttig definisjon, da en kunne risikere at tette delmengder av et intervall fikk innhold 0 (for eksempel $C_e(\mathbb{Q}) = 0$). Tidligere har vi sett at topologiske små mengder ikke trenger å være målteoretiske små, men det at topologiske store mengder måtte være målteoretiske store, var et ufravikelig krav for Harnack.

Harnack så også på den viktige relasjonen mellom ytre innhold og integrasjon. Hvis f er en begrenset positiv funksjon definert på $[a, b]$, og hvis E er mengden av punkter i planet som er begrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = a$ og $x = b$, så tenker han seg at $\int_a^b f = \text{areal}(E)$. Siden E alltid har ytre innhold, mens det kan hende at f ikke er integrerbar, kan altså arealet under en graf ikke likestilles med det ytre innholdet. Han så at ytre innhold og areal var likt hvis det ytre innholdet til mengden E sine *grensepunkter* var 0 (Dette betyr at E er Jordan-målbar). Det var likevel ikke aktuelt for Harnack å begrense mengdene som kunne tildeles et ytre innhold, slik integrasjon var begrenset til integrerbare funksjoner. Jordan var den første som så viktigheten i om en mengde skulle ha innhold eller ikke (om en mengde er målbar eller ikke). Grensepunktene til en mengde er differansen mellom tillukningen (se Definisjon 2.2) og mengden, f.eks er de irrasjonale tallene grensepunktene til de rasjonale tallene.

Det var på midten av 1880-tallet at Karl Weierstrass hadde noen kommentarer som viste at han aldri hadde vært fornøyd med definisjonen av Riemann-integralet. Han mente at et integral skulle gi mening for alle funksjoner som var definert og begrenset på en tett mengde. Weierstrass prøvde å generalisere integralet, og trodde først han hadde oppnådd det han ønsket, men det viste seg at han egentlig bare hadde definert et øvre integral (se Kap 2).

En dypere innsikt i uendelige mengder stimulerte til en interesse for den klassiske integral-formelen for lengden til en kurve $y = f(x)$,

$$L = \int_a^b [1 + (f')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Man fant nå eksempler på at denne klassiske formelen ikke alltid holder. De fleste matematikerne mente da at integralet ikke var relevant for den generelle teorien om å finne kurvelengder². Jordan klarte å vise at en kan bruke denne formelen hvis funksjonen var en differanse mellom to monotone funksjoner. Han karakteriserte også alle slike funksjoner og innså at dette var funksjoner av begrenset variasjon. En viktig observasjon Jordan gjorde i denne forbindelse var at det ubestemte Riemann-integralet

²Denne oppfatningen ble ikke endret før Lebesgue innså at hans generalisering klarerte disse problemene.

$F(x) = \int_a^x f$ alltid var av begrenset variasjon. Dette spilte senere en viktig rolle i Lebesgues arbeid.

5. Målbare mengder og Fubini's teorem

Den første som egentlig gjorde arbeidet med å klargjøre forholdet mellom ytre innhold og areal var Guiseppe Peano (1858-1932) i 1883. Peano definerte *indre innhold* til en mengde E som supremum av den totale lengden til alle endelige unioner av intervaller som ligger i E , sagt med andre ord,

$$C_i(E) = \sup\left\{\sum_{n=1}^k l(I_n) : \bigcup_{n=1}^k I_n \subset E\right\}.$$

Da er vi klare for å få vite hva det vil si at en mengde har innhold.

DEFINISJON 5.1. En mengde E har *innhold* $C(E) = C_e(E)$ hvis og bare hvis $C_i(E) = C_e(E)$. Vi sier at en mengde med innhold er Jordan-målbare (J-målbare).

Vi kaller mengden av grensepunkter til en mengde E for randa til E , og skriver δE . Peano gjenkjente følgende relasjon: $C_e(E) = C_i(E) + C_e(\delta E)$, som igjen førte til implikasjonen at E har innhold hvis og bare hvis $C_e(\delta E) = 0$. Han poengterte også at for en funksjon som er ikke-negativ på intervallet $[a, b]$, så er

$$\int_a^b f = C_i(E) \quad \text{og} \quad \overline{\int_a^b f} = C_e(E),$$

der E er området begrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = a$ og $x = b$.³ Altså er f integrerbar hvis og bare hvis E er J-målbare, dvs $C_i(E) = C_e(E)$. Det var ikke før 5 år senere at Camille Jordan (1838-1922) eksplisitt introduserte og etablerte konseptet «målbare mengde».

Jordan etablerte teorien gjennom sitt arbeid med multiple integraler. Egen-skaper omkring målbarehet dukket naturlig opp når han prøvde å utvide teorien om doble integral $\int_E f(x, y) dE$, til en vilkårlig mengde E . Han tenkte seg at planet ble partisjonert inn i rektangler som var parallelle med koordinataksene. Dette induserer en partisjon av E inn i delmengder E_{ij} , der de fleste E_{ij} er rektangler men noen av de delmengdene som inneholder punkter fra randa til E vil være irregulære. Jordan fant da at han kunne definere det doble integralet på følgende måte:

$$\int_E f(x, y) dE = \sum_{ij} f(x_i, y_j) \cdot a(R_{ij}),$$

der $a(R_{ij})$ er arealet til endelig mange rektangler som enten ligger helt inne i E , eller som dekker hele E . For at dette skulle virke måtte E være J-målbare. Det at E var J-målbare i høyere dimensjon, var bare en naturlig utvidelse av C_i og C_e , der lengden til intervaller bare er byttet ut med arealet til rektangler, eller volumet til bokser, osv. . .

³Det er verdt å merke seg at det var Peano som først introduserte notasjonen for øvre og nedre integraler

Det er klart at $a(R_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$. Når E er J-målbar sier da Jordan at summen kan skrives om til

$$\sum_i \left[\sum_j f(x_i, y_j) \cdot \Delta y_j \right] \Delta x_i.$$

I 1885 gjorde Harnack en merknad som indikerte at i definisjonen av det doble integralet $\int_E f(x, y) dE$ så er det ikke nok at E er J-målbar, også delmengdene som E er partisjonert inn i må være J-målbare. Det er opplagt at alle rektanglene er målbare, men ikke like opplagt at de irregulære delmengdene som inneholder randa er målbar.

Flere år før Jordan etablerte sin målteori var det interesse for om doble integraler kan defineres som gjentatte integraler, m.a.o om vi kan si at

$$\int_E f(x, y) dE = \int_a^b \left[\int_a^b f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Allerede på 1800-tallet var det vist mye problemer i denne forbindelse. Du Bois-Reymond viste allerede i 1883 at når $f(x, y)$ er integrerbar som en funksjon av to variable, så er det ikke sikkert at funksjonene $x \rightarrow f(x, y)$ og $y \rightarrow f(x, y)$ er integrerbare for alle verdier av y og x . Du Bois-Reymond klarte å vise en svak form for Fubinis teorem ved å vise at hvis $f(x, y)$ er integrerbar over rektangelet R , så er funksjonene $y \rightarrow \int_0^1 f(x, y) dx$ og $x \rightarrow \int_0^1 f(x, y) dy$ integrerbare og

$$\int_R f(x, y) dR = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx.$$

Den som tok dette videre fra rektangler til vilkårlige mengder E var Jordan. Mye av grunnen til at han klarte dette var hans observasjon om viktigheten av additiviteten til J-målet. Jordan viste at for en vilkårlig mengde $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, der E_p er parvis disjunkte, så er

$$\sum_{p=1}^n C_i(E_p) \leq C_i(E) \leq C_e(E) \leq \sum_{p=1}^n C_e(E_p).$$

Altså, hvis E_p er J-målbar for alle p , så er også summen E J-målbar, og $C(E) = \sum_{p=1}^n C_e(E_p)$. Dette, sammen med teorien beskrevet under, brukte Jordan til å vise en veldig generell form av Fubini's teorem.

Jordan gikk nå videre og så på øvre og nedre Darboux-summer, U og L , som korresponderer til en partisjon $E = \bigcup_{p=1}^n E_p$ av en J-målbar mengde E og en vilkårlig begrenset funksjon f definert på E :

$$U = \sum_{p=1}^n M_p \cdot C(E_p) \quad \text{og} \quad L = \sum_{p=1}^n m_p \cdot C(E_p).$$

Akkurat som Darboux hadde gjort i det en-dimensjonale tilfellet viste Jordan at U og L gikk mot grenser når innholdet til E_p 'ene gikk mot null. Han også

kalte grensene for henholdsvis øvre integral («intégrale par excés») og nedre integral («intégrale par défaut»). Definisjonen på det multidimensjonale integralet er da:

DEFINISJON 5.2. $\int_E f(x, y) dE$ eksisterer hvis og bare hvis det øvre integralet er lik det nedre integralet.

I det en-dimensjonale tilfellet hadde Jordan nå karakterisert Riemann-integralet på målteoretisk form. Det var nå lettere å se at hvis man skulle generalisere Riemanns integral, så måtte man finne en annen målemetode som utvidet antall målbare mengder. Dette arbeidet til Jordan, sammen med arbeidet til Borel som vi nå skal se på, var det viktigste grunnlaget Lebesgue hadde for å generalisere integralet.

6. Borel's målteori

Jordan's artikkel «*Remarques sur les intégrales définies*» fra 1892 satte definitivt Riemanns integrasjonsteori inn i et målteoretisk perspektiv [11]. Det var nå klart at det å generalisere Jordan-målet kunne være med på å generalisere Riemann-integralet. Selv om mange matematikere på denne tiden viste at det fantes tette delmengder som kunne dekket av intervaller med vilkårlig liten total lengde, så var det ingen som hadde tenkt på å utvide målbegrepet slik at disse mengdene ikke fikk positivt mål (husk de rasjonale tallene som eksempel). Innenfor integrasjonsteorien var det så naturlig å tenke på endelige partisjoner at alt annet virket absurd. Flere matematikere mente at når man ikke holdt seg til endelige partisjoner kunne man finne logiske brister som ikke lot seg fikse (f.eks Harnack) [11].

Det var en matematiker som i utgangspunktet ikke jobbet med integrasjonsteori som skulle klare å «utvide» målbegrepet. Grunnen til at jeg skriver utvide på denne måten er at han selv og flere andre ikke så på dette som en direkte generalisering av J-målet. Fra Émile Borels forskning på kompleks funksjonsteori kom de første ideene om annen målemetode som faktisk kunne gi mål 0 til visse tette mengder. I 1898, i monografien *Leçons sur la théorie des fonctions* presenterte Borel mye av begrunnelsen for sitt «nye» mål. Her tok Borel en aksiomatisk fremgangsmåte for å etablere målbarhet. Målbare mengder og deres mål ble her definert på følgende måte:

Når en mengde består av alle punkter som er komprimert i et tellbart antall intervaller som ikke overlapper og har total lengde s , sier vi at mengden har mål s . Når to mengder ikke har noen felles punkter og deres mål er s og s' vil unionen av mengdene ha mål $s + s'$.

Mer generelt, hvis vi har tellbart mange mengder som er parvis disjunkte og har mål s_1, s_2, \dots , så har unionen mål $s_1 + s_2 + \dots$. Alt dette er en konsekvens av definisjonen av mål. Her er noen nye definisjoner: Hvis en mengde E har mål s og inneholder alle punktene til en mengde E' som har mål s' , så har mengden $E - E'$, som består av alle punktene i E som ikke tilhører E' mål $s - s'$...

De mengdene der målet kan bli definert ifølge de overstående definisjonene blir sagt å være målbare mengder [Oversettelse fra Hawkins (1975): 103-104] [11].

Den egenskapen som motiverte Borel til sin definisjon var at alle tellbare mengder skulle ha mål 0. Borel innså at det var delmengder av nullmengder som ikke var Borel-målbare (et eksempel på dette kan finnes på side 302 i [5]. Dette eksemplet er litt komplisert, så jeg har valgt å utelate det.). Jeg er ikke kjent med at det finnes enkle eksempler på dette, men litt senere i oppgaven skal vi se et eksempel på en mengde som ikke er målbar (verken Borel-målbar eller Lebesgue-målbar). For et eksempel Han unngikk dette problemet med å si at hvis en mengde E har mål s , så må alle delmengder av E ha mål som er mindre eller lik s^4 . Borel mente Jordans definisjon var mer generell siden alle delmengder av J-målbare mengder igjen er J-målbar. Her kommer et lite sammendrag av Borels målemetode skrevet på moderne form (historisk ble ikke disse tingene redegjort for før en stund senere).

- Borel's mål er et ytre mål som skiller mellom mengder og deres tillukning. Ved bruk av innhold har det ikke vært mulig å skille mengder fra tette delmengder i mengden. Dette kan Borel-målet gjøre, og f.eks. får de rasjonale tallene ingen utstrekning med denne målemetoden.
- Det viser seg at samlingen av alle Borel-målbare mengder i \mathbb{R} inneholder alle åpne og lukkede mengder i \mathbb{R} . Vi kaller denne mengden for Borel-sigma-algebraen, og notasjonen er \mathcal{B} .
- For alle mengder $E \in \mathcal{B}$, så er Borel-målet β gitt ved

$$\beta(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : E \subset \bigcup_n I_n \right\}.$$

7. Klassifisering av mengder og funksjoner

Vi har sett at det er gjort flere forsøk på å finne ut hvilke (uendelige) mengder som kan karakteriseres som «små» kontra «store». Det første begrepet vi møtte i denne forbindelse var ingensteds tette kontra tette mengder. Dette er et størrelsesmål som egner seg godt i mange topologiske sammenhenger. Det er likevel mange eksempler på at dette ikke alltid er den beste måten å gjøre inndelingen på. Innenfor integrasjonsteorien ble det etterhvert nyttig å lage metoder som tildelte mengder et bestemt tall som sa noe om størrelsen til mengden (vi har sett på innhold og Borelmål). Det viste seg at mengder som var ingensteds tette ikke nødvendigvis hadde null i innhold eller Borelmål. Det fantes også tette mengder som hadde Borelmål 0.

René Baire konstruerte, i sin doktoravhandling i 1899, en annen inndeling av mengder der han tok utgangspunkt i ingensteds tette mengder. Før vi ser på Baires inndeling, trenger vi to enkle resultater.

- (1) En delmengde av en ingensteds tett mengde er selv ingensteds tett.

⁴Egentlig definerte Borel her komplementeringen til sine målbare mengder som vi kjenner som mengden av Lebesgue-målbare mengder (Lebesgue-sigma-algebraen).

- (2) Unionen av endelig mange ingensteds tette mengder er ingensteds tett.

Hva kan vi si om en mengde som er en tellbar union av uendelig mange ingensteds tette mengder? Den trenger faktisk ikke å være ingensteds tett. Dette er essensen i utgangspunktet Baire hadde for å lage følgende definisjon:

DEFINISJON 7.1. En mengde A er en mengde av *første kategori* hvis den er en tellbar union av ingensteds tette mengder. Dette betyr at $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, der hver P_n er ingensteds tett. Dersom en mengde ikke er av første kategori, blir den sagt å være av *andre kategori*.

Baire har fått noe kritikk for å gi så ikke-beskrivende navn til sine begreper [7]. Et eksempel på en tett mengde av første kategori er de rasjonale tallene. Vi vet at Borelmålet til disse er 0, kan det nå være at alle mengder av første kategori har mål 0, og enda bedre – at alle mengder av mål 0 er av første kategori? Nei dessverre, vi kan finne mengder av første kategori med positivt mål, og mengder med mål 0 som er av andre kategori. Det er verdt å merke seg at første og andre kategori er komplementære begreper i rom av 2. kategori, i motsetning til tette og ingensteds tette mengder. Eksempler på mengder av 2. kategori er intervallene.

Vi har altså her nevnt fire begreper som sier noe om størrelsen på en mengde. Er det noen av disse som er det rette? Nei, de kan alle brukes til forskjellige bruksområder. Her bør det nevnes at begrepet innhold er lite nyttig og nå erstattet med det meget nyttige begrepet mål.

Nå skal vi se på noen av forsøkene som er gjort for å klassifisere funksjoner. Begrunnelsen for å gjøre dette er selvfølgelig for å finne egenskaper til klasser av funksjoner. Egenskapene vi skal fokusere på er de som har med integrasjon å gjøre. Vi husker kanskje fra tidligere i kapitlet at Hankel delte funksjonene inn i fire klasser:

- (1) Kontinuerlige funksjoner.
- (2) Funksjoner som er kontinuerlige bortsett fra på en endelig mengde.
- (3) Punktvis diskontinuerlige funksjoner.
- (4) Totalt diskontinuerlige funksjoner.

Denne inndelingen er en partisjon av mengden av alle funksjoner, som betyr at alle funksjoner passer inn i en av disse klassene. Grunnen til at Hankel lagde denne inndelingen var for å klassifisere mengden av \mathbb{R} -integrerbare funksjoner. Han tenkte seg at en funksjon var \mathbb{R} -integrerbar hvis og bare hvis den var punktvis diskontinuerlig. Vi husker sikkert at dette ble feil.

Baire hadde en annen måte å dele inn funksjonene på. Han tok også utgangspunkt i de kontinuerlige funksjonene og kalte disse for funksjoner av klasse 0 (igjen et ikke-beskrivende navn). Det var tidligere vist at den punktvis grensen til en følge av kontinuerlige funksjoner ikke trengte å være kontinuerlig. Baire tenkte seg da at funksjoner av klasse 1 kunne være de punktvis grensene til følger av kontinuerlige funksjoner som ikke var kontinuerlige. Funksjoner av klasse 2 er den punktvis grensen til følger av funksjoner som består av klasse 0 og 1 funksjoner som ikke selv er av klasse 0 eller 1. Slik kan vi selvfølgelig bare fortsette.

Et eksempel på en funksjon som ligger i klasse 1 er $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sin x)^k$, $x \in [0, \pi]$, denne funksjonen er diskontinuerlig i $\frac{\pi}{2}$, men $f_k(x) = (\sin x)^k$ er kontinuerlig for alle k . Baire beviste en viktig egenskap for funksjoner av klasse 1, nemlig at alle disse er i verste fall punktvis diskontinuerlige. Vi husker at dette betyr at antall punkter der funksjonen er kontinuerlig ligger tett i definisjonsmengden. En konsekvens av dette er: *Hvis f er en deriverbar funksjon, så er den deriverte f' kontinuerlig på en tett delmengde av definisjonsmengden til f .*

Et eksempel på en funksjon i klasse 2 er $f = 1_{\mathbb{Q}}$. Vi ser da at vi trenger ikke gå lengre enn til klasse 2 for å finne funksjoner som ikke kontinuerlige i noen punkter. Denne måten å dele inn funksjoner gjorde at matematikere lurte på om det fantes funksjoner i alle slike klasser (for eksempel finnes det funksjoner av klasse 2483?), og om det fantes funksjoner som ikke var i noen av disse klassene. Det var Lebesgue som klarte å besvare disse spørsmålene, og svaret var ja på begge deler. Altså er ikke Baires inndeling noen partisjon av mengden av funksjoner.

8. Henry Lebesgue

Henry Lebesgue (1875-1941) studerte ved École Normale Supérieure, som er et av de mest prestisjefylte universitetene i Frankrike. Han begynte der i 1894 og fikk sitt «lærerdiplom» i matematikk i 1897. Han fullførte sin berømte doktoravhandling «*Intégrale, longueur, aire*» i 1902. Det var i denne avhandlingen at generaliseringen av R-integralet ble gitt. Lebesgue giftet seg i 1903 med Louise-Marguerite Vallet, og de fikk to barn. De ble skilt i 1916.

Mye av Lebesgues arbeid var basert på effektiv bruk av ledd for ledd integrasjon av følger og rekker som ikke nødvendigvis konvergerer uniformt. Ledd for ledd integrasjon er en helt essensiell egenskap i Fourier-teorien. Fourier hadde antatt at for begrensede funksjoner var ledd for ledd integrasjon av den trigonometriske rekken som representerte funksjonen mulig. Det kom tidlig eksempler på uniformt begrensede funksjoner som ikke var Riemann-integrerbare. En del av motivasjonen Lebesgue hadde for å komme med en helt ny definisjon av integralet, var at Fourier's antagelse da stemte, hvis man integrerte med Lebesgues definisjon.

Lebesgue bygde mye av sin teori på tidligere arbeid som var gjort innenfor målteori. Han utvidet Borels mål, og brukte (i motsetning til Borel) dette aktivt i integrasjonsteorien. Lebesgues geniale idé var å partisjonere verdismengden til en funksjon, for å få frem en partisjon av definisjonsmengden som kan være mye mer kompleks enn bare intervalldelinger. Dette ledet til mye revolusjonerende teori på starten av 1900-tallet. I de neste kapitlene skal jeg gi en innføring i noe av denne teorien.

KAPITTEL 4

Lebesgues mål og integrasjonsteori

Etter å ha lest Kapittel 3 håper jeg du er overbevist om at det er helt essensielt å kunne grunnbegrepene i målteori, når en skal studere moderne integrasjonsteori. Kapittel 4 er derfor en relativt kort gjennomgang av de viktigste begrepene innenfor Lebesgues teori. Jeg forklarer ikke begrepene så veldig nøye med en gang de dukker opp, men prøver heller å belyse dem når jeg sammenlikner R-integralet med L-integralet i Seksjon 4.7.

1. Mål og nullmengder

Et mål er et begrep som brukes for å angi størrelsen på en mengde. I denne oppgaven snakker vi helst om mål på mengder av reelle tall (en dimensjon). Målbegrepet kan brukes på mange forskjellige elementer, og i flere dimensjoner. En kan tenke seg mål som tar både positive og negative verdier (fortegnsmål), ja til og med vektorverdier, men vi skal konsentrere oss om positive mål.

Vi er vant til å se på størrelsen av noen mengder, nemlig intervaller på tallinjen. Et intervall $[a, b]$ har lengden $l[a, b] = b - a$. Vi sier også at åpne og halvåpne intervaller har samme lengde som det lukkede intervallet. Det er dette lengdebegrepet vi skal generalisere til en metode for å kunne angi størrelsen på (nesten) alle delmengder i \mathbb{R} . Vi ønsker for eksempel å vite «lengden» til de irrasjonale tallene på intervallet $[0, 1]$. Det klarer vi med å bruke Lebesguemål.

Det første vi ønsker å gjøre er å få redegjort for hvilke mengder som er så «små» at vi kan se bort fra dem. Disse blir ofte kalt neglisjerbare mengder, nullmengder, eller mengder av mål null. Sagt på en annen måte skal det være slik at hvis A er en nullmengde på intervallet $[0, 1]$, og du skal trekke et tilfeldig tall fra intervallet, så skal sannsynligheten for å trekke et tall som ligger i A være 0. Den formelle definisjonen er som følger:

DEFINISJON 1.1. En mengde $A \in \mathbb{R}$ har mål null hvis og bare hvis

$$\inf \left\{ \sum_n l(I_n) : I_n \text{ intervall, } A \subset \bigcup_n I_n \right\} = 0.$$

Sagt med ord er en mengde en nullmengde hvis den kan dekket av en tellbar samling av intervaller med samlet lengde som er vilkårlig liten. Følgende resultat om nullmengder blir mye brukt. Jeg har valgt å bevise denne setningen fordi den illustrerer fint hvordan man argumenterer i målteori.

TEOREM 1.2. *En tellbar union av nullmengder har selv mål null.*

BEVIS. Vi starter med å anta at $\{A_n\}$ er en tellbar samling av nullmengder. Vi sier at $A = \bigcup_n A_n$ og ønsker å vise at for enhver $\epsilon > 0$, kan vi dekke mengden A med tellbart mange intervaller som har samlet lengde mindre enn ϵ .

Vi starter med å dekke hver A_n med noen «passende» intervaller. Passende intervaller betyr her at summen av alle disse til slutt skal være mindre enn ϵ .

Siden A_1 er en nullmengde, så finnes intervaller I_k^1 , $k = 1, 2, \dots$, slik at

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^1) < \frac{\epsilon}{2}, \quad A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^1.$$

For å dekke A_2 kan vi bruke intervallene I_k^2 , $k = 1, 2, \dots$, der

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^2) < \frac{\epsilon}{4}, \quad A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^2.$$

Generelt kan vi dekke A_n med intervallene I_k^n , $k = 1, 2, \dots$, der

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^n) < \frac{\epsilon}{2^n}, \quad A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n.$$

Nå skal vi pusle sammen den tellbare familien av intervaller $\{I_k^n\}$ til en følge $(B_m)_{m=1}^{\infty}$. Vi lar $B_1 = I_1^1$, $B_2 = I_2^1$, $B_3 = I_1^2$, $B_4 = I_2^2$, osv. slik at alle I_k^n 'ene kommer med. Unionen av dette nye systemet er den samme som unionen av det gamle systemet. Dette betyr at

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Nå skal vi regne ut den samlede lengden til B_m 'ene. Problemet vårt er at vi har to løpende variabler:

$$\sum_{m=1}^{\infty} l(B_m) = \sum_{n=1, k=1}^{\infty} l(I_k^n).$$

Fra kalkulus har vi nå at siden alle komponentene er ikke-negative så kan vi stable den doble summen som vi ønsker, altså er

$$\sum_{n=1, k=1}^{\infty} l(I_k^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^n) \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon,$$

som avslutter beviset. □

Et eksempel på en nullmengde i \mathbb{R} er de rasjonale tallene. Siden det finnes tellbart mange rasjonale tall, kan de dekkes av tellbart mange intervaller på formen $[q_i, q_i]$, $i = 1, 2, \dots$, q_i er et rasjonalt tall. Hvert av disse intervallene har opplagt lengde 0, dermed gir Teorem 1.2 at også unionen har lengde 0. A samme grunn kan vi legge merke til at alle tellbare mengder har mål null.

Hvis noe har en egenskap som gjelder utenom på en mengde av mål null, sier vi at egenskapen gjelder *nesten overalt*.

2. Lebesgue-målbare mengder

Vi begynner med å definere en målemetode som kan måle størrelsen på en hvilken som helst delmengde i \mathbb{R} . Vi kaller denne for *ytre mål*. Vi tar utgangspunkt i den «naturlige» lengden (målet) til intervallene som vi definerte i Seksjon 1, og definerer ytre mål på følgende måte.

DEFINISJON 2.1. Det ytre målet til en mengde $E \subset \mathbb{R}$ er

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_n l(I_n), I_n \text{ intervall, } E \subset \bigcup_n I_n \right\}$$

Dette er nøyaktig det samme som Borels ytre mål. Det ytre målet har mange gode egenskaper som jeg har samlet i følgende resultat.

TEOREM 2.2. *Ytre mål har følgende egenskaper:*

- Ytre mål virker på alle delmengder av \mathbb{R} .
- Ytre mål er tellbart subadditivt. Dette betyr at for enhver tellbar familie av mengder $\{E_n\}$, så er $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.
- Det ytre målet til et intervall er lik lengden på intervallet. $m^*([a, b]) = l[a, b]$.
- $A \subset \mathbb{R}$ er en nullmengde hvis og bare hvis $m^*(A) = 0$.
- Det ytre målet er translasjonsinvariant. Det betyr at $m^*(A) = m^*(A + t)$ for alle A og t .

Det er naturlig å ønske å konstruere en målemetode på en slik måte at hvis vi måler størrelsen til en hel masse (opp til tellbart uendelig mange) disjunkte delmengder, så bør målet til unionen av delmengdene være lik summen av målene. Noe som har denne egenskapen sies å være tellbar additiv. Vi ser fra det andre punktet i Teorem 2.2 at ved å bruke ytre mål kan vi risikere at $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$. Vi er nå på jakt etter en delfamilie av $P(\mathbb{R})$ ¹ der det ytre målet er tellbart additivt, altså der følgende likhet holder:

$$(3) \quad m^* \left(\bigcup_n E_n \right) = \sum_n m^*(E_n), \quad E_n \text{ disjunkte}$$

Lebesgue kom frem til en stor klasse av delmengder som oppfyller (3) ved å sette et fornuftig krav til mengdene. Mengdene som oppfyller dette kravet blir kalt (Lebesgue-) målbare mengder.

Vi har sett hvordan et ytre mål blir definert, da vil det kanskje også være fornuftig å se på et indre mål, slik Jordan gjorde med innhold. Lebesgue definerte det indre målet m_* til en delmengde E av et intervall $[a, b]$ som

¹ $P(\mathbb{R})$ betyr potensmengden til \mathbb{R} , og det menes samlingen av alle mulige delmengder av \mathbb{R} .

$m_*(E) = (b - a) - m^*(E)$ ². Kravet til Lebesgue var da at det indre målet måtte være lik det ytre målet, altså $m_*(E) = m^*(E) \Leftrightarrow E$ målbar. Det ble senere vist at Lebesgues krav er ekvivalent med Definisjon 2.3 som noen ganger er lettere å bruke.

DEFINISJON 2.3. En mengde $E \subset \mathbb{R}$ kalles målbar hvis og bare hvis vi for alle $A \subset \mathbb{R}$ har at

$$(4) \quad m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

Det kan jo virke rart at det finnes mengder der (4) ikke er oppfylt, men utvalgsaksiomet gir at disse «absurde» mengdene finnes. Konstruksjon av en ikke-målbar mengde behøver noen mengde-teoretiske forberedelser. Utvalgsaksiomet trengs ikke for at mengde teorien skal være konsistent, men vi går glipp av mye sterk teori hvis vi utelater det [5]. Jeg bruker flere resultater i denne oppgaven som bygger på utvalgsaksiomet. Hva sier egentlig utvalgsaksiomet?

AKSIOM 2.4 (Utvalgsaksiomet). *Anta at $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ er en ikke-tom samling av ikke-tomme mengder som er indeksert ved Γ . Da eksisterer en mengde E som inneholder nøyaktig ett element fra hver av mengdene A_α . Det finnes altså en utvalgsfunksjon $f : \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$.*

Det virker ganske naturlig at det skal være mulig å velge ut nøyaktig ett element fra hver delmengde selv om det er uendelig mange av dem. Det er jo opplagt når det er endelig mange delmengder, men det er altså umulig å bevise dette ved hjelp av Zermelo-Frankels aksiomer for mengdeteori.

La oss nå konstruere et eksempel på en ikke-målbar mengde.

EKSEMPEL 2.5 (En ikke-målbar mengde). Vi begynner med å definere en ekvivalensrelasjon på $[0, 1]$: $x \sim y$ hvis $y - x$ er et rasjonalt tall. Dette rasjonale tallet må ligge i intervallet $[-1, 1]$. Det er ikke vanskelig å se at dette er en ekvivalensrelasjon (den er refleksiv, symmetrisk og transitiv). Da er det slik at intervallet $[0, 1]$ blir partisjonert i disjunkte ekvivalensklasser (A_α). Hvis vi velger to elementer fra en klasse, så vil altså differansen alltid være et rasjonalt tall. Hvis vi velger to elementer fra forskjellige klasser, så vil alltid differansen være et irrasjonalt tall. Hver klasse A_α er tellbar siden de rasjonale tallene er tellbare, men det finnes overteggbart mange klasser siden mengden av irrasjonale tall er overteggbar.

Nå skal vi bruke utvalgsaksiomet til å konstruere en ny mengde $E \subset [0, 1]$ som inneholder nøyaktig ett element a_α fra hver av A_α 'ene. Vi nummerer nå de rasjonale tallene i $[-1, 1]$ og ordner dem som en følge (q_n) . Definer en følge av translater av E ved $E_n = E + q_n$. Hvis E er målbar så er også hver E_n målbar og de har samme mål (dette er fordi m er translasjonsinvariant, se Teorem 2.7).

Men nå skal vi se at E_n 'ene er disjunkte. Anta at $z \in E_n \cap E_m$ for noen $n \neq m$. Da kan vi skrive $a_\alpha + q_m = z = a_\beta + q_n$ for noen $a_\alpha, a_\beta \in E$, og

²Det er kanskje mer fornuftig å definere indre mål som $m_*(E) = \sup \{ \sum_n l(I_n), I_n \text{ intervall, } E \supset \bigcup_n I_n \}$, da dette gir mening også for ubegrensede mengder.

deres differanse $a_\alpha - a_\beta = q_n - q_m$ er rasjonal. Siden E inneholder nøyaktig ett element fra hver klasse så er $\alpha = \beta$ og derfor $m = n$. Siden ekvivalensrelasjonen vi brukte i konstruksjonen var en partisjon av intervallet $[0, 1]$, så er $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ en disjunkt union som inneholder $[0, 1]$.

Da har vi at $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1, 2]$ og $m(E_n) = m(E)$ for alle n . Ved tellbar additivitet og monotonitetsegenskapen til m (se Teorem 2.7) har vi at

$$1 = m([0, 1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = m(E) + m(E) + \dots \leq m([-1, 2]) = 3.$$

Dette kan ikke være mulig siden denne summen enten må være 0 eller ∞ . Altså kan vi konkludere med at E ikke er målbar.

Familien av de målbare mengdene kalles Lebesgue- σ -algebraen og vi bruker notasjonen \mathcal{M} . En σ -algebra er en familie av mengder Σ som oppfyller følgende:

- $\mathbb{R} \in \Sigma$
- Hvis $E \in \Sigma$, så er også $E^c \in \Sigma$
- Hvis $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ er en tellbar familie av mengder der $E_i \in \Sigma$ for alle i , så er også $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \in \Sigma$

Altså kan vi si at en familie av mengder er en σ -algebra hvis den inneholder grunnmengden (i vårt tilfelle \mathbb{R}), er lukket under komplement og under tellbare unioner.

DEFINISJON 2.6. Vi skriver $m(E)$ istedenfor $m^*(E)$ når $E \in \mathcal{M}$, og kaller $m(E)$ for *Lebesguemålet* til E .

Lebesguemålet $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ er en tellbar additiv mengdefunksjon definert på σ -algebraen \mathcal{M} av målbare mengder. Under følger et resultat som inneholder de viktigste egenskapene til m .

TEOREM 2.7. Lebesguemålet m har følgende egenskaper:

- (1) m er tellbar additivt.
- (2) m har monotonitetsegenskapen. Hvis $A, B \in \mathcal{M}$ og $A \subset B$ så er $m(A) \leq m(B)$.
- (3) m er translasjonsinvariant.

Det er lett å vise at snittet av σ -algebraer også er en σ -algebra. Fra konstruksjonen av Lebesguemålet har vi at \mathcal{M} inneholder intervallene. Kan det tenkes at dette er den minste σ -algebraen som inneholder intervallene? Slik er det ikke, det finnes mindre σ -algebraer som også inneholder intervallene.

DEFINISJON 2.8. La $\mathcal{B} = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ er en } \sigma\text{-algebra som inneholder alle intervaller}\}$.

Vi sier at \mathcal{B} er σ -algebraen generert av intervallene og vi kaller elementene til \mathcal{B} for Borelmengder. Vi så i Kapittel 3 at dette var de mengdene som er målbare med Borels definisjon.

Vi sier at en σ -algebra er *komplett* hvis den inneholder alle delmengder av nullmengder. Det viser seg at \mathcal{M} er komplett, men \mathcal{B} er det ikke. Det er faktisk ganske komplisert å komme med eksempler på mengder $E \in \mathcal{M}$, der $E \notin \mathcal{B}$. Vi har nå at \mathcal{M} er *kompletteringen* av \mathcal{B} , der komplettering betyr å la alle delmengder av nullmengder ha mål null. Det at \mathcal{M} er kompletteringen til \mathcal{B} betyr også at \mathcal{M} er den minste komplette σ -algebraen som inneholder \mathcal{B} .

Fra det vi nå har sagt har vi at $\mathcal{B} \subset \mathcal{M} \subset P(\mathbb{R})$, der inklusjonene er ekte. Nå har vi sett hvordan vi skal måle størrelsen til mengder. Da er vi klare for det neste steget som skal fortelle oss hvilke funksjoner vi kan integrere (måle).

3. Målbare funksjoner

Vi har nå definert mål både for endelige og uendelige mengder. Dette gjør at det skal vise seg fornuftig å la funksjoner virke på den *utvidede reelle tallinjen* $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Vi må da være litt varsomme med aritmetikken. Vi antar følgende: $a + \infty = \infty$ for alle $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot \infty = \infty$ for alle $a > 0$, $a \cdot \infty = -\infty$ for alle $a < 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$ og $0 \cdot \infty = 0$, med tilsvarende definisjoner for $-\infty$. Vi må for alt i verden unngå summer på formen $\infty - \infty$. Ser vi bort fra disse reglene gjelder aritmetikken akkurat som før.

Når vi skal se på funksjoner kommer jeg fra nå av til å bruke begrepet nesten overalt. Dette betyr at hvis jeg sier at $f = g$ nesten overalt (n.o), så er $f = g$ bortsett fra på en mengde med mål 0. Jeg kan også si at funksjonen f er begrenset nesten overalt, som betyr at f er begrenset bortsett fra på en mengde med mål 0.

Da vi definerte R-integralet partisjonerte vi definisjonsmengden (x -aksen). Det som gjør at Lebesgues integral overgår R-integralet så kraftig er at vi partisjonerer verdimensjonen (y -aksen) istedenfor definisjonsmengden (x -aksen). Av denne grunn blir den mengden som blir dannet ved å ta *inversbildet* til integranden en nøkkelmengde. Vi minner oss på hva et inversbilde til en funksjon f er. Inversbildet til et intervall I er mengden av de x som er slik at $f(x)$ treffer intervallet I , altså er

$$f^{-1}(I) = \{x : f(x) \in I\}.$$

Da er vi klare for definisjonen av målbare funksjoner.

DEFINISJON 3.1. Anta at E er en målbar mengde. Vi sier at en funksjon $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ er (*Lebesgue-*) *målbare* hvis det for ethvert intervall $I \subset \mathbb{R}$ gjelder at

$$f^{-1}(I) \in \mathcal{M}.$$

Noen lurer sikkert på hvorfor vi bruker begrepet målbare, når vi egentlig mener integrerbar? Det har ingen annen forklaring enn at begrepet integrerbar er reservert til et litt strengere krav som kommer senere i kapitlet. Det er også ganske vanlig å bruke «summerbar» (summable) istedenfor målbare.

Hvis vi tar utgangspunkt i definisjonen av en målbar funksjon, så kan det være ganske brysomt å sjekke at inversbildene til alle intervaller i verdismengden er målbare mengder. Derfor har vi heldigvis et resultat som hjelper oss godt på vei.

TEOREM 3.2. *Det følgende er ekvivalent:*

- (1) f er målbar,
- (2) for alle a , er $f^{-1}((a, \infty))$ målbar,
- (3) for alle a , er $f^{-1}([a, \infty))$ målbar,
- (4) for alle a , er $f^{-1}((-\infty, a))$ målbar,
- (5) for alle a , er $f^{-1}((-\infty, a])$ målbar.

Vi hadde at mengden av \mathbb{R} -integrerbare funksjoner var et vektorrom. Hva med mengden av målbare funksjoner?

TEOREM 3.3. *Mengden av reelle målbare funksjoner definert på $E \in \mathcal{M}$ er et vektorrom som er lukket under multiplikasjon. Med det mener jeg at hvis f og g er målbare funksjoner, α, β skalarer, så er også $\alpha f + \beta g$ og fg målbare.*

Legg her merke til hvordan dette garanterer oss veldig mange målbare funksjoner. For å gjøre nytte av det neste resultatet trenger vi å definere en liten ting.

DEFINISJON 3.4. Hvis f er en målbar funksjon, så kaller vi den positive delen for f^+ og den negative delen for f^- . Med dette mener vi at

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } f(x) > 0 \\ 0 & \text{hvis } f(x) \leq 0 \end{cases},$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{hvis } f(x) \leq 0 \end{cases}.$$

Hvordan kan jeg nå være sikker på at f^+ og f^- er målbar hvis f er målbar? Dette ser vi ganske greit ved å bruke Teorem 3.2. La oss si at vi har en målbar funksjon $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ der $E \in \mathcal{M}$. Vi ser at $f^{+^{-1}}((0, \infty)) = \{x \in E : f(x) > 0\}$, siden vi vet at f er målbar må også f^+ være det. Det samme gjelder selvfølgelig for f^- . Da er vi klare for følgende nyttige resultat:

TEOREM 3.5. *La $E \in \mathcal{M}$.*

- (1) $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ er målbar hvis og bare hvis både f^+ og f^- er målbare.
- (2) Hvis f er målbar, så er $|f|$ målbar; det motsatte gjelder ikke.

Dette resultatet skal vi bruke flere ganger senere. Jeg har tidligere skrytt av at Lebesgueteorien innehar flere gode egenskaper som ikke Riemanns teori har. La oss begynne med å se at målbare funksjoner er lukket under punktvis grenser.

TEOREM 3.6. *Hvis (f_n) er en følge av målbare funksjoner som konvergerer punktvis, så er grensefunksjonen også målbar.*

Dette teoremet holder ikke for mengden av \mathbb{R} -integrerbare funksjoner (se Eksempel 2.3). Vi skal avslutte denne delen med å se på et resultat som sier noe om at vi kan justere en funksjon som vi vil på en nullmengde, uten å endre på egenskapene i forbindelse med målbarhet.

TEOREM 3.7. Hvis $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ er målbar, $E \in \mathcal{M}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ er slik at mengden $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ har mål null, så er også g målbar.

Vi har sett endel egenskaper med målbare funksjoner, men vi vet fortsatt ikke hvordan «målingen» gjøres. Nå er vi klare for å se på Lebesgues integral.

4. Definisjonen av L-integralet

Endelig er vi fremme ved det som kanskje er klimakset rent begrepsmessig i denne oppgaven, nemlig Lebesgueintegralet. Før vi begynner trenger vi et par definisjoner.

DEFINISJON 4.1. En *simpel funksjon* ϕ er en ikke-negativ funksjon som bare tar endelig mange verdier $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, og der alle mengdene

$$A_i = \phi^{-1}(\{a_i\}) = \{x : \phi(x) = a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

er målbare mengder.

Det er ofte veldig nyttig å skrive en simpel funksjon på følgende måte:

$$(5) \quad \phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i}(x).$$

Hvorfor kan vi være sikre på at en simpel funksjon er målbar? Vi ser fra definisjonen at alle A_i 'ene skal være målbare mengder. Da en simpel funksjon bare treffer endelig mange verdier, så er det klart at etthvert inversbilde bare blir en endelig union av de målbare mengdene A_i . Nå skal vi definere integralet til simple funksjoner.

DEFINISJON 4.2. *Integralet* over $E \in \mathcal{M}$ til den simple funksjonen ϕ (gitt på formen som i (5)) er gitt ved

$$\int_E \phi \, dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap E).$$

Her betyr m Lebesguemålet og dm er en notasjon som sier at integralet blir funnet med hensyn på Lebesguemålet. Det er også et poeng å minne om at $0 \cdot \infty = 0$, siden vi kan risikere at $m(A_i) = \infty$.

Den fremgangsmåten jeg har valgt å bruke for å definere L-integralet er ikke helt den samme som Lebesgue brukte³. Etter som utviklingen av målteori har gått fremover har dette gitt oss mange ekvivalente måter å definere L-integralet på. Noen av disse er lettere å se for seg enn andre. Jeg velger å tro at versjonen jeg har valgt er en av de enkleste rent konseptuelt. Den valgte fremgangsmåten er hentet fra boken «*Measure, integral and probability*» [5].

Vi er selvfølgelig ikke fornøyd med å bare å kunne integrere simple funksjoner. La oss nå komme med definisjonen på integralet til en generell ikke-negativ målbar funksjon.

³Lebesgues metode var å innføre nedre og øvre summer i samme stil som Darboux gjorde med R-integralet. Den store forskjellen var jo selvfølgelig at Lebesgue partisjonerte verdimensjonen istedenfor definisjonsmengden.

DEFINISJON 4.3. For enhver ikke-negativ målbar funksjon f og $E \in \mathcal{M}$ så er integralet $\int_E f dm$ definert som

$$\int_E f dm = \sup \left\{ \int_E \phi dm : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ er en simpel funksjon} \right\}.$$

Hvordan skal vi tolke dette? Tenk på en simpel funksjon som en slags «stolpe-funksjon» der bunnen til stolpene kan se veldig rare ut. Det er utallige simple funksjoner som kan «leve» under en målbar funksjon. Vi velger ut den av disse som gir det største integralet. Dette likner på Darboux's nedre integral

Før vi går videre og skal definere integralet for en generell målbar funksjon (integrerbar funksjon) skal vi oppsummere noen egenskaper ved L-integralet i et resultat.

TEOREM 4.4. *Anta f og g er ikke-negative målbare funksjoner.*

- (1) Hvis $A \in \mathcal{M}$, og $f \leq g$ på A , så er $\int_A f dm \leq \int_A g dm$.
- (2) Hvis $B \subset A$, $A, B \in \mathcal{M}$, så er $\int_B f dm \leq \int_A f dm$.
- (3) For $a \geq 0$ så har vi at $\int_A a f dm = a \int_A f dm$.
- (4) Hvis A er null, så er $\int_A f dm = 0$.
- (5) Hvis $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset$, så er $\int_{A \cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm$.

Du kjenner sikkert igjen disse egenskapene, siden de er analoge til R-integralet.

Da er vi klare for det første av de store konvergensteoremene til Lebesgue, det monotone konvergensteoremet (LMK).

TEOREM 4.5 (Lebesgues monotone konvergensteorem). *Anta $\{f_n\}$ er en økende følge av ikke-negative målbare funksjoner der f_n konvergerer punktvis monotont mot f (Dette skriver vi $f_n \nearrow f$ punktvis). Da er*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dm = \int_E f dm.$$

Dette resultatet har en stor fordel fremfor Riemanns begrensede konvergensteorem (Se Teorem 2.5). Det er at den punktvis grensen alltid er L-integrerbar. Den neste seksjonen viser tydelig hvorfor vi har skilt mellom målbare og integrerbare funksjoner.

5. Integrerbare funksjoner

Nå skal vi utvide teorien fra ikke-negative målbare funksjoner til generelle målbare funksjoner. Når vi gjør dette må vi være oppmerksom på $\infty - \infty$ problemet. Dette kan forklares nærmere når vi har sett definisjonen til en integrerbar funksjon.

DEFINISJON 5.1. Hvis $E \in \mathcal{M}$ og den målbare funksjonen f har både $\int_E f^+ dm$ og $\int_E f^- dm$ endelige, så sier vi at f er *integrerbar*, og definerer

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm.$$

Vi kaller mengden av alle integrerbare funksjoner over E for $\mathcal{L}^1(E)$. Veldig ofte vil jeg bare skrive \mathcal{L}^1 .

Vi har altså at en integrerbar funksjon alltid har endelig integral, mens en målbar funksjon kan ha uendelig integral. Grunnen til at både integralene til f^+ og f^- må være endelige er at vi ikke tillater summer på formen $\infty - \infty$ (disse kan ende opp til hva som helst, og regnereglene til integrasjonsteorien kolliderer).

Egenskapene til ikke-negative målbare funksjoner gjelder også for integrerbare funksjoner (som ikke trenger å være ikke-negative). Vi har følgende resultat for å avgjøre om en funksjon er integrerbar eller ikke:

TEOREM 5.2. *En funksjon f er integrerbar hvis og bare hvis $|f|$ er integrerbar. I så fall er*

$$\int_E |f| dm = \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm.$$

Her vil jeg understreke at det finnes funksjoner f der $\int f$ er endelig, men $\int |f|$ er uendelig (ikke integrerbar). Det er denne «absolutte» naturen til L-integralet som gjør at det finnes uekte R-integraler som ikke er L-integrerbare. Dette skal vi se nærmere på i Kapittel 4.7.

Det er mange spørsmål i forbindelse med analyse der utfallet står og faller på om rekkefølgen til grenseprosesser kan endres. Hvis vi f.eks har en punktvis konvergent funksjonsfølge (f_n) blir et naturlig spørsmål: Når er den punktvis grensen til integralene likt integralet av den punktvis grensen? Med dette mener jeg: Når er $\lim \int f_n dm = \int (\lim f_n) dm$? Teoremer som sier noe om når dette gjelder kalles konvergensteoremer. Vi har allerede sett ett eksempel på et konvergensteorem, nemlig Lebesgues monotone konvergensteorem. Nå skal vi se på et annet konvergensteorem.

TEOREM 5.3 (Lebesgues dominerte konvergensteorem). *Anta $E \in \mathcal{M}$. La (f_n) være en følge av målbare funksjoner slik at $|f_n| \leq g$ n.o. på E for alle $n \geq N \geq 1$, der g er integrerbar over E . Hvis $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ n.o. så er f integrerbar over E og*

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

Vi sier at en funksjon g *dominerer* en annen funksjon f hvis $g \geq |f|$ n.o. Navnet på dette teoremet kommer da av at vi må finne en integrerbar funksjon g som dominerer alle funksjonene i funksjonsfølga. Dette er kanskje det mest nyttige konvergensteoremet vi har i matematisk analyse. Det sier rett og slett at Likning (6) holder hvis det finnes en integrerbar funksjon som er større enn absoluttverdien til alle funksjonene i følga nesten overalt. La oss se på et svært enkelt eksempel som illustrerer hva Lebesgues dominerte konvergensteorem (LDK) kan brukes til.

EKSEMPEL 5.4. Finn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$$

der $f_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1 + \frac{x}{n})^n}$.

Legg først merke til at $\frac{\sin \frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n} \rightarrow 0$ punktvis for $x \in [0, \infty)$. Dette følger greit siden $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n} = 0$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$. La nå $g(x) = \frac{1}{(1+\frac{x}{2})^2}$, som er integrerbar siden $\int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x}{2})^2} dx = 2$. Det er heller ikke vanskelig å se at

$$\frac{1}{(1+\frac{x}{2})^2} \geq \left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n} \right|$$

for $n \geq 2$ og $x \in [0, \infty]$ ($1 \geq |\sin \frac{x}{n}|$ og $(1 + \frac{x}{2})^2 \leq (1 + \frac{x}{n})^n$ når $n \geq 2$). Nå gir LDK oss at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n} dx = \int_1^\infty 0 dx = 0.$$

LDK blir ofte brukt for å bevise resultater i analyse. Et eksempel på dette er et veldig mye brukt resultat som kalles Beppo-Levis teorem. I beviset for dette teoremet står LDK helt sentralt.

TEOREM 5.5. [Beppo Levi] Anta at

$$\sum_{k=1}^\infty \int |f_k| dm \text{ er endelig.}$$

Da vil rekka $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergere for nesten alle x , summen er integrerbar, og

$$\int \sum_{k=1}^\infty f_k dm = \sum_{k=1}^\infty \int f_k dm.$$

Dette resultatet blir blant annet brukt mye i sammenheng med Fourier rekker. Vi husker kanskje fra Kapittel 3 at det å kunne bytte rekkefølge mellom summer og integraler var viktig i flere sammenhenger.

Mengden av L-integrerbare funksjoner \mathcal{L}^1 har også vektorromstrukturen vi så at \mathcal{R} hadde.

LEMMA 5.6. \mathcal{L}^1 er et vektorrom. Dette betyr at $f, g \in \mathcal{L}^1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{L}^1$.

Vi så i Teorem 3.3 at målbare funksjoner var lukket under multiplikasjon. Integrerbare funksjoner er ikke lukket under multiplikasjon. I den neste seksjonen skal vi se på hvordan vi kan bruke vektorromsstrukturen til å konstruere kjempefine strukturer.

6. Det normerte rommet L^1 av L-integrerbare funksjoner

I denne seksjonen skal vi prøve konstruere et normert vektorrom som består av L-integrerbare funksjoner. Vi så i Seksjon 2.2.1 at det normerte vektorrommet \mathcal{R}^1 hadde noen ulemper. Vi skal nå se hvordan disse ulempene forsvinner som dugg for solen ved bruk av Lebesgues teori. Først trenger vi å vite hvordan en norm er definert.

DEFINISJON 6.1. La X være et vektorrom over \mathbb{R} . Funksjonen $x \rightarrow \|x\|$ fra X inn i \mathbb{R} er en *norm* på X hvis den oppfyller

- (1) $\|x\| \geq 0$ for alle $x \in X$,
- (2) $\|x\| = 0$ hvis og bare hvis $x = 0$,
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$,
- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for alle $x, y \in X$.

Vi har jo sett at vi sitter på et vektorrom \mathcal{L}^1 , og en naturlig norm vi definerte i Seksjon 2.2.1. Kan vi bare slå disse sammen til et normert vektorrom? Nesten, men vi ender opp med et lite problem i forbindelse med definisjonen av norm. Se på krav nummer (2) i Definisjon 6.1. Her kreves det at normen til en funksjon skal være 0 hvis og bare hvis funksjonen er 0. Vi vet jo at hvis funksjonen er 0 bortsett fra på en mengde med mål 0, så vil integralet være 0. Det finnes da altså uendelig mange funksjoner som har integral 0. Her er et eksempel.

EKSEMPEL 6.2. La $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}$, og $g(x) = 0$. Her er $\int |f| dm = \int |g| dm = 0$ selv om $f \neq g$.

Dette problemet fikser vi ganske greit ved å lage en ekvivalensrelasjon som er definert ved å la f være relatert til g hvis $f = g$ nesten overalt. Nå tenker vi oss et nytt vektorrom som består av ekvivalensklasser fra \mathcal{L}^1 . Her vil normfunksjonen $f \rightarrow \int |f| dm$ bli veldefinert, og vi kaller det normerte vektorrommet for L^1 . Når vi i praksis snakker om elementene i L^1 sier vi bare at disse er integrerbare funksjoner, men vi vet da med oss selv at en funksjon er «integrerbarmessig» lik en annen funksjon hvis de er like nesten overalt. Altså kan vi si at $f(x) = 0$ ligger i L^1 , selv om vi vet at det egentlig er mengden av alle funksjoner som er lik 0 nesten overalt som ligger i L^1 . Vi kaller denne normen for L^1 -norm og her følger definisjonen.

DEFINISJON 6.3. La $f \in L^1$. Normen til f er definert som

$$\|f\|_1 = \int |f| dm.$$

Fra Seksjon 5 husker vi at $|f| \in L^1 \Leftrightarrow f \in L^1$.

Vi sier at en følge $(f_n) \in L^1$ av funksjoner er Cauchy hvis $\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$ når $n, m \rightarrow \infty$ uavhengig av hverandre. Vi husker at et normert vektorrom er komplett hvis enhver Cauchy-følge er konvergent.

TEOREM 6.4. L^1 er et komplett normert vektorrom.

Det resultatet som står i sentrum når en skal bevise dette teoremet er Beppo Levi (se Teorem 5.5). Det kan vises at følgende resultat gjelder:

TEOREM 6.5. La X være et normert vektorrom og anta $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. X er komplett dersom $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent.

Legg merke til at $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| dm$, som viser at Beppo Levis teorem medfører kompletthet i L^1 -tilfellet.

6.1. L^p -rom. Et spørsmål vi kan tenke oss nå er: Kan vi finne andre normerte vektorrom der elementene er L -integrerbare funksjoner? Ja det er klart vi kan. Vi skal se på en klasse av disse som er mye brukt i analysen.

Per definisjon sa vi at en funksjon f er integrerbar hvis og bare hvis $\int |f| dm$ er definert og endelig, vi kalte denne mengden for \mathcal{L}^1 . Det var sikkert noen som tenkte – hvorfor i all verden skal det ett-tallet være med? Nå skal vi se på grunnen til dette. Vi sier nå at en målbar funksjon f er med i \mathcal{L}^2 hvis og bare hvis $\int |f|^2 dm$ er definert og endelig. På samme måte som i sted sier vi at to funksjoner i \mathcal{L}^2 er like hvis de like nesten overalt. Dermed dukker det opp et nytt normert vektorrom L^2 , med norm $\|\cdot\|_2$. En funksjon $f \in L^2$ har norm

$$\|f\|_2 = \left(\int |f|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Det kan vises at også dette rommet er komplett. L^2 -rommet har endel spesielle egenskaper. L^2 er et Hilbertrom. Navnet kommer fra den tyske matematikeren David Hilbert. Det er ikke vanskelig å skrive en hel bok om egenskapene til Hilbertrom, men vi har ikke muligheten til å gå i dybden på dette her.

Vi skal prøve å fortsette tankerekken vi har startet for å konstruere flere normerte vektorrom. På samme måte som over kan vi konstruere et L^p -rom, med $p = 1, 2, \dots$. Vi sier at en funksjon $f \in L^p$ har norm

$$(7) \quad \|f\|_p = \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Det er ikke så enkelt å vise at (7) definerer en norm for alle p . De tre første punktene i Definisjon 6.1 er ganske greie. Problemet ligger i å vise punkt fire; «trekantulikheten». Det er en setning som blir kalt «Minkowskis ulikhet» som ordner dette problemet.

TEOREM 6.6 (Minkowskis ulikhet). *For alle $p \geq 1$, $f, g \in L^p$ så er*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Nøkkelen i dette beviset er en kjent setning som kalles «Hölders ulikhet».

TEOREM 6.7 (Hölders ulikhet). *Hvis $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$ og $f \in L^p$, $g \in L^q$, så er $fg \in L^1$ og*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Vi skal prøve å strekke definisjonen av L^p -rom helt til $p = \infty$, men før vi er klare for dette trenger vi en ny definisjon.

DEFINISJON 6.8. Essensielt supremum til en målbar reell funksjon f , defineres til å være

$$\text{ess sup } f = \inf \{c : |f| \leq c \text{ n.o.}\}.$$

Vi kan si dette med ord som at essensielt supremum til f er ikke noe annet enn supremum til f , eventuelt bortsett fra på en nullmengde. Da er vi klare for definisjonen av L^∞ .

DEFINISJON 6.9. En målbar funksjon f som oppfyller at $\text{ess sup } f < \infty$ blir sagt å være *essensielt begrenset* og mengden av alle essensielt begrensede funksjoner er L^∞ med normen $\|f\|_\infty = \text{ess sup } f$.

Det viser seg faktisk at alle L^p -rommene ($1 \leq p \leq \infty$) er komplette normerte vektorrom – altså Banachrom. Vi skal nå se at L^1 er det største av disse rommene, og L^∞ er det rommet som inneholder færrest funksjoner.

TEOREM 6.10. Hvis E har endelig Lebesguemål, så er $L^q(E) \subset L^p(E)$ når $1 \leq p \leq q \leq \infty$ og $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ for alle $f \in (L^p(E) \cap L^q(E))$.

Vi kan tenke på at dette kommer av at det er vanskeligere å konvergere i sup-norm enn i L^1 -norm. Hvis vi ser litt nøyere på L^∞ ser vi kanskje at konvergenen i dette rommet rett og slett er uniform konvergens nesten overalt. Vi skal nå se et argument som tilsier at L^∞ er en fornuftig «fortsettelse» av L^p , $p = 1, 2, \dots$. Det er nemlig slik at

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

for alle $f \in L^\infty$. Husk at Teorem 6.10 gir oss at $f \in L^\infty \Rightarrow f \in L^p$ for alle $p = 1, 2, \dots$

For de som ønsker å fordype seg mer i matematikk er et kurs i funksjonalanalyse obligatorisk. Innenfor funksjonalanalysen kan en lage mye fin teori rundt L^p -rommene, og spesielt fungerer disse som veldig fine hjelpemidler for å eksemplifisere meget abstrakte matematiske ideer. Denne oppgaven hadde sansynligvis ekspandert litt for fort hvis jeg skulle prøvd å belyse deler av denne teorien også. Vi beveger oss derfor videre for å se på forskjeller og likheter mellom Riemanns- og Lebesgues teori.

7. Sammenlikning av R- og L-integralet

Jeg har bestemt meg for å bruke sammenlikning med R-integralet til å gi et konseptuelt bilde av L-integralet. Vi har allerede sett på noen svakheter til R-integralet. Nå skal vi se hvordan Lebesgue fikser endel av disse. Vi skal se på forskjellene til de to teoriene. Vi tar for oss en og en, beskriver, diskuterer og eksemplifiserer.

Det første vi skal se på er den fundamentale forskjellen i oppbygningen av integralene. Begge integralene bygger på et geometrisk bilde, der formålet er å bestemme arealer. R-integralet baserer seg på å lage en partisjon av definisjonsmengden til funksjonen. Ved å gjøre partisjonen «fin» nok kan vi finne arealet ved å se på grenseverdien til summen av rektangler som strekker seg fra x -aksen og opp til funksjonen (se Kapittel 2.2 for detaljer).

L-integralet lager en partisjon av verdimgden. Denne partisjonen induserer en partisjon av definisjonsmengden ved å bruke inversbilder til funksjonen. Denne induserte partisjonen trenger som regel ikke bestå av bare intervaller slik som i Riemanns tilfelle. Dette er mulig å gjøre fordi Lebesgue utviklet en måte å måle størrelsen til veldig «rare» delmengder av reelle tall. Det som er den store fordel til L-integralet rent definisjonsmessig er ryddigheten til partisjonen av x -aksen.

Hva mener jeg med ryddigheten? La oss tenke oss at vi skal telle endel penger som ligger i en mørk sekk. En analogi blir da at med R-strategien plukker vi opp pengesedlene en etter en, og summerer etterhvert. Ved bruk av L-strategien plukker vi opp alle pengene først, sorterer i bunker med lik valør for deretter å summere. Sannsynligvis er de fleste enige i at det er enklest å bruke den siste metoden, men begge gir jo rett svar. Vi kan da tenke oss at når funksjonene blir svært diskontinuerlige og komplekse så klarer vi ikke å få dette til uten å bruke L-strategien. Jeg presiserer at dette bare er en måte å tenke på for å ha et kognitivt bilde av forskjellen. Dette blir ikke eksakt matematisk. Ideen til denne analogien er hentet fra [4].

Lebesgues måte å definere integralet på gjør at det er flere funksjoner som kan integreres. Det er også slik at alle R-integrerbare funksjoner er L-integrerbare og integralene er de samme. Et eksempel på en funksjon som ikke kan R-integreres, men som likevel kan L-integreres er $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}$. Det er selvfølgelig veldig bra at vi nå har fått en teori som kan takle flere funksjoner, men det er likevel ikke dette som er den store styrken. Denne teorien gjør at mange teoremer gjelder under svakere forutsetninger enn før, og vi har fått mange nye kraftige resultater. Vi har også fått en bredere forståelse av Riemanns teori. Det var jo f.eks ikke før Lebesgue vi kunne si at en funksjon er R-integrerbar hvis og bare hvis den er kontinuerlig nesten overalt.

7.1. Konvergensteoremer. Vi husker fra tidligere i kapitlet at den punktvis grensen til en følge av målbare funksjoner er målbar. Dette kan ikke overføres til Riemanns teori der en kunne risikere at denne grensen ikke kunne integreres. Jeg repeterer Eksempel 2.3.

EKSEMPEL 7.1. La $f_n(x) = 1_{\mathbb{Q}_n}$, der $\mathbb{Q}_n = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, (q_i) er en opprøsting av de rasjonale tall. Det er nå klart at $f_n \in \mathcal{R}$ siden det bare er endelig mange steder $f_n \neq 0$. Vi ser at $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1_{\mathbb{Q}} \notin \mathcal{R}$.

For at slike problemer skal unngås må vi til med et så sterkt krav som uniform konvergens eller bruke det begrensede konvergensteoremet. Problemet med det begrensede konvergensteoremet er at vi må anta at grensefunksjonen er integrerbar. Vi snakket tidligere om hvor viktig det var med konvergensteorier i analyse. Med dette mente vi: under hvilke forutsetninger kan vi være sikre på at hvis (f_n) er en konvergent følge av integrerbare funksjoner så er f integrerbar og

$$(8) \quad \lim \int f_n = \int \lim f_n$$

gjelder? Selv ikke med Lebesgues integral kan vi si alltid, men vi klarer oss likevel med mye svakere krav enn uniform konvergens. Det første konvergensteoremet vi så på var LMK. I dette tilfellet måtte følge konvergere monotont opp mot sin grensefunksjon. Det at konvergens er punktvis gjør likevel at dette er et svakere krav enn uniform konvergens. Vi har jo ennå til gode å se at vi trenger disse tilleggskravene for at (8) skal virke. Kanskje er det noen som har lyst til å se på et eksempel der det går galt?

EKSEMPEL 7.2. La $f_n(x) = n1_{[0, \frac{1}{n}]}$, $x \in [0, 1]$ være en følge av funksjoner. Vi ser at $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f = 0$. Siden $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ for alle n så har vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Vi har også sett eksempel på et konvergensteorem som ikke trenger at følga konvergerer monotont. Jeg snakker selvfølgelig om LDK. Hvis vi klarer å finne en integrerbar funksjon som er større enn tallverdien til alle funksjonene i følga (selvfølgelig kan vi si nesten overalt hvis vi vil), så vil grensefunksjonen være integrerbar og Likning (8) gjelder.

7.2. Fundamentalteoremet. Vårt øverste ønske i forbindelse med fundamentalteoremet er at en derivert funksjon alltid kan integreres tilbake til den opprinnelige funksjonen. Vi kaller dette å kunne invertere den deriverte. Dette er dessverre ikke tilfelle verken for R- eller L-integralet. Jeg minner dere på R-integralets fundamentalteorem.

TEOREM 7.3 (Fundamentalteoremet med R-integralet). *Anta F er derivert på intervallet $[a, b]$. Hvis $F' = f$ er R-integrerbar på $[a, b]$, så er*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Det er ganske kjedelig at det finnes funksjoner med begrenset derivert som ikke er R-integrerbar. Denne feilen klarer L-integralet å hamle opp med.

TEOREM 7.4 (Fundamentalteoremet med L-integralet). *Anta F er derivert på intervallet $[a, b]$. Hvis $F' = f$ er begrenset på $[a, b]$, så er f L-integrerbar på $[a, b]$, og*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Vi ser at ved bruk av L-teorien klarer vi å invertere alle begrensede deriverte (se Seksjon 5.3.1 for en konsekvens av dette). Denne forbedringen av fundamentalteoremet er ikke noen kjemperevolusjon som vi skal bruke noe særlig tid på. I Kapittel 5.4 skal vi se litt på den teorien som klarer å invertere alle deriverte.

7.3. Uekte integraler. Vi husker sikkert at uekte R-integraler ikke ble regnet som medlemmer av de R-integrerbare funksjonene \mathcal{R} . Vi skal nå se at mange av disse uekte integralene er L-integrerbare, men ikke alle. La oss se på uekte integraler der integrasjonsintervallet er ubegrenset. Det vil si integraler på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Det er veldig mange av disse funksjonene som er L-integrerbare (nøyaktig alle som ligger i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$). Vi husker at en funksjon f er integrerbar hvis og bare hvis $|f|$ er integrerbar. Det kan hende at et uekte integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergerer, mens $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ divergerer. I disse tilfellene sier vi at det uekte

integralet konvergerer ikke-absolutt. Her følger et eksempel som illustrerer dette.

EKSEMPEL 7.5. La $f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n+1} & \text{hvis } x \in [n, n+1), n \geq 0 \\ 0 & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$. Det uekte

R-integralet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ kan da skrives som $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ som helt klart konvergerer siden $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$. Vi har likevel at $f \notin \mathcal{L}^1$ siden $\int_{\mathbb{R}} |f| dm = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, som divergerer.

Følgende resultat gjelder om sammenhengen mellom uekte R-integraler og L-integraler:

TEOREM 7.6. *Hvis $f \geq 0$ og det øvre uekte R-integralet til f finnes, så vil alltid L-integralet $\int_{\mathbb{R}} f dm$ eksistere og være likt det uekte integralet.*

Det øvre uekte integralet betyr bare at vi velger supremumsverdien til f over hvert delintervall i partisjonen.

En fordel med L-integralet fremfor R-integralet som vi ikke har nevnt før nå er at integrasjon over ubegrensede mengder ikke trenger noen ekstra tilpassning. Hvordan virker dette hvis funksjonen vi skal integrere er ubegrenset? Alt blir helt tilsvarende (hvis konvergens er absolutt så er $f \in \mathcal{L}^1$, hvis konvergens er ikke-absolutt så er $f \notin \mathcal{L}^1$). Det finnes altså ingenting som heter uekte L-integraler!

7.4. Normerte vektorrom. Dere husker sikkert at vi har konstruert normerte vektorrom der elementene var både R-integrerbare funksjoner og L-integrerbare funksjoner, vi kalte disse for h.h.v \mathcal{R}^1 og L^1 . Disse rommene hadde normen $\|f\| = \int |f| dx$ for \mathcal{R}^1 og $\|f\|_1 = \int |f| dm$ for L^1 . Forskjellen mellom disse rommene er stor. Det er nemlig slik at L^1 er komplett, mens \mathcal{R}^1 ikke er det. Dette virker kanskje ikke som en veldig stor forskjell, men jeg kan forsikre dere om at det er det.

Forskjellen på det å være komplett eller ikke være det, er som forskjellen mellom tallkroppene \mathbb{Q} og \mathbb{R} . Aksiomene som disse tallkroppene bygger på er helt like bortsett fra kompletthetsaksiomet som gjelder i \mathbb{R} . Enkelt forklart så garanterer kompletthet oss at hvis en følge kommer nærmere og og nærmere en grense, så ligger også denne grensen i mengden. Det er ikke vanskelig å vise til en rasjonal tallfølge som konvergerer til et irrasjonalt tall (f.eks $\sqrt{2}$).

Vi har tidligere sagt at analyse i stor grad er utforskning av grense og konvergensteori. Det at vi nå har etablert kompletthet i dette «integrasjonsrommet» gjør at vi har store forutsetninger for å etablere en solid grense og konvergensteori her. Det er selvfølgelig gjort mye arbeid på dette området.

7.5. Generalisering av teorien. Riemanns teori er basert på at partisjoneringen av et intervall gjøres på en slik måte at hver del i partisjonen er et intervall. Målingen av størrelsen på slike mengder ble gjort ved å finne lengden til en endelig union av intervaller. Det var vanskelig å tenke på generaliseringer av teorien hvis en hadde oppfatningen om at dette var den eneste fornuftige måten å måle på. Lebesgue kom på begynnelsen av 1900-tallet

med en generalisering av målemetoden. Dette gjorde ganske raskt at tanken om andre måter å måle på også kunne være mulig. Målteorien var startet for alvor.

Under følger et punktvis sammendrag av forskjellene mellom R og L-teorien.

- L-integralet partisjonerer verd mengden istedenfor definisjonsmengden.
- L-integralet takler å integrere over mer komplekse mengder enn endelige unioner av intervaller.
- L-teorien belyser R-teorien på en klarere måte.
- L-integralet kan integrere flere funksjoner.
- Grensen til konvergente følger av målbare funksjoner er selv målbar.
- L-integralet gir mye sterkere konvergensteoremer.
- L-integralet kan integrere over ubegrensede mengder uten å modifisere teorien (altså ingen uekte integraler).
- Det normerte vektorrommet L^1 er komplett (og L^p -rommene er komplette).

Nå kan vi jo spørre oss selv om hvorfor vi ikke alltid bare bruker Lebesgues teori, da denne er overlegen på alle punkter. Det er ikke helt sant, det er spesielt på et område at R-teorien er overlegen, og det er på kompleksiteten. Det er også slik at når vi skal integrere numerisk etterligner vi Riemanns metode. Vi må altså gjøre et valg av hvilken teori vi ønsker å bruke ved å se på hva vi trenger. Jeg ønsker å sitere Körner i [15]:

Hvis vi bare trenger å gå 50 meter, gir det ingen mening å kjøpe en bil.

I det neste kapitlet skal vi se hvordan en mer generell målteori fungerer.

Mer generell mål og integrasjonsteori

Dette kapitlet er ment som å gi en liten smakebit av hva Lebesgues teori førte med seg i forhold til generaliseringer. Innholdet her er bare et lite utvalg av teorien. Begrepene blir ikke diskutert i detalj, men forhåpentligvis på en måte som gir et bilde av potensialet. Legg merke til hvordan nesten alle generaliseringene blir gjort på helt samme måte som Lebesgues teori i forrige Kapittel.

1. Generell mål- og integrasjonsteori

Frem til nå har vi fokusert på Lebesguemål som den eneste rette måten å gjøre målinger på. Det viser seg ofte i matematikk at det kan være lettere å finne kraftige resultater hvis en befinner seg på et mer generelt nivå. Dette gjelder også innenfor målteori. La oss nå tenke at vi har blanke ark igjen, og får spørsmålet: Hva trenger vi for å etablere en teori om måling av mengder?

Det første vi trenger er en mengde å måle på. Frem til nå har dette vært tallkroppen \mathbb{R} . Nå skal vi være mye mer generelle, så vi kaller bare denne «hovedmengden» for X . I forbindelse med L-teorien var det noen mengder som kunne måles og noen som ikke kunne måles. Vi kalte samlingen av de mengdene som kunne måles for en σ -algebra (\mathcal{M}). Vi holder oss i den samme gata og skriver denne generelle σ -algebraen som Σ . Til slutt hadde vi en målefunksjon, som i Lebesgues teori ble kalt for m . Denne kaller vi nå for μ . La oss nå kalle trippet (X, Σ, μ) for et *målrom*. Hvis vi bare har en mengde X og en σ -algebra Σ , så sier vi at paret (X, Σ) er et *målbar rom*.

La oss nå se hva et mål egentlig er for noe.

DEFINISJON 1.1. Et mål μ på et målbar rom (X, Σ) er en funksjon $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ som oppfyller følgende:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $(E_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma$ parvis disjunkte for $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i)$.

Anta vi nå skal prøve å integrere funksjoner som lever på dette målrommet. Hva betyr det at en funksjon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ er målbar? Dette blir ganske analogt med Lebesgues tilfelle. Funksjonen f er *målbar* hvis $f^{-1}(J) \in \Sigma$ for ethvert åpent intervall $J \subset \mathbb{R}$. En konsekvens av dette er at $f^{-1}(S) \in \Sigma$ for enhver Borelmengde $S \subset \mathbb{R}$. Dette blir ofte brukt som en definisjon på målbarhet [23]. Noen ganger hender det at vi skriver at en

funksjon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ er Σ -målbar hvis det ikke går helt klart frem hvilken σ -algebra vi snakker om.

Definisjonen av integralet til en funksjon som er definert på et generelt målrom er helt analogt med Lebesgues tilfelle. Vi sier at en funksjon ϕ er en *simpel funksjon* på X hvis

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{S_i}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

der $a_i \in \mathbb{R}$ og $S_i \in \Sigma$ disjunkte. Integralet til ϕ med hensyn på målet μ er definert som

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(S_i).$$

På samme måte som tidligere sier vi at integralet til en ikke-negativ målbar funksjon f er definert som

$$(9) \quad \int f d\mu = \sup \left\{ \int \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simpel} \right\}.$$

Vi lar nå f^+ og f^- være definert som i forrige Kapittel. Da sier vi at en funksjon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ er *integrerbar* hvis f^+ og f^- begge er målbare med endelig integral, eller ekvivalent, hvis

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Vi skriver da at $f \in L^1(X, \mu)$ eller som vanlig bare L^1 (når målrommet er kjent). Legg merke til hvordan jeg sier L^1 og ikke \mathcal{L}^1 . Dette er selvfølgelig fordi det normerte vektorrommet blir helt analogt som før. Det kommer kanskje ikke som noen overraskelse at nesten alt av teori som gjelder i Lebesgues tilfelle, også gjelder i det generaliserte tilfellet.

Vi har nå sett at det er mulig å bruke forskjellige mål. I seksjonene som følger skal vi prøve å gi eksempler på slike mål. Vi skal faktisk klare å karakterisere målene som finnes på et målrom. La oss først se hvordan vi kan bygge opp et målrom hvis vi bare har noen små antagelser å bygge på.

2. Hahn-Caratheodory-utvidelse

I denne delen skal vi se på et meget flott resultat som gir oss muligheten til å bygge opp et målrom hvis vi starter med en mengde X , en *algebra* \mathcal{A} og et *pre-mål* μ_0 . Hva er en algebra? Jeg minner dere først på at en σ -algebra er en familie av mengder som inneholder X og som er lukket under komplementer og tellbare unioner. Som regel er det slik at hvis det står sigma (σ) foran et begrep, betyr det at noe gjelder tellbart. Altså er en σ -algebra lukket under tellbare unioner. En algebra er det samme som en σ -algebra, bortsett fra at den bare kreves lukket under endelige unioner. Vi sier at en σ -algebra Σ er *generert* av en algebra \mathcal{A} hvis Σ er den minste σ -algebraen som inneholder \mathcal{A} .

Et eksempel på en algebra er mengden av alle endelige unioner av begrensede intervaller. Det er enkelt å se at denne ikke er lukket under tellbare unioner

siden $\bigcup_n(-n, n) = \mathbb{R}$, som ikke kan dekkes av et endelig antall begrensede intervaller.

Et premål på algebraen \mathcal{A} er en funksjon $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ som oppfyller at

- (1) $\mu_0(\emptyset) = 0$,
- (2) $(A_i) \subset \mathcal{A}$ tellbar og A_i disjunkte $\Rightarrow \mu_0\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu_0(A_i)$.

Krav to sier egentlig at hvis vi finner et tellbart antall mengder som ligger i algebraen så skal premålet være tellbart additivt for denne familien. Et eksempel på et premål er lengdemålet l til intervaller,

$$l(a, b) = b - a.$$

Nå skal vi bruke premålet for å konstruere et ytre mål.

DEFINISJON 2.1. Vi sier at funksjonen $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$ er et *ytre mål* når

$$\mu^*(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i), A_i \in \mathcal{A} \text{ og } S \subset \bigcup_i A_i \right\}.$$

Vi sier at en mengde $E \subset X$ er *målbar* hvis vi for alle $A \subset X$ har at

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Da er vi klare for dette store resultatet til Hans Hahn og Constantin Caratheodory (Dette resultatet kan du finne på en mer generell form i [23]).

TEOREM 2.2. [Hahn-Caratheodory] Anta at vi har en mengde X , en algebra \mathcal{A} av delmengder av X og et premål $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

Hvis Σ er mengden av de målbare mengdene så er $\mu = \mu^*|_{\Sigma}$ et komplett mål på Σ . Hvis $\mu(S) < \infty$ for alle $S \in \Sigma$ så er dette målet entydig.

Nå skal vi se noen bruksområder til dette sterke resultatet.

EKSEMPEL 2.3 (Alternativ konstruksjon av Lebesguemålet m). Vi tenker oss algebraen $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{n=1}^k I_n \right\}$, der $I_n = (a_n, b_n)$ er et begrenset intervall i \mathbb{R} . Algebraen er altså samlingen av alle endelige unioner av begrensede intervaller i \mathbb{R} . La premålet l være definert ved at $l((a, b)) = b - a$. Det ytre målet μ^* blir nå bare det samme som Lebesgue-ytre målet m^* . Siden \mathcal{M} er familien av de Lebesgue-målbare mengdene, så må m være det komplette målet vi kommer frem til. Dette målet er faktisk unikt selv om m ikke er et endelig mål på alle delmengder av \mathcal{M} . Det er faktisk slik at målet trenger bare å være σ -endelig for å være sikker på å få et unikt mål.

DEFINISJON 2.4. Et mål μ er σ -endelig på det målbare rommet (X, Σ) hvis det finnes en tellbar familie (E_i) slik at

$$X = \bigcup_i E_i, \quad E_i \in \Sigma, \quad \mu(E_i) < \infty.$$

Nå skal vi se at Hahn-Caratheodory er en kjempefin måte å utvide et mål fra en dimensjon til flere dimensjoner.

2.1. Produktmål. La oss nå se kort på hvordan vi kan bruke Hahn-Caratheodory-utvidelse (H-C-utvidelse) til å utvide definisjonen av Lebesguemålet til to dimensjoner (Utvidelsen til n dimensjoner følger helt analogt). Vi tar utgangspunkt i at en endelig union av rektangler med endelig areal er en algebra av delmengder av \mathbb{R}^2 (Dette er ikke vanskelig å finne ut for den som ønsker det). Vi tenker at et rektangel R er på formen $I_1 \times I_2$, der I_1, I_2 er intervaller. Et premål som virker på denne algebraen er arealfunksjonen $a(R) = l(I_1)l(I_2)$.

Da er vi klare for å definere det ytre målet. La $E \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_i a(R_i), E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\}.$$

Nå kan vi bruke Teorem 2.2 til å si at hvis \mathcal{M}^2 er familien av de målbare mengdene, så er $m^2 = \mu^*|_{\mathcal{M}^2}$ et komplett mål. Det er vanlig å kalle σ -algebraen generert av rektanglene for \mathcal{B}^2 (Borel sigma-algebraen i to dimensjoner) [5]. Nå har vi altså konstruert målrommet $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}^2, m^2)$. Dette kan selvfølgelig utvides til tre dimensjoner ved å se på prizmer istedenfor rektangler. Videre til n dimensjoner blir da en lek. Det kan være morsomt å nevne at når vi kommer til tre dimensjoner kan vi risikere at delmengdene er ganske spesielle. Det finnes et paradoks som heter *Banach-Tarski paradokset* som sier følgende om delmengder av rommet:

En kule med volum 1 kan deles inn i endelig mange biter og settes sammen på en annen måte slik at det blir to kuler som hver har volum 1.

Når vi tenker på dette, virker det enda mer fornuftig å passe på at delmengdene skal være målbare slik at dette ikke kan skje!

2.2. Lebesgue-Stieltjes integral på \mathbb{R} . I Kapittel 2 så vi litt på R-S integralet. Nå skal vi se hvordan vi kan bruke H-C utvidelse til å generalisere dette til et Lebesgue-Stieltjes integral (L-S-integralet).

Det første vi skal gjøre er å bruke H-C utvidelse til å lage et Lebesgue-Stieltjes målrom $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, m_F)$, deretter skal vi definere et integral på dette målrommet. Vi tar utgangspunkt i den samme algebraen som da vi konstruerte Lebesguemålet, nemlig endelige unioner av intervaller. Premålet vi skal bruke er en generalisering av lengdefunksjonen l . Vi tenker oss en opptil monoton, høyrekontinuerlig funksjon F . Disse funksjonene finnes det mange av. En stor klasse er alle funksjoner på formen $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Vi sier at premålet l_F er definert ved

$$l_F((a, b)) = F(b) - F(a).$$

Dette gir oss følgende ytre mål:

$$m_F^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l_F(I_n), E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

for alle $E \subset \mathbb{R}$. Vi kaller familien av de målbare mengdene for Lebesgue-Stieltjes σ -algebraen med hensyn på F og skriver \mathcal{M}_F . Vi kaller målet $m_F = m_F^*|_{\mathcal{M}_F}$ for Lebesgue-Stieltjes mål med hensyn på F .

Hvis $f : (\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, m_F) \rightarrow \mathbb{R}$ er en målbar funksjon (se hvordan dette er definert over), så kan vi se på følgende integral:

$$\int f dm_F$$

som er definert på den naturlige måten (se Likning (9)). I Riemanns tilfelle ville vi ha skrevet $\int f dF(x)$. Vi har akkurat som før at hvis $F(x) = x$ så er $m_F = m$ og $\mathcal{M}_F = \mathcal{M}$.

La oss nå se et eksempel på hvordan generell målteori blir brukt i praksis innenfor sannsynlighetsteorien.

3. Integral i sannsynlighetsteori

I 1933 etablerte Andrei Kolmogorov et målteoretisk syn på sannsynlighetsteorien. Det er i hovedsak dette verktøyet som blir brukt i moderne sannsynlighetsteori den dag i dag. I denne delen skal jeg gi et bilde av hvordan målteori er implementert i sannsynlighetsregning. Jeg fokuserer på et enkelt eksempel som omhandler kast av en rettferdig terning.

I terningkast-eksemplet brukes en diskret sannsynlighetsfordeling. Til slutt skal jeg forklare hvorfor R-integralet ikke kan brukes til en enhetlig fremstilling av sannsynlighetsteori for diskrete og kontinuerlige stokastiske variabler, mens L-integralet takler dette greit.

Vi har tidligere snakket om målrom. Nå skal vi se at et sannsynlighetsrom er nesten det samme.

DEFINISJON 3.1. Vi kaller målrommet (Ω, Σ, μ) for et *sannsynlighetsrom* hvis $\mu(\Omega) = 1$.

3.1. Eksempel med terningkast. Vi tenker oss kast med en rettferdig terning med seks sider.

Utfallsrommet Ω vil i dette eksemplet være $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. σ -algebraen, $\Sigma = P(\Omega)$ og sannsynlighetsmålet μ , der $\mu(\omega) = \frac{1}{6}$ for alle $\omega \in \Omega$, danner sannsynlighetsrommet (Ω, Σ, μ) .

Vi induserer nå en sannsynlighetsfordeling på \mathbb{R} ved hjelp av en stokastisk variabel $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, som er definert ved at $X(\omega) = \omega$ for alle $\omega \in \Omega$. Nå kan vi konstruere et sannsynlighetsmål μ_x som er definert på delmengder av \mathbb{R} . Dette gjøres på følgende måte:

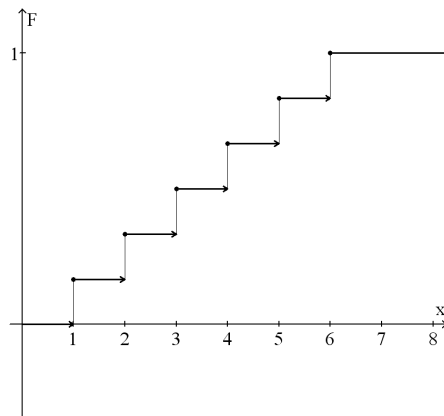
$$\mu_x(E) = \mu(X^{-1}(E)), E \subset \mathbb{R}.$$

Sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen X kan nå bli uttrykt unikt ved hjelp av den kumulative fordelingsfunksjonen $F(x)$ som er definert ved

$$F(x) = \mu_x(-\infty, x] = \mu_x[X \leq x]$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Se på grafen til $F(x)$ i Figur 1 og legg spesielt merke til at den er høyrekontinuerlig og monotont økende.



FIGUR 1. Den kummulative sannsynlighetsfordelingen $F(x)$

Når vi har med en diskret fordeling å gjøre, så kan vi finne sannsynligheten til bestemte punkter ved hjelp av følgende formel:

$$\mu(X = x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t).$$

Denne formelen gjelder selvfølgelig også i en kontinuerlig modell, der $\mu(X = x) = 0$. En annen generell formel som gjelder uavhengig av om den stokastiske variabelen er diskret eller kontinuerlig er forventningsformelen:

$$E(X) = \int_{\Omega} X d\mu.$$

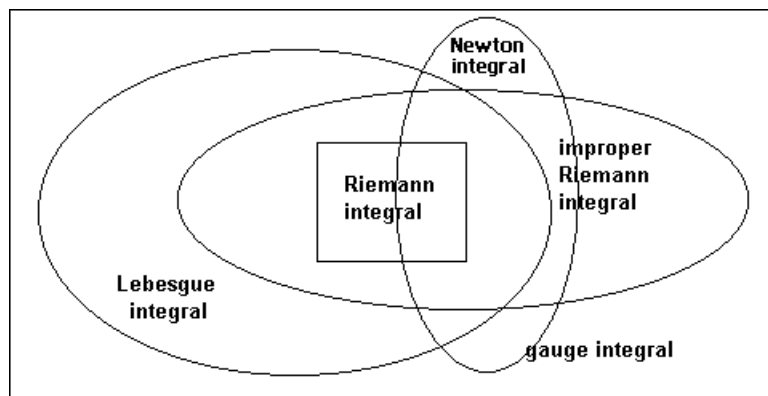
I sannsynlighetsregning er vi vant til et begrep som *tetthetsfunksjonen* til en stokastisk variabel. Dette er en funksjon f , der $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ og $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, $F(x)$ er fortsatt den kummulative fordelingsfunksjonen. Denne tetthetsfunksjonen finnes hvis og bare hvis F er absolutt kontinuerlig. Her er vi ved kjernen til problemet ved R-integralet. Det finnes altså kontinuerlige kummulative sannsynlighetsfunksjoner som ikke har noen tetthetsfunksjon. Dette er en konsekvens av problemet med fundamentalteoremet som vi så i Kapittel 1.3. Nemlig det at det finnes funksjoner med begrensede deriverte som ikke er R-integrerbare.

Når vi har at F er absolutt kontinuerlig kan vi bruke Riemann-integralet til å regne ut forventningen på følgende måte:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Vi vet at L-integralet kan invertere alle begrensede deriverte. Dette medfører at hvis L-integralet blir brukt istedenfor R-integralet, får vi en teori som klarer å fremstille diskrete og kontinuerlige sannsynlighetsmodeller på en enhetlig måte.

Det har gått tydelig frem at L-integralet er ganske mye sterkere enn R-integralet. I den neste seksjonen skal vi likevel se at en tilsynelatende «liten» forandring av definisjonen til R-integralet kan medføre enorme konsekvenser.



FIGUR 2. Integraloversikt

4. Det generaliserte Riemann integralet

Det ville ikke være naturlig å skrive en masteroppgave om integral og integrasjon uten å nevne det nyeste og mest generelle integralet. Det ville sannsynligvis vært en hel oppgave i seg selv å skrive utfyllende om denne teorien. Vi skal bare se hvordan dette «nye» integralet er definert, og prøve å forklare på en heuristisk måte hvorfor vi klarer å integrere flere funksjoner enn med L-integralet.

I 1912 utviklet Arnaud Denjoy et integral som kunne invertere alle deriverte funksjoner. Dette var en generalisering av N, R og L-integralet (se Figur 2). I 1914 klarte Oskar Perron det samme, men på en helt annen måte. Det ble vist en stund senere at disse integralene var ekvivalente. Basisen for integralene til Denjoy og Perron var en relativt komplisert videreutvikling av L-integralet [8].

Den tsjekkiske matematikeren Jaroslav Kurzveil introduserte et nytt integral i 1957. Dette integralet ble videreutviklet rundt 1960 sammen med Ralph Henstock. Det spesielle med dette integralet var at det var en generalisering av Riemanns definisjon og likevel ekvivalent med Denjoy og Perrons integral [2]. Andre vanlige navn på det generaliserte Riemann integralet er: «Denjoy-Perron integralet», «Gauge integralet» og «Kurzveil-Henstock integralet».

Vi trenger nå en liten introduksjon til Riemanns metode å beskrive R-integralet på. Da må vi først vite hva en tagget partisjon er.

DEFINISJON 4.1. En *tagget partisjon* av et intervall $[a, b]$ er en partisjon $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ der det finnes en *tagg* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$.

Hvis vi har en tagget partisjon skriver vi en prikk over partisjonsnavnet, f.eks $\dot{\mathcal{P}}$. For hver partisjon \mathcal{P} finnes altså uendelig mange taggede partisjoner $\dot{\mathcal{P}}$, siden vi kan velge uendelig mange tagger i hvert intervall. Under følger definisjonen på en Riemann sum.

DEFINISJON 4.2. Anta at vi har en funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og en tagget partisjon $\dot{\mathcal{P}}$ av intervallet $[a, b]$ definert som over. Da blir summen

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

kalt for *Riemannsummen til f korresponderende til den taggedde partisjonen $\dot{\mathcal{P}}$* .

Hvis det er slik at grenseverdien til Riemannsummene eksisterer når partisjonen blir finere og finere, sier vi at denne grenseverdien er R-integralet til funksjonen f . Det er viktig å presisere at denne grenseverdien er helt uavhengig av hvilke tagger man bruker i partisjonen. Partisjonen vi bruker i forbindelse med Riemann-integralet tar ingen hensyn til om funksjonen varierer mye eller lite over hvert delintervall. Nå skal vi se på en funksjon som skal hjelpe oss med å ta dette hensynet. Her kommer definisjonen på en funksjon som blir kalt for en «målestokk» (et slags mål som virker på punkter i et intervall).

DEFINISJON 4.3. En funksjon $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ blir sagt å være en *målestokk* på $[a, b]$ hvis $\delta(t) > 0$ for alle $t \in [a, b]$. Vi sier at intervallet rundt $t \in [a, b]$ som er *kontrollert av målestokken δ* er intervallet $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$.

La oss se på hvilken måte den taggedde partisjonen kan spille sammen med en slik målestokk.

DEFINISJON 4.4. La $\dot{\mathcal{P}} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, der $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ være en tagget partisjon av intervallet $[a, b]$. Hvis δ er en målestokk på $[a, b]$, så sier vi at $\dot{\mathcal{P}}$ er *δ -fin* hvis

$$[x_{i-1}, x_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad \text{for alle } i = 1, 2, \dots, n;$$

dette betyr at ethvert delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ er innholdt i intervallet som er kontrollert av målestokken rundt punktet t_i .

La oss se på et enkelt eksempel.

EKSEMPEL 4.5. La målestokken $\delta : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ være definert ved $\delta(t) = \frac{1}{2t}$ for alle $t \in [1, 2]$. Anta nå at vi har en tagget partisjon av intervallet $[1, 2]$. Først tenker vi at denne partisjonen består av følgende to intervaller: $[1, \frac{3}{2}]$ og $[\frac{3}{2}, 2]$, der taggen i det første intervallet er 1 og taggen i det andre intervallet er 2. Dette er ikke en δ -fin partisjon siden $\delta(2) = \frac{1}{4}$ og $[\frac{3}{2}, 2]$ ikke ligger i intervallet $[2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}]$.

Hvis derimot partisjonen består av intervallene $[1, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, \frac{11}{6}]$ og $[\frac{11}{6}, 2]$, med h.h.v. taggene 1, $\frac{3}{2}$ og 2 så vil dette være en δ -fin partisjon fordi $[1, \frac{3}{2}] \subset [1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}]$, $[\frac{3}{2}, \frac{11}{6}] \subset [\frac{3}{2} - \frac{1}{3}, \frac{3}{2} + \frac{1}{3}]$ og $[\frac{11}{6}, 2] \subset [2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}]$.

Det er klart at vi bare kan snakke om δ -fine partisjoner hvis partisjonen er tagget. Derfor trenger vi ikke ha med at partisjonen er tagget hvis vi snakker om δ -fine partisjoner.

Hvis $[a, b]$ er et intervall i \mathbb{R} og δ er en målestokk på $[a, b]$, så kan vi tenke på dette som at ethvert punkt $t \in [a, b]$ kontrollerer (eller har innflytelse på) alle punktene i intervallet $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$ [2]. Noen punkter kontrollerer relativt store intervall, mens andre punkter kontrollerer relativt små intervall.

Matematikeren Pierre Cousin viste på slutten av 1800-tallet at det alltid eksisterer en δ -fin partisjon.

TEOREM 4.6 (Cousins lemma). *Hvis $[a, b]$, er et lukket intervall i \mathbb{R} og δ er en målestokk på $[a, b]$, så eksisterer det alltid en partisjon av $[a, b]$ som er δ -fin.*

Dette teoremet er faktisk ekvivalent med kompletthetsaksiomet.

Nå ønsker jeg først å komme med en ny definisjon på R-integralet, for deretter å komme med definisjonen av det generaliserte R-integralet. Dette gjøres for lettere å kunne sammenlikne de to og se hvor liten forskjell det er på definisjonene.

DEFINISJON 4.7. En funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er *R-integrerbar* hvis det eksisterer et entydig tall $A \in \mathbb{R}$ slik at for alle $\epsilon > 0$ så eksisterer det et tall $\delta_\epsilon > 0$ slik at hvis $\dot{\mathcal{P}} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ er en tagget partisjon slik at $x_i - x_{i-1} < \delta_\epsilon$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$, så er

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq \epsilon.$$

Så ser vi på den nesten like definisjonen til det generaliserte R-integralet.

DEFINISJON 4.8. En funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er *generalisert R-integrerbar* hvis det eksisterer et entydig tall $B \in \mathbb{R}$ slik at for alle $\epsilon > 0$ så eksisterer det en målestokk δ_ϵ på $[a, b]$ slik at hvis $\dot{\mathcal{P}} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ er en tagget partisjon slik at $x_i - x_{i-1} < \delta_\epsilon(t_i)$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$, så er

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - B| \leq \epsilon.$$

Det finnes definisjoner som er litt enklere enn dette, men for å illustrere på hvilken måte det generaliserte R-integralet er en direkte generalisering av R-integralet tror jeg ikke det er noen bedre.

Det er ikke lett å se direkte at denne definisjonen av integralet skal være så fantastisk. Jeg skal heller ikke begrunne det noe mer enn å gi et eksempel. Vi husker at funksjonen $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}$ ikke var R-integrerbar, vi skal nå se at denne er generalisert R-integrerbar.

EKSEMPEL 4.9. La $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}$, $x \in [0, 1]$, altså den funksjonen som tar verdien 0 når x er irrasjonal og 1 når x er rasjonal. La mengden $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ være en oppramsing av de rasjonale tallene på intervallet $[0, 1]$ og $\epsilon > 0$. Vi definerer en målestokk δ_ϵ på følgende måte:

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} & \text{hvis } t = r_k \\ 1 & \text{hvis } t \text{ er irrasjonal} \end{cases}.$$

La nå $\dot{\mathcal{P}} = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ med tilhørende tagger t_i være en δ -fin partisjon av $[0, 1]$ (eksisterer p.g.a Teorem 4.6). Hvis taggen t_i er irrasjonal, så er $f(t_i) = 0$ og bidraget fra delintervall i til Riemann-summen er 0.

Anta nå at taggen t_i er rasjonal, da er $f(t_i) = 1$, men vi skal se at lengden til det tilhørende delintervallet er «lite». Hvis r_k er taggen som tilhører delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$, så er $[x_{i-1}, x_i] \subset [r_k - \delta_\epsilon(r_k), r_k + \delta_\epsilon(r_k)]$, slik at $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\epsilon(r_k) = \frac{\epsilon}{2^k}$. Vi kan nå konkludere med at hver rasjonal tagg r_k kan bidra med maksimalt $\frac{\epsilon}{2^k}$ til Riemann-summen $S(f, \dot{\mathcal{P}})$. Siden det bare er de rasjonale taggene som gir et positivt bidrag til Riemann-summen, har vi at

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Altså er funksjonen integrerbar og $\int_0^1 f = 0$.

Jeg minner igjen på at dette integralet kan invertere alle deriverte funksjoner. Det viser seg også at konvergensteoremene kan bli noe sterkere med denne integrasjonsmetoden. Det blir fortsatt gjort endel arbeid i forbindelse med konvergensteoremene til det generaliserte R-integralet [2]. Det er endel matematikere som mener dette integralet kan introduseres allerede på det første kalkuluskurset. Selvfølgelig da helt uten beviser. Fordelen med dette er at elevene kan ta i bruk mye sterkere resultater på et mye tidligere tidspunkt [2].

Litteratur

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus*, volume 1. Blaisdell Publishing Company, 1961.
- [2] Robert G Bartle. *Modern theory of integration*, volume 32. American mathematical society, 2001.
- [3] David M. Bressoud. How should we introduce integration? *The College Mathematics Journal*, 23(4):296–298, 1992.
- [4] Brian S. Thomson Bruckner Andrew M, Judith B. Bruckner. *Real Analysis*. Prentice Hall, Inc, 1997.
- [5] Marek Capinski and Ekkerhard Kopp. *Measure. Integral and Probability*. Springer, 2 edition, 2005.
- [6] R. C. Drago. Teaching the calculus. *National Mathematics Magazine*, 19(4):186–193, 1945.
- [7] William Dunham. *The calculus gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press, 2005.
- [8] Russel A. Gordon. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volume 4. American Mathematical Society, 1994.
- [9] Russell A. Gordon. A convergence theorem for the Riemann integral. *Mathematics Magazine*, 73(2):141–147., april 2000.
- [10] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by Its History*. Springer, 1996.
- [11] Thomas Hawkins. *Lebesgue’s Theory of Integration*. Chelsea Publishing Company, 1975.
- [12] Victor J. Katz. *A History of Mathematics*. Pearson Education, Inc., 2004.
- [13] J.J. Koliha. Lebesgue trough Newton integral. *The Journal of the Australian Mathematical Society*, 30:261–264, 2003.
- [14] Samuel Kotz, editor. *Probability and mathematical statistics*. Academic Press Inc., 1970.
- [15] T. W. Körner. *A Companion to Analysis*. American Mathematical Society, 2004.
- [16] Jonathan W. Lewin. A truly elementary approach to the bounded convergence theorem. *The American Mathematical Monthly*, 93(5):395–397, May 1986.
- [17] Jonathan W. Lewin. Some applications of the bounded convergence theorem for an introductory course in analysis. *The American Mathematical Monthly*, 94(10):988–993, Desember 1987.
- [18] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. Universitetsforlaget AS, 1995.
- [19] Martin A Rynne, Brian P; Youngson. *Linear Functional Analysis*. Springer- Verlag London Berlin Heidelberg, 2nd edition, 2001.
- [20] Sidney Schuman. Before teaching calculus. *Mathematics Teaching*, 190:40, 2005.
- [21] S.K Stein. Formal integration: Dangers and suggestions. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 5(2):1–7, 1974.
- [22] Gilbert Strang. Sums and differences vs. integrals and derivatives. *The College Mathematics Journal*, 21(1):20–27, 1990.
- [23] Michael E. Taylor. *Measure Theory and Integration*. American Mathematical Society, 2006.
- [24] Hugh Thurston. Can we improve the teaching of calculus? *The College Mathematics Journal*, 31(4):262–267, 2000.