UNIVERSITETET I AGDER
SERVICEBOKS 422   4604 KRISTIANSAND
TLF 38 14 10 00   FAKS 38 14 10 01
ORG. NR. 970 546 200 MVA   postmottak@uia.no   www.uia.no

UNIVERSITETET I AGDER

LEONARDO DA VINCI

EN STUDIE AV RENESSANSENS UNIVERSALGENIS MATEMATIKK

Petter Løkkeberg
Fakultet for realfag og teknologi, Universitetet i Agder 2007
Masteroppgave i matematikkdidaktikk

MASTEROPPGAVE

Masteroppgave

Leonardo da Vinci

en studie av renessansens universalgenis matematikk

Av

Petter Løkkeberg

Masteroppgaven er gjennomført som et ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som sådan. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Veileder:
Otto Borger Bekken

Universitetet i Agder, Kristiansand

November 2007

Forord

Undertegnede har alltid vært fascinert av mennesket Leonardo da Vinci, først og fremst gjennom hans myteomspunnede kunstneriske virke, men også som fremtidsrettet innovatør, der han i sin samtid designet og konstruerte maskiner, maskiner menneskeheten i mange tilfeller ikke gjenoppdaget før flere århundrer senere. I utgangspunktet var jeg ikke klar over at Leonardo hadde drevet med ren matematikk i særlig grad, det var først i forbindelse med matematikkens historie I ved UiA (tidligere HiA) at professor Rolf Nossum gjorde meg klar over dette.

Jeg bestemte meg derfor for at dette kunne det være spennende å finne ut mer om. Jeg startet da noen undersøkelser for å finne ut hva som eventuelt var skrevet om hans matematiske virke. Dette skulle vise seg å være lite. Noen få italienske og engelske matematikkhistorikere hadde skrevet noe i begynnelsen og midten av 1900-tallet. Derfor mente jeg at dette kunne være en interessant forskningsoppgave, både fordi lite så ut til å være skrevet, samt at lite av dette var skrevet i nyere tid.

Maleren og kunstneren Leonardo, oppfinneren Leonardo, anatomisten Leonardo og arkitekten Leonardo er alle godt kjent blant folk flest. I den anledning ønsket jeg å få frem også hans matematiske arbeid – et arbeid som tilsynelatende var (er) lite kjent blant folk generelt.

I tillegg er mennesket og myten da Vinci svært aktuell i våre dager. En rekke bøker om hans liv og levnet er utgitt de senere år, trolig som et svar på de mytene som en internasjonal spenningsroman kom med for noen år siden. Mange har nok dannet seg en oppfatning om Leonardo da Vinci gjennom Dan Browns ”The da Vinci Code”, oppfatninger som er forsøkt korrigert og supplert gjennom et utall utgitte verk om da Vinci de siste 4-5 år.

Jeg har bodd i Fredrikstad under hele studiet, og har således kombinert fysisk tilstedeværelse i Kristiansand med hyppig elektronisk kontakt med studenter, administrasjon og matematisk fagmiljø ved Universitet i Agder. Dette har vært til stor og uvurderlig hjelp. Jeg vil derfor rette en stor takk til disse som har bidratt til at dette har latt seg gjøre.

En spesiell takk vil jeg gi til min kunnskapsrike og inspirerende veileder, førsteamanuensis Otto B. Bekken, som med sine kommentarer og innspill har loset meg trygt gjennom denne prosessen.

Tilslutt vil jeg takke familien min i Fredrikstad, og da spesielt min kone Stine, som i perioder har måttet forsake så mye. Det hadde neppe latt seg gjøre uten din positive innstilling.

Fredrikstad, november 2007.

Petter Løkkeberg

Sammendrag

I første del av oppgaven skisserer jeg hvilken plass matematikkens historie har hatt og har i skolehverdagen. At den i dag har en mer sentral plass enn tidligere virker klart, og jeg redegjør for hvilke tanker som ligger bak denne implementeringen.

Videre gjengir jeg i korte trekk Leonardo da Vincis liv og samtid, der jeg prøver å skape en forståelse for hvilken livssituasjon og sosial kontekst som kan ha preget hans interesser og arbeid. Deretter vektlegges hans matematiske virke, der jeg kort gjør rede for hvilke områder han arbeidet med innen matematikk. Jeg har valgt å avgrense denne oppgaven til kun å omhandle da Vincis "rene" matematikk. Hans mekanikk, ingeniørkunst og kunstneriske virke er i stor grad utelatt fra denne oppgaven, da dette ville gjort oppgaven for omfattende. Allikevel vil man underveis også finne referanser til hans arbeid her, men det er da tatt med for å sette ting i en sammenheng.

Tre hovedområder innen hans matematikk behandles mer utfyllende; sirkelens kvadratur, kubens fordobling og perspektivtegning. Innenfor disse områdene har jeg sett på hva som allerede var kjent før Leonardos tid, hva Leonardo eventuelt bidro med, samt kort om hva som fulgte etter Leonardo. Og i så fall om dette kunne skyldes påvirkning fra Leonardo da Vincis arbeid. Et lite kapittel omhandler hva som finnes igjen av Leonardos matematikk idag.

Tilslutt i oppgaven gjennomfører jeg en klasseromsundersøkelse der jeg lar to ulike elevgrupperinger prøve seg på geometrioppgaver basert på Leonardos arbeid. Disse analyseres, og jeg finner at det blant disse elevene finnes flere spennende tilnærminger til hvordan disse oppgavene kan løses.

Summary

In the first part of my thesis I outline the role the history of mathematics has played in everyday life at school, and the role it has today. It seems evident that the history of mathematics is a larger part of today's curriculum, and I show the views behind this development.

I move on to a brief description of Leonardo da Vinci's life and the period he lived in, where I try to show and explain which areas of life and which social contexts might have influenced his life and work. Afterwards I focus on his mathematical work, giving an account of which areas he worked on within mathematics. I have chosen to limit this thesis to da Vinci's "pure" mathematics. His mechanics, engineering and artistic efforts are mostly left out of this thesis, as they would make the thesis too extensive. In spite of this, some reference to these areas of his work will be made, but only to put things into context.

Three main areas of his mathematics will be treated more extensively than others; The squaring of the circle, the doubling of the cube, and perspective. Within these areas I have looked at what was known before da Vinci, what da Vinci might have contributed and briefly what followed da Vinci, considering whether this could be shaped by influence from da Vinci's work. A small chapter regards what is left of da Vinci's mathematics today.

Finally I describe a survey I conducted in the classroom, where I let two different groups of students try their hand at geometry tasks based on da Vinci's work. The result of this survey is analysed, and I find that amongst these students there are several fascinating approaches to solving these problems.

Innholdsfortegnelse

Introduksjon

Matematikkens historie plassert i Læreplanverket.

Matematikk er en del av den globale kulturarven vår. Mennesket har til alle tider brukt og utviklet matematikk for å utforske universet, for å systematisere erfaringer og for å beskrive og forstå sammenhenger i naturen og i samfunnet (UF, 2005). Læreplanverket for grunnskolen og den videregående opplæringen utdyper i sin generelle del det verdigrunnlag og menneskesyn som skal ligge til grunn for opplæringen, samt at man under fag- og timefordelingen finner helt konkrete kompetansemål for elevene på de ulike trinn.

For grunnskolen er det fastsatt spesifikke kompetansemål etter 2., 4., 7. og 10. trinn, mens man i videregående opplæring finner tilsvarende kompetansemål etter Vg1 og Vk2 i studieforberedende og yrkesfaglige utdanningsprogram. Disse kompetansemålene er igjen delt inn i hovedområder. Hovedområdet kultur og modellering skal blant annet gi et overordnet perspektiv på faget, det skal beskrive den logiske strukturen i faget og det skal vise historien og den kulturelle rollen til faget (UF, 2005). Et av elevenes kompetansemål er her å gi eksempler fra matematikkens flerkulturelle historie samt å drøfte hva matematikken har å si for naturvitenskap, teknologi, samfunnsliv og kultur. Dette hovedområdet finner man kun under utdanningsprogrammet for matematikkretningen 2T, men man finner referanser til matematikkens historie også under andre hovedområder. Elevene skal blant annet kjenne bakgrunnen for plassverdisystemet, gjøre rede for tallet π, og å kunne bruke Pytagoras` setning. Imidlertid er det lite konkrete henvisninger til hva man spesifikt skal trekke inn av matematikkens historie, og hvor man eventuelt skal trekke dette inn.

L97 vs M87

I innledningskapittelet til L97 om faget matematikk finner vi en introduksjon som trekker opp fagets historiske røtter:

Mennesket har fra de tidligste tider vært opptatt av å utforske verden omkring seg, for å sortere, systematisere og kategorisere ulike observasjoner, erfaringer og inntrykk og for å trenge inn i tilværelsens gåter og finne forklaringer på naturgitte sammenhenger (.) Matematikk har lange historiske tradisjoner og har alltid vært en viktig del av vår kultur (KUF, 1997).

Under mål og hovedmomentene for de ulike klassetrinnene finner vi konkrete spesifikasjoner på hva elevene skal, blant annet:

- *Søke informasjon om sekstitallsystemet i historisk perspektiv (7. klasse).*
- *Undersøke tall og utforske tallmønstre (6. klasse).*
- *Møte enkelte trekk i forbindelse med tallregningens historie, f. eks. forskjellige tallsystemer (8. klasse).*
- *Møte eksempler på tall og algebra i kulturell og historisk sammenheng (10. klasse).*
- *Arbeide noe med spennende sammenhenger fra tallenes verden...(og) den rolle tallmystikk kan spille i enkelte kulturer (10. klasse).*
- *Arbeide med geometri i et historisk perspektiv (10. klasse) (KUF, 1997).*

I M87 finnes det derimot lite konkrete henvisninger til matematikkens historiske forankring. I innledningskapittelet dukker det opp en vag formulering om at matematisk kunnskap også er en del av vår kultur (KUD, 1987), men ellers står det lite om fagets historie, og vektleggingen av denne.

Dette tyder på at fagets historiske forankring ikke har vært vektlagt nevneverdig tidligere, noe som flere forskere også viser til i sine arbeider. Blant annet viser Bruckheimer og Arcavi i sin undersøkelse at temaet ikke har hatt den plassen det fortjener i tidligere læreplaner, men at det nå kan virke å være en endring på gang, fra en mekanisk, prosedyretro tilnærmingsmåte basert på memorering, til mer utforskende og resonnerende aktiviteter (Bruckheimer & Arcavi, 2000). Imidlertid er det mye som tyder på at matematikkens, og også andre fags, historiske egenart er mer ”verdsatt” i våre dager. En økende interesse for både vår egen og andres kulturarv har gjort oss mer nysgjerrige på historien som ligger som et fundament for det samfunn vi har i dag (Lahn-Johannessen 2002, s. 86). I læreplanverket for kunnskapsløftet formulerer man dette slik:

- *Opplæringen skal derfor ivareta og utdype elevene kjennskap til nasjonale og lokale tradisjoner - den hjemlige historie og de særdrag som er vårt bidrag til den kulturelle variasjon i verden.*
- *Samtidig forteller kulturhistorien at kontakt med andre og forskjellige livsformer gir mulighet for overraskende kombinasjoner og for kollisjoner mellom anskuelser.*
- *Møtet mellom ulike kulturer og tradisjoner gir både nye impulser og grunnlag for kritisk refleksjon (UF, 2005).*

Imidlertid blir fortsatt matematikkens historiske kontekst omtalt med ”runde” formuleringer i de ulike læreplanene, og det gis lite konkrete henvisninger til hva som faktisk skal gjennomgås. Problemet for lærerne blir da å finne den best egnede måten å introdusere dette stoffet. Lærebøkenes tilnærming har nok her en stor påvirkningskraft på lærerne. I tillegg er det verdt å merke seg at oppgaver knyttet opp mot matematikkens historie i liten grad er blitt gitt til skriftlig eksamen, noe som trolig gjør at dette emnet i noen grad ”utelates” fra undervisningen. Det viser seg at hva som forventes av eksamensoppgaver i stor grad er styrende for hva som prioriteres av arbeidsstoff både hos lærere, studenter og elever i grunnskole og videregående opplæring, noe som kanskje er forståelig.
Men det er verdt å merke seg at man trolig er i ferd med å få en endring på dette, ved at en sterkere bevissthet hos skaperne av lærerplanverket om matematikkens historie er i emning. Siden det i de nyere læreplanene er kommet klare(re) mål knyttet opp mot historiedelen, gjør dette at man fremover også kan forvente oppgaver om dette ved skriftlig eksamen.

Matematikkens historie og internasjonal forskning.

En rekke forfattere i ulike deler av verden har i mange år påpekt den viktige rollen som matematikkens historie kan spille i undervisning av matematikk (Siu 2000, s. 3). Ikke bare kan en egnet bruk av matematikkens historie hjelpe til med å undervise i et emne, det er også en integrert del av emnet som gjør oss i stand til å danne oss en bredere innsikt over hva matematikk er for samfunnet. Å bruke matematikkens historie i klasserommet gjør nok ikke at elever helt uten videre oppnår bedre resultater, men det kan føre til at elever oppfatter matematikkundervisningen som meningsfull og interessant, noe som videre kan føre til at innlæringsprosessen blir lettere, og derigjennom kanskje skaper en bredere og dypere forståelse. Slik matematikk og matematikkundervisningen fremstår i dag, oppfattes den av mange elever som et fag uten egen historie (Avital 1995, s. 3).

Greisy Winicki stiller spørsmålet om hvorfor stadig flere utdanningsinstitusjoner tilbyr kurs for studenter og fremtidige lærere innenfor matematikkens historie, når dette temaet i seg selv ikke er en selvstendig del av læreplaner for matematikkfaget i de fleste land (Winicki 2000, s. 129). Hun hevder at uten vektlegging av matematikkens historie kan ikke lærere få elevene til å elske eller å like, eller sette pris på eller forstå, faget matematikk. Matematikk fremstår som et lukket fag for elevene, hvor lærers kunnskap og autoritet er det essensielle. Dette er spesielt skadelig for faget matematikk, et fag som har en kumulativ struktur, der flere tusen år gammel kunnskap gradvis er bygd opp slik at faget i dag fremstår slik det gjør. Denne kumulative strukturen gjør oss i stand til å følge et spesielt problem opp gjennom historien; vi kan følge hovedlinjene i hvordan problemet er behandlet i ulike epoker, samt hvordan problemer og tilnærmingsmåter har endret seg i samsvar med den generelle kunnskap innen et matematisk område (Hobson 1953, s. 2). Man bør heller ikke undervurdere den viktige rollen selve problemene har hatt og har i matematikken. Det er problemene, og forsøkene på å løse disse, som gjør at matematikken utvikler seg. Enhver forskningsartikkel, enhver avhandling og enhver ny oppdagelse innen matematikk stammer fra forsøk på å løse matematiske problem (Eves 1972, s. 17).

Det er imidlertid en fare forbundet med ukritisk å introdusere matematikkens historie for elever og studenter; mange har lett for å tillegge for eksempel oldtidens matematikere større innflytelse og påvirkningskraft enn de faktisk hadde (Grugnetti 2000, s. 29). Det er derfor også viktig å analysere den politiske, sosiale og økonomiske konteksten i datidens samfunn.

Matematikkens historie som en del av undervisningen

Det er en utbredt oppfatning at lærere har en tendens til å undervise på samme måte, og ved å ta i bruk de samme metodene som de selv er blitt undervist i (Avital 1995, s. 3), og siden det historiske aspektet i matematikkundervisningen i liten grad har vært tilstede før i nyere tid, fører dette til at mange lærere er noe tilbakeholdne med å implementere historiedelen i undervisningen. Mange lærere har også den oppfatning at det som en gang var pensum i eget studie, er det som fortsatt bør vektlegges når de selv fungerer som lærere (Lahn-Johannessen 2002, s. 79). Det er også en kjensgjerning at mange lærere føler at det ”tradisjonelle” pensumet er stort nok som det er, og at tiden ikke alltid strekker til, slik at historiebiten blir sett på som en ekstra arbeidsbelastning som ”stjeler” tid fra selve matematikken:

For å si det rett ut, bruker jeg så mye tid på å undervise i pliktstoffet at jeg ennå ikke har funnet anledning til mer historiske ekskurser (Andelfinger i Mosvold 2001, s. 10).

Et slikt syn tilkjennegir en oppfatning av historiedelen som en ikke-integrert del av faget, noe som representerer noe nytt som har kommet i tillegg til det tradisjonelle pensumet. Man innser ikke, eller ønsker kanskje ikke å innse, at matematikkens historie kan representere en ny innfallsvinkel til undervisningen, eller kanskje en oppklarende faktor i undervisningen (Lahn-Johannessen 2002, s. 79).

Fulvia Furinghetti navngir to hovedretninger matematikkens historie i dag spiller i matematikkutdanningen: a) Matematikkens historie som en del av en reflekterende sosio-kulturell prosess, og b) matematikkens historie for å gi grunnlag for matematisk kunnskap (Furinghetti 2004, s. 3). Bak punkt a) ligger idèen om at historien er et middel for å fremme matematikken i klasserommet for å "menneskeliggjøre" matematikken, mens punkt b) omhandler problemer knyttet opp mot det å undervise/lære matematikk.

I tillegg til at det er delte oppfatninger om hvorvidt man bør (eller har tid til å) bruke matematikkens historie i undervisningen, er det også ulike oppfatninger om hvordan dette best bør gjøres. International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) presenterte i sin tiende studie (2000) tre tilnærmingsmåter for å implementere matematikkens historie i undervisningen. Jeg tar utgangspunkt i Mosvolds fremstilling om dette, men supplerer med øvrige kilder der det er nødvendig.

Direkte historisk informasjon

Dette punktet kan igjen deles opp i 3 underpunkter; primære kilder, anekdoter og gamle problemer. Jeg behandler disse individuelt.

1) Bruk av primære kilder

Lærere og elever får som oftest (kanskje tilnærmet alltid) kjennskap til historien gjennom sekundære kilder. Ved å gå direkte til den opprinnelige kilden, kan man få klargjort og utdypet det man fikk rede på i de sekundære kildene, i tillegg til at man kan finne opplysninger som er utelatt i senere kilder. Samtidig er dette en krevende og ambisiøs måte å integrere matematikkens historie, både for lærere og elever (Fauvel & van Maanen 2000, s. 291). Det er ofte meget arbeids- og tidkrevende for en lærer å finne frem til de originale kildene, samtidig som det kreves en viss modenhet også hos elevene for å sette seg inn i den konteksten den opprinnelige kilden ble skrevet under, dvs. de historiske, sosiale og kulturelle forhold da den ble skrevet ned. Vi må med andre ord tolke det som ble skrevet i lys av datidens samfunn og kunnskapsnivå. Begreper og definisjoner vi møter kan også ha hatt en annen betydning den gang. I tillegg vil ofte den primære kilden være skrevet på et fremmed språk, kledd i en ”gammel språkdrakt”, noe som, avhengig av elevers – og lærers – kunnskapsnivå, trolig vil komplisere hele tolkningsprosessen. Samme problem kan man også få ved originale kilder skrevet på eget morsmål. Marit Lahn-Johannessen (2002, s. 88) hevder at elevene konfronteres med minst tre språk:

- Det matematiske språket som ellers brukes i matematikktimene.
- Språket i den originale kilden.
- Studentenes egen måte å snakke om matematikk på.

Læreren, lærebøker og matematikktimene har et matematisk språk som elevene i ulik grad blir kjent med, og med dette språket som bakgrunn skal de så tolke både det matematiske så vel som det litterære språket i primærkilden, et språk som trolig er ganske ulikt det elever (og lærer) er vant med. Tilslutt skal elevene selv uttrykke sin forståelse av primærkilden med sitt eget matematiske språk. Uavhengig av matematikkens historie, mener Fauvel & van Maanen at dette uansett er et av hovedmålene med matematikkundervisningen; når studentene senere praktiserer matematikk trenger de først og fremst å kommunisere og oversette ideer og fakta til et matematisk språk og omvendt, noe som bruk av originale kilder i undervisningen er med på å bidra til å utvikle (Lahn-Johannessen 2002, s. 88).

I tillegg vil elevene ha et rent matematisk utbytte ved å jobbe seg gjennom primærkilden skritt for skritt. De går da gjennom tankegangen og resonnementene til forfatteren, og dette er en god måte å få tak i selve matematikken og den fremgangsmåten som ligger bak (Furinghetti 1997, s. 57). De oppdager kanskje røttene til moderne problemer. De ser hvilke hindringer datidens matematikere måtte overvinne. Derigjennom oppnår de kanskje innsikt om hvordan de skal overvinne hindre de selv møter i dagens matematikk. I tillegg vil de kanskje få et annet syn på matematikken i seg selv; i stedet for å se på faget som tuftet på en streng bruk av regler, aksiomer og teoremer, vil de se på menneskers strev og bruken av disse som nødvendig for å løse konkrete problemer (Laubenbacher og Pengelley 1994, s. 2).

Fauvel og van Maanen (2000, s. 292) har satt opp tre sentrale ideer som oppsummerer effekten av å studere originale kilder:

> *(i) utskifting*
> *Integrering av historie i matematikken skifter ut det vanlige med noe forskjellig; det lar oss se på matematikken som en intellektuell aktivitet, heller enn bare en samling av kunnskap eller teknikker.*

(ii) nyorientering
Integrering av historie i matematikken utfordrer våre oppfatninger ved å gjøre det kjente ukjent. Når vi trenger inn i en historisk tekst, kan dette føre til nyorientering av våre oppfatninger. Matematikkens historie har det fortrinn at den kan overraske med det som kommer av seg selv. I undervisningen dukker begrepene opp som om de allerede eksisterte. Dette gjelder for eksempel for begrepet mengde, men like mye for begrepene trekant eller funksjon. Begreper blir også manipulert uten tanke på deres konstruksjon. Historien minner oss om at disse begrepene ble oppfunnet, og at det ikke skjedde av seg selv.

(iii) kulturell forståelse
Integrering av historie i matematikken inviterer oss til å plassere utviklingen av matematikken i den vitenskapelige sammenhengen til en bestemt tidsalder, og i sammenheng med historien til ideer og kulturer. De inviterer oss også til å se på historien til matematikkundervisningen fra perspektiver som ligger utenfor de etablerte fag-grensene.

2) Bruk av anekdoter

Etter reform 94 ble matematikkens historie gitt en større og mer bestemt plass i faget. De fleste forlagene ”løste” dette problemet ved å fortelle små anekdoter og historier om historiske matematiske hendelser underveis i lærebøkene, eller ved å lage korte biografier om matematikere der dette passet tematisk inn. Tone Bulien (2000, s. 8) hevder at dette først og fremst er å undervise historie, ikke matematikk. Imidlertid kan det være et supplement til den øvrige matematikkundervisningen, og det kan bidra til å ”lette” stemningen i et fag og i et klasserom elevene vanligvis oppfatter som bundet opp av faste, forhåndsbestemte regler. Burn (1998, s. 11) er enig i at slike historier kan skape en hyggelig atmosfære i en matematikktime, men retter samtidig en advarsel mot bruken av disse. Han hevder at bruken av disse i liten grad har et klart definert matematisk mål, i stedet brukes disse for å oppfylle ”målet” om matematikkens historie i undervisningen. I tillegg påpekes det at slike historier i stor grad er ”vandrehistorier”, ofte uten rot i virkeligheten, noe som matematikklærere spesielt bør vise varsomhet med, siden man ofte innenfor denne yrkesgruppen er opptatt av at noe skal kunne bevises. Fűhrer (1991) sier det imidlertid treffende på side 25: ”Så lenge læreren er klar over at disse anekdotene ikke alltid er historisk korrekte, kan en god historie ofte være bedre enn den kjedelige sannheten!” Den samme oppfatningen deles av Siu (2000, s. 4). Han sier at det ideelle ville være autentiske historier som samtidig var underholdende og belærende, men dersom man ikke finner slike, er det allikevel god hjelp i en anekdote med et godt budskap.

3) Bruk av gamle problemer

> *Der ville aldri blitt konstruert noe matematisk kunnskap hvis der ikke hadde vært problemer å løse* (Barbin i Mosvold 2001, s. 13).

Mange elever i dagens skole oppfatter matematikken som svært teoretisk og virkelighetsfjern. Allikevel er det grunn til å presisere at det meste av dagens (teoretiske) matematikk har sin bakgrunn i tidligere tiders konkrete problemer fra datidens samfunnsliv. Mange gamle problemer egner seg godt for elevene fordi selve problemet kan være enkelt å forstå, samtidig som det krever en del arbeid å løse dem. Lahn-Johannessen (2002, s. 84) gir et eksempel på en oppgave i å løse andregradslikninger med bakgrunn i Al-Khwarizmis metode, mens Mosvold (2001, s. 13) trekker inn egyptiske stambrøker i brøkregningsoppgaver. Ved å la elevene arbeide med slike gamle problem, vil de få en bredere innsikt i fagstoffet, samtidig som de i mange tilfeller må trekke inn flere matematiske fagområder for å komme frem til en løsning. Samtidig kan f. eks. enkle geometriske problem fra oldtiden som elevene klarer å løse, gi elevene en motivasjon fordi de selv er i stand til å løse problemer eldre tiders matematikere strevde med.

Matematisk bevisstgjøring

Bedre forståelse

Et mål for alle lærere må være at undervisningen skal være med på å danne grunnlag for en bedre forståelse hos elevene. Matematikkens historie kan være et viktig hjelpemiddel i så måte, ved at elevene gjennom å se på historien kan stille seg spørsmålet ”hvorfor”. Det er dette Phillip Jones legger i begrepet meningsfylt undervisning.

> *“I have more than an impression - it amounts to a certainty - that algebra is made repellent by the unwillingness or inability of teachers to explain why. . . There is no sense of history behind the teaching, so the feeling is given that the whole system dropped down ready-made from the skies, to be used only by born jugglers”, – Jacques Barzun, lærer fra USA (Jones 1989, s. 1).*

Hvordan kan man bruke matematikkens historie til å øke forståelsen for matematikkens egenart, matematikkens forhold til den fysiske verden vi lever i, om hvordan – og hvorfor – matematikken dannes, utvikler seg, forandres og blir generalisert (Jones 1989, s. 16)? Jones gir ikke et entydig svar på dette, men gir flere tilnærmingsmåter. Elevenes alder og lærers oppfinnsomhet og kunnskap kan derimot virke begrensende. I noen tilfeller kan historier og anekdoter virke stimulerende og historiske problem fra matematikken kan gi enkeltelever og grupper muligheter for egne ”oppdagelser”. Andre ganger kan dette hjelpe elever til å se sammenhenger og strukturer mellom ulike ”områder” innen matematikken. For lærerens del vil en historisk tilnærmingsmåte trolig vise sammenhengen mellom ”eldre” matematikk, og matematiske oppdagelser av nyere dato. Det viser seg ofte, men ikke alltid, at moderne matematikk er modifiseringer av gamle matematiske ”oppdagelser” (Jones 1989, s. 17). Kline (1972, s. ix) hevder at den matematikk som i dag presenteres i klasserommet, som regel er en ”blankpolert” utgave, ferdig utviklet, som ikke viser hvilke prosesser som har vært i sving for å nå dit vi er i dag. Innsikt i matematikkens utvikling, og ideene bak denne, kan bidra til å stimulere både læreplanleggernes valg og lærernes vilje til å skape interesse. Imidlertid er Jones mest opptatt av at elevene, gjennom å se på matematikkens historie, selv skal stille spørsmålet ”hvorfor”.

Han deler ”hvorfor” inn i tre kategorier:

Kronologiske:	Disse forklarer etymologien og opprinnelsen til matematiske begreper, og de viser hvordan noen av begrepene har utviklet seg for også å innbefatte nye begrepsområder der ny kunnskap har blitt avdekket/dannet.
Logiske:	Disse gir en forståelse for fagets struktur, for aksiomer og teoremer.
Pedagogiske:	Her velger lærer utfra kunnskap om den historiske utviklingen hjelpemidler og arbeidsmåter som kan gjøre nytte i undervisningen. Her velges arbeidsmåter som ikke er forhåndsbestemte og unike, Jones kaller det å arbeide innenfra og ut (Jones 1989, s. 2-4).

Man må allikevel være noe varsom med en utstrakt bruk av matematikkens historie. Det vil ikke fungere som et pedagogisk redskap med mindre anvenderen ser et signifikant formål med introduksjonen, og planlegger bruken av disse for å oppnå formålet (Jones 1989, s. 5). Mosvold sier det slik: ” En forutsetning for at matematikkens historie skal fungere som en hjelp i undervisningen er imidlertid at læreren gjennom introduksjon av historien ønsker å nå viktige mål, og at han har en gjennomtenkt plan for hvordan dette skal gjøres” (Mosvold i Lahn-Johannessen 2002, s. 86).

Lære å undervise bedre.

Ved å studere historien kan læreren bli bevisst de faktorene som gjør ham til en bedre underviser i matematikk. Mosvold viser til 4 faktorer som Avital presenterer:

- Ved å studere historien kan en bli mer bevisst på hvor viktig det er å lære elevene å stille spørsmål. All matematikk har sin bakgrunn i konkrete spørsmål eller problemstillinger. Pólya brukte denne metoden i boken ”How to solve it”. Hans fjerde punkt i læringsprosessen er å se seg tilbake og stille spørsmål.
- Man bør inkludere spørsmål som tilsynelatende ikke har noen løsning.
- Det er også viktig å inkludere åpne spørsmål som stimulerer elevene til utforsking. Mye matematikk har blitt til i historien ut fra studier av slike åpne spørsmål, f. eks ”Fermats Last Theorem”.
- Elevene bør også oppmuntres til å diskutere åpne problemer, slik at de ikke forblir i den oppfatningen at matematikk er et lukket emne, der læreren sitter med alle fasitsvarene (Avital i Mosvold 2001, s. 16).

Renessansen

Renessanse betyr ”*gjenfødelse*”, dvs. antikkens verdier, idealer og kunstverk ble sentrale i middelalderen. I middelalderens tradisjonelle samfunn kommer misnøyen med datidens samfunn tilsyne, og tankene og forestillingene om et tidligere, bedre samfunn kommer til overflaten. Man prøvde altså ikke å skape noe nytt, man ville tilbake til ”det rette samfunnet” (Lunden 1984, s. 250). Man hadde tidligere hatt andre perioder i middelalderen der antikkens idealer ble brakt til overflaten igjen, men denne gangen kom antikkens idealer spesielt tilsyne innen kunst og historie. Men man ser også klare forskjeller, blant annet ble arkitekturen preget av enkeltindividenes bevissthet og eksperimentering (Lunden 1984, s. 251).

Innen bildekunsten, og ikke minst hvordan bildene skulle komponeres, skapte den realistiske gjengivelsen av naturen problemer. Innen gotisk stil kunne mennesker og andre detaljer i bildet settes opp i symmetriske, harmoniske mønstre, fjernt fra hvordan virkeligheten fortonet seg. Nå skulle derimot motivene gjenspeile virkeligheten Et spesielt eksempel som gjerne nevnes, er Borso d’Este, despot av Ferrara, som syntes landet hans var for flatt i forhold til et maleri, og dermed beordret bøndene i området til å bygge et fjell i 1431.

Motivene innen kunsten i tidlig renessanse er preget av hyllesten til livets gleder og vennlighet, gjerne hentet fra antikkens mytologi. Dette står i skarp kontrast til den gotiske stilens motiver, der budskapet ofte var hentet fra Bibelen eller helgenlegender, og med en sterk moraliserende undertone (Lunden 1984, s. 254).

Betegnelsen ”Renessansemenneske” blir etter hvert sentralt i denne perioden. Denne brukes om en person som forsøker å utvikle alle sine evner, evner som er spredd over et stort område. I begynnelsen var dette et typisk middelaldertrekk, men Leonardo (og andre) tok dette et steg videre. De skulle ikke bare spre sin kunnskap over et stort arbeidsfelt, de skulle også spesialisere seg innen de enkelte arbeidsområdene (Lunden 1984, s. 247). Andre betegnelser fra andre tidsepoker på mennesker som har arbeidet over et bredt spekter er universalgenier eller *polyhistor* (fra gresk og betyr ”*megetviter*”).

Renessansen regnes å ha hatt sitt utbrudd i Firenze. Derfra spredte bevegelsen seg utover det som i dag kalles Italia, derfra videre til sentral-Europa og England, før den tilslutt nådde den

Iberiske halvøy og de nordiske land. Avgjørende for oppblomstringen av Renessansen, var reformasjonen, som endte mye av den katolske kirkes makt i middelalderens Europa.

Leonardos liv og virke

Leonardo ble født utenfor ekteskap 15. april 1452 i den vesle landsbyen Vinci som lå rett utenfor Empoli i distriktet Toscana. På den tiden var det å bli født utenfor ekteskap ikke sett på som skam. Allikevel var en fremtidig karriere innen medisin eller som sakfører lite aktuelt for en person med en slik bakgrunn (Buchholz 2001, s. 9). Han fikk undervisning hjemme i lesing, skriving og aritmetikk. Som femtenåring fikk han jobb som lærling innen maling og skulptur i verkstedet til Andrea del Verocchio, en stilling han fortsatte i også etter at hans læretid var over. Han arbeidet der frem til tjuefemårsalderen. I tillegg til å lære seg de grunnleggende teknikker innen håndverksfagene, fikk Leonardo også opplæring i elementær matematikk, grammatikk og malerkunst (Cianchi 1988, s. 14). Imidlertid er dette en periode av hans liv man vet lite om fordi få kilder refererer til akkurat denne perioden (Turner 1992, s. 13). Fra 1477 arbeidet han som maler, men ved siden av tegnet og konstruerte han pumper, militære maskiner og våpen samt andre maskiner.

I perioden 1482 til 1499 tjenestegjorde Leonardo hos Hertugen i Milano, Ludovico Sforza, som maler og ingeniør. Opprinnelig fikk han tjeneste ved hoffet som musiker! På Leonardos tid var Italia delt inn i en rekke forskjellige fyrstedømmer og bystater. Disse dannet en stadig vekslende serie av allianser, og var ofte i krig med hverandre for å oppnå mest mulig politisk og økonomisk makt. Dette førte til et stort behov for etablering av forsvarsverk / angrepsvåpen, noe Leonardo så sitt snitt til å utnytte. Han søkte derfor etter hvert hertugen om å bli ansatt som arkitekt og ingeniør, selv om hans erfaring til da var relativt begrenset. I ansettelsesbrevet stilet til Sforza refererer Leonardo til 10 ferdigheter han innehar, hvorav ni hadde et militært preg over seg. Dette viser at de militære behov den gang (som nå) var viktige for den samfunnsmessige utvikling (Lunden 1984, s. 247).

Han fikk etter hvert også ansettelse som hertugens private ingeniør og kunstmaler (Buchholz 2001, s. 29). Fra denne perioden finnes det en rekke skisser og tegninger av da Vinci. De beskriver alt fra små byggverk til større kirker med perfekte kupler. Han lagde planer og tegnet en hel bydel, men i dag kjenner man ikke til noe byggverk som er basert på tegninger etter Leonardo, men noen av ideene hans ser ut til å være videreført av Bramante under sistnevntes arbeid utenfor Peterskirken i Roma (Turner 1992, s. 34).

Det var i denne perioden Leonardo fattet interesse for geometri og astronomi. Han brukte mye tid på å studere fugler, fordi han selv ønsket å konstruere innretninger som gjorde mennesker i stand til å fly eller oppholde seg i luften over noe tid. Han lagde detaljerte utkast til fallskjermer, forløpere til vår tids hangglidere, samt enkle skisser av et helikopter. Det er uklart om noen av da Vincis ideer innen dette kom forbi skissestadiet, men datidens materialer og disses vekt var nok lite egnet til å bygge innretninger som hadde nevneverdig suksess (Buchholz 2001, s. 51). Etter hvert la han vekk sitt arbeid på dette feltet, men Leonardo var resten av sitt liv lidenskapelig opptatt av, og fascinert av fugler i bevegelse.

I motsetning til perioden i Firenze hos Andrea del Verrochio, var kunstnermiljøet i Milano mangesidig, Leonardo kunne gå fra verksted til verksted for å studere og lære seg de ulike teknikkene som ble brukt. Man er mindre opptatt av at uttrykkene skal være vakre, i stedet er aktivitetene og arbeidene rettet inn mot en logisk og fysisk nytteverdi (Cianchi 1988, s. 14).

Samtidig var det i denne perioden at han begynte å anse malerkunsten som en vitenskapelig disiplin. Det endelige målet i alle hans studier – innen anatomi og bevegelseslære, botanikk og zoologi, til og med geologi og meteorologi – var å skape det ”perfekte” maleri (Buchholz 2001, s. 39). Nattverden ble malt mellom 1495 – 1498. Dette ble et forbilde for malere i generasjoner, selv om selve malingen i dette maleriet nærmest begynte å ”skalle” av straks maleriet var fullført. Dette skjedde fordi Leonardo, i motsetning til samtidens malere, eksperimenterte med nye malingsteknikker og blandinger, men fuktigheten i murveggen Leonardo malte på gjorde at hans eksperimentelle forsøk i ettertid viste seg ikke å være egnet.

Leonardo var en rastløs person, kanskje fordi han levde i en samtid med store og raske politiske omveltninger. I perioden 1500 – 1506 reiste han fra sted til sted, til tider sammen med Luca Pacioli, og tok oppdrag av kort varighet, men mange av hans arbeider ble ikke fullført. Han var opptatt av å tjene penger fordi dette var nødvendig for å kunne opprettholde fasaden som et vellykket universalgeni. Det var nødvendig for å ha kontakt med og påvirkningskraft hos de mennesker Leonardo anså som betydningsfulle og det var nødvendig for å kunne fortsette med sine naturvitenskaplige studier. Han passet hele tiden på å holde avstand til de politiske konfliktene som utspant seg i samfunnet, slik at han ikke hadde noe uoppgjort med de som til enhver tid måtte sitte ved makten. Det var i denne perioden Leonardos kanskje mest berømte maleri, Mona Lisa, ble laget. Dette maleriet ble i samtiden ansett som storartet, men i tillegg har hendelser som tyverier og myter om modellen de siste to hundre år, gjort at Mona Lisa i dag har fått status som kanskje verdenshistoriens mest omtalte kunstverk (Buchholz 2001, s. 64 - 65).

I 1506 returnerte Leonardo til Milano, og i 1507 ble han ansatt som teknisk og kunstnerisk rådgiver ved hoffet til Ludovico XII. Her mottok han en fast, solid gasje, penger som gjorde da Vinci i stand til å bruke mye tid på egen forskning. Han la ut på flere forskningsreiser, og hovedfokuset hans var nå på anatomi og geologi fremfor tekniske innretninger. Han foretok studier av bergarter i Alpene, og oppdaget fossiler av bløtdyr langt fra kysten. Av dette trakk han den slutning at disse landområdene en gang måtte ha vært dekket av hav (Buchholz 2001, s. 69).

I 1517 tilbød franskekongen Frans I Leonardo all den kunstneriske frihet og komfort han måtte ønske seg. Den aldrende Leonardo aksepterte tilbudet, og de siste årene tilbrakte han i slottet Cloux, like ved kongens slott i Amboise. Kongen satte like stor pris på Leonardo som samtalepartner som kunstner, og da Vinci utførte ingen større arbeider i denne perioden. Hans høyre hånd var lam, og den venstre tegnet kun enkle skisser. Større arbeider overlot han til elevene sine. Kunsthistorikere hevder imidlertid at Leonardos skisser la grunnlaget for byggingen av en rekke slott i området (Buchholz 2001, s. 91).

Tidlig i 1519 ble da Vinci alvorlig syk, og etter kort tids sykdom sovnet han inn 2. mai 1519. Han ble gravlagt i St. Florentin-katedralen i Amboise etter ønske i eget testamente, men i dag kjenner ingen den eksakte beliggenheten til graven (Nicholl 2005, s. 502). På sitt dødsleie hadde han tre av sine mest kjente malerier i sitt eie, Mona Lisa, St. Anne og Døperen Johannes, malerier som i dag er å finne i Louvre, Paris.

Leonardo var også kontroversiell som privatperson. Han var venstrehendt, og skrev fra høyre mot venstre, noe som ikke var unaturlig da man på denne tiden brukte blekk (hånden som skrev kunne ikke ”hvile” på det nyskrevne blekket). Det sies dog at han var like flink til å skrive med høyre hånd, noe han visstnok også gjorde ved enkelte anledninger, og da skrev han fra venstre mot høyre (Frère 1994, s. 52). Leonardo var vegetarianer, han kunne ikke utstå tanken på at kroppen hans skulle være et ”bur for døde dyr” som han selv uttrykte det (Atalay

2004, s. 273), og det sies at han gikk rundt på markedene og kjøpte levende dyr som han så tok med seg ut i naturen og slapp fri.

Imidlertid er det andre historier fra hans private sfære som kan virke sjokkerende. Han ble i yngre år anklaget for utukt (sodomi) mot en ung prostituert gutt, Jacopo Saltrelli, som satt modell for Leonardo (Frère 1994, s. 52), og ble to ganger sammen med to andre kolleger siktet i saken. Imidlertid ble det av mangel på bevis aldri reist tiltale mot Leonardo, og hendelsen fikk ingen kjente konsekvenser utover den skandalen dette skapte i datidens Firenze (Turner 1992, s. 13). Leonardo fikk, så vidt man kjenner, ingen barn, og det er den allmenne oppfatning at han var homofil, en legning som var akseptert blant kunstnere i datidens samfunn (White 2002, s. 121). Andre hevder derimot at da Vinci levde i sølibat hele livet, selv om det også blir hevdet at Leonardo mest sannsynlig hadde seksuelle forhold til noen av sine tallrike kvinnelige modeller (Nicholl 2005, s. 438 - 443).
Det kan også tyde på at han hadde pedofile trekk. Han tok til seg en 10 år gammel gutt, Salai (lille djevel), som var sønn av en fattig bonde. Rykter vil ha det til at Leonardo betalte bonden en sum for å ta til seg Salai, som Leonardo beskrev som attraktiv og med vakre trekk (White 2002, s. 123). Andre hevder derimot at det ikke finnes hold i ryktene om pedofili, og at Salai oppfylte et følelsesmessig tomrom hos Leonardo (Frère 1994, s. 117).

Etter datidens normer ble ikke Leonardo regnet som noen lærd mann. Det finnes få spor i hans arbeid som tyder på en dypere interesse for klassisk litteratur og kultur. Allikevel opparbeidet han seg et stort ry og berømmelse i sin levetid, og han bidro til å fremme den allmenne oppfatning av at en kunstner ikke bare er en manuell håndverker, han er også en tenkende intellektuell (Aston 1998, s. 313). Gjennom hans notater kan man også danne seg et bilde av hvordan han så på seg selv; det virker som at han selv vurderte seg som annerledes enn andre, og det kan virke som om han allerede i ung alder forstod hva denne annerledesheten måtte medføre (Frère 1994, s. 30).

Leonardos bibliografi

Leonardo utgav selv aldri noen egne verker. Tekstene nedenfor refererer til utgivelser på bakgrunn av notater ført i pennen av Leonardo. Tabellen viser hvilket navn de enkelte notatarkene er kjent under i dag, hvilket årstall / tidsperiode de er antatt skrevet, samt hvor mange ark (*folio*) samlingene består av.

Tilfeldige samlinger:			
Codex Atlanticus	1478 – 1518	403	sider
Windsor Collection	1478 – 1518	36	sider
Codex Arundel	1480 – 1518	283	sider
Notater:			
Codex Forster I_2 (folio 41 – 55)	1480 – 1490	1000	sider totalt (I-III)
MS B	ca. 1489	84	sider
Codex Trivulzianus	ca. 1489	51	sider
MS C	1490	30	sider
Codex Madrid II (folio 141 – 157)	1491 – 1493		
MS A	1492	43	sider
Codex Madrid I	1492 – 1497		
Codex Forster II_1, II_2, III	1493 – 1495	1000	sider totalt (I-III)
MS H	1493 – 1494	142	sider
MS M	ca. 1495	94	sider
MS I	1495 – 1499	140	sider
MS L	1497; 1502 – 1503	90	sider
Codex Madrid II (folio 1 – 140)	1503 – 1505		
MS K_1	1504	128	sider totalt ($_1$-$_3$)
MS K_2	1504 – 1509		
Codex Forster, I_1	1505		
Codex on Flight	1505	18	sider
Codex Leicester (i dag eid av Bill Gates)	ca. 1506		
MS D	ca 1508	10	sider
MS F	1508 – 1509	96	sider
MS K_3	1509 – 1512		
Anatomical Folio A	ca. 1510		
MS G	1510 – 1516	93	sider
MS E	1513 – 1514	80	sider
MS Ashburnham (deler av MS A og MS B)		34	sider

(DSB 1991, s. 243, Marinoni 1985, s. 70 og Frère 1994, s. 203).

Leonardos matematikk

> *"La ingen mann som ikke er matematiker få lese innholdet i mitt arbeid"*
>
> Leonardo da Vinci

Selv om da Vinci selv hadde stor tro på egne ferdigheter, kan han neppe regnes som matematiker etter våre dagers definisjon. Det finnes divergerende syn på akkurat dette. Clagett (1969, s. 101) siterer i sin artikkel en påstand av den tyske kunsthistorikeren Olschki som i 1919 skrev at Leonardos geometriske forsøk ikke bare var verdiløse, de var også gale, mens Marcolongo gjengis å ha hatt et langt mer positivt syn på Leonardos matematiske arbeid. På 1500-tallet var matematikk først og fremst rettet mot anvendelser innen kunst og arkitektur (Field 2005, s. 12 - 17), samt praktisk og konkret nytteverdi, og spesielt Leonardos matematiske arbeid ser ut til først og fremst å være rettet mot dette (Severi 1953, s. 250).

Samtidig var mye av matematikken i renessansen knyttet opp mot kunst og proporsjoner, i motsetning til våre dagers tilknytning til naturvitenskap. Det kan se ut til at da Vincis arbeid i noen grad har blitt påvirket av tidligere vitenskapsmenns arbeid. Roger Bacons metode fra 1200-tallet kan gjenfinnes i hans arbeid, og Arkimedes' metode for å kvadrere sirkelen kjente Leonardo til, men Severi hevder at lite tyder på at Leonardo kjente til Arkimedes' arbeid utover dette. Imidlertid er dette en oppfatning som ikke helt deles av andre. Clagett (1969) viser i sitt arbeid til flere matematiske tilnærmingsmåter der Leonardo tar utgangspunkt i Arkimedes' arbeid, men det er usikkert hvilke kilder da Vinci hadde. Arkimedes' arbeid var kjent av mange, og mye av dette fantes i verk gjengitt og utgitt senere av andre matematikere. Blant annet mener Clagett å finne at Leonardo må ha vært påvirket av Moerbekes, Cremonensis' og Vallas oversettelser av Arkimedes' arbeid (Clagett 1969, s. 102). I Leonardos notater hevder Clagett å finne referanser til flere av Arkimedes' arbeider, blant annet:

1) *On the Measurement of the Circle,*
2) *On Spirals,*
3) *On the Sphere and the Cylinder,*
4) *On the Equilibrium of Planes,*
5) *On Floating Bodies*, og muligens
6) Eutocius' *Commentary on the Sphere and the Cylinder*. (Clagett 1979, s. 259).

Imidlertid hevder Clagett også at det finnes få, om noen, direkte kopier fra Arkimedes' arbeid i Leonardos materiale (Clagett 1978, s 523).

Leonardos tidligste matematikk (rundt 1490) dreier seg i stor grad om geometri, der hovedvekten legges på problemer rundt sirkelens kvadratur og konstruksjoner av ulike polygoner (*MS B* og *MS A*). Imidlertid refererer da Vinci her i stor grad til velkjente prosedyrer og algoritmer. I hans videre arbeid fortsetter denne "trenden"; *Codex Forster III* består av definisjoner og algoritmer som ikke begrunnes matematisk, i stedet overlates det til leserens fantasi og forestillingsevne å tyde begrepene (DSB 1991, s. 235).

Men etter hvert (i *MS M* og *MS I*) skjer det et skifte i Leonardos matematikk. Her finner vi oversettelser av Euklids verker, verker som Leonardo tydeligvis opparbeidet seg en større forståelse av. Dette kommer trolig som følge av Leonardos samarbeid med Luca Pacioli, og mye tyder på at Pacioli hjalp da Vinci med å forstå teksten samt en del av matematikken bak (DSB 1991, s. 235). Imidlertid oversetter ikke da Vinci Euklid direkte, i stedet bruker han korte referanser til Euklids verker, for så selv grafisk å utlede / gjengi tankene bak.
Etter hvert dreier mer og mer av da Vincis matematikk seg om forhold og proporsjoner, mye ser ut til å være hentet direkte fra Paciolis verker, og da spesielt *Summa arithmetica*. Imidlertid finner man i *Codex Madrid II* tilløp til selvstendig matematisk forskning og arbeid, spesielt rundt temaet sirkelens kvadratur (DSB 1991, s. 236).

Det er også verdt å merke seg at Leonardo tar opp igjen noe av sitt opprinnelige geometriske arbeid etter 1510. Clark (1968, Appendix D s. 1) hevder at dette skjer fordi han selv var klar over at hans "løsninger" på Euklidske problemer ved hjelp av passer og linjal var originale. Clark hevder også at Leonardos løsninger var allment kjent, og at disse ble brukt i en diskusjon mellom Cardano og Tartaglia 50 år senere (Clark 1968, Appendix D s. 1).

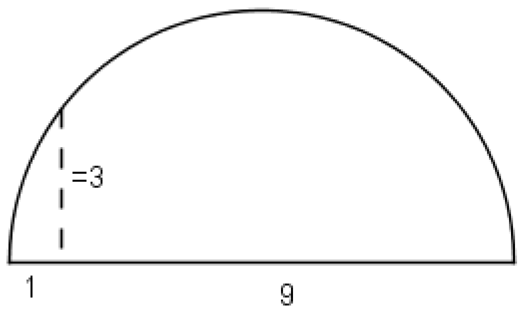
Ved å studere Leonardos utallige notater kan man danne seg et bilde av hva mannen arbeidet med. Raymond G. Ayoub (2004, s. 249) oppsummerer da Vincis arbeid til å omfatte følgende områder (se neste side):

- Konstruksjon av regulære mangekanter.
- Summen av aritmetiske rekker.
- ”Måneskalkers” areal.
- Platoniske figurer (særlig i forbindelse med samarbeidet med Luca Pacioli).
- Terningens fordobling.
- Gravitasjonskraftens senter.
- Matematiske analyser av væskers bevegelse.
- Arbeid med infinitesimalverdier for å bestemme flaters areal.
- Begrepene punkt, linje og overflate.
- Han konstruerte et apparat som kunne regne med heltallspotenser.
- Al Hazans problem (Leonardo kjente ikke til hans arbeid): Lys fra et punkt A reflekters til et punkt B via et krumt speil.

Hans matematiske arbeid oppsummeres og dateres av Kevin Allison Nies på nettstedet hypatiamaze:
Ca. 1470: Studerer som kunststudent perspektivtegning etter en geometribok av Pagolo Medico.
Ca. 1478: Starter arbeidet med sin første notatbok, der han studerer aritmetikk, og kopierer tabeller over kvadratrøtter. Han kopierer også Arkimedes’ spiral i en plantegning av et tårn.
Ca. 1480: Tegner et kjeglesnitt (parabel).
Ca. 1483: Studerer algebra med Marliano, treffer samtidig også Cardano.
Ca. 1490: Arbeider med problemer knyttet til transformering av volum.
Ca. 1496: Blir venn med Luca Pacioli, og illustrerer hans verk, *Divina Proportione*. Begynner samtidig å arbeide med problemer knyttet til sirkelens kvadratur.
Ca. 1500: Arbeider med arealproblemer knyttet opp mot bevegelse, samtidig jobber han med matematikk knyttet opp mot pyramider, han oppdager disses tyngdepunkt. Etter å ha lest Vallas verk, starter han arbeidet med terningens fordobling.
De neste årene vinkler Leonardo arbeidet sitt tilbake til problemet rundt sirkelens kvadratur, han forbereder blant annet flere hundre kvadraturproblemer til sin bok om spill, *De Ludo Geometrico*.

Selv om Leonardo arbeidet trofast hele livet innen geometri og matematikk, gjorde unøyaktigheter og småfeil i hans matematikk at han neppe kan kalles en matematiker i ordets rette betydning. Blant annet brukte han gjennom store deler av livet sin egen ”metode” for å finne kvadrat- og kubikkrøtter: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ og $\left(\sqrt{3}\right)^3 = \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9} = \frac{27}{9} = 3$. Han definerte altså røtter som brøker der kun telleren ble multiplisert. Interessen for dette hadde han fått gjennom sin venn Luca Pacioli (Clark 1968, Appendix D s. 1).

Men man kan også finne eksempler i Leonardos notater på at han kjente til hvordan han skulle finne kvadratrøtter geometrisk ved å ta i bruk mellomproporsjonaler. I Codex A (folio 5) finner vi et eksempel på hvordan han fant kvadratroten av 9 (Marinoni 1982, s. 47):



Allikevel kan det virke som om Leonardo selv var mer opptatt av, og stolt over, sine ”oppdagelser” innenfor matematikkfaget enn sine øvrige arbeidsområder (DSB 1991, s. 234). Hans arbeid hadde derimot liten eller ingen betydning i matematikkens historie, han baserte seg i stor grad på muntlige og filosofiske ”bevis”. En grunn til dette er selvsagt at hans matematiske ”oppdagelser” i liten grad innebar noe nytt. En annen grunn er at mye av hans materiale gikk tapt for ettertiden eller først er gjenfunnet mye senere, mens det materialet som var kjent var usammenhengende og vanskelig tilgjengelig for de som ønsket å granske dette.

Leonardos metode.

Det hersker en rekke ulike oppfatninger av Leonardos vitenskapelige arbeid, først og fremst fordi hans skriftlige arbeider er så omfattende, samtidig som de inneholder en rekke forkortelser og tvetydigheter (Clagett 1969, s. 101). Leonardo bidro heller ikke til å ordne sitt materiale i særlig grad, og etter hans død ble mye av hans skriftlige nedtegnelser satt sammen til spesielle utgaver. Dette førte til at det å kunne trekke noen slutninger av hans arbeide, kan sammenlignes med å sette sammen et gigantisk puslespill. Leonardo gav heller ikke selv ut noen skriftlige arbeider i sin levetid, selv om mye tyder på at han planla dette. Imidlertid er to kjente avhandlinger (om malerkunst og vanns bevegelse) etter hans død utgitt i hans navn på bakgrunn av hans notater, men mye av dette innholdet er farget av utgiverne, Melsis og Argonatis, syn og tanker. I dag finnes det rundt 6000 sider med Leonardos arbeid, men dette anslås å være kun 25 % av hans opprinnelige nedskrevne materiale. Resten anses tapt (DSB 1991, s. 194). Det er også et usikkerhetsmoment knyttet til om alle Leonardos notater er funnet. Så sent som i 1967 ble to samlinger notater funnet (Codex Madrid I og II), noe som gjør at man kanskje kan håpe på at flere av hans arbeider kan komme til rette i fremtiden også.

I tillegg gir Leonardos skriftlige form rom for tolkninger. Han skrev alt speilvendt (trolig grunnet at han var venstrehendt), og hans tanker ble ofte uttrykt gjennom korte illustrasjoner, fremfor ord og bevis. I tillegg jobbet han ofte med flere arbeider i samme manuskript, slik at sidene var fylt med ulike retninger innen da Vincis arbeid. Noen steder kan man finne en felles rød tråd, andre steder ikke. Han hadde også en tendens til å returnere til tidligere arbeidsområder i senere notater, og da ofte med divergerende synspunkter og resultater. Dette var noe Leonardo selv etter hvert ble klar over, og i ettertid anses dette å være et resultat av hans enorme variasjon i arbeidsområder, samt at han hadde en utrolig utvikling når det gjaldt kunnskapsnivå gjennom livet. Derfor bør man analysere hans arbeid i lys av den aktuelle tidsperioden arbeidet ble gjort (DSB 1991, s. 195); jfr. det som er skrevet tidligere om bruk av primærkilder under punktet matematikkens historie som en del av matematikkundervisningen.

I tillegg tyder mye på at han hadde dysleksi. Ordforrådet var rikt, men selve ordene ble stavet på en rekke ulike måter. Det kan virke som han ikke hadde et fast, ”mentalt bilde” av bokstavrekkefølgen i ordene han skrev ned, i stedet ble de skrevet fonetisk ned, noe som ofte resulterte i ulike resultat. Røsstad (1995, s. 18) viser i sitt arbeid til professor Gjessings forskning, der sistnevnte lister opp en rekke kriterier som tegn på dysleksi: Fonetisk staving av ord som ikke skal skrives fonetisk, problemer med stumme konsonanter og doble konsonanter, problemer med å skille like bokstaver (u og v), samt å speilvende bokstaver (d i stedet for b). En dyslektiker trenger ikke å ha alle disse symptomene, men det kan se ut til at Leonardo faktisk hadde alle disse problemene, og man må anta at han ikke fikk noen hjelp for å overvinne disse problemene i sin samtid.

Teologiske betraktninger lå bak det meste av andres og Leonardos arbeid i renessansen. Han anså Gud som den naturlige skaper av alt, spesielt med tanke på den logiske (og matematiske) struktur han fant spesielt innenfor naturvitenskapen. Han uttrykte som regel dermed sine tanker rent visuelt, med utgangspunkt i de geometriske former han kjente fra naturvitenskapen (DSB 1991, s. 195).

Leonardo delte sine undersøkelser i tre hovedområder (DSB 1991, s. 196):

“Visuell geometri”
Det ville ikke eksistere noen naturvitenskap for Leonardo dersom ikke resultatene lot seg ”forklare” ved selvsyn. Han forklarte blant annet lysets spredning gjennom en analogi ved å slippe små steiner ut i stille vann, for så å observere bølgene som bredte seg fra sentrum. I tillegg observerte han verdensrommet, og spesielt sola, gjennom et lite hull i en plate. Han proklamerte at siden avstanden var så stor, måtte også størrelsen på objektene være stor. Han hevdet også, mot oppfatningen til mange i datiden, at solens faktiske størrelse var enorm, og ikke like liten som den kunne virke på himmelen. I tillegg hevdet han at solen ikke beveget seg på himmelen, men stod stille (Richter 1998, s. 51). Galilei kom opp med de samme argumentene hundre år senere. De ble da ansett som kjetterske.

”Naturens geometri”
Han var opptatt av naturens fire krefter; bevegelse, kraft, tyngde og perkusjon (rytme). Han sammenlignet blant annet et fossefall med en pyramide; den springer utfra ett punkt og for hver tidsenhet kan det virke som om fossefallet nærmer seg pyramidens form. Han konstruerte et utall hydraulikkdrevne maskiner der han lot vannets bevegelse være drivkraften til maskinen (Cianchi 1988, s. 33 – 44). En del av de maskinene som på denne tiden ble tegnet av Leonardo har en nøyaktighet og funksjonalitet som overgår alt som ble konstruert av andre i Leonardos samtid (Cianchi 1988, s. 34).

Han samarbeidet også med matematikeren Luca Pacioli, noe som trolig økte Leonardos interesse for matematikk, og han lagde en rekke skisser til Paciolis mesterverk *Divina Proportione*. Et spesielt tankeeksperiment nevnes hos Kemp (2006):
Et byggverk er i ferd med å rase sammen fordi en elv renner under det, og gradvis tar med seg jordsmonn. Leonardo foreslår da å plassere hindringer i elven slik at elvens strømretning endres på en slik måte at den i stedet legger igjen sedimenter, og at jordsmonnet på den måten i stedet gradvis bygges opp! Han sier at naturkreftene kan være en stor og kraftfull samarbeidspartner, men de vil opptre som en grufull fiende dersom man prøver å trosse naturkreftenes naturlige ”vilje”. Field (2005, s. 73) nevner at da Vinci, i likhet med mange andre ingeniører, i noen tid også arbeidet med å ”temme” elven Chianas ukontrollerte oversvømmelser, men uten å lykkes.

”Ren geometri”
Han var også interessert i geometrien i seg selv, blant annet ved å arbeide med de ”klassiske problemene” innen faget (se nedenfor). Interesse for geometri var svært vanlig blant datidens kunstnere, og passer og linjal var uunnværlige redskaper blant malerne, billedhuggerne og arkitektene i renessansen.

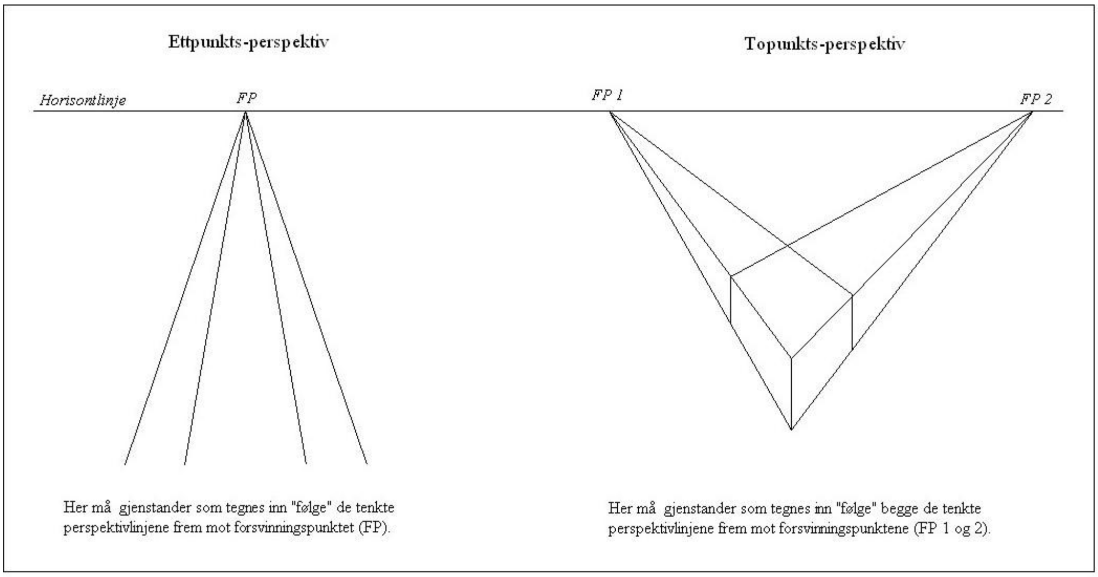
Leonardo benyttet seg av tre hovedmetoder når det gjaldt observasjon og eksperiment; måling, modeller og markører. Han kvantifiserte alle sine arbeider; distanse ble normalt målt i braccio (24 inches), korte tidsintervall gjennom musikalsk rytme, mens lengre tidsintervall ble målt ved timeglass eller vannklokker. Han bygde modeller av blodårer i glass, og en større modell av middelhavet for å studere elvenes tilstrømning. Markører, slik som farge, lodd av ulik tyngde og sandkorn, ble brukt for å studere effekten disse hadde i vann, og resultatene herfra gjorde han gjeldende til andre områder, for eksempel til blodstrømning gjennom arterier.

Dersom et eksperiment ikke svarte til datidens naturvitenskaplige ”lover”, forkastet Leonardo lovene og lot resultatet fra eksperimentet være det gyldige. Han hevdet også at eksperimentene måtte gjentas to til tre ganger før man kunne trekke noen slutninger av resultatet (Richter 1998, s. 9).

Perspektiv

Introduksjon

En rekke ulike kulturer har bidratt på sin måte for å skape en opplevelse av rom og dybde i planet, ved å gjengi tredimensjonale objekter på en todimensjonal flate. De to mest karakteristiske trekkene ved perspektivforståelsen er at gjenstander ses som mindre jo mer avstanden til betrakteren øker, og at vi får en romlig forkortning (perspektivforkortning), som er en fordreining av gjenstander når de ses fra en vinkel (wikipedia.no).
Ulike teknikker har vært benyttet. Både egyptere og assyrere var i stand til å gjengi sin verden tilfredsstillende på et plan. Ifølge Vitruvius kom de gamle grekerne med de første spede forsøkene innen perspektivtegning, ved å la objektene som skulle gjengis ha en viss vinkel i forhold til hverandre, for på den måten å skape en romlig illusjon. Men selv i vår vestlige verden forsvant denne bruken helt frem til den ble tatt opp igjen i renessansen (Smith 1996, s. 9). De enkleste former for perspektivtegning, lager man i dag ved ettpunkts-perspektiv og topunkts-perspektiv:



Man tar her utgangspunkt i en tenkt horisontlinje, stedet der hav og himmel møtes.

Hva var gjort?

Filippo Brunelleschi i begynnelsen av 1400-tallet var den første som entydig demonstrerte, og tok i bruk, linjeperspektivet i sine arbeider, men det var Alberti som beskrev og systematiserte hvordan dette skulle benyttes i praksis. Han tok blant annet i bruk et rutenett for å overføre linjer fra en plantegning av et objekt, til sine malerier (Smith 1996, s. 10). Man kan derfor si at Brunelleschi var ”oppfinneren”, mens Alberti stod for videreutviklingen av metodene (Baxandall 1988, s. 126).

Andre kunstnere som Uccello og della Francesca foretrakk egne metoder, Uccello valgte projeksjonstegning via plantegninger og omriss, mens della Francesca sverget til et innviklet projeksjonssystem basert på euklidsk geometri (Smith 1996, s. 10). I tillegg til å være maler, var han også regnet som en høyst kompetent matematiker, der man kjenner til 3 verk av ham som i dag går under navnene *Abacus treatise, Short book On the five regular solids* og *On perspective for painting* (man kjenner ikke i dag hva della Francesca selv kalte disse) (Amundsen 1999, s. 9). I sistnevnte verk skriver della Francesca i innledningen at dette verket først og fremst er retter mot malerkunsten, ikke geometri generelt. Han fremhever også at han ikke kommer inn på andre elementer i malerkunsten, som farger og skygge, som kan være med på å fremheve perspektivfølelsen, her er det bare snakk om proporsjoner (Amundsen 1999, s. 10). Han så på enhver detalj som skulle komponeres/males i et bilde som et geometrisk problem, og plasseringen og vinklene til disse ble kalkulert slik at han forsikret seg om at alle elementene hadde et korrekt forhold seg imellom og til bildet totalt sett.

Albrecht Dűrer, den tyske maleren, ble så en foregangsmann i det teoretiske studiet av perspektivkunsten. Han skrev store avhandlinger om temaet, blant annet ”*Treatise on Mensuration with the Compass and Ruler in Lines, Planes, and Whole Bodies*” (1525) (Katz 2004, s. 230). Dűrer mente at man ved å holde et ”glassark” mellom ”scenen” og øyet, så vil linjene som skjærer glasset gi opphav til punkter, og samlingen av disse punktene vil utgjøre en projeksjon av den virkelige scenen (et bilde som gir samme inntrykk på øyet som selve ”scenen”) (Amundsen 1999, s. 12). Han benytter flere ulike teknikker for å få dette til, teknikker som han selv konkret viser i noen av bildene sine:

”*Designer of the One-eyed Man*”, A. Dűrer.

Her maler Dűrer ved hjelp av en glassplate. Han passer på å holde øyet i en fast posisjon, og markerer på glassplaten hvor de ulike ”linjene av lys” fra objektet til hans øye, treffer glassplaten.

”*Designer of the Lying Woman*”, A. Dűrer.
Her brukes en nesten tilsvarende metode, men her er glassplaten inndelt i et rutenett, noe som ”letter” arbeidet med å plassere punktene korrekt.

Selve systematikken bak perspektivtegningen så ut til å tiltale de kunstnerne som også hadde en forkjærlighet for matematikken som lå bak, geometri og aritmetikk (Baxandall 1988, s. 124).

Hva bidro Leonardo med?

Leonardos teoretiske interesse for perspektiv begynte i andre halvdel av 1480-årene, og fortsatte frem til hans død. Utallige skisser og undersøkelser finnes i hans arbeider. Han skal visstnok ha samlet disse arbeidene i en avhandling, *Discorso*, som skulle være en del av et større verk om kunst. Dette verket har senere gått tapt, men man kjenner til bruddstykker av dette ved at Leonardo selv, Benvenuto Cellini og Giovanni Lomazzo har referert til dette arbeidet (Andersen 2007, s. 81).

Leonardo brukte selv betegnelsen pyramideformede linjer om det lineære perspektivet. "Bilder" fra gjenstander følger disse linjene, og samles i et felles punkt i øyet (Frère 1994, s. 197). Leonardo kaller for øvrig dette punktet et *udelelig* punkt.

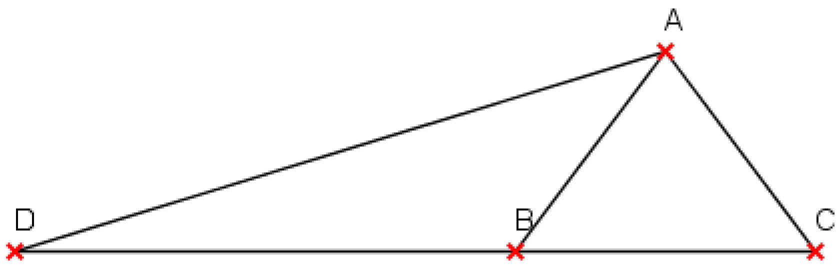
Han sies å være den første som rettet et kritisk blikk mot datidens bruk av lineært perspektiv. Bakgrunnen for dette var hans observasjoner vedrørende vidvinkelsyn og synskjeglen (for å unngå forvrengning må hver gjenstand som gjengis falle innenfor et synsfelt på 60° hos oss mennesker) (Smith 1996, s. 11). I tillegg var det hovedsakelig firkantede figurer som var best egnet til å gjengis i et lineært perspektiv. Krumme figurer og mennesker lot seg også tegnes, men å få dette korrekt i et lineært perspektiv var meget krevende. Piero della Francesca beskrev hvordan menneskekroppen kunne konstrueres og uttrykkes geometrisk. Leonardo leste hans arbeid, men gav snart opp å skrive ned en egen fremstilling om dette emnet da han fant fremstillingen til della Francesca komplisert (Buchholz 2001, s. 25). Leonardo skal også ha vært kritisk til de ulike perspektivvariantene som fantes i datidens fresker (Field 1997, s. 116).

Leonardo gjengir to aksiomer, begge nært beslektet med Euklids vinkel-aksiom.

I) En liten gjenstand plassert nærme, og en større lenger unna, vil dersom de blir sett i samme vinkel fortone seg like store (MS A, folio 8).

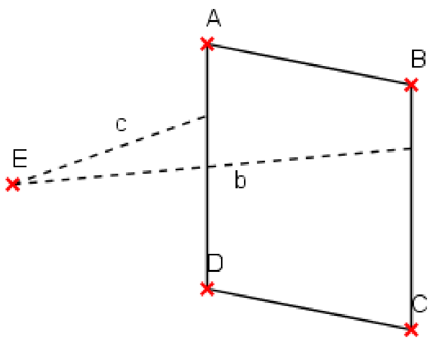
II) Blant objekter av samme størrelse, vil det som er lengst unna øyet fortone seg minst (Codex Atlanticus, folio 1). Dette siste blir ofte benevnt som Leonardos vinkel-aksiom.

Imidlertid er det ifølge Kirsti Andersen et motsetningsforhold mellom Leonardos vinkel-aksiom og Euklids. Sistnevnte hevder at to like størrelser der den ene sees i en større vinkel enn den andre, vil denne fremstå som større. To like størrelser der den ene sees i en mindre vinkel enn den andre, vil fremstå som mindre, mens de som sees i lik vinkel vil fremstå som like.



Linjene AB og AC er her like lange. Dersom øyet er plassert ved D vil linjene ifølge Euklid fremstå som like lange, mens ifølge Leonardo vil AB virke størst (Andersen 2007, s. 91).

Leonardo fremsetter også et aksiom som senere kalles ”*The Law of Inverse Proportionality*”: To like store objekter, der det ene er dobbelt så langt fra øyet som det andre, vil fremstå som om det ene er halvparten så stort som det andre (Andersen 2007, s. 91). Dette gjelder ikke generelt, men dersom vi oppfatter lengdene som sider i et rektangel, viser det seg å gi noe mening:



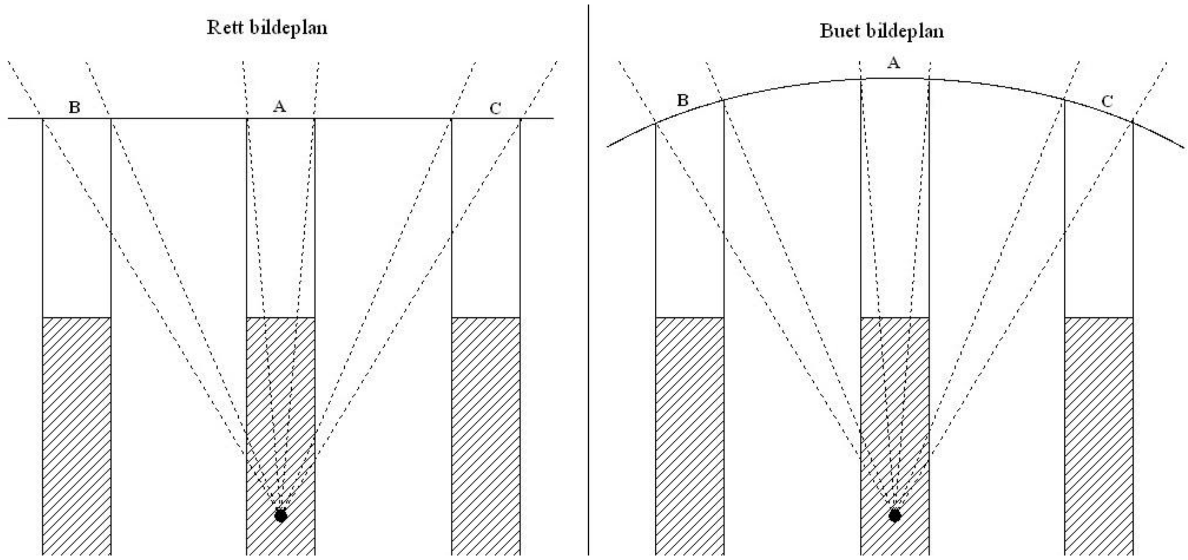
Dersom øyet er plassert ved E, og de to sidene AD og BC i et rektangel ser ut til å ha et innbyrdes forhold σ, vil $\sigma(b,c) = c : b$.

Leonardos arbeid med perspektiv er todelt, på den ene siden snakker han om hvordan ulike objekter projiseres til øyet, på den andre siden undersøker han hvordan objektene oppfattes av øyet (Andersen 2007, s. 84). Med andre ord bruker han ordet perspektiv både om det som i dag kalles lineært perspektiv, og det vi i dag vil kalle optikk. I tillegg nevner Leonardo ulike typer perspektiv, lineært (*liniale*), fargeperspektiv (*di colore*), forsvinningsperspektiv (*di speditione*), naturlig perspektiv (*naturale*), tilfeldig perspektiv (*accidentale*), enkelt perspektiv (*semplica*) og komponert perspektiv (*composta*). Imidlertid finnes det ingen definisjoner og få forklaringer eller tegninger på hva Leonardo la i disse begrepene, så hva han faktisk mente er gjenstand for tolkninger (Andersen 2007, s. 85).

Leonardo benyttet seg, i likhet med mange andre kunstnere, av en spektograf for å lette dette arbeidet; en innretning der man titter gjennom en glassplate via et lite hull, for så å tegne ned omrisset av objektet på denne glassplaten, og han refererer også til metoden med et rutenett på en glassplate som også Dűrer benyttet (Field 1997, s. 121-122). Imidlertid spilte det lineære perspektivet liten rolle i hans senere arbeider. Han hevdet at det var andre faktorer som spilte større rolle, slik som farger og atmosfære, og det var disse virkemidlene han benyttet seg av senere for å skape romfølelse (Buchholz, 2001 s. 25). En riktig fordeling av lys og skygge skaper en *relievo*-effekt (det vil si at kunstverket/maleriet kan oppfattes som et relieff), og hans arbeid innenfor perspektiv ble hovedsakelig å videreutvikle denne.

Leonardo ble også kjent for sin *sfumato*-teknikk, en teknikk som går ut på å gjøre overgangene mellom de ulike elementene i bildet myke, nærmest disige. Leonardo var en pioner på dette området, og hans teknikker dannet skole for senere kunstnere (Buchholz 2001, s. 77). Tidligere var de ulike elementene i et bilde avgrenset av egne, sterke farger, mens man nå fikk en mer helhetlig komposisjon av bildet, der ”*romfølelsen uten tydelige grenser trakk billedfigurene og betrakteren inn i bildet slik at man fikk en følelse av å flyte inn i det uendelige*” (Buchholz 2001, s. 77).

Selve ideen med *bue-perspektivet* ble utviklet av Leonardo gjennom hans optiske arbeider, ideer som en rekke kunstnere senere benyttet seg av. Ved å betrakte en lang rett bro nedenfra, får man inntrykk av at broen faktisk dreier nedover på sidene, et problem som ikke datidens perspektivteknikker kunne løse.



Leonardo forestilte seg tre parallelle søyler, og dermed ville betrakteren forestille seg de to søylene på sidene som bredere enn de i virkeligheten var (avstanden A < B og C)

Her ville søylene ifølge Leonardo fremstå som like brede

Dette kommer også frem av Leonardos observasjoner om vidvinkel – utsikter, der han viste at en lang, rektangulær og horisontal mur, parallelt med bildeplanet, må tegnes som om den løper sammen mot venstre eller høyre, enten mot en midtlinje eller som en bue (Smith 1996, s. 62).

Han beskriver også hvordan fargebruken i bildene er med på å skape romfølelse, gjenstander nærmest skal ha de klareste fargene, mens objekter lenger unna skal ha dusere farger, på grensen til blått (Frère 1994, s. 197).

Hos de fleste kunstnere på den tiden finnes det referanser til landmåling, så også i Leonardos notater. Enkle geometriske prinsipper for utregninger og dannelser av vinkler og grader var trolig en sentral del av opplæringen for unge kunstnere (Clark 1968, Appendix D s. 1).

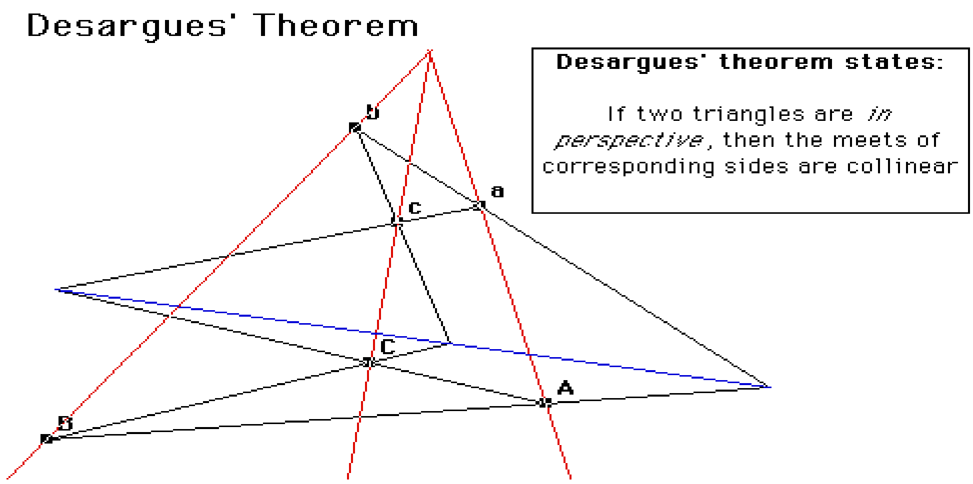
Hva fulgte i ettertid?

Det sies at Leonardos sfumato-teknikk påvirket Rembrandt i sistnevntes utvikling av sin chiaroscuro-teknikk (Buchholz 2001, s. 77). Clark (1968, Appendix D s. 1) hevder også at Dűrer dro til Bologna i 1506 nettopp for å lære perspektivkunstens hemmeligheter, siden det der fantes menn som Pacioli, del Ferro og da Vinci.

Utover i det 17. århundrede introduserte malerne nye geometriske ideer, som igjen krevde en helt ny vinkling på forskningen (Amundsen 1999, s. 15). Det oppstod et begrep om at det skulle finnes to typer geometri, en som dreide seg om det håndgripelige (taktilske), mens den andre hadde et mer visuelt preg. Man fikk begrepet fokusert perspektiv, der projeksjon og skjæringsplan var sentrale elementer.

Girard Desargues, en fransk matematiker, tok opp tråden fra malerne, og begynte å undersøke dette området. I stedet for å videreutvikle den greske matematikkens geometri slik Fermat gjorde, valgte Desargues å arbeide med ulike teknikker knyttet opp mot projeksjon. Han systematiserte tallrike teorem, og skrev i 1639 boken som på engelsk har fått tittelen "*Rough Draft of an Attempt to Deal with the Outcomes of the Meetings of a Cone with a Plane*", et verk som senere gav grunnlaget for projektiv geometri. Denne boken er forsvunnet, men en gjengivelse av verket laget av de la Hire, ble oppdaget 200 år senere, slik at vi i dag vet hva Desargues gjorde. Allikevel gjorde dette at dette feltet innen matematikken ble liggende dødt i lang tid.

I dag er Desargues mest kjent for sitt teorem som (litt forenklet) sier at dersom to trekanter er i perspektiv, vil møtestedet for tilsvarende sider være ko-lineære (ligge på en rett linje):

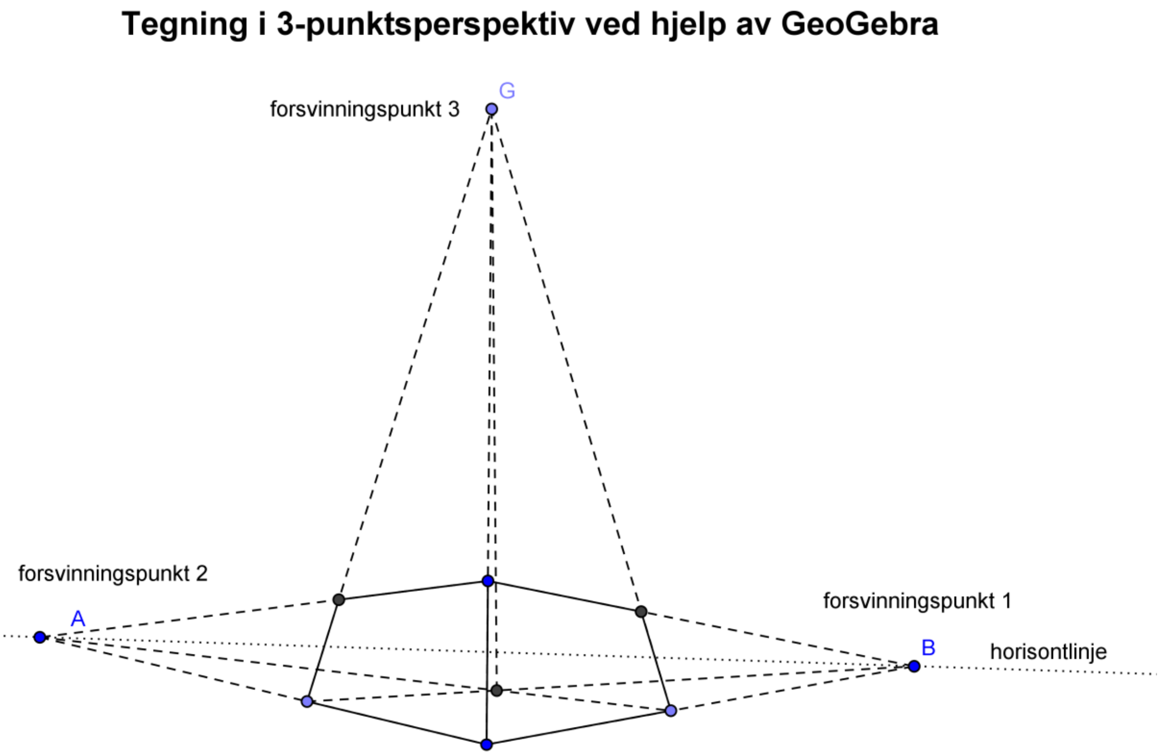


Amundsen (1999, s. 18) viser i stedet til en formulering av Breiteig: ”Dersom to trekanter ABC og abc ligger slik i forhold til hverandre at aA, bB og cC går gjennom samme punkt, så vil skjæringspunktene for ab og AB, for bc og BC og for ac og AC ligge på en rett linje”.

Perspektivtegning i dagens skole.

I dag kan elevene møte perspektivtegning på ulike trinn, og i ulike fag i norsk skole. Innen kunst/håndverksfaget er et av kompetansemålene etter 7. årstrinn at elevene under delemnet *visuell kommunikasjon* blant annet skal bruke sentralperspektiv (ettpunktsperspektiv) for å gi illusjon av rom i bilder både med og uten digitale verktøy, og etter 10. årstrinn skal de under delemnet *arkitektur* kunne tegne hus og rom ved hjelp av topunktsperspektiv (UF, 2005). Elever som velger matematikkvarianten 1P på videregående skole får også en liten innføring i perspektivtegning. De skal ha kjennskap til begrepene horisontlinje og forsvinningspunkt, samt at de skal kunne tegne enkle figurer i henholdsvis ett- og topunktsperspektiv. Dette skal kunne knyttes til yrkesliv, kunst og arkitektur (UF, 2005).

De teknikkene som brukes for å tegne i perspektiv har frem til i dag være ganske like de som ble ”oppdaget” for flere hundre år siden. Imidlertid har vi de siste årene gjennom datamaskinenes inntog i samfunnet fått et nytt, kraftig verktøy som for det første kan forenkle denne tegneteknikken, for det andre vil konstruktørens ferdige produkt som regel få et mer profesjonelt preg, og sist, men ikke minst, vil inntoget av dynamisk programvare gjøre at elever med enkle grep kan endre forsvinningspunkter og/eller horisontlinje, for så raskt å se hvordan disse endringene igjen påvirker selve perspektivtegningen. Dynamisk programvare som CABRI, GeoNext eller GeoGebra er ideelle til dette formålet. Også enklere tegneprogram (f. eks. Paint) vil også raskt kunne gi elever, også langt ned i grunnskolen, fin forståelse av hvordan man skal tegne i perspektiv, samt at det endelige resultatet som regel blir både matematisk korrekt samt visuelt pent.



Sirkelens kvadratur.

Beskrivelse av problemet

Problemet med sirkelens kvadratur kan tildels sees som å konstruere et kvadrat med samme areal som en gitt sirkel ved hjelp av bestemte redskaper, men det kan også sees som å finne arealet av et kvadrat som har samme areal som en gitt sirkel. Det første punktet omtales også som å konstruere et linjestykke med lengde lik sirkelens omkrets, eller å konstruere et kvadrat med side lik $\sqrt{\pi}$ (Kazarinoff 2003, s. 126). Dette skulle så gjøres ved hjelp av passer og linjal, der bruken av disse måtte være i samsvar med euklidsk geometri, blant annet at punktene A og B kunne knyttes sammen med en unik rett linje, og at det finnes en sirkel med senter i A med B plassert på sirkelbuen (Hobson 1953, s. 7). Samtidig må det nevnes at dette problemet har både en ideell og en praktisk side; ethvert virkelig problem kan ha en entydig ideell løsning, mens den praktiske løsningen av det samme problemet i noen grad vil være beheftet med unøyaktigheter grunnet små unøyaktigheter ved verktøyene som er i bruk for å løse problemet. Man kan også se dette omvendt; vil en praktisk løsning av dette problemet, der feilmarginene er ubetydelige, være godtatt? Svaret er nok et ubetinget nei, selv om vi ved å gjenta en prosess lenge nok kan få approksimasjoner som er så nær vi ønsker (Hobson 1953, s. 9). En matematiker kan allikevel ikke godta dette som ”bevis”, selv om approksimasjonene kan være egnet for de fleste bruksformål som for eksempel innen ingeniørkunsten.

Det er antatt at behovet for å løse arealproblemer har oppstått blant annet for å kunne løse og avgjøre spørsmål knyttet opp mot dagligdagse situasjoner i oldtiden innen landmåling, eiendomstilhørighet og arvespørsmål (Katz 2004, s. 1). I tillegg har spesielt de tre klassiske geometriproblemene skapt stor interesse også utenfor de innerste matematiske kretser. Grunnen til dette er trolig at disse spørsmålene er tilgjengelige for en større gruppe mennesker. Mange er i stand til å skjønne hva disse problemene dreier seg om, slik at disse gjennom tidene har vært forsøkt løst også blant lekfolk, og ikke bare av en matematisk skolert gruppe mennesker. Samtidig må man være klar over at løsningene på problemene ikke er særlig ”tilgjengelige” for lekfolk. En mulig årsak til at disse problemene fortsatt fanger interessen hos så mange, er kanskje at løsningene til problemene er mye vanskeligere å forstå enn det er å stille/forklare selve oppgaven (Kazarinoff 2003, s. 3).

Poeten Aristofanes introduserer i sitt verk ”Fuglene” astronomen Meton som uttaler følgende med en humoristisk undertone:

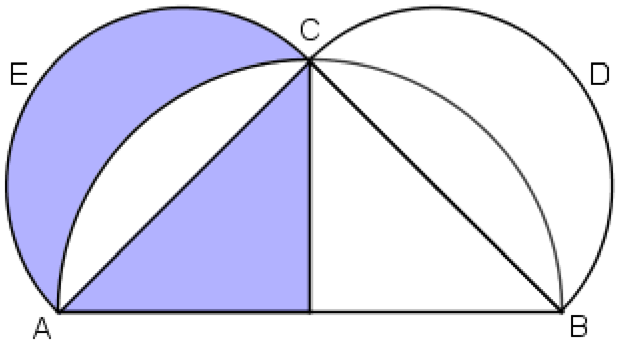
> *With the straigth ruler I set to work,*
> *To make the circle four-cornered;*
> *In its center will be the market place,*
> *Into which all the streets will lead,*
> *Converging to its center like a star,*
> *Which, although only orbicular, sends*
> *Forth its rays to all sides in a straight line.*
> *"Verily, the man is a Thales!"*
>
> (Van Der Waerden 1961, s. 130)

Hva var gjort?

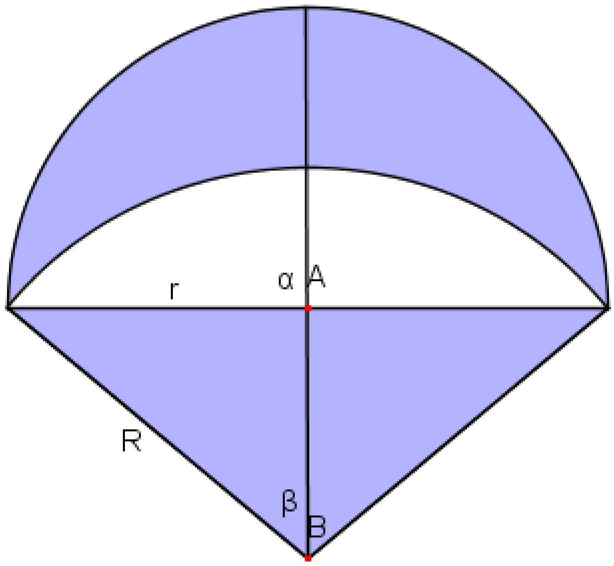
I Oldtiden jobbet man fortsatt med å finne en geometrisk løsning på problemet, der metoden hovedsakelig gikk ut på å finne en verdi for forholdet mellom regulære polygoner henholdsvis i en innskrevet og omskrevet sirkel. Babylonerne kjente til en verdi for $\pi = 3$, mens Rhind-papyrusen nevner en verdi tilnærmet lik 3,1604…. Også i Bibelen finner vi en tilnærmet verdi for π. Her snakkes det om et rundt kar med diameter 10 alen, mens det trengs en snor på 30 alen for å nå rundt (Det Norske Bibelselskap 1985, 1. Kongebok 7; 22). Dette siste dreier seg imidlertid mer om verdien av π knyttet opp mot omkretsen til sirkelformede figurer, ikke arealet.

De gamle grekerne løste gjerne kvadratur-problemer; den klassiske oppgaven var ved hjelp av passer og linjal å konstruere et kvadrat med like stort areal som en gitt figur. De enkleste å kvadrere var polygoner. Polygonet kunne igjen deles inn i et endelig antall trekanter, trekanter som kunne kvadreres med kjente metoder (Lützen 1985, s. 28).

Etter hvert som polygonenes kvadratur var løst, kom turen til figurer som også inneholdt krumme sider. Dette ble sett på som et særdeles interessant problem fordi de kunne minne om sirkelen. Hippokrates fra Chios kom med de første resultatene innen dette området (Struik 1987, s. 39). Han er blant annet kjent for å ha arbeidet med måneskalkers kvadratur. Med måneskalker menes flater som dannes ved at to krumme linjer skjærer hverandre, i motsetning til sirkelsegment som brukes om flater som dannes når en krum linje skjæres av en rett linje. Han så det som fundamentalt at likedannede sirkelavsnitt (omskrevet halvsirkel til en trekant) har samme forhold seg i mellom som kvadratene til deres grunnlinjer. Etter å ha bevist dette ved hjelp av Pytagoras' setning, kunne han videre omskrive en halvsirkel rundt en rettvinklet trekant. Differensen mellom denne halvsirkelens areal og sirkelbuen utenfor den opprinnelige trekanten ville nå være likt arealet til den rettvinklede trekanten; en trekant som enkelt kunne kvadreres ved hjelp av polygonkvadrering (Hobson 1953, s. 15).



Han forsøkte å finne ut hvilke måneskalker som lot seg kvadrere ved bruk av passer og linjal. Hippokrates lagde tre eksempler, der forholdet mellom de sirkulære vinklene skulle være henholdsvis 2:1, 3:1 og 3:2. I figuren under er $\alpha : \beta = 2 : 1$.



Her finner vi en halvsirkel med radius r med sentrum i A. Videre har vi en kvartsirkel med radius R med sentrum i B. Disse danner samtidig en rettvinklet trekant med kateter lik r, og med hypotenus lik R. Ved Pytagoras er $R^2 = 2 r^2$.

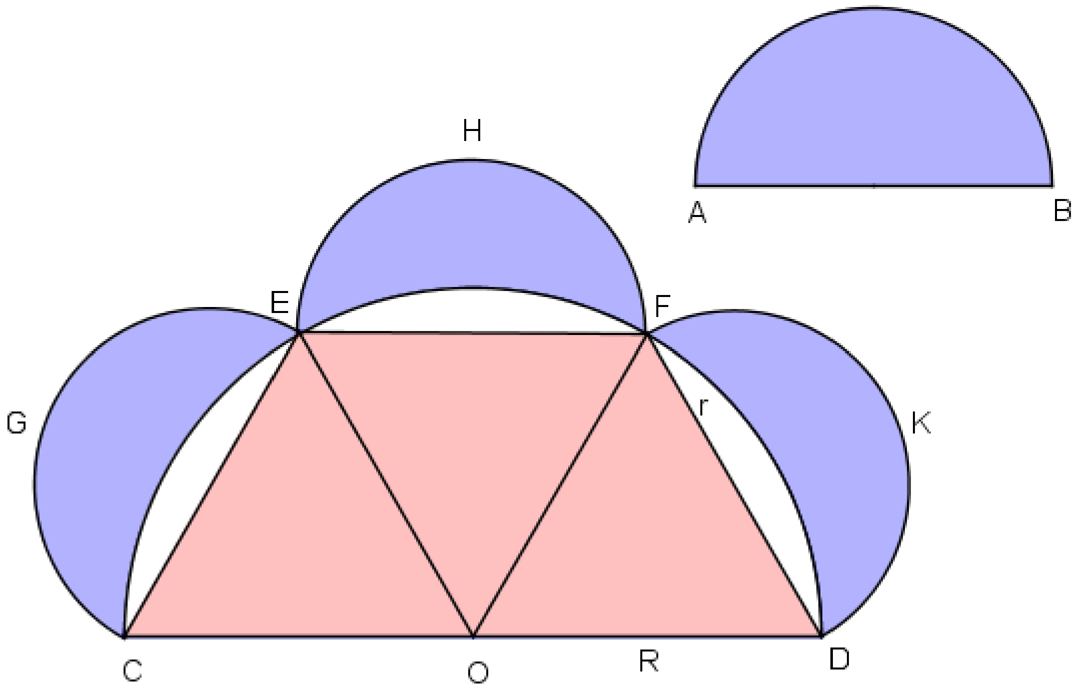
Arealet til halvsirkelen (A som sentrum): $\pi r^2 /2$.

Arealet til kvartsirkelen (B som sentrum): $\pi R^2 /4$, som ved å erstatte R^2 med $2 r^2$ kan skrives $\pi r^2 /2$, og vi ser da at arealet til halvsirkelen = arealet til kvartsirkelen.

Samtidig har disse to sirkelsegmentene en "del" felles. Denne felles delen kan trekkes vekk fra begge, slik at vi står igjen med at måneskalkens areal blir lik den store nedre trekanten = ½ R^2 (Scriba ?, s. 83).

Når forholdet mellom vinklene skulle være 3:1, konstruerte Hippokrates et trapes der forholdet mellom sidene var $1 : 1 : 1 : \sqrt{3}$, og der forholdet mellom vinklene skulle være 3:2, tok han utgangspunkt i en femkant der forholdet mellom sidene skulle være $\sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{3}$ (Scriba 1988, s.522).

Hippokrates brukte denne teknikken videre. I figuren under har vi en "halv" likesidet sekskant, der forholdet mellom sidene er 1 : 1 : 1 : 2.

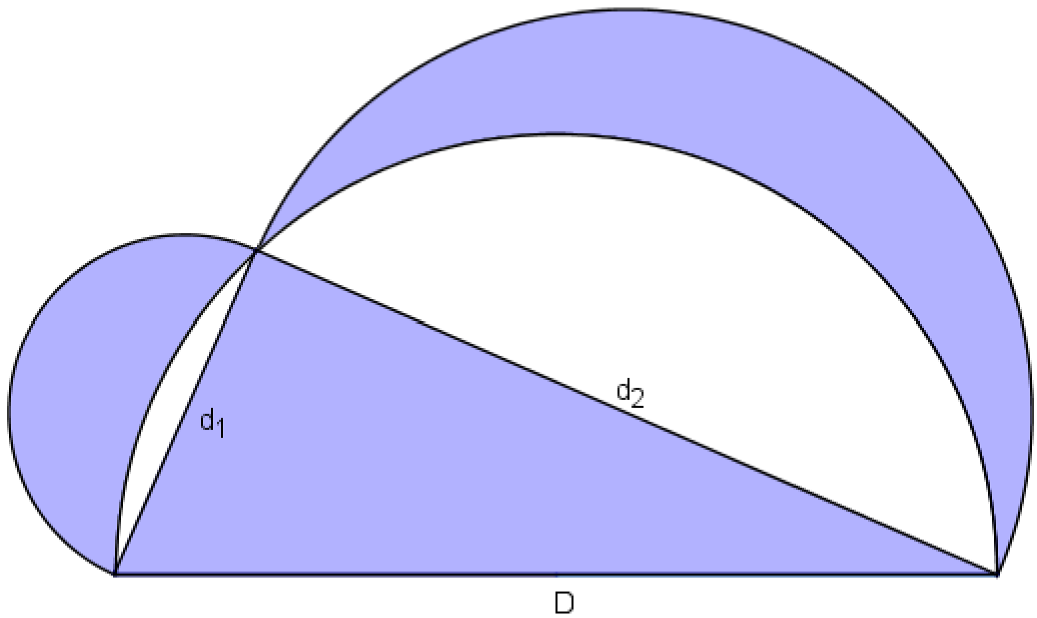


R = 1

Utfra sidene i dette trapeset tegnes halvsirkler med diameter lik sidelengden. Vi får da:
Arealet til halvsirkelen (O som sentrum): $\pi R^2 /2 = \pi/2$.
Arealet til de små halvsirklene: $\pi r^2 /2$, der $r = R/2$, som gir $A_{(\text{små halvsirkler})} = \pi/8$.
Man vil derfor trenge 4 små halvsirkler for å få like stort areal som den store halvsirkelen. Derfor tegnes også halvsirkel AB inn. Imidlertid er det 3 sirkelsegmenter (markert med hvitt på figuren) som inngår i begge arealområdene som er regnet ut. Disse kan derfor utelates, og man står igjen med at trapeset CDFE = måneskalkene CEG, EFH og FDK + halvsirkelen AB (Scriba 1988, s. 523).

Hippokrates antok dermed at denne metoden også kunne brukes for å finne en eksakt løsning på sirkelens kvadraturproblem, noe som senere skulle gjøre ham skuffet.

1400 år senere tok en annen matematiker, Ibn al-Haitham (kjent under navnet Alhazen i Vesten), opp hansken fra Hippokrates. Han foreslo en generalisering da han hadde bitt seg merke i at Pytagoras' teorem kunne benyttes når forholdet mellom vinklene var 2 : 1.



Ifølge Pytagoras vil $D^2 = d_1^2 + d_2^2$. Her vil arealet til den minste halvsirkelen (d_1 er diameter) være: $A(d_1)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{2}\right)^2$.

Arealet til den større halvsirkelen (d_2 som diameter): $A(d_2)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, mens arealet til den største halvsirkelen (D som diameter) vil være: $A(D)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2$.

Dette gir $A(d_1) + A(d_2)= \frac{\pi}{8}\left(d_1^2 + d_2^2\right) = \frac{\pi}{8}D^2 = A(D)$, noe som viser at summen av de to små halv-sirklene utgjør like mye som den store halvsirkelen.

Dersom vi så tar bort områdene som er felles (de hvite sirkelsegmentene over), står vi igjen med at de to måneskalkene tilsammen dekker et like stort areal som trekanten, dvs. $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Den første som gikk vitenskapelig til verks rundt problemet med sirkelens kvadratur var Arkimedes. Han benyttet seg av metoden som kalles exhaustion, hvor man stanser en uendelig innskrivningsprosess etter et endelig antall skritt (Lützen 1985, s. 35). Man antar at denne uendelige innskrivningsprosessen faktisk kan utføres, noe som egentlig er tvetydig. Arkimedes jobbet både med streng exhaustion, og mer approksimative metoder for å finne numeriske verdier. Dette blir da en videreføring av polygonenes kvadratur (nevnt over), som går ut på at man ser på forholdet mellom stadig tettere henholdsvis omskrevne og innskrevne polygoner i en sirkel. Arkimedes endte da tilslutt opp med følgende approksimasjon:

$$3\frac{10}{71} < \frac{omkrets}{diameter} < 3\frac{1}{7}\ .$$

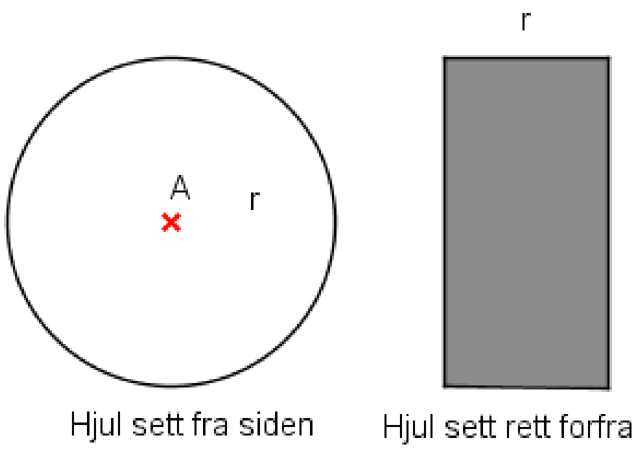
I Europa ble også problemet behandlet, men mange benyttet seg av grekernes fremgangsmåte, og lite ny kunnskap om temaet kom til syne. Imidlertid kan nevnes teologen Albertus de Saxonia som ved skolastisk metode gav et argument for at problemet var løselig: Siden det er mulig å både finne et innskrevet og et omskrevet kvadrat til sirkelen, vil det ved å kontinuerlig utvide det innskrevne mot det utskrevne, finnes et kvadrat med areal lik sirkelen. Slike argumenter, brukt som bevis, var vanlige i skolastikken (Lützen 1985, s. 109). Imidlertid kommer han også med en rekke argumenter for at problemet ikke lar seg løse, men det er tydelig at de Saxonia ikke har kjennskap til mange tidligere funn innenfor dette emnet.

En annen matematiker som må nevnes i denne perioden er Leonardo Pisano (Fibonacci), kanskje middelalderens største matematiker. Han arbeidet også noe med dette, men endte opp med samme metode og samme tilnærmede verdi som Arkimedes.

Hva bidro Leonardo med?

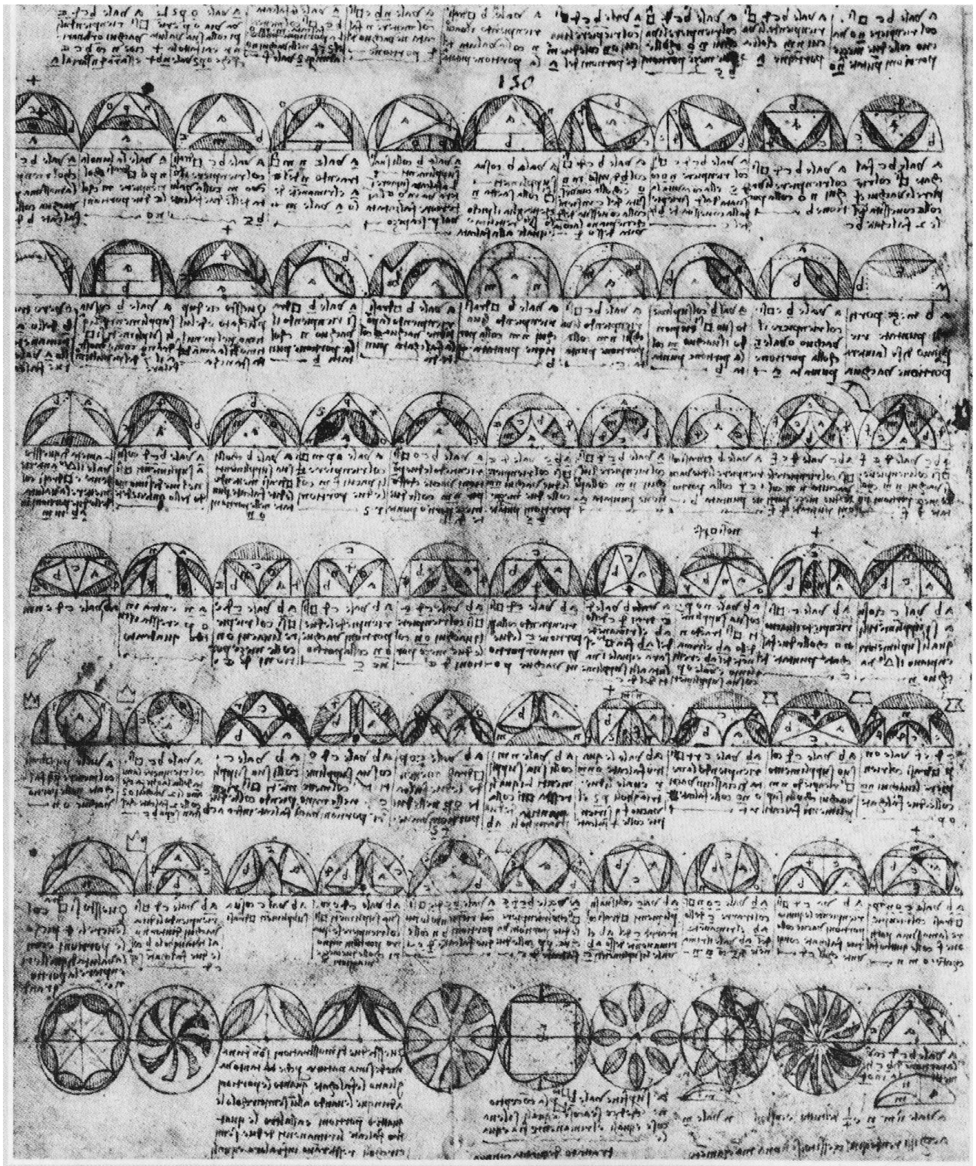
Det er særlig i Leonardos *Codex Madrid II* (ca. 1503) vi finner tilløp til egen matematisk forskning, der han i stor grad arbeider med å kvadrere flater med krumme sider. Disse deler han inn i to ”hovedområder”; ”falcates” – trekanter med varierende antall krumme sider, og ”portiones” – krumme figurer dannet av en kurve og en linje. Disse forsøkte han først å omdanne til rektangler, hovedsakelig ved hjelp av mekaniske løsninger/tilnærminger, som er forståelig med bakgrunn i da Vincis bakgrunn innen ingeniørkunsten. Han var selv klar over at løsningene hans ikke alltid var holdbare rent geometrisk, men han fremførte da at de hadde bakgrunn i både filosofi og geometri, og at i bunn og grunn er all matematisk vitenskap filosofisk spekulasjon (DSB 1991, s. 240).

Flere av “løsningene” Leonardo kom opp med var et resultat av studier av arkitekten Vitruvius Pollio sitt arbeid som levde rundt år 0. Blant annet fant han sirkelens omkrets ved å la en tråd legges ut ved hjelp av et hjul som fulgte sirkelbuen, og deretter måle trådens lengde! Leonardo var opptatt av å beregne kurvers lengde i planet ved simpelthen å forestille seg dem ”rettet” ut. Han refererer til Vitruvius, som målte avstand ved å beregne gjennomsnittet av gjentatte ganger å trekke vogner over en bestemt strekning. Sammenhengen kom frem for sistnevnte ifølge Leonardo ved å trekke paralleller til distansen dyrene som trakk vognene gikk. Denne metoden kunne ifølge Leonardo også brukes for å finne sirkelens kvadratur:



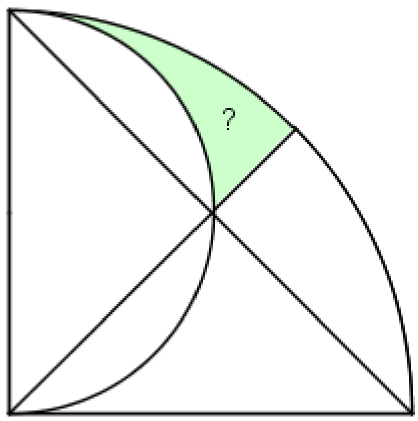
Dersom et hjul med hjulbredde lik hjulets radius ruller en omdreining rundt, vil den avsette et avtrykk lik sirkelens (hjulets) kvadratur (Clagett 1969, s. 107). Dessverre viser her Leonardo nok en gang at hans matematikk er beheftet med elementære feil. $2\pi r \cdot r = 2\pi r^2 \neq \pi r^2$. Et hjul med bredde lik r/2 ville imidlertid frembringe en flate med det ønskede areal, selv om området blir rektangelformet.

Leonardo var vel kjent med metoden for å finne ”måneskalkers” kvadratur. Her synes han å være påvirket av arbeidet til Hippokrates og Giorgio Valla, og Clark hevder at det var gjennom Vallas utgivelse av sin encyklopedi i 1501 at Leonardo ble gjort kjent med Hippokrates’ arbeid (Clark 1968, Appendix D s. 1i). Faksimilen nedenfor er hentet fra Codex Atlanticus, der Leonardo tar for seg en rekke ulike typetilfeller av måneskalker (totalt 180 forskjellige typer), og ved å regne ut ulike kombinasjoner av disse blir i stand til å finne et uttrykk for arealet av den ønskede flate.



Imidlertid benytter Leonardo seg bare av velkjente teknikker etter Hippokrates, det er sistnevntes tilnærmingsmåter som benyttes her, og Leonardo bringer intet nytt utover en viss oppfinnsomhet når det gjelder å konstruere spesielle problemer for så å løse disse (Marinoni 1982, s.162).

Figuren nedenfor er hentet fra faksimilen over, og kan illustrere et av de utallige typetilfellene av måneskalkers areal og kvadratur som Leonardo jobbet med. Leonardo ønsket her å finne arealet av det skyggelagte området.



Radius (i kvartsirkel) = r

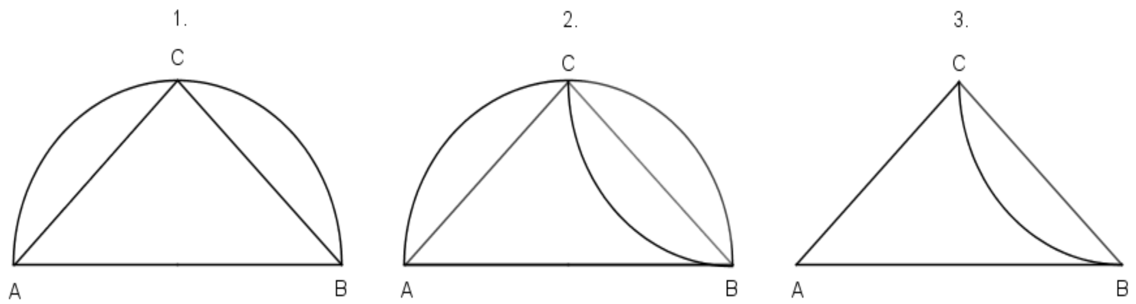
Her kan man finne arealet av det ønskede området ved først å finne arealet til en av de små, likebeinte trekantene: $\frac{r \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{r^2}{4}$. Deretter tar man arealet av halvsirkelen: $\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{8}$.

Ved hjelp av dette finner man arealet til de to sirkelsegmentene som dannes ved halvsirkelen og den ene likebeinte trekanten: $\frac{\pi \cdot r^2}{8} - \frac{2r^2}{8} = \frac{r^2(\pi - 2)}{8}$, som gir arealet til et sirkelsegment lik $\frac{r^2(\pi - 2)}{16}$. Arealet til kvartsirkelen blir $\frac{\pi r^2}{4}$, mens halvparten av denne har flateinnhold lik $\frac{\pi r^2}{8}$. Ved nå å trekke arealet til den likebeinte trekanten og arealet til et sirkelsegment fra denne åttedels-sirkelen, finne man at arealet til den ønskede flaten blir $\frac{r^2(\pi - 2)}{16}$, dvs. at den skraverte flaten har like stort areal som sirkelsegmentet i denne oppgaven.

Man kan få et inntrykk av at Leonardos store interesse for måneskalkers / krumme flaters areal er noe todelt. På den ene siden arbeider han med et klassisk matematikkproblem knyttet opp mot sirkelens kvadratur, men samtidig kan det virke som om dette arbeidet appellerte til hans kunstneriske side. Han bruker en rekke ulike *folio* til å tegne hva vi i dag ville kalle ”passer-roser”, skisser som gjerne akkompagneres av mer kunstneriske skisser (Marinoni 1982, s. 159 – 171). Mye tyder derfor på at da Vinci så et bruksområde for dette arbeidet knyttet opp mot byplanlegging, og ikke minst arkitektur. Vi kan finne plantegninger av administrasjonsbygninger og kirker i arbeidene hans, tegninger der man kan gjenfinne disse ”passer-rosene” i arkitekturen og formgivningen.

Å gå i dybden i de enkelte typetilfellene er vanskelig. Leonardos enkeltskisser er svært små, og til dels trykket helt inn i hverandre. De er delvis "forklart" underveis med hans nesten uleselige håndskrift (speilvendt) (Marinoni 1982, s. 146-147). Allikevel kan man danne seg et bilde av hvordan han jobbet, og hva han jobbet med. Det kan se ut som om han forsøkte å skape så mange typetilfeller / ulike "problemer" som mulig. Der Hippokrates hovedsakelig arbeidet med problemer knyttet opp mot omskrevne halvsirkler til trekanter, kan det virke som om mye av Leonardos arbeid tar utgangspunkt i en halvsirkel, for så å tegne nye halvsirkler i denne med redusert (ofte halvert) radius (Marinoni 1982, s. 147). Dette kombineres da på en rekke måter, gjerne i kombinasjon med innskrevne kvadrater og trekanter. Enkelte av disse figurene er det i utgangspunktet vanskelig å forstå hvordan det skraverte områdets areal skal finnes, spesielt siden forholdet mellom de ulike delene i skisse kommer frem av (den noe uleselige) teksten, men andre typetilfeller er av en slik art at også en flink ungdomsskoleelev kan være i stand til å finne det ønskede arealet.

Leonardo var ikke spesielt begeistret for aritmetikk, og det kan virke som om han heller ikke var spesielt flink i dette. Han brukte derfor heller mekaniske tilnærminger for å finne arealer til krumme flater. Da slapp han også å utføre en rekke kalkulasjoner. Følgende mekaniske måte benyttet han seg av:

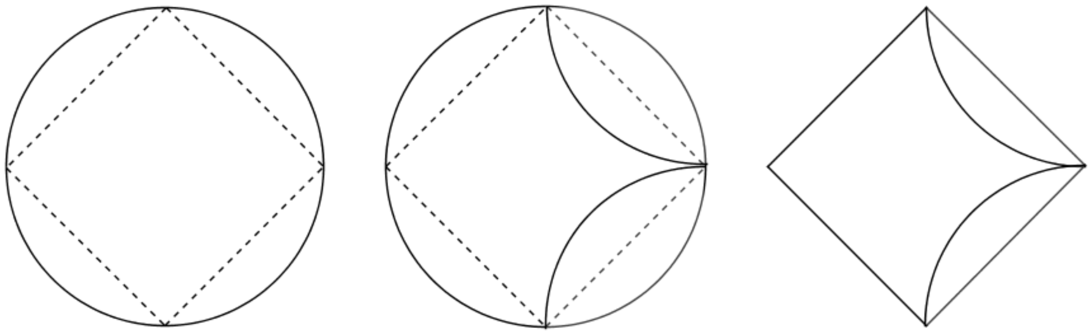


1. Han startet med å tegne en likesidet trekant omskrevet av en halvsirkel. Han får da "dannet" to sirkelsegmenter.

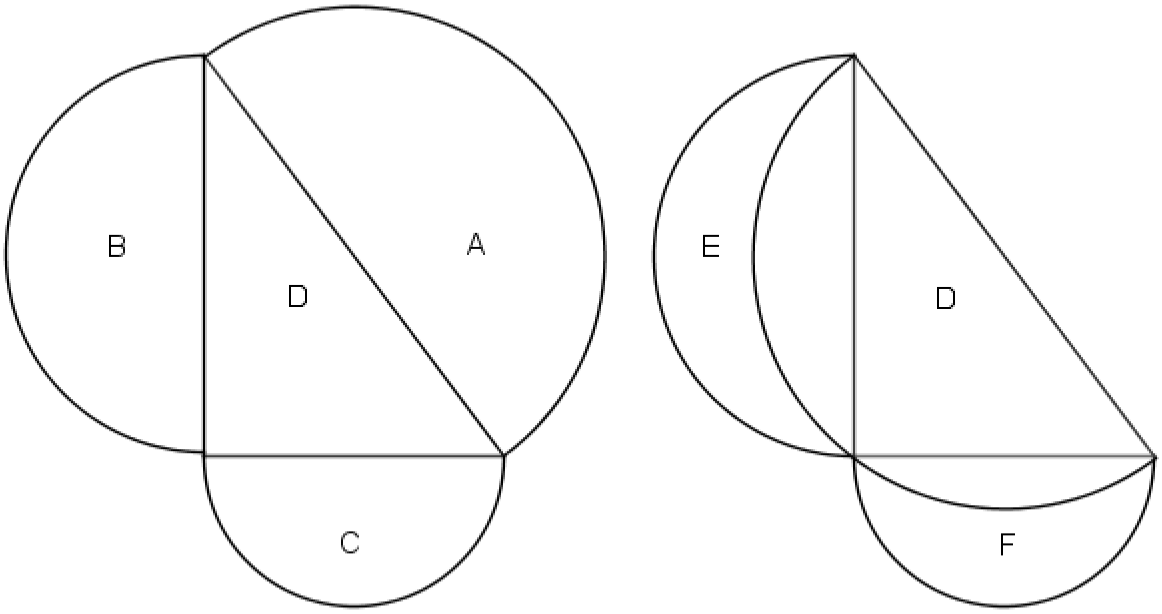
2. Sirkelsegmentet BC "brettes" så over den likesidete trekanten, slik at dette arealet trekkes fra.

3. Deretter tar han sirkelsegmentet AC og "fyller" inn i den nå ledige plassen mellom BC.

Tilsvarende fremgangsmåte benytter Leonardo seg av for å finne arealet av det innskrevne kvadratet i sirkelen under.

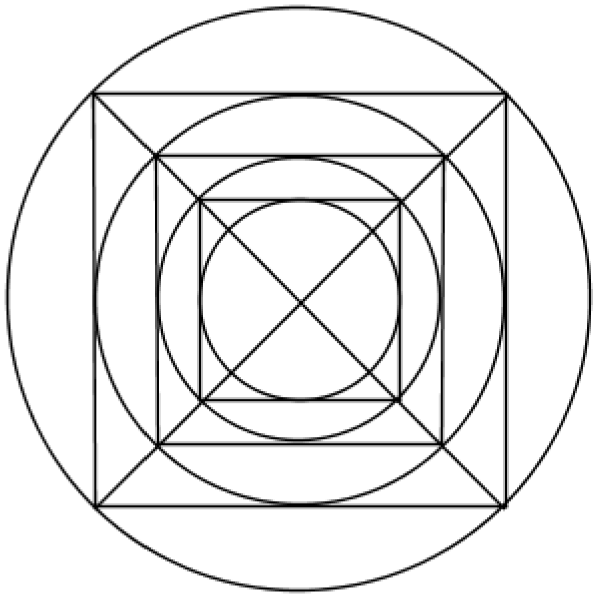


Kevin Allison Nies, forfatter, fysiker og driver av nettstedet hypatiamaze hevder at Leonardo på egenhånd fant ut det samme som Alhazen gjorde om måneskalkers kvadratur ca 1000 e. Kr. Alhazens arbeid var ikke kjent i Europa før 1899, noe som forteller oss at Leonardos arbeid var en gjenoppdagelse av Alhazens arbeid:



Leonardo starter her med å tegne en tilfeldig rettvinklet trekant (D), og lar sidene i disse være utgangspunktet i halvsirklene (A, B og C) som så tegnes inn. I følge Pytagoras' setning tilsvarer arealet av halvsirkel A summen av arealene til halvsirklene B og C (vist under forrige kapittel). Ved å "brette" halvsirkel A over trekant D, danner man måneskalkene E og F. Arealet av disse måneskalkene må da tilsvare arealet til trekanten. Alhazens løsning, som Leonardo her kopierte, er vist tidligere i dette kapittelet.

Leonardo tok også utgangspunkt i figuren til høyre (*nøkkelfiguren*) når han skulle arbeide med andre problemer knyttet til måneskalkers areal. I denne figuren er arealet av sirkelen ytterst det dobbelte av den innenfor. Det følger av at korresponderende deler står i samme forhold til hverandre som arealene til sirklene.



Vi setter radius i innerste sirkel lik x. Så finner vi ved Pytagoras lengden til halve diagonalen i innerste sirkel. Dette er samtidig radius i neste sirkel (r_2 er radius i sirkel nr. 2 osv.).

$$x^2 + x^2 = r_2^2.$$

$$r_2^2 = 2\,x^2.$$

$$r_2 = x\,\sqrt{2}.$$

Vi finner altså at neste sirkel har en radius √2 større enn den foregående.

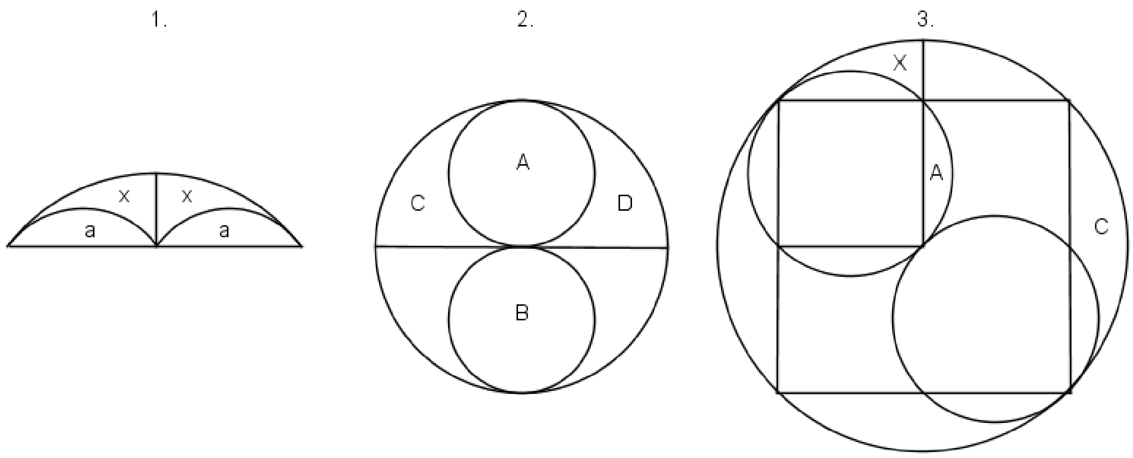
$$(x\,\sqrt{2})^2 + (x\,\sqrt{2})^2 = r_3^2.$$

$$r_3^2 = 2x^2 + 2x^2 = 4x^2.$$

$$r_3 = 2x\ (=\sqrt{2} \cdot r_2).$$

Og slik fortsetter sammenhengen. Enhver ”utenforliggende” sirkel vil ha en radius √2 større enn den foregående, og arealet til en utenforliggende sirkel vil dermed være dobbelt så stort som arealet til sirkelen direkte innenfor.

Tilsvarende sammenheng finner vi mellom kvadratene i figuren. Siden disse dannes på samme måte som sirklenes radier, vil også sidekantene her ha et fast forholdstall (=√2) mellom seg. Derfor vil ethvert kvadrat ha dobbelt så stort areal som kvadratet direkte innenfor.



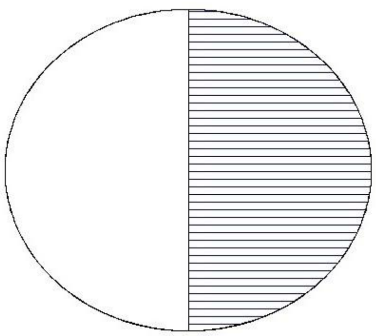
(Nies, www.hypatiamaze.org)

1. Sirkelsegmentet som avgrenses av den ytterste sirkelen i nøkkelfiguren er 4 ganger så stor som segmentet som dannes av den tredje sirkelen. Det samme forholdet finner vi igjen i tilfelle 1 over; a utgjør en fjerdedel av hele sirkelsegmentet, noe som dermed tilsier at arealet til a er lik arealet til flaten x (en flate Leonardo kaller *falcata*).

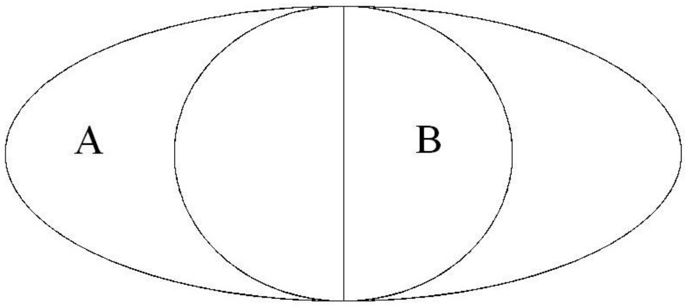
2. Her utgjør henholdsvis A og B hver en fjerdedel (fordi radius til hhv A og B utgjør halvparten av radius i den store sirkelen) av den totale sirkelen. Dermed vil arealet til A = C + D = B.

3. I figur 3 finner vi en litt mer utvidet variant av tilfelle 1, der x = a etter samme begrunnelse som i tilfelle 1 (og C = 3A).

Man finner også en mer mekanisk tilnærming til problemet rundt krumme flaters kvadratur i Leonardos arbeid. I Codex Atlanticus (folio 369) tar han i bruk en metode knyttet til bevegelse, en metode som kan sees som en begynnelse til det som senere blir kalkulus.



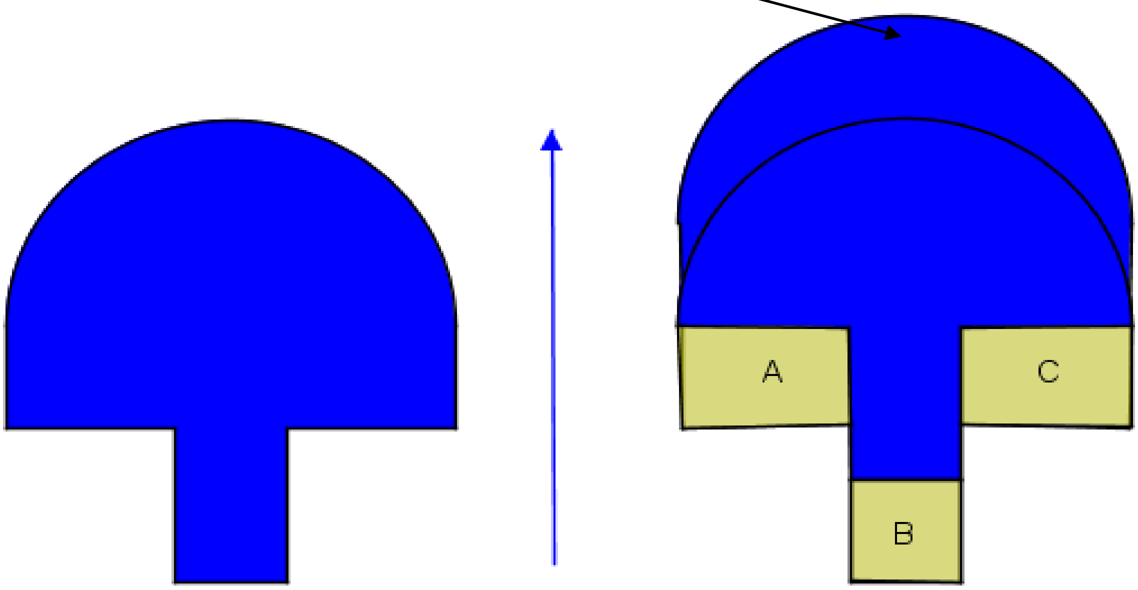
Her starter Leonardo med å tegne en sirkel, en sirkel han senere deler i to halvsirkler. Den ene halvsirkelen deles så opp i en rekke ørsmå segmenter. Disse segmentene parallellforskyves så mot venstre helt til de kommer til venstre for sirkelbuen. Vi får da dannet en oval (en ellipse).



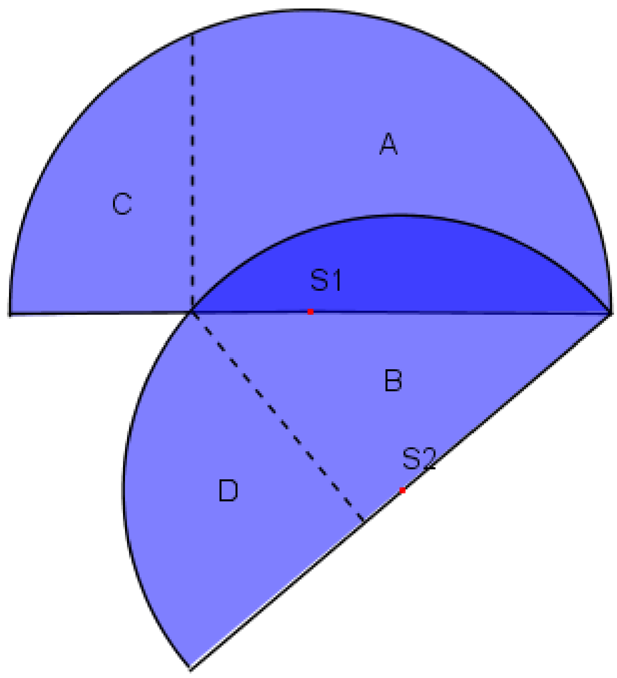
Her har da segmentene fra område B, dannet område A (arealene er like store fordi ethvert område under B er parallellforskjøvet over til område A), og vi kan tenke oss tilsvarende operasjon gjort med utgangspunkt i den andre opprinnelige halvsirkelen.

Ved å tegne denne ellipsen, utvikler Leonardo en slags justerbar passer, noe som skulle bli forløperen til den elliptiske passeren (Nies, www.hypatiamaze.org).

Videre eksperimenter Leonardo i Codex Atlanticus (folio 152) med en ”skrapelignende” figur (nedenfor). Ved å la denne forflytte seg vertikalt, vil arealet til det krumme området (måneskalken som dannes ved at gjenstanden forflytter seg) tilsvare summen av arealene til område A, B og C. Imidlertid utleder han ikke dette noe videre, han nøyer seg med det intuitive, mekaniske beviset.

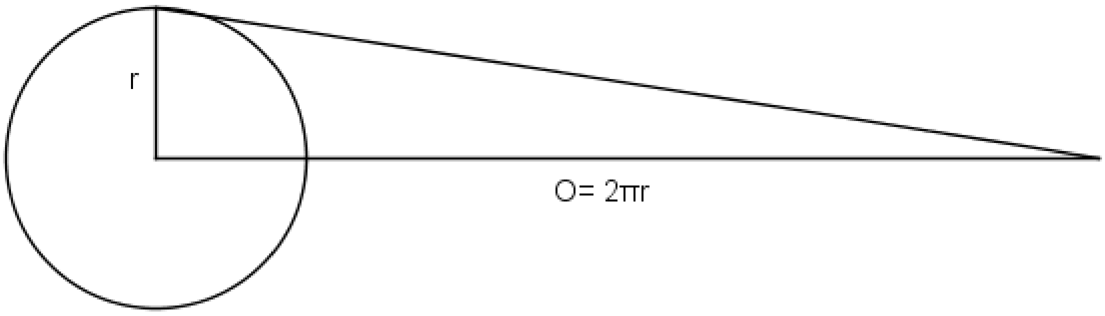


Den siste varianten av en mekanisk tilnærming finner man i manuskript G (folio 58r). Her tegner da Vinci en halvsirkel, som han deretter roterer rundt høyre endepunkt. De to halvsirklene vil da ha et område felles (så lenge rotasjonsvinkelen er mindre enn 90°). Område C er det segmentet av halvsirkelen som dannes ved å oppreise en normal i skjæringspunktet mellom sirkelbuen til sirkel nummer to og grunnlinjen i sirkel nummer en. Område A er resten av halvsirkel nummer en minus det som er felles i halvsirkel en og to. Område D er sirkelsegmentet som ligger til venstre for den nedfelte normalen fra skjæringspunktet mellom sirkelbue til sirkel nummer to, og grunnlinjen til nummer en. Område B er resten av halvsirkel nummer to, minus det som er felles med halvsirkel nummer en.



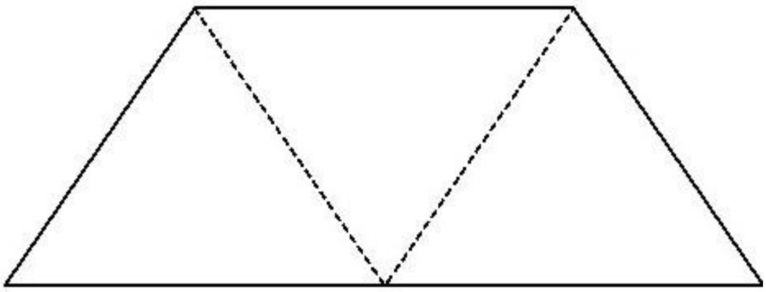
Derfor vil område A + C være like stort som område B + D. Dessverre nøyde ikke Leonardo seg med dette. Han antok også at område A og B var like store, noe som da måtte medføre at også C og D var like store, noe som åpenbart er feil (Nies, www.hypatiamaze.org). I et enkelt tilfelle (ved rotasjonsvinkel 45° vil imidlertid Leonardos antagelser stemme). Da vil sirkelbuen fra halvsirkel nummer 2 skjære halvsirkel nummer 1 i sentrum av sistnevnte. Videre vil det kunne oppreises en normal fra sentrum i halvsirkel 1, samtidig som det nedfelles en normal til sentrum i halvsirkel 2.

Leonardo kjente til Arkimedes arbeid, men Clagett hevder at Leonardo trolig ikke forstod Arkimedes' løsning fullt ut. Han anerkjente Arkimedes' første teorem som viser sammenhengen mellom en sirkel og en rettvinklet trekant med kateter lik henholdsvis sirkelens omkrets og radius.

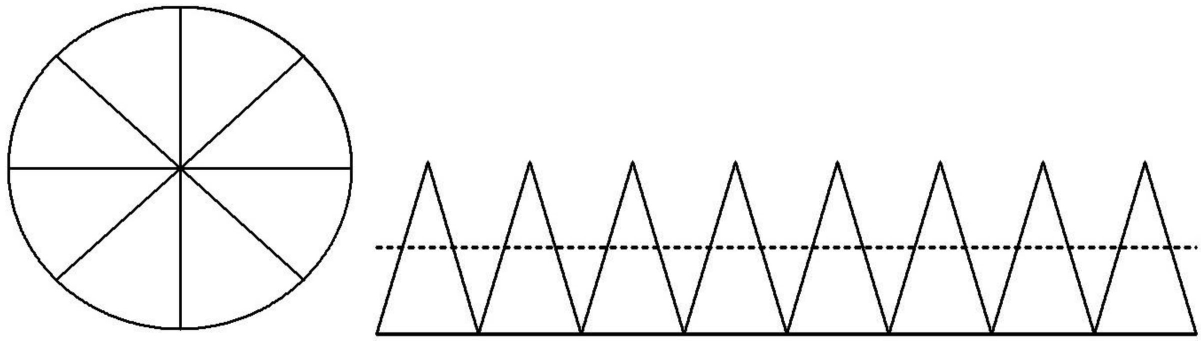


Leonardo var imidlertid ikke tilfreds med Arkimedes tredje teorem, hvor sistnevnte gir en approksimasjon for $\pi = \frac{22}{7}$ med bakgrunn i forholdet mellom innskrevne og omskrevne polygoner. Hovedvekten av hans arbeid ble så lagt i å gå videre forbi det 96-sidige polygonet.

Han startet med å innskrive et trapes med 60º vinkler fra grunnlinjen i en sirkel. Dette trapeset ble så inndelt i 3 likesidete trekanter:

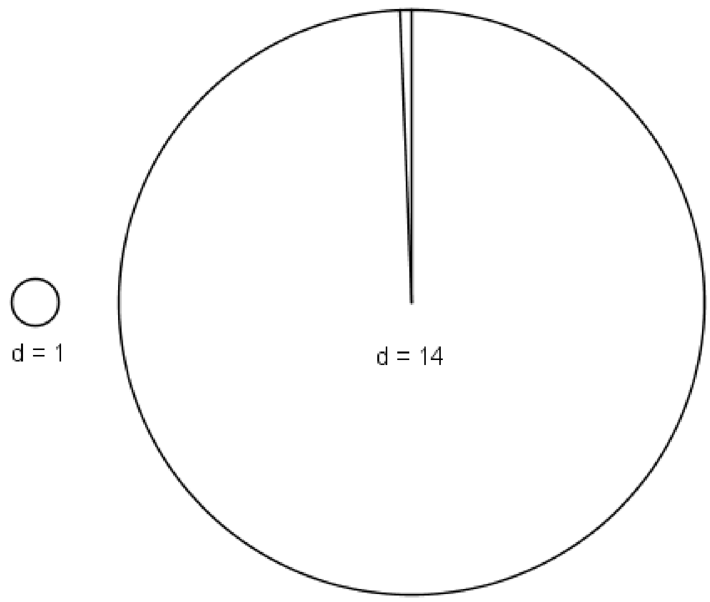


Denne metoden videreutviklet han, han delte halvsirkelen opp i 16 like sirkelsektorer, hvorpå åtte og åtte ble satt sammen til parallellogrammer for på den måten og finne et uttrykk for det samlede areal.



En variant av denne fremgangsmåten var å dele en sirkel inn i et stort antall sirkelsektorer, sirkelsektorer som senere ble plassert ved siden av hverandre på en felles grunnlinje. Hver av disse sektorene ble så kuttet slik at ”toppene” kunne fylle ut de ”tomrommene” som manglet mellom sektorene.

Han kjente også til Euklids teorem om at forholdet mellom sirklenes areal er som forholdet mellom kvadratene på sirklenes diametre. Dette benyttet han seg av ved å sammenligne sirkler med diameter henholdsvis 1 og 14, hvorpå sistnevnte ble inndelt i 196 sirkelsektorer, der hver sirkelsektor i den store nå var lik den minstes areal.



Arealet til den minste sirkelen: $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

Arealet til den store sirkelen: $\pi \cdot 7^2 = 49\pi$.

Sirkelsektorens areal blir da: $\frac{49\pi}{196} = \frac{\pi}{4}$ = arealet til den minste sirkelen.

I Codex Atlanticus arbeidet Leonardo videre med denne teorien, nå jobbet han med sirkler hvor forholdet var 1:1000, og han hevdet at forskjellen mellom sirkelsektorenes areal og den lille sirkelen nå var umerkelig, og ved hjelp av logikk hevdet han at dersom dette forholdet ble 1 : 1 000 000, ville denne ”løsningen” bringe oss nærmere sannheten enn Arkimedes’ arbeid (DSB 1991, s. 237). Den 29. november 1504 skriver så Leonardo i notatene sine:

> *”På den hellige St. Andreas-natten, da natten og papiret tok slutt, fant jeg løsningen på problemet rundt sirkelens kvadratur”.* (Schrőer 1998, s. 42)

Imidlertid er det en svakhet ved hele dette arbeidet i at Leonardo ikke kommer opp med noen ny verdi for π. For å gjøre dette var han nødt til å ta utgangspunkt i Arkimedes’ tidligere verdi, en metode han selv ikke uten videre godtok (se over). Han karakteriserte denne som ”*ben detta e male data*” (vel sagt, dårlig vist), mens hans egen ”løsning” i ettertid kun har fått karakteristikken ”*detta*” (kun sagt) av andre.

Oppmuntret av sin egen oppdagelse fortsatte da Vinci sitt arbeid innen geometrien, blant annet ved å omdanne nye sirkelsektorer til rettlinjede figurer. Han lagde en serie kvadrater der hvert nytt kvadrat var det dobbelte av det forrige, og der hvert kvadrat i serien hadde en innskrevet sirkel. Han doblet sirkelens radius for å konstruere en sirkel med firedobbelt areal. Imidlertid var mye av arbeidet hans preget av aritmetiske unøyaktigheter; han brukte $\frac{1}{3/2}$ som et forholdstall for å bestemme forholdet mellom radiene (rett forhold er $\frac{1}{\sqrt{2}}$), i tillegg kan det se ut som han ikke var klar over forskjellen på en aritmetisk og en geometrisk rekke.

Hva fulgte i ettertid?

Etter Leonardo fulgte nok en periode der de som arbeidet med problemet, benyttet seg av Arkimedes metode, og derigjennom gjorde stadig bedre tilnærminger, uten å komme nærmere selve problemets ”løsning”. Ludolph van Ceulen, en tysk-hollandsk matematiker, klarte å beregne π med 35 sifres nøyaktighet ved å beregne siden i en 2^{62}-kant! (Lützen 1985, s. 114). I tillegg kom en rekke matematikere opp med konstruksjoner som alle ga gode tilnærminger til π. Her kan blant annet nevnes Lomborg, bedre kjent under navnet Longomontanus, som til tross for at han må ha kjent til kritikken mot nøyaktigheten ved sirkelkvadrering, fortsatte med dette, og holdt fast på sin metode. Han kom frem til samme verdi for π ved bruk av flere ulike fremgangsmåter, noe som gjorde at han trodde han hadde funnet den eksakte verdien..

Imidlertid var det ved fremveksten av analysen på 1600-tallet at vi fikk et nytt redskap for å beregne π med større grad av nøyaktighet. John Wallis forsøkte å finne en tilnærmet verdi for π ved å beregne arealet til en halvsirkel med diameter lik 1 (som har arealet $\frac{\pi}{8}$) (Lützen 1985, s. 116). For å finne dette integralet beregnet han:

$$\int_0^1 \left(x - x^2\right)^0 dx = \int_0^1 1dx = 1$$

$$\int_0^1 \left(x - x^2\right)^1 dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} \qquad osv.$$

James Gregory kom også frem til en annen kjent formel for π. Denne tilskrives også Leibniz, men det er allment kjent at Gregory var tidligere ute, faktisk var denne også kjent fra det indiske vitenskapelige samleverk ført i pennen av Nilakantha, der regelen er gitt på verseform (Lützen, 1985 s. 122). Gregorys formel $\left(\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} ....\right)$ gir i likhet med Wallis`formel en meget langsom konvergering av rekken, man må faktisk ta med over 1000 ledd for å bestemme π med tre desimalers nøyaktighet. Imidlertid viser Gregory til en mer generell formel, der den generelle arctan-rekken er utgangspunktet:

$\frac{\pi}{6} = \arctan t = t - \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{5t^5} - \frac{1}{7t^7} + ...$ Her vil leddene gå veldig raskt mot null, og desto lavere t-verdi som her settes inn, desto raskere konvergerer rekken. Dette førte til at denne formelen har dannet grunnlaget for senere utregninger av π (Lützen 1985, s. 124). Varianter og forenklinger av Gregorys formel, har gitt stadig mer nøyaktige verdier for π; blant annet utledet Machin at $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$. Den norske matematikeren Carl Størmer, fant i 1896 en raskere formel:

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} - 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943}.$$

Imidlertid hevdes det at den største utfordringen ved å finne en eksakt verdi for π ved disse metodene, ikke først og fremst var å beregne π korrekt, men derimot å overvinne kjedsomheten ved å gjennomføre de utallige beregningene. Bruken av datamaskiner har imidlertid ført til at disse metodene i våre dager har fått sin "renessanse".

Dette gjorde at man etter hvert begynte å undersøke andre egenskaper ved π. Man var klar over på 1700-tallet at dersom man skulle finne en konstruksjon av sirkelens kvadratur ved hjelp av passer og linjal, måtte man finne en endelig verdi for π ved hjelp av aritmetiske operasjoner og rotutdragning. Imidlertid kunne ingen ennå bevise dette matematisk. Imidlertid skulle det vise seg at ettersom man fant flere og flere uendelige uttrykk for π, ble man overbevist om at et endelig uttrykk for π ikke fantes (Lützen 1985, s. 125). Lambert, påvirket av Eulers arbeid, satt opp to uttrykk: $e^x - \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x} + \frac{1}{10x} + \frac{1}{14x}....$ og $\tan x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x} - \frac{1}{5x} - \frac{1}{7x}......$. Utfra dette viste han følgende teorem (Hobson 1953, s. 43):

1) Hvis x er et rasjonalt tall ulikt null, kan e^x ikke være et rasjonalt tall.
2) Hvis x er et rasjonalt tall ulikt null, kan tan x ikke være et rasjonalt tall.

Dersom x = (1/4)π, er tan x=1, noe som gjør at (1/4)π, eller π, ikke kan være et rasjonalt tall. Det hevdes imidlertid at mye av Lamberts arbeid allerede var foretatt av Legendre, og sistnevnte beviste snart at også π^2 måtte være irrasjonalt (Hobson 1953, s. 44).

Legendre hadde imidlertid ikke noe bevis for at det også fantes såkalte transcendente tall, selv om han, og mange andre, hadde en sterk formening om eksistensen av disse. Liouville viste dog i 1851 at tall er transcendente dersom de i sin desimalfremstilling har siffer ≠ 0 på henholdsvis plassene 10., 10^2. osv. etter desimaltegnet (Lützen 1985, s. 125). Ferdinand Lindemann viste imidlertid at π var et transcendent tall, slik at π dermed ikke kan konstrueres (og selvfølgelig heller ikke √π). Han beviste dette basert på Hermites bevis fra 1873 for at *e* var transcendent (Kazarinoff 1970, s. 126).

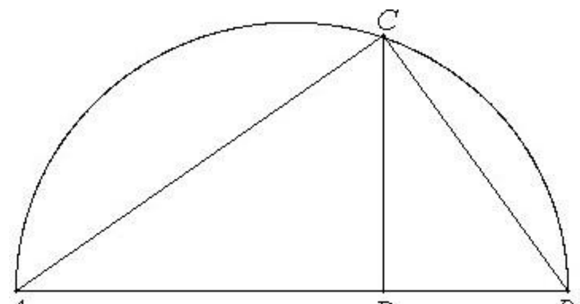
Kubens fordobling

Beskrivelse av problemet.

Det verserer flere ulike legender knyttet til opphavet til dette problemet. Den mest kjente er fra antikkens Aten: I siste halvdel av 400-tallet f. Kr. raste det en pestsykdom i Aten. En utsending fra polisen reiste derfor til orakelet i Delfi for å få svar på hva som måtte gjøres. Svaret gikk ut på at Apollons kubiske alter måtte fordobles, noe atenerne straks gikk i gang med. De lagde et nytt alter, der alle dimensjoner ble fordoblet. Pesten fortsatte, og dermed gikk det opp for atenerne at de ikke hadde fordoblet volumet, men åttedoblet det. En annen versjon er knyttet til sagnkongen Minos (ca. et millennium tidligere). Minos skulle bygge et gravsted til Glaucos, hvor lengde, bredde og høyde hver var 100 fot, men han endret seg underveis og fant ut at graven var for liten for en av kongelig ætt. Den burde være dobbelt så stor! Dermed gav han beskjed om at gravens sider alle skulle fordobles (Lützen 1985, s. 46). Dette inspirerte matematikere til å finne ut hvordan man kunne fordoble et gitt legemes volum, uten å endre legemets fasong.

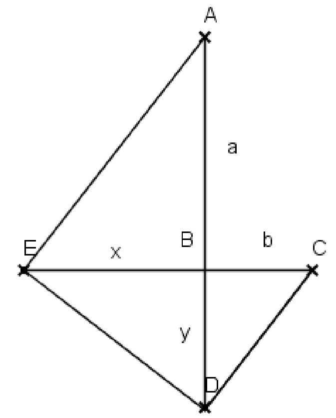
Hva var gjort?

Euklid hadde en metode for å konstruere kvadrater med samme areal som et vilkårlig gitt rektangel, ved å konstruere en såkalt mellomproporsjonal.



Periferivinkelsetningen forteller oss at $\angle$ ACB = 90° = $\angle$ ADC. $\angle$ACD = 90° - x°. $\angle$ACB = $\angle$ACD + $\angle$DCB = 90°. $\angle$DCB = $\angle$ACB - $\angle$ACD = 90°- (90° - x°) = x°, noe som gir $\angle$DCB = $\angle$CAD, noe som også gjør $\angle$ACD = $\angle$CBD (vinkelsummen i en trekant = 180°). Trekantene er dermed formlike, slik at $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, noe som også kan skrives som

$\frac{AD}{CD} \cdot CD \cdot DB = \frac{CD}{DB} \cdot CD \cdot DB \quad \Rightarrow \quad AD \cdot DB = (CD)^2$. Dette viser oss at et kvadrat med sider CD vil ha samme areal som et rektangel med sider hhv. AD og DB. Grekerne kunne nå via denne metoden kvadrere et hvilket som helst polygon gjennom først å dele polygonet opp i trekanter, videre konstruerte de rektangler med samme areal (halverte høyden eller grunnlinjen), for tilslutt å kvadrere rektanglene ved å bruke mellomproporsjonalmetoden gjentatte ganger.



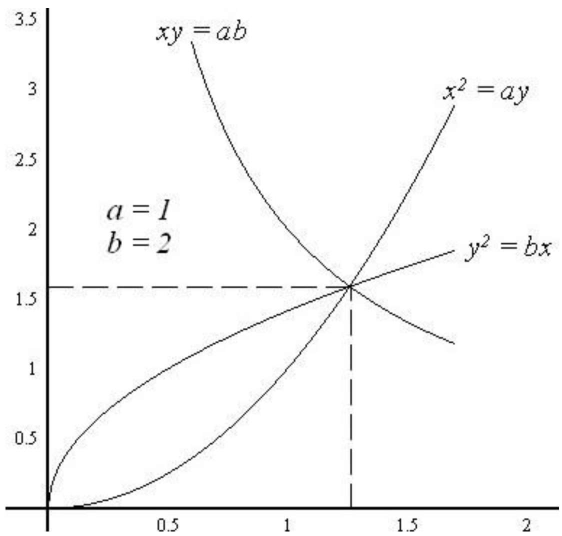
I) $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Dette pga formlikhet (CD er parallell med AE, og vinkel EBA = 90°).

II) Dette gir $x^2 = ay$ og $y = \frac{ab}{x}$ som etter at y erstattes kan skrives $x^3 = 2ab$.

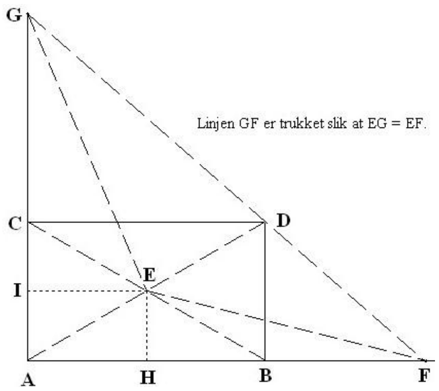
Grekerne hadde her funnet en geometrisk løsning på den algebraiske likningen

$a \cdot b = x^2$ noe som i tilfellet kubens fordobling skulle tilsvare likningen $(2a)^3 = x^3$ eller $x = \sqrt[3]{2a}$.
Hippokrates viste at kubens fordobling kunne dannes ved hjelp av to mellomproporsjonaler (Lützen 1985, s. 49).

En annen tilnærming til dette problemet var å ta utgangspunkt i likningene over, for så å løse disse ved hjelp av kjeglesnitt. Menaikmos (ca. 350 f. Kr) tok i bruk denne metoden:



Han fant at skjæringspunktet mellom disse grafene ville være $\left(\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4}\right)$ ved å løse disse likningene (Lützen 1985, s. 54). Apollonios (fra Perga) tok i likhet med Menaikmos utgangspunkt i bruk av kjeglesnitt, men hans metode ble senere noe modifisert av Heron:



I) Man starter her med å trekke linjene AC og AB. Disse står vinkelrett på hverandre, og danner sidene i rektangelet ABDC.
II) Punktet E er sentrum i dette rektangelet.
III) La en linje gjennom punkt D skjære forlengelsen av AB i F, og AC i G på en slik måte at EG = EF.
IV) Da vil henholdsvis BF og CG være de søkte mellomproporsjonaler.

$$\text{Bevis}: \mathrm{EG} = \mathrm{EF} \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{IE}^2 + IG^2 = EH^2 + HF^2 \quad (1)$$

$$\text{som kan skrives}: \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(CG + \frac{1}{2}AC\right)^2 = \left(\frac{1}{2}AB + BF\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

$$\text{som igjen kan skrives}: CG \cdot AG = BF \cdot AF \qquad \text{eller} \quad \frac{CG}{BF} = \frac{AF}{AG}.$$

Vi har videre tre formlike trekanter: AFG, CDG og BFD.

Disse forteller oss at $\dfrac{AF}{AG} = \dfrac{CD}{CG} = \dfrac{BF}{FD}$ $\quad$ *eller* $\dfrac{CG}{BF} = \dfrac{AF}{AG} = \dfrac{CD}{CG} = \dfrac{AB}{CG} = \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{BF}{AC}$.

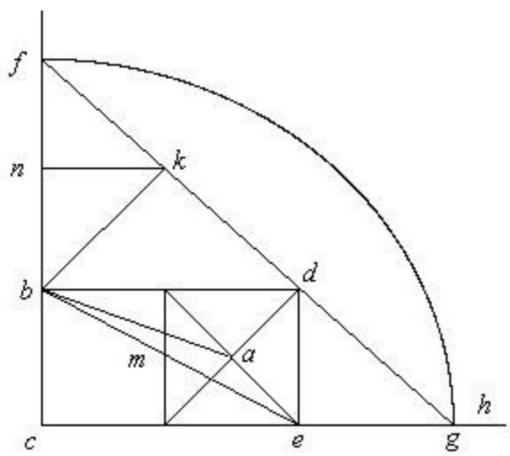
$\text{Dette gir videre} \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CG}} = \dfrac{CG}{BF} = \dfrac{BF}{AC}$, som dermed viser at CG og BF er de to tilhørende mellomproporsjonaler til AB og AC (Lützen 1985, s. 56).

I århundrene rundt det første årtusenskiftet etter Kristus hadde muslimene kontroll over store områder sør på den Iberiske halvøy samt nordlige deler av Afrika. Dette førte etter hvert til at mye ”gammel” kunnskap fra antikken ble tatt vare på, samtidig som matematikk fra to ulike kulturer ble blandet slik at nye ”retninger” kunne oppstå. Spesielt algebra hadde en sterk vekst nå. De interesserte seg imidlertid ikke for selve problemet ”kubens fordobling”, men var generelt interessert i utdragning av n`te-røtter. Metoden de brukte stammer opprinnelig fra kineserne, men er i modifisert form i dag kjent som Horners metode (Lützen 1985, s. 56):

Hva jobbet Leonardo med?

Leonardo var innenfor dette området påvirket både av Vallas og Paciolis tidligere arbeid. Han kopierte deres arbeid i sine egne notater, men mye av Vallas notater ble rett og slett feilaktig oversatt av Leonardo som ikke behersket Latin til fulle, og han uttrykte misnøye med Vallas geometriske ”løsninger”. Han bestemte seg derfor for selv å finne egne måter å fordoble terningen på, eller å finne kubikkroten (DSB 1991, s. 238). Han brukte ulike tilnærminger til dette problemet; først prøvde han å ”bryte” ned en terning til enkle linjer, for så ved hjelp av disse å bygge en ny terning opp. Deretter forsøkte han å benytte Pytagoras` setning til å erstatte tre terninger med tre kvadrater som var konstruert på sidene til en rettvinklet trekant. Senere forsøkte han å halvere en terning på en slik måte at en ny terning kunne dannes ved å manipulere den rektangelformede halvdelen. Han trakk her paralleller til hvordan diagonalene i et kvadrat kan danne utgangspunkt for et nytt kvadrat med dobbelt så stort areal. Han forsøkte også å gå systematisk til verks ved å finne sammenhenger mellom ulike terningers volum og deres sammenhørende diagonaler. Imidlertid ble han etter hvert klar over at hans oppfatninger av dette problemet ikke var nøyaktig nok.

Leonardo kom allikevel etter hvert opp med en ”løsning”, en løsning som hadde stor grad av nøyaktighet. Allikevel hadde han problemer med å begrunne hvorfor dette var ”riktig” (DSB 1991, s. 238).



Fremgangsmåten i konstruksjonen er som følger:

I) Man konstruerer to kvadrat ved siden av hverandre.

II) Man finner sentrum i det høyre kvadratet (ved å trekke diagonalene). Dette kalles a.

III) Avstanden fra øvre venstre hjørne (b) i venstre kvadrat til punkt a tilsvarer bf (f markeres dermed på forlengelsen av linjen cb).

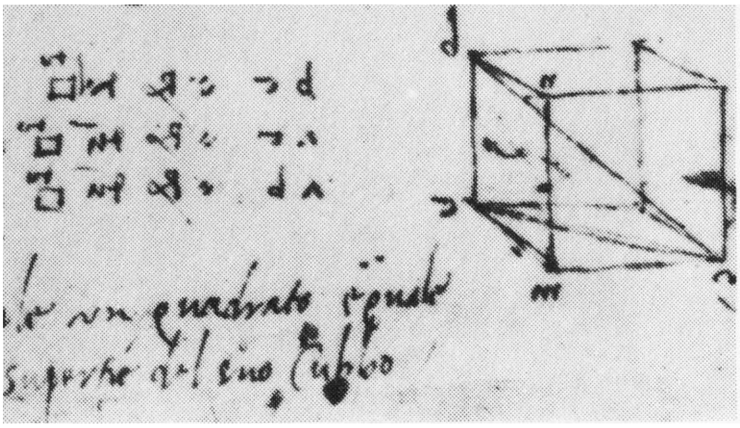
IV) Man trekker en linje fra f), gjennom øvre høyre hjørne (d) i kvadratet til høyre, og ned til forlengelsen av linjen ce. Dette punktet kalles g.

V) Linjestykket eg vil dermed være lengden på sidekanten(e) i en kube dobbelt så stor som en kube med sidekanter lik de opprinnelige kvadratene vi konstruerte.

Her vil $\frac{bc}{eg} = \frac{eg}{bf} = \frac{bf}{bd}$, og $eg = fk = kd = kb$ som gir $ab = bf$.

Leonardo hadde her forenklet den klassiske fremgangsmåten, selv om han neppe var klar over dette selv.

I notatene hans finnes også enkle skisser av problemet, uten at det følges opp med ytterligere beregninger (Schrőer 1998, s. 20).



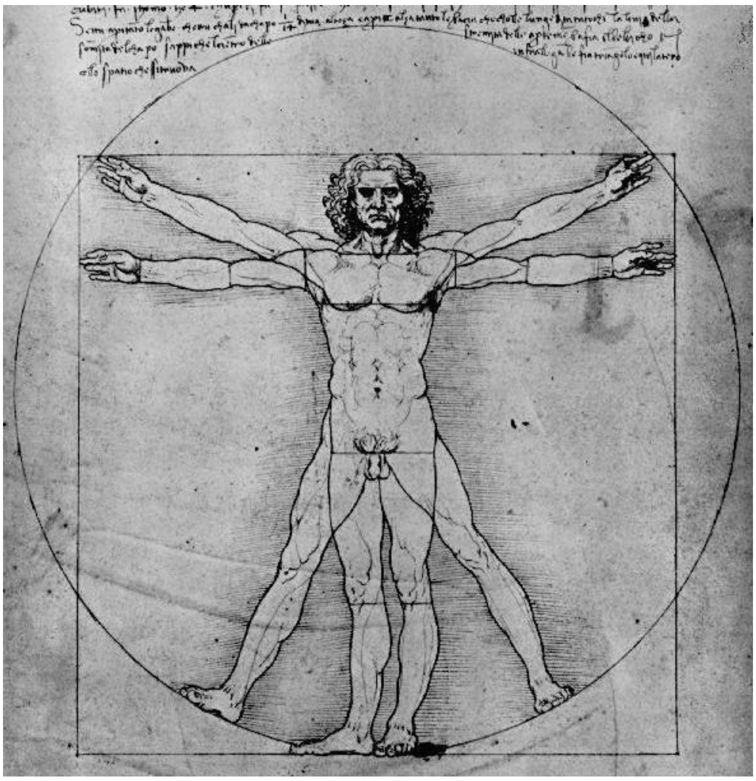
Hva fulgte etter Leonardo?

I verket *Ars Magna* offentliggjorde Cardano formelen for løsninger av generelle tredjegradlikninger, et uttrykk som ble utledet av del Ferro noen år tidligere. Matematikken som fulgte, dreide seg også i stor grad om å finne formler for løsning av diverse likninger. Et skille kom ved Renè Descartes. Han gav i 1637 ut verket *La Géométrie*, som forente algebra og geometri, og som dannet grunnlaget for utviklingen av differensial- og integralregningen som fulgte.

Leonardos øvrige matematikk.

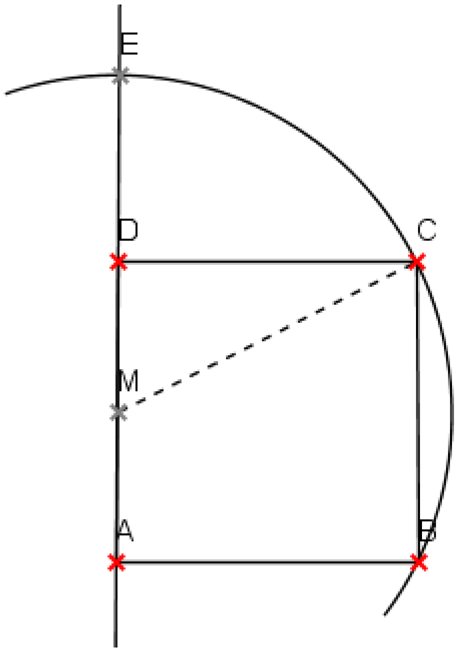
Forholdstall i matematikken / kroppen / annet

Notatbøkene til Leonardo er spekket med skisser, tegninger og beskrivelser av hvordan enkelte kroppsdeler var / burde være i forhold til hverandre. I liten grad tallfestet han disse forholdene, han lot ofte forskjellen i størrelse (lengde) mellom de bestemte kroppsdelene, bli uttrykt ved hjelp av andre kroppsdeler. Et par eksempel nevnes hos Dickens (2005, s. 50): *Håndflaten uten fingre er halvparten av fotens lengde uten tær*. Gjennom sine anatomistudier fikk Leonardo innblikk i hvordan de ulike kroppsdelene til et menneske burde være i forhold til hverandre. Dette hadde selvsagt stor nytteverdi for ham som kunstner, i tillegg til at det trolig interesserte ham på generelt grunnlag. Han var jo en person som gjerne ville vite mye om mange ulike områder. I tillegg må det antas at han gjennom arbeidet med å illustrere Pacioli's *De Divina Proportione,* opparbeidet en større interesse for det gylne snitt (Huntley 1970, s. 25). Man kan finne en rekke referanser til det gylne snitt når han illustrerer kroppslengder/ - størrelser, blant annet i hans gjengivese av Vitruvius-mannen (Elam 2001, s. 14 – 15).



Som Euklid benytter han seg av Det gylne snitt i konstruksjonen av regulære femkanter (pentagoner).

Man finner en rekke konstruksjoner av mangekanter i Leonardos arbeid, blant annet i Codex B (folio 13v) (Marinoni 1984, s. 55). Her kan vi finne eksempler på trivielle konstruksjoner av likesidete trekanter, samt en noe uklar konstruksjon av en regulær femkant. Flere elementer i konstruksjonen hans er uklar, men han har tydelig kjennskap til hvordan man finner / konstruerer det gylne snitt. Trolig har han fulgt en variant av følgende fremgangsmåte:

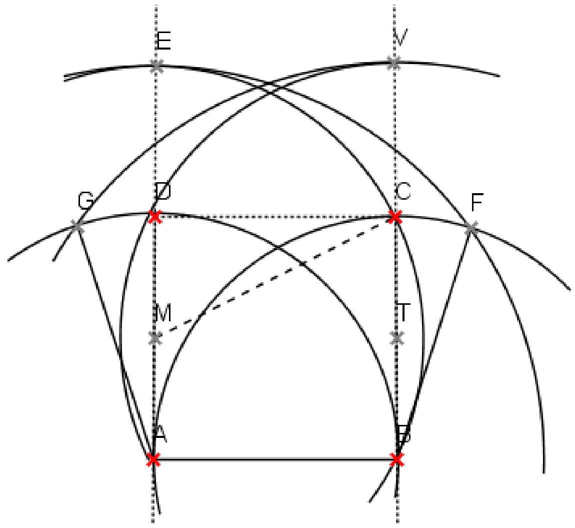


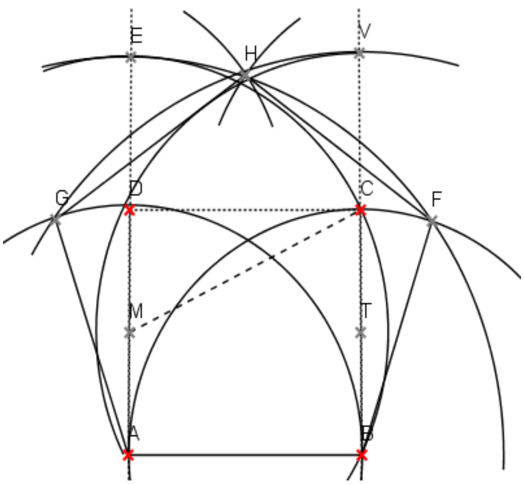
1. Vi starter med å konstruere et kvadrat ABCD med sider lik x cm.
2. Vi halverer AD (punktet M), og tegner en sirkelbue (med radius lik MB = MC), som skjærer forlengelsen av AD i E.
3. Pytagoras gir oss nå:
   $MC^2 = DM^2 + CD^2 = x^2/4 + x^2 = 5x^2/4$
4. MC = ME = $x\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$.
5. Dette gir AE = AM + ME = $\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{5} = \frac{x}{2}(1+\sqrt{5})$
6. Forholdet mellom $\frac{AE}{AB} = \frac{\frac{x}{2}(1+\sqrt{5})}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

7. Vi tegner så en sirkelbue med A som sentrum og radius AE.
8. En sirkelbue tegnes så med B som sentrum og radius AB. Disse krysser hverandre i F.
9. Forholdet mellom

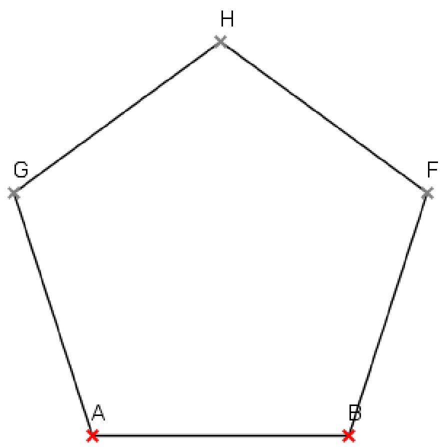
$$\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{x}{2}(1+\sqrt{5})}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

10. Punktet G lages på samme måte som punktet F.
11. Tislutt trekkes sirkler med radius x med sentrum i hhv G og F. Disse møtes i H. Trekk opp linjene GH og FH.





Konstruksjon av regulært pentagon



Regulært pentagon ferdig

I forbindelse med kjøp og salg av varer, benyttet kjøpmennene seg som regel av *Reguladetri* (3'er-regelen) for å fastsette korrekt pris. Piero della Francesca forklarer denne på følgende måte:

7 bracci med tøy koster 9 lire, hvor mye koster 5 bracci? Ta da antallet du vil vite prisen på (5) og multipliser med prisen for den kjente mengden (9). Dette svaret divideres så på den opprinnelige mengden (7). Altså: 5 * 9 = 45, 45 : 7 = $6\frac{3}{7}$. Dette ble i renessansen satt opp

som forholdstall: $\frac{7}{5} = \frac{9}{6\frac{3}{7}}$, og de enkelte matematiske problemene man skulle løse ble ofte

forsøkt satt opp på denne måten. Leonardo benytter seg av en variant av 3'er regelen i forbindelse med en beskrivelse av skålvekter. Ved å bruke "lodd" på 6, 8, 9 og (12), vil man kunne veie de fleste masser opp til en viss grense. Samtidig er dette valget av grunnenheter neppe tilfeldig. Leonardo beskriver her det som ble kalt Pytagoreernes harmoniske skala, grunnlaget for Vestens harmoniske skala, der intervallene mellom strenger med disse lengdene danner tonene (Baxandall 1988, s. 101). At *Reguladetri* var allment benyttet på den tiden, finner vi også eksempler på i Codice Arundel (folio 212). Her viser Leonardo hvordan man finner 17 : 18 = 18 : x (x blir 19 1/17), men han gjør feil i selve utregningen og får (nok en gang) et galt svar. Han viser også fremgangsmåten og utregninger ved omgjøring fra ekte brøk til blandede tall, fremgangsmåter som i dag virker tungvinte (Marinoni 1982, s. 16-18).

I samme sekvens gjør Leonardo også oppsiktsvekkende feil innen helt elementær multiplikasjon. Han skal regne ut 108 * 27 (=2916), og ender opp med 4266.

Leonardos oppsett:

$$\begin{array}{r l}
 108 & \\
 27 & \\
\hline
1206 & \\
306 & \\
\hline
4266 &
\end{array}$$

Leonardo foretar samme type feil i begge del-utregningene: Minnetallene han får etter de første multiplikasjonene blir tatt vare på, men de benyttes ikke i neste trinn, han venter med å ta i bruk disse til han er ferdig med å multiplisere med 0.

1) Han regner først ut 7 · 108. 7 · 8 = 56, han skriver ned 6-tallet, og tar "vare" på 5-tallet (minnetall).
2) 0 · 7 = 0. Her bruker han ikke minnetallet (5) fra forrige kalkulasjon. Det kan virke som om han ikke ønsker å bruke minnetallene i multiplikasjoner der 0 har vært en av faktorene.
3) 1 · 7 = 7. I tillegg trekker Leonardo nå inn minnetallet (5) fra tidligere, slik at han ender opp med svaret 12. Samme feilmønster dukker også opp i neste linje.

Vi kan se noe av den samme misoppfatningen av algoritmen i neste eksempel:

20307020
<u>1705</u>
00000000
160600040
<u>2030700</u>
180907400

Her kan det virke som om Leonardo helt glemmer å multiplisere med 5 til å begynne med, mens derimot neste linje er korrekt (multiplikasjon med 0!). I neste linje finner vi igjen feilmønsteret fra forrige oppgave. Nok en gang sparer han minnetallene til han er ferdig med å multiplisere med 0, slik at han benytter seg av disse minnetallene kun når han skal multiplisere med tall ulikt null. I siste linje gjør han en triviell feil, han utelater sifferet 2 i delsvaret. Heller ikke addisjonen av delsvarene forløper korrekt, han utelater en 0 mellom 7-tallet og 4-tallet.

En teori om hvorfor da Vinci regner som han gjør er trolig at han er klar over at å multiplisere med 0 vil gi 0 til svar. Imidlertid kan det se ut til at han har en misoppfatning av at dette også gjelder eventuelle minnetall som blir involvert, noe som fører til at han ”sparer” disse til de gjør ”nytte” for seg i regnestykket (Pizzamiglio 1986, s. 21 – 22). Imidlertid er det for oss idag svært overraskende å se slike ”elementære” feil bli gjort.

Leonardo beskrev også spiralformede kurver ofte, og han definerte dem som en enkelt uniformt kurvet linje som dreier rundt et bestemt punkt over en gitt distanse (Clagett 1969, s. 108). Imidlertid er han ikke selv særlig nøye med hva han kaller slike linjer, og man finner et utall betegnelser på disse i notatene hans, slik som *linia elica*, *linia reverticulare*, *reverticulo* osv. Hans definisjoner er trolig utledet i verk Leonardo leste av både Nicole Oresme og Johannes de Muris. Leonardo skisserer 4 hovedtyper av disse: konveks spiral, plan spiral, konkav spiral samt sylinderformet spiral (Clagett 1969, s. 109). Den doble spiralformede trappeoppgangen i Vatikanmuseet, designet av Leonardo, er et eksempel på hvordan han nyttiggjør seg sin matematiske kunnskap i sitt arkitektoniske arbeid (Atalay 2004, s. 154 – 155).

Triks med tall

I flere av Leonardos notater finner man talltriks. Det er uvisst om disse er ”laget” av Leonardo, eller om disse var allment kjente i datiden. Han gjengir flere av disse med ord:

”*Ta et likt antall gjenstander i hver hånd. Ta fire fra den ene hånden og legg i den andre. Legg vekk resten fra den hånden det nå er færrest i. Ta vekk like mange fra den andre hånden. Legg til 5. Du vil nå ha 13 gjenstander i hånden*” (Dickens 2005, s. 167).

Beviset for dette er trivielt, noe også Leonardo forklarer videre med ord. Matematisk kan dette uttrykkes:

1. $X = X$
2. $X + 4$
3. $X – 4 – Y = 0$
4. $X + 4 – Y$
5. $X + 4 – Y + 5$

Setter så 3 inn i 5: $X = 4 + Y$ og får

6. $4 + Y + 4 – Y + 5 = 4 + 4 + 5 = 13$.

Et annet eksempel er som følger:

”*Ta et antall mindre enn 12 i hånden din. Ta usett fra min hånd et antall som gjør at du nå får 12 i din hånd. Da kan jeg finne ut hvor mange du opprinnelig hadde*”.

Denne har også en enkel løsning: Leonardo sørger for å ha et antall av 12 i sin hånd. Når motparten fjerner det vedkommende trenger, vil Leonardo sitte igjen med motpartens opprinnelige antall (Dickens 2005, s. 167-168).

Leonardo i dag.

Leonardos regnemaskin?

"*Mechanics is the paradise of the mathematical sciences, because by means of it one comes to the fruit of mathematics*" Leonardo da Vinci

Raymond G. Ayoub (2004, s. 249) nevner at Leonardo skal ha tegnet et apparat som visstnok skal ha regnet med heltallspotenser. Andre hevder derimot at innretningen Leonardo skisserte er en slags regnemaskin (addisjon), som kan sees som en forløper til dagens kalkulatorer (Van Remoortel, http://matsforeurope.digibel.be). I 1967 kom noen amerikanske forskere tilfeldig over to ukjente verker av Leonardo da Vinci i Spanias Nasjonalbibliotek, Madrid. Disse ble senere kalt Codex Madrid. Dr. Robert Guatelli, en av verdens ledende forskere på Leonardo, hadde spesialisert seg på å bygge modeller basert på Leonardos tergninger og skisser. Han var ansatt hos IBM for å bygge slike kopier for dem, kopier som ble utlånt til museer, utstillinger, gallerier og lignende. I Codex Madrid fant Guatelli en skisse han dro kjensel på, en skisse med hovedvekt på små tannhjul. Guatelli erindret å ha sett en liknende skisse i Codex Atlanticus (folio 83), og på bakgrunn av Leonardos to skisser, bygde Guatelli i 1968 en kopi som skulle brukes i IBM's utstillinger. Guatelli beskrev også hvordan apparatet fungerte:

Et apparat for kalkulasjon: En tidlig utgave av dagens avanserte kalkulatorer. Leonardos mekanisme opprettholder et konstant forhold (10 til 1) mellom hvert av de 13 registrerings-tannhjulene. For hver gang det første hjulet fullfører en runde, beveger enhetshjulet seg slik at et nytt siffer mellom null og ni blir registrert. På grunn av forholdet 10 til 1 vil den tiende fullførte runden til det første hjulet medføre at enhetshjulet fullfører sin første runde og registrerer 0, noe som igjen medfører at desimalhjulet skifter fra 0 til 1. Ethvert annet hjul som markerer hundre, tusen osv., opererer på samme måte. Enkelte justeringer er gjort av Leonardos skisser, ikke minst for å gi et visuelt bedre inntrykk av hvordan hvert av de 13 hjulene på mekanismen fungerer. Leonardos skisse viser også vektlodd, som skal illustrere maskinens likevekt.

Maskinen var imidlertid kontroversiell. En høring ble holdt for å finne ut av hva slags maskin dette egentlig var. Mange hevdet at Guatelli hadde brukt egne intuisjoner og forestillinger, og dermed gått lenger enn det som var Leonardos hensikt. De hevdet at skissen var beregnet på en maskin som regnet med potenser; en runde på det første hjulet fører til 10 runder på det neste og så videre, noe som ville gitt 10000000000000 (10^{13}) runder for det siste hjulet. En slik maskin ville det ikke være mulig å bygge rent mekanisk fordi friksjonen i apparatet ville skape uoverkommelige problemer. En avstemning ble holdt for å bestemme hva slags maskin Leonardo hadde forsøkt å tegne, men voteringen endte uavgjort. Allikevel ble maskinen tatt bort fra IBM's utstillinger, og hvor den befinner seg i dag er ukjent, mest sannsynlig befinner den seg i et av IBM's lagerlokaler. Roberto Guatellis stesønn, Joseph Mirabella, driver i dag en forretning i New York der mange av kopiene Guatelli lagde står utstilt.

I Codex Atlanticus er imidlertid Leonardos skisse av den angivelige regnemaskinen akkompagnert av en lang rekke tall som står ordnet i et sirlig system. Disse tallene er 20-potenser; dvs tallene fra 20^0 til 20^{23} (Marinoni 1982, s 20-21).

Leonardos bro.

I 1502 tegnet Leonardo på oppdrag fra sultan Bajazet II av Konstantinopel en bro som skulle gå over Bosporos-stredet ved det Gyldne Horn. Broen skulle bygges ved en såkalt "press-buet"-teknikk, i stedet for den ordinære byggemetoden i datiden, der man benyttet seg av en såkalt nøkkelstein som, satt under press, holdt det hele på plass. I da Vincis skisser er det to parabelformede buer som lener seg mot hverandre for å holde det veldige brospennet på plass. Broen skulle være 360 meter lang, 24 meter bred og rage 40 meter over havet på sitt høyeste. Denne broen ble aldri bygget, trolig fordi byggeteknikken Leonardo vurderte, ikke ble akseptert før nesten 300 år senere (Sand 2001).

Leonardos skisse av broen

Maleri av Leonardos bro

Den norske kunstneren Vebjørn Sand arbeidet sammen med norske ingeniører og Statens vegvesen for å sette Leonardos planer ut i livet, og etter lang tids planlegging i forhold til materialvalg og økonomi, ble prosjektet igangsatt. Leonardos opprinnelige planer var basert på en bro bygget i granitt, mens den norske prosjektledelsen valgte å gå for en løsning bygget i limtre. Broen ble åpnet i 2001, nesten 500 år etter at tegningene ble laget. Gangbroen krysser E18 ved tettstedet Ås utenfor Oslo.

Vebjørn Sand ønsker å videreutvikle dette prosjektet. Han ser for seg minst en da Vinci-bro bygget på hvert av de 7 kontinentene. Utstillingen hans har vekket betydelig interesse i USA, og flere broprosjekter er i emning der. Et prosjekt i Texas var finansiert, men etter orkanen Katarinas herjinger ble pengene trukket tilbake, mens et annet prosjekt i Iowa ble stoppet fordi mange mente at designet på broen så for moderne ut. Sand er også i samtaler med kinesiske myndigheter om muligheten for å oppføre en bro i forbindelse med verdensutstillingen i 2010 (Bjørkeng 2006). Ifølge Wikipedia har nå den tyrkiske regjering den 17. mai 2006 vedtatt å bygge en bro basert på Leonardos tegninger over det Gyldne Horn.

Imidlertid har Vebjørn Sand vinteren 06/07 bygget en utgave til. Den er bygget i snø i Antarktis. Tanken bak byggingen her er ifølge Sand både å realisere prosjektet sitt, samt å sette klimaproblemene på dagsordenen. Dersom Leonardo-broen i Antarktis forsvinner (dvs. smelter), vil deler av Europa ligge under vann (Bjørkeng 2006).

(Foto: NILS LUND, Aftenposten)

Fra den 17. desember 2007 vil nok en kopi av Leonardos bro bli stilt ut utenfor FNs hovedkontor i New York. Også denne utgaven vil bli laget i is. Hensikten bak dette prosjektet er at publikum ved å iaktta at isen langsomt smelter, skal bli oppmerksomme på de enorme miljøutfordringene verden står overfor (Løvli, 2007).

Undersøkelse med utgangspunkt i Leonardos matematikk

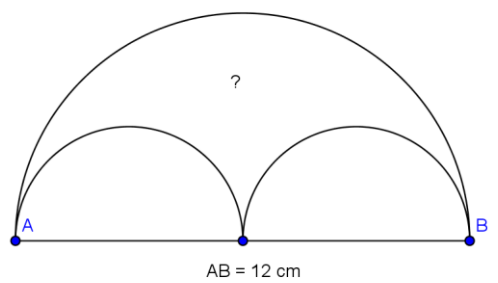
Innledning

Jeg ønsket å gjennomføre en undersøkelse av hvordan det stod til med geometrikunnskapene blant elever/studenter i dagens skole. Målet mitt var for det første å se hvilke oppgaver forsøkspersonene var i stand til å løse, og i så fall hvilke løsningsstrategier som ble tatt i bruk for å løse oppgaven. I tillegg ønsket jeg å se hvordan forsøkspersonene håndterte å få oppgitt sidelengder gitt på bokstavform (som medfører at oppgaven må løses algebraisk). Oppgavene ble gitt til 2 ulike grupper. Den ene går andre året i videregående skole. De har valgt matematikkfaget R1 (tidligere 2MX), studiespesialiserende retning. De vil heretter kalles R1-elevene. Den andre gruppen er på høyskolenivå, og er studenter ved lærerutdanningens matematikkurs i geometri. De kalles heretter ”studentene”. De tre første oppgaven ble gitt 4 uker ut i skoleåret for R1-elevene, mens studentene fikk sine tre første oppgaver på 6. samling. Studentene hadde hittil i sitt geometrikurs berørt enkelte emner som kunne hjelpe dem med oppgavene, mens R1-elevene i liten grad vært gjennom disse oppgavetypene hittil i sitt pensum. Den siste oppgaven ble gitt i 9. uke for begge gruppene.

Oppgavene valgte jeg å lage med utgangspunkt i arbeider foretatt av Leonardo, men modifisert slik at de passet inn i dagens samfunn og skolehverdag.

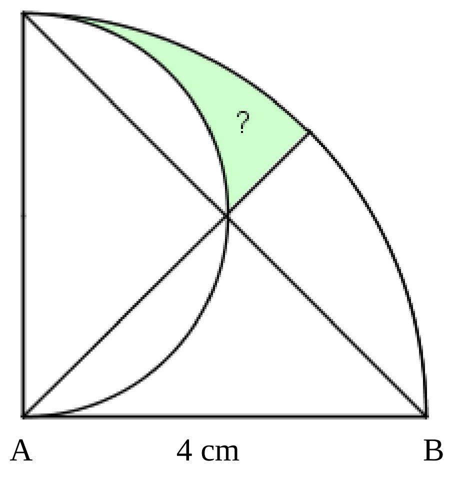
Oppgave 1

Finn arealet av området som er avgrenset av den store halvsirkelen og de to små halvsirklene.



Oppgave 2

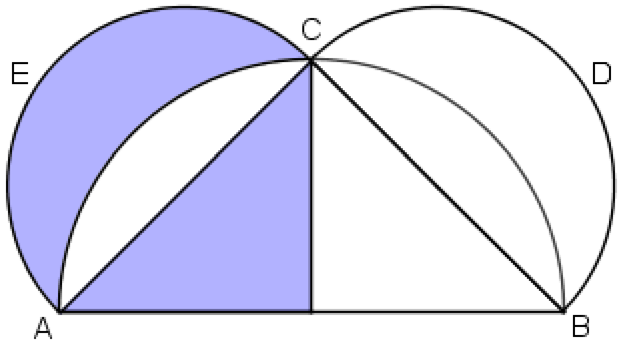
Finn arealet av det skraverte området.



Oppgave 3

Finn arealet til begge de to skraverte områdene.

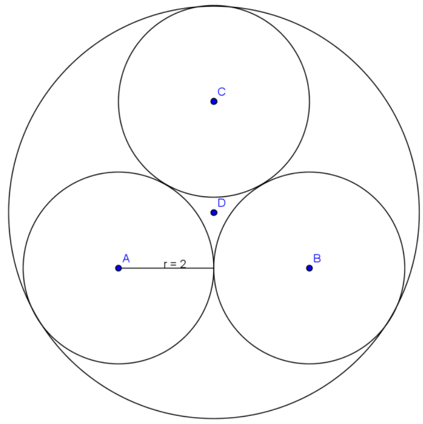
Kan dere kommentere resultatet.



AB= 4x cm

Oppgave 4

Finn radius i den store sirkelen.



(Her er radius i de små sirklene lik 2 cm)

Litteratur

I Kunnskapsløftet finner vi under kompetansemålet geometri at etter 7. årstrinn skal elevene kunne analysere egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer, og etter 10. årstrinn skal de i tillegg kunne nyttiggjøre seg Pytagoras' setning for å beregne ukjente størrelser. Videre skal man i Vg1T (som samtlige R1-elever nettopp har gjennomført), kunne bruke trigonometriske funksjoner for å beregne ukjente størrelser og arealer. I emnebeskrivelsen til geometrikurset studentene tar, heter det at de skal utvikle solide matematiske kunnskaper innenfor geometri og praktisk regning, herunder bruk av IKT-programvare (Emneplan for matematikk I, 2007). Ferdighets- og kompetansemål utover dette er ikke spesifisert.

Innsamling av data

Begge forsøksgruppene ble inndelt i nye, mindre grupper på 3 – 4 personer. Gruppeinndelingen var her styrt av lærer i den hensikt å danne grupper med noe ulikt matematisk ferdighetsnivå. De fleste gruppene var tilfeldig fordelt, mens to grupper ble satt sammen for å skape grupper med personer med antatt sterke matematiske ferdigheter.

Hver gruppe fikk utdelt et A3-ark, der hver A4-delside inneholdt en oppgave. De fikk 1 time på å fullføre de tre første oppgavene som var laget med utgangspunkt i Leonardos matematikk med enkelte små modifiseringer. Elevene ble bedt om å notere direkte på arket med penn under hele undersøkelsen. Dersom de ønsket å rette opp noe, skulle de kun sette en liten strek over det som var galt, for så å fortsette med regneoperasjonene. Dette for at undertegnede skulle få evaluert hvordan de faktisk gikk frem, og hvilke løsningsstrategier de hadde brukt, og hvilke som var forkastet underveis. Elevene ble også oppfordret til å notere kort sine tanker underveis om ulike forslag til løsningsstrategier. Dette for også å fange opp de tanker og ideer elevene hadde, men som kanskje ikke ble satt ut i livet. Gruppene ble oppfordret til å arbeide selvstendig, selv om klasseroms- og prøvesituasjonen førte til et noe høyere lydnivå enn normalt, med dertil muligheter til å få med seg hva de andre gruppene foretok seg.

Undertegnede var til stede under testen. Observasjoner ble nedtegnet underveis og tatt vare på for senere analyse, og for å sammenligne med det som kom frem fra forsøkspersonenes innsamlede materiale.

Dataanalyse

Elevenes arbeider ble analysert på bakgrunn av hva de fysisk leverte. Dette ble vurdert i forhold til de observasjoner jeg selv hadde gjort under prøveperioden. I tillegg ble det tatt noe hensyn til elevenes forutsetninger og kunnskapsnivå.

Klasserommet

Både R1-elevene og studentene er plasserte i sine ordinære klasserom. R1-elevene har et tradisjonelt klasserom, der det i prøveperioden ble et noe høyt lydnivå (først og fremst grunnet interne diskusjoner og løsningsforslag i de ulike gruppene). Studentene er plassert i en større sal, der det finnes større muligheter for å spre gruppene. Lydnivået her var også høyt.

Elevene/Studentene

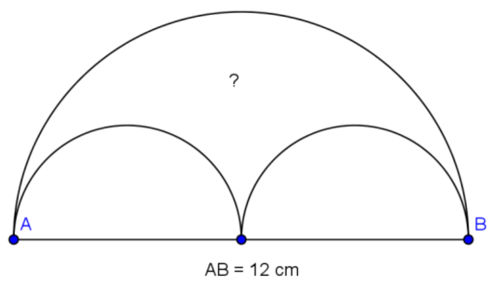
De som har valgt R1-matematikk, må antas å være godt over gjennomsnittet rent faglig i matematikk. De har stort sett et positivt forhold til faget, og tar sikte på å bruke faget i videre studier. De har imidlertid i liten grad vært innom geometri knyttet opp mot areal av flater og krumme figurer. Noe ble berørt forrige år i kurset matematikk 1T, mens det må antas at det for mange ikke har vært berørt i særlig grad siden de gikk på ungdomsskolen. De består av 20 elever totalt, 14 gutter og 6 jenter. Disse ble inndelt i 6 ulike grupper med 3-4 personer pr gruppe.

Studentene er en mer heterogen gruppe. De består til dels av lærere som ønsker formell kompetanse i faget etter å ha jobbet mange år i skolen, dels av førskolelærere som ønsker undervisningskompetanse i matematikk i hele grunnskolen. Tilslutt finner vi en stor gruppe med tidligere lærerskolestudenter som ikke har bestått eksamen. De har i kurset drevet med utregning av arealet til ulike kjente figurer som kvadrater, rektangler, sirkler og lignende, men har i mindre grad arbeidet med sammensatte problemer. Det må antas at matematikkferdighetene og interessen blant disse er svært varierende. De består av 28 studenter totalt, 20 jenter og 8 gutter. Disse ble inndelt i 8 grupper av 3-4 personer pr gruppe.

Analysen

Oppgave 1

Finn arealet av området som er avgrenset av den store halvsirkelen og de to små halvsirklene.

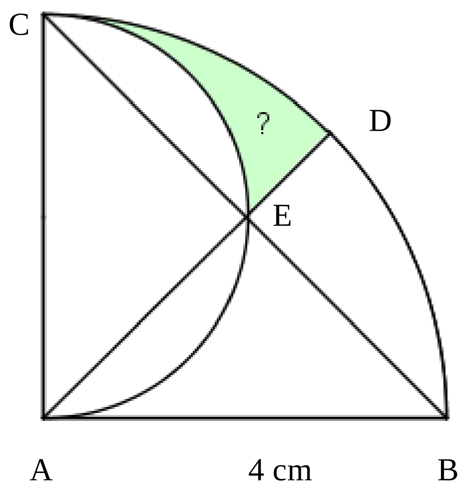


Løsning:		
Halvsirkel$_{(stor)}$:	$\pi *6^2/2$	$=18\pi$
<u>Halvsirkler$_{(små)}$:</u>	<u>$2*\pi *3^2/2$</u>	<u>$= 9\pi$</u>
<u>Areal av *arbelosen* (skomakerkniv):</u>		<u>$= 9\pi$</u>

Denne oppgaven viste seg å falle lett for de aller fleste gruppene både blant R1-elevene og studentene. De gikk straks i gang med oppgaven, og det virket som om de umiddelbart hadde dannet seg en løsningsstrategi. Løsningsforslagene fra gruppene bar også preg av at denne oppgaven var entydig løst. Alle hadde brukt samme strategi ved først å finne arealet til en hel sirkel som halveres. Deretter subtraheres arealet til to halvsirkler. I sistnevnte operasjon fantes det ulike tilnærminger. Noen grupper hadde trukket fra en hel liten sirkel, mens de fleste gruppene subtraherte 2 ganger en halv sirkel.

Oppgave 2

Finn arealet av det skraverte området



Løsning:

$A_{(ABC:\ kvartsirkel)}$: $\pi *(4cm)^2/4= 4\pi\ cm^2$

$A_{(ABD:\ 8\text{-}delssirkel)}$: $4\pi\ cm^2 / 2 = 2\pi\ cm^2$

$A_{(AEC:\ halvsirkel)}$: $\pi *(2cm)^2/2= 2\pi cm^2$

$A_{(ABC:\ stor\ trekant)}$: $(4cm * 4cm)/2= 8\ cm^2$

$A_{(AEC:\ liten\ trekant)}$: $8\ cm^2 /2 = 4\ cm^2$

$A_{(CE:\ ett\ sirkelsegment)}$: $(2\pi - 4)/2\ cm^2=(\pi - 2)\ cm^2$

$A_{(skravert\ område)}$: $(2\pi - 4 – (\pi - 2))\ cm^2 =(\pi-2)\ cm^2$

Alternativ løsning:

A(halvparten av kvartsirkelen) = $\boldsymbol{\pi/8\ r^2}$ (8-delssirkel)

A(halvparten av halvsirkelen) = $\boldsymbol{\pi/4\ (r/2)^2}$

A(halvparten av trekanten ABC) = $\boldsymbol{1/2\ (r/2)^2}$

Det skraverte området er da $\boldsymbol{\pi/8\ r^2 - \pi/4\ (r/2)^2 - 1/2\ (r/2)^2 = \pi/16\ r^2 – 1/8\ r^2}$

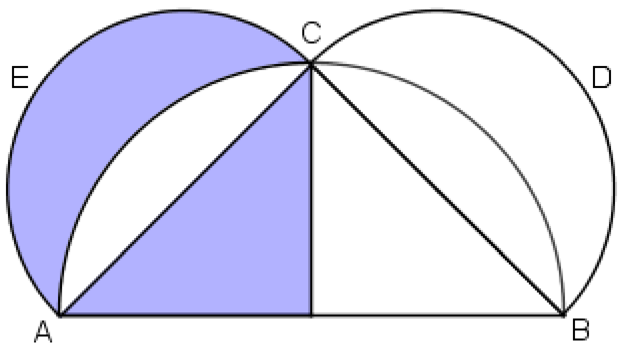
$\boldsymbol{= (\pi – 2)/16\ r^2 = (\pi – 2)\ cm^2}$ når $\boldsymbol{r = 4\ cm}$ **.**

I denne oppgaven er det atskillig større sprik blant de innleverte besvarelsene. Blant R1-elevene hadde 2 av 6 grupper kommet frem til riktig svar. I stor grad hadde de fulgt samme løsningsstrategi som mitt løsningsforslag legger opp til. Imidlertid tyder notatene deres på at de har prøvet og feilet en del før de kom på rett spor. Ingen grupper løste den uten å ha gjort småfeil eller foretatt unødvendige utregninger underveis. Blant de øvrige R1-elevene var det 2 andre grupper som var på rett spor, men disse hadde rotet med de ulike segmentene i oppgaven slik at de subtraherte samme segment to ganger (de holdt ikke orden på hva de hadde regnet ut). Allikevel viste de en tilnærming til problemet som viste at de trolig med noe bedre tid kunne ha oppnådd et annet (riktig) resultat. De to siste gruppene blant R1-elevene kom ikke opp med en løsning overhodet. Svararkene deres bestod av en lang rekke sirkelutregninger, uten at de evnet å se de ulike delene i en sammenheng.

Blant studentene var det 4 av 8 grupper som kom opp med korrekt løsning. Også disse hadde i stor grad fulgt samme fremgangsmåte som vist over, men 3 av disse hadde brukt tilnærmede verdier for arealene fordi de hadde regnet med 3,14 fra begynnelsen av. Dette førte til noe variasjon i svarene fra de ulike gruppene, men fremgangsmåten var i det store og hele lik. De 4 siste gruppene var langt fra en korrekt løsning. Inntrykket fra studentbesvarelsene her gjenspeiles i det inntrykket jeg fikk da jeg gikk rundt. De 4 gruppene som løste oppgaven forstod ganske raskt hvordan de kunne gå frem, mens de resterende gruppene ikke klarte å legge opp en strategi for å løse denne. Det kan også tyde på at enkeltstudenters matematiske kunnskap og bakgrunn var svært avgjørende her. De grupper som hadde en sterk (flink) ”lederskikkelse” klarte å komme i mål. De andre gruppene gav nærmest opp etter ganske kort tid.

Oppgave 3

Finn arealet til begge de to skraverte områdene. Kan dere kommentere resultatet.



AB = 4x cm

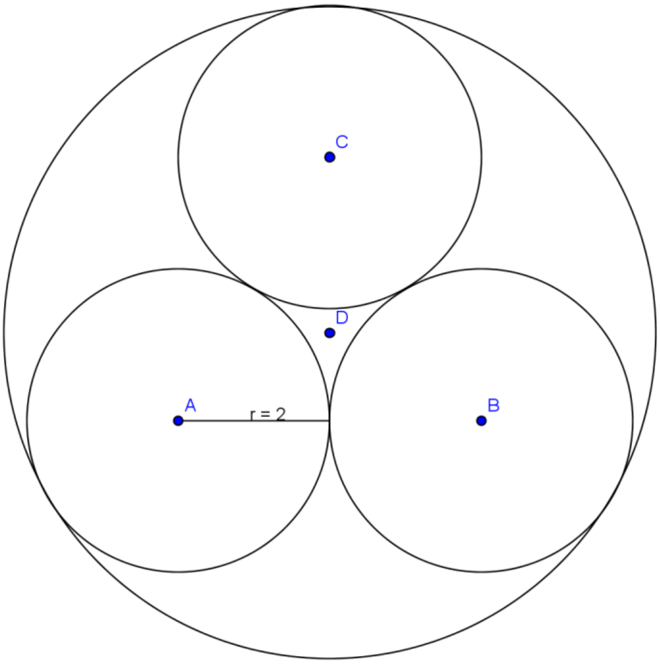
Løsning:
$A_{(trekant)}$: $(2x * 2x)cm^2/2=2x^2$ cm²
$D_{(halvsirkel)}$: $2x\sqrt{2}$ cm² (vha pytagoras)
$A_{(halvsirkel\ liten)}$: πx^2 cm²
$A_{(kvartsirkel)}$: πx^2 cm²
$A_{(sirkelsegment)}$: $\pi x^2-2x^2=x^2(\pi -2)$ cm²
$A_{(måneskalk)}$: $\pi x^2 - x^2(\pi -2)= 2x^2$ cm²
$A_{(måneskalk)} = A_{(trekant)}= 2x^2$ cm²

Denne oppgaven har mange likhetstrekk med forrige. Allikevel skulle det vise seg at mange fant denne vanskelig. Blant R1-elevene fikk alle utenom en gruppe korrekt svar på trekantens areal. Gruppen som fikk feil svar endte opp med x^2. De hadde gjort en liten feil i det regnetekniske (forkortet begge 2-tallene i telleren mot 2-tallet i nevneren). Derimot fikk uventet mange grupper problemer med å finne diagonalen. Også her gjorde de fleste rent regnetekniske / algebraiske feil når de brukte Pytagoras. De ”glemte” å kvadrere 2-tallet i uttrykket $(2x)^2$ (parentesene er satt inn av undertegnede), slik at de endte opp med å regne ut $\sqrt{2x^2+2x^2}$. Dette førte til at de fant at diagonalen var 2x. Dette er faktisk lengden på de to katetene, noe som ingen av gruppene noterte seg. De brukte dette delsvaret videre i utregningen sin, en utregning som ville ført dem til målet dersom de hadde fått korrekt lengde på diagonalen. To av gruppene kom også her opp med korrekt svar på måneskalkens areal. Det var de samme gruppene som også fikk til oppgave 1 og 2.

Blant studentene var også løsningsprosenten for arealet til trekanten høy. Kun en gruppe hadde kommet opp med feil løsning. Også her skyldtes dette manglende algebraiske ferdigheter i utregningen. Dessverre viste det seg at bare tre av gruppene blant studentene kom helt i mål når det gjaldt måneskalkens areal. I likhet med R1-elevene gjorde de fleste feil i utregningen av trekantens hypotenus. Det var også to grupper som fikk riktig verdi på hypotenusen (diameteren), men som senere ikke holt oversikten over hvilke segmenter som skulle subtraheres. Det var også her kun en gruppe som kom opp med et endelig uttrykk der π var involvert. De andre brukte tilnærmede verdier.

Oppgave 4

Finn radius i den store sirkelen.



Løsning:
Pkt E ligger midt på AB.

Trekanten ADE er en såkalt 30-60-90-trekant. I en slik trekant er korteste katet halvparten av hypotenusens lengde.

Pytagoras gir dermed:

$(AD)^2 = (AE)^2 + (ED)^2$, som gir

$x^2 = 2^2 + (\frac{1}{2}x)^2$

$x^2 = 4 + \frac{1}{4}x^2$

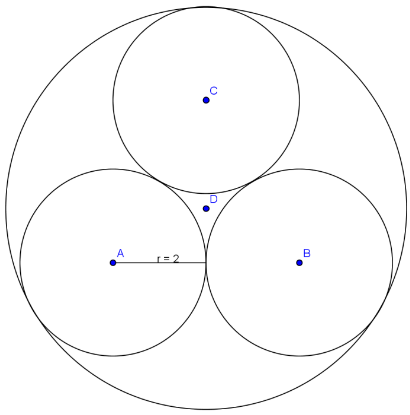
$\frac{3}{4}x^2 = 4$

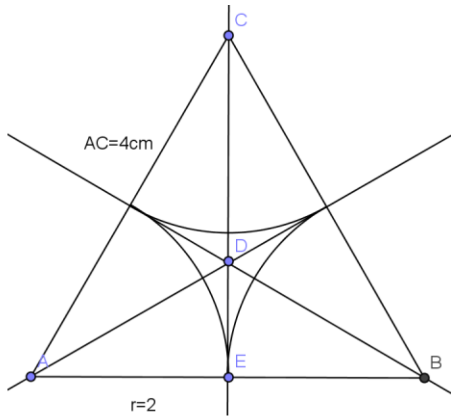
$x^2 = 16/3$

$x = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,3.$

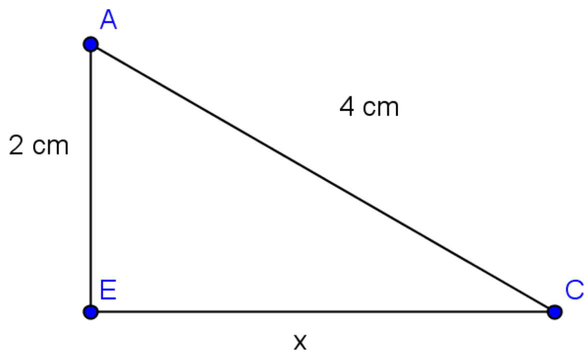
Radius i den store trekanten blir dermed 2 cm + 2,3 cm = 4,3 cm.

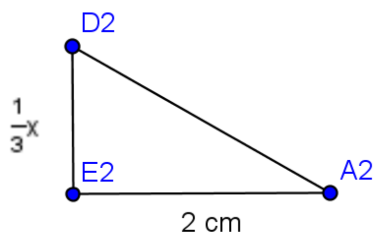
Blant studentene kom de fleste gruppene godt i gang. Alle gruppene valgte å trekke linjestykker mellom sentrum i de respektive småsirkler, slik at de fikk dannet en likesidet trekant. To grupper trakk også linjer mellom skjæringspunktene mellom sirkelbuene til de små sirklene og den store. De klarte derimot ikke å bruke denne likesidete trekanten videre i noen utregning. Resten av gruppene dannet rettvinklede trekanter ved å trekke linjer fra henholdsvis A, B og C gjennom D, og ved hjelp av dette var det 3 grupper som kom opp med en løsning. 2 av disse gruppene brukte samme løsningsstrategi som vist over, mens siste gruppe valgte en annen tilnærming:





Gruppen fant to formlike trekanter AED og AEC. Disse er formlike fordi ∠ E (=90°) er felles i begge, og ∠DAE =∠ECA = 30°. Dermed er også ∠EDA = ∠CAE = 60°.





$$\frac{x}{2} = \frac{2}{\frac{1}{3}x} \; som\, gir \, \frac{1}{3}x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = 2\sqrt{3} \; .$$

Forholdet mellom trekantene er dermed √3. AD blir dermed $\frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3$.

Radius i den store trekanten blir dermed 2 cm + 2,3 cm = 4,3 cm.

Gruppen viser ikke hvorfor forholdet mellom AD og DE er 1:2. Dette kommer frem gjennom følgende:

I) AD/AE = AC/CE , dvs. AD · CE = AC · AE.

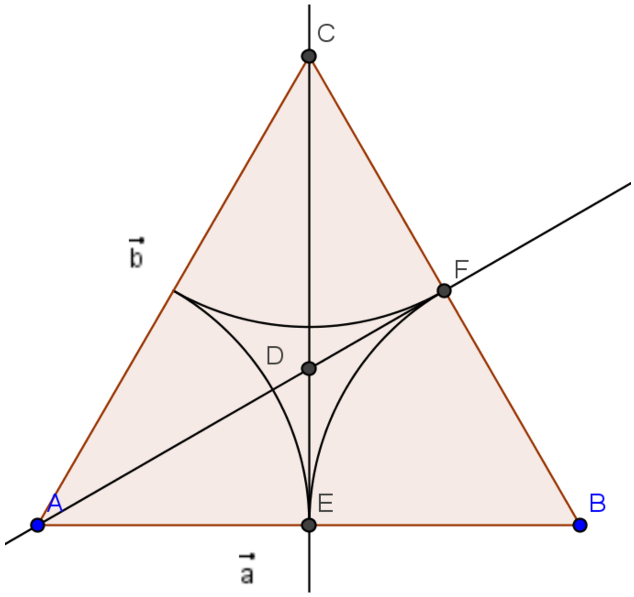
II) Siden vi her har 30 – 60 – 90 trekanter så vet vi at DE = ½ AD.

III) Av figuren ser vi ellers at AC = 2 AE, og at CE = CD + DE = AD + ½ AD = 3/2 AD.

Vi setter så III) inn i I): AD · 3/2 AD = 2AE · AE, som gir $AD^2 = 4/3\ AE^2$ og AD = 2 /√3 AE.

IV) Den søkte radien R = AE + AD = (1 + 2 /√3) AE, som med AE = 2 cm gir R = 2 + 4 /√3 ≈ 4,3 cm

Tre av R1-gruppene kom opp med korrekt løsning, men de valgte en annen løsningsstrategi. De var nettopp ferdig med vektorregning, og de så at dette kunne anvendes her. De tok utgangspunkt i trekanten ABC, og lot AB = $\vec{a}$, og AC= $\vec{b}$. De trakk så linjestykkene AF (der F er midtpunktet på BC) og CE (der E er midtpunktet på AB). AD og CE skjærer hverandre i D.



De satte så opp ulike vektoruttrykk:

i) BC = - $\vec{a}$ + $\vec{b}$

BF = ½ ($\vec{b}$ - $\vec{a}$)

AF = $\vec{a}$ + ½ ($\vec{b}$ - $\vec{a}$) = ½ ($\vec{b}$ + $\vec{a}$)

AD = k · ½ ($\vec{b}$ + $\vec{a}$), der k <1 (AD er parallell med AF)

ii) EC = - ½ $\vec{a}$ + $\vec{b}$

ED = m · EC = m · (- ½ $\vec{a}$ + $\vec{b}$), der m <1 (ED er parallell med EC)

AD = AE + ED = ½ $\vec{a}$ + m · (- ½ $\vec{a}$ + $\vec{b}$) = (1 – m) · ½ $\vec{a}$ + m · $\vec{b}$

Disse to uttrykkene for AD settes så lik hverandre:

(1 – m) · ½ $\vec{a}$ + m · $\vec{b}$ = k · ½ ($\vec{b}$ + $\vec{a}$), som gir oss følgende likningssystem:

I) (1 – m) · ½ $\vec{a}$ = k · ½ $\vec{a}$

½ – ½ m = ½ k

1 – m = k

II) m · $\vec{b}$ = k · ½ $\vec{b}$

m = k · ½

Setter uttrykket for k fra I) inn i II):

$m = ½ (1 - m)$

$2m = 1 – m$

$3m = 1$

$m = ⅓$, som gir $k = ⅔$.

$AD = k \cdot ½ (\vec{b} + \vec{a}) = ⅔ \cdot ½ (\vec{b} + \vec{a}) = ⅔ \cdot AF$.

AF finnes ved hjelp av Pytagoras:

$(AF)^2 = (AB)^2 - (BF)^2 = 4^2 - 2^2 = 16 – 4 = 12$

$AF = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AD = ⅔ \cdot AF = ⅔ \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3$.

Radius i den store trekanten blir dermed 2 cm + 2,3 cm = 4,3 cm.

De øvrige gruppene blant R1-elevene valgte mer tradisjonelle løsningsstrategier (blant annet formlikhet og Pytagoras), men ingen av disse klarte å komme frem til en korrekt løsning.

Konklusjon

Det viser seg å være uventet mange som sliter med relativt enkle arealberegninger, spesielt med tanke på at de forsøkspersonene som er brukt burde forventes å ligge på et høyt nivå. Det kan virke som om kombinasjonen av ulike sirkelsegment og trekanter er det som vanskeliggjør disse oppgavene. De aller fleste får til å beregne areal av sirkler for seg og trekanter for seg (henholdsvis oppgave 1 og 3a), men når disse kombineres i en oppgave er det mange som ikke evner å se sammenhengen. Det som er gledelig her er at nesten halvparten av gruppene faktisk fikk til oppgave 2, og det var også mange som fikk utrettet mye på oppgave 3.

I tillegg er det urovekkende mange som sliter med algebradelen. Arealet i oppgave 3b) burde i utgangspunktet være lettere å finne enn i oppgave 2, men ved å gi siden AB en ukjent størrelse (4x), legges en ny dimensjon til oppgaven slik at mange får problemer, problemer som i noen grad trolig skyldes manglende regneferdigheter, men også problemer knyttet opp mot det rent psykologiske ved å møte en ukjent størrelse i en oppgave. Dette gjenspeiles også i iveren etter å regne med tallverdien av π. De aller fleste gruppene valgte å bruke tilnærmingen 3, 14 i den videre utregningen, og etter noe avrunding underveis endte mange opp med svar som var noe unøyaktige. Dette sees spesielt i oppgave 3, der unøyaktigheter i avrundingen førte til at gruppene ikke kom frem til likt areal for henholdsvis trekanten og måneskalken.

På oppgave 4 derimot var det som ventet mange som hadde problemer. Jeg hadde også planer om å differensiere denne noe på (ved å fjerne sirkelsentrene på oppgavene hos noen grupper), men valgte å la alle prøve seg på samme type oppgave. Det som var gledelig her var imidlertid at noen av studentene kom opp med en løsningsstrategi som var uventet. De tok i bruk noe de nylig hadde hatt som pensum (formlikhet), og nyttiggjorde seg dette ved løsningen av oppgaven. Løsningsstrategien som R1- elevene benyttet kom nok som et resultat av at de nettopp hadde vært gjennom et kapittel om vektorregning, der noen av oppgavene i læreboken hadde visse likhetstrekk med oppgave 4 i denne undersøkelsen. Allikevel må jeg si meg imponert over strategivalgene til enkelte av studentgruppene. Det er spennende når de kommer opp med løsningsstrategier jeg ikke selv hadde tenkt om på forhånd!

Nedenfor vises en tabell som sammenfatter resultatene fra undersøkelsen.

<table>
<tr><th>Gruppe</th><th>Oppgave 1</th><th>Oppgave 2</th><th>Oppgave 3</th><th>Oppgave 4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">R1-elevene</td><td rowspan="2">6/6 korrekt</td><td rowspan="2">2/6 korrekt
2/6 nær korrekt løsning</td><td>Trekant:
5/6 korrekt</td><td rowspan="2">3/6 korrekt</td></tr>
<tr><td>Måneskalk:
2/6 korrekt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Studentene</td><td rowspan="2">8/8 korrekt</td><td rowspan="2">4/8 korrekt</td><td>Trekant:
7/8 korrekt</td><td rowspan="2">3/8 korrekt</td></tr>
<tr><td>Måneskalk:
3/8 korrekt</td></tr>
</table>

Pedagogiske implikasjoner

Denne studien viser at relativt enkle geometrioppgaver kan volde problemer for elever og studenter som burde forventes å ligge på et høyt nivå i matematikk. Når oppgavene spaltes opp i sine enkeltelementer, ser det ut til at de aller fleste er i stand til både å forstå og å løse oppgavene, men dersom oppgavetypene kompliseres ved å sette sammen flere elementer er det mange som mister oversikten. Oppgaver som gis til elever bør derfor følge en logisk struktur der man begynner med helt enkle geometriske former, som over tid kombineres slik at man ender opp med kompliserte kombinasjoner av de enkelte geometriske utgangsformer.

Det virker også som om algebra bør prioriteres. Mange elever oppfatter trolig dette emnet som adskilt fra ”resten” av matematikken. Algebra oppfattes som et eget kapittel i matematikkboka, der nytteverdien knyttet opp mot andre områder innen matematikk i liten grad blir synliggjort. Det må sies at de fleste geometrioppgaver fra grunnskolen og oppover i stor grad benytter seg av tallfestede størrelser, slik at elevene i mindre grad blir fortrolige med å benytte algebra for å løse oppgavene.

De fleste forsøkspersonene så ut til å like denne typen oppgaver. Årsaken til dette var ifølge dem selv at de forstod raskt hva oppgaven gikk ut på (den var konkretisert), og at det var spennende å selv komme frem til løsningsstrategien. I tillegg gav flere uttrykk for at de så nytteverdien av enkelte områder fra geometrien som de hittil bare hadde hatt et abstrakt forhold til. Oppgavene som denne undersøkelsen bygger på kan videreutvikles og vanskeliggjøres. De er dermed meget godt egnet for å systematisk bygge opp elevers forståelse av sentrale geometribegrep knyttet opp mot krumme flaters areal. En interessant diskusjon videre er hvordan forsøkspersonene ville håndtert oppgave 4 dersom sentrum i de tre sirklene ikke var tegnet inn. Ville de da ”sett” den likesidete trekanten?

Oppgavene som var gitt har en vanskelighetsgrad som gjør dem løsbare (i hvert fall for en flink matematikkelev) i slutten av ungdomsskolen. Imidlertid kan man med enkle grep også gjøre dem egnet på et senere stadium ved å trekke inn trigonometri, eller ved å tenke seg problemet tredimensjonalt. Et kjent problem hentet fra problemløsning er der 1 kule ligger i ro oppe på tre tilsvarende kuler. Man skal så finne bestemte avstander/høyder på denne ”konstruksjonen”.

Et annet interessant aspekt ved oppgave 4 er at den kan løses på flere måter. De som utførte oppgavene fant selv ut 3 helt ulike tilnærminger til oppgaven. Dette kan da være med på å vise hvordan ulike retninger innen matematikken faktisk henger sammen, og at en løsningsmetode /-strategi kan være vel så viktig som en annen. Dette kan igjen være med på å skape en større helhetlig forståelse for et emne både for den som underviser, og de som blir undervist.

Selve gruppesituasjonen kan det også trekkes lærdom av. De gruppene som hadde enkeltpersoner med gode matematikkunnskaper fikk faktisk til ganske mye på disse oppgavene. Jeg er redd for at resultatene ville blitt noe svakere rent prosentvis dersom oppgavene hadde blitt gitt på individuelt plan. Sterke lederskikkelser hadde en tendens til å styre gruppen i ønsket retning der slike fantes. I den grad jeg registrerte dette ble gruppene ledet på riktig spor.

Konklusjon

Bakgrunnen for valget av denne oppgaven var at jeg ønsket å finne ut mer om matematikeren Leonardo da Vinci. Han er, som tidligere skrevet, kun sporadisk nevnt i verker som tar for seg matematikkens historie. Mitt inntrykk før jeg begynte på denne oppgaven var at han først og fremst var nevnt fordi han var den personen han var (spesielt på andre felt), og ikke fordi han utrettet så mye innen matematikkfaget. Jeg ønsket derfor å finne ut mer om hans matematiske virke, hva han jobbet med, om han utrettet noe spesielt, og om hans arbeid igjen har påvirket andre matematikere på et senere tidspunkt.

Hva da Vinci faktisk jobbet med skulle vise seg å være mer komplisert enn først antatt. Lite dyptgående litteratur viste seg å være utgitt, og det som var skrevet på engelsk i nyere tid baserte seg i stor grad på et par originale italienske kilder fra begynnelsen av 1900-tallet. Marinonis bok (1984) skulle vise seg å være den i særklasse mest omfattende og innholdsrike. Den gav et grundig innblikk i Leonardos matematikk, men samtidig var den vanskelig tilgjengelig pga originalspråket (italiensk). Allikevel kunne den gi et solid blikk over hans mangesidige arbeid.

Hvilke områder da Vinci jobbet med føler jeg at jeg har et bedre innblikk i. Store deler av hans matematikk dreier seg om geometri, og da spesielt de klassiske problemene. Jeg føler at jeg har opparbeidet meg en god oversikt over hva han jobbet med, og i hvilke(n) retning(er) arbeidet hans beveget seg i. Det ser ut til at han, i likhet med mange av sine samtidige, arbeidet med det som var ”in” i tiden.

Når det dreier seg om hva han faktisk utrettet innenfor matematikken står jeg igjen med flere spørsmål enn svar. Det kan se ut som om mesteparten av det arbeidet han foretok var kjent fra lang tid tilbake, mens derimot noe av arbeidene hans innen perspektiv dannet grunnlag for senere videreutvikling (spesielt bue-perspektivet). Samtidig er det vrient å danne seg en oppfatning av hans arbeid av flere grunner:

Hans arbeid og notater er skrevet på stikkordsform, de er usammenhengende og de er skrevet over lang tid. Han berører ofte samme emne tema flere ganger, og ender flere ganger opp med ulike konklusjoner. Originalspråket er italiensk, men er skrevet fra høyre mot venstre, og med et islett av skrivefeil pga dyslektiske trekk. Det har derfor vist seg tilnærmet umulig å få noe ut av Leonardos kommentarer og skriftlige notater for undertegnede. Hans skisser og tegninger har derimot vist seg å være noe mer opplysende. De som har gransket Leonardos arbeid i dybden, og skrevet om hans matematikk, har i stor grad vært kunsthistorikere, slik at dybden i hans matematikk i mindre grad har vært gransket. Et par hederlige unntak er Marinoni og Clagett.

Samtidig har denne prosessen vært meget lærerik for undertegnede. Stofftilgangen har vist seg å være adskillig mer krevende enn det jeg trodde på forhånd, men samtidig føler jeg at jeg har fått et solid innblikk i, og rundt, de emnene Leonardo arbeidet med. Gjennom å sammenligne hans arbeid og hans tilnærminger med det som tidligere var gjort på disse feltene, føler jeg at jeg selv har opparbeidet meg en mye bredere kompetanse innenfor spesielt geometrifeltet.

Når det gjelder spørsmålet om hvordan eventuelt Leonardos arbeid påvirket matematikere som kom senere føler jeg at jeg har fått et delvis svar på dette. Det virker som om hans arbeid i liten, om noen, grad har påvirket andre. Årsakene til dette er trolig sammensatte, hans arbeid var usystematisert og vanskelig tilgjengelig. Han utgav ikke noe helhetlig verk om matematikk, slik at de som eventuelt kunne la seg påvirke ville hatt en stor oppgave foran seg. I tillegg forsvant mange av notatene hans i perioden etter hans død, før de dukket opp noen hundreår senere. Den perioden som da hadde gått, ville trolig vært den mest aktuelle tidsepoken for at noen skulle blitt påvirket av Leonardos arbeid. Samtidig kan dette være en årsak til at mytene om mannen lever den dag i dag. Notatene hans som viser tegninger, skisser og ideer om konstruksjoner (blant annet helikopter, undervannsbåter og fallskjermer), er i dag med på å gi mannen et rykte som langt foran sin tid. Hvordan dette ettermælet ville vært dersom planene hans var allment kjent og forsøkt utprøvd i tiden direkte etter hans død, er derimot vanskelig å ha noen formening om.

Referanser

Amundsen, K. (1999) *Blikk på renessansens kunstnere og deres begrep om perspektivitet – linjer frem til Girard Desargues*. Prosjektoppgave i Ma 370 – Matematikk i utvikling II. Kristiansand: HiA.

Andersen, K. (2007) *The Geometry of an Art – the History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer.

Arntzen, E. (2007) *Emneplan for matematikk I*. Halden: Høgskolen i Østfold.

Aston, M. (1998) *Renessansen – i historisk perspektiv*. Oslo: Aschehoug.

Atalay, B. (2004) *Math and the Mona Lisa – The Art and Science of Leonardo da Vinci. Washington*: Smithsonian Books.

Avital, S. (1995) History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning in F. Swetz, J. Fauvel, O. B. Bekken, B. Johansson & V. Katz (1995) *Learn from the masters*. Washington, D.C: Mathematical Association of America, s. 3 - 12.

Ayoub, R. G. (2004) *Musings of the masters: An anthology of mathematical reflections*. Washington, D.C: Mathematical Association of America.

Baxandall, M. (1988) *Painting & Experience in Fifteenth-Century Italy*. New York: Oxford University Press.

Bold, B. (1982) *Famous problems of geometry and how to solve them*. New York: Dover.

Bruckheimer, M., & Arcavi, A. (2000) Mathematics and Its History: An Educational Partnership in V. J. Katz (2000) *Using history to teach mathematics: An international perspective.* Washington, D.C: Mathematical Association of America, s. 135 – 146.

Buchholz, E. L. (2001) *Leonardo da Vinci: Liv og virke*. Köln: Könemann.

Bulien, T. (2000) *Using History in Teaching Algebra at the Teachers College*. Hovedoppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: HiA.

Burn, R. (1998) Matematikkens historie – blindspor eller skattekiste? *Tangenten* **9** (2), s. 10-14.

Cianchi, M. (1988) *Leonardo da Vinci's Machines*. Florence: Edizione Becocci – Largo Liverani.

Clagett, M. (1969) *Leonardo da Vinci and the Medieval Archimedes* in (1969). Physis 11. Firenze.

Clagett, M. (1978) *Archimedes in the Middle Ages. Volume Three. The Fate of the Medieval Archimedes 1300 to 1565. Part III: The Medieval Archimedes in the Renaissance, 1450 – 1565*. Philadelphia: The American Philosophical Society.

Clagett, M. (1979) *Studies in Medieval Physics and Mathematics*. London: Variorum Reprints.

Clark, K., & Kemp, M. (2004) *Leonardo da Vinci*. London: Penguin.

Clark, K., & Pedretti, C. (1968) *The Drawings of Leonardo da Vinci in the Collection of Her Majesty The Queen at Windsor Castle*. Volume I. London: Phaidon.

Det Norske Bibelselskap (1985) *Bibelen: Den hellige skrift: Det gamle og det nye testamente* (2. utg ed.). Oslo: Det norske Bibelselskap.

Dickens, E. (2005) *The da Vinci Notebooks*. London: Profile Books Ltd.

DSB (1991) *Biographical dictionary of mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. American Council of Learned Societies. New York: Scribner.

Eves, H. (1972) *A survey of geometry* (Rev. ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Elam, K. (2001) *Geometry of Design. Studies in Proportion and Composition*. New York: Princeton Architectural Press.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000) *History in Mathematics Education – The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Field, J. V. (1997) *The Invention of Infinity-Mathemtics and Art in the Renaissance*. New York: Oxford University Press.

Field, J. V. (2005) *Piero Della Francesca: A Mathematician's Art*. New Haven and London: Yale University Press.

Frère, J. C. (1994) *Leonardo*. Paris: Finest SA / Éditions Pierre Terrail – Bayard Presse.

Fűhrer, L. (1991) Historical Stories in the Mathematics Classroom, *For the Learning of Mathematics* 11, 2, s. 24 – 31.

Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics Education, School Practice – Case Studies in Linking Different Domains, *For the Learning of Mathematics* 17, 1, s. 55 – 61.

Furinghetti, F. (2004) History and Mathematics Education: A look around the World with Particular Reference to Italy, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* Vol 3, No 1-2 2004, s. 1 – 17.

Grugnetti, L. (2000) The History of Mathematics and Its Influence on Pedagogical Problems in V. J. Katz (2000) *Using history to teach mathematics: An international perspective.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, s. 29 – 36.

Hobson, E. W. (1953) *Squaring the circle, and other monographs*. New York: Chelsea Publ. Co.

Huntley, H. E. (1970) *The Divine Proportion – A Study in Mathematical Beauty*. New York: Dover Publ. Co.

Jones, P. (1989) *The history of mathematics as a teaching tool. Historical topics for the mathematics classroom.* Washington D. C: National council of teachers of mathematics.

Katz, V. J. (2000) *Using history to teach mathematics: An international perspective.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Katz, V. J. (2004) *The history of mathematics: Brief version*. Boston: Pearson/Addison-Wesley.

Kazarinoff, N. D. (2003) *Ruler and the round: Classic problems in geometric constructions*. New York: Dover Publications.

Kemp, M. (2006) *Seen/unseen: Art, science and intuition from Leonardo to the Hubble telescope*. Oxford: Oxford University Press.

Kemp, M. (2006) *Leonardo da Vinci: The marvellous works of nature and man* (Rev. ed.). Oxford: Oxford University Press.

Kline, M (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

KUD *(*1987*) Mønsterplan for grunnskolen: M 87*. Oslo: Aschehoug: Kyrkje- og undervisningsdepartementet.

KUF (1997) *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Lahn-Johannessen, M. (2002) *Rektor og matematiker Fredrich Christian Holberg Arentz: Hans påvirkning på matematikkfaget ved Bergen katedralskole med et eksempel på bruk av originale kilder*. Hovedoppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: HiA.

Lunden, K. (1984) Frå mellomalder til renessanse I kunst og diktning in K. Helle, J. Simensen, S. Tägil, & K. Tønnesson (1984) *Aschehougs Verdenshistorie: Bind 6. Europa i krise 1300 – 1500.* Oslo: Aschehoug, s. 241 – 262.

Lützen, J. (1985) *Cirklens kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling: Fra oldtidens geometri til moderne algebra*. Herning: Systime.

Marinoni, A. (1980) *Das Fahrrad* in C. Zammattio, A. Marinoni & A. M. Brizio (1980) *Leonardo Der Forscher*. Darmstadt: Wissenschaffliche Buchgesellschaft, s. 154 - 168.

Marinoni, A. (1980) *Leonardos Schriften* in C. Zammattio, A. Marinoni & A. M. Brizio (1980) *Leonardo Der Forscher*. Darmstadt: Wissenschaffliche Buchgesellschaft, s. 68 - 123.

Marinoni, A. (1982) La Matematica di *Leonardo da Vinci - una nuova immagine dell'artista scienziato*. Milano: Arcadia.

Masters, R. D. (1998) *Fortune is a river: Leonardo da Vinci and Niccolo Machiavelli's magnificent dream to change the course of Florentine history*. New York: The Free Press.

Mosvold, R. (2001) *Det genetiske prinsipp i matematikkdidaktikk*. Hovedoppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: HiA.

Nicholl, C. (2005) *Leonardo da Vinci: The flights of the mind*. London: Penguin Books Ltd.

Pizzamiglio, P. (1986) Leonardo e la matematica. Atti della IX Giornata Leonardiana. Brescia: Centro Ricerche Leonardiane.

Richter, I. A. (1998) The Notebooks of *Leonardo da Vinci*. Oxford: Oxford University Press.

Røsstad, A. (1995) *Leonardo da Vinci: The Man and the Mysteri*. Oslo: Solum Forlag A/S.

Schrőer, K. (1998) Ich aber Quadriere den Kreis. Műnster: Waxmann.

Scriba, C. J. (1987) On the So-called `Classical Problems`in the History of Mathematics in Grattan-Guinness (edit.) (1987) History in mathematics education in Cashiers d'historie @de philosophie des sciences N° 21 - 1987. Belin, Paris: Sociètè Francaise d'historie des sciences et des techniques, s. 73 – 99.

Scriba, C. J. (1988) Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400jährige Geschichte eines Problems bis zur endgültigen Lösung in den Jahren 1933/1947.Sondertruck aus Mitteilungen der Matematischen Gesellschaft in Hamburg, Band XI, Heft 5 *(1988).*

Severi, F. (1953) Leonardo and mathematics in R. G. *Ayoub (2004). Musings of the masters: An anthology of mathematical reflections*. Washington, D.C: Mathematical Association of America, s. 247 – 255.

Siu, M.-K.(2000) The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom in V. J. Katz (ed.): *Using history to teach mathematics: An international perspective.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, s. 3 - 9.

Smith, R. (1996) *En innføring i perspektiv*. Oslo: N. W. Damm & Sønn AS – Teknologisk forlag.

Struik, D. J. (1987) *A concise history of mathematics* (4th rev. ed.). New York: Dover Publications.

Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O. B., Johansson, B., & Katz, V. (1995) *Learn from the masters*. Washington, D.C: Mathematical Association of America.

Turner, A. R. (1992) *Inventing Leonardo*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press.

UF (Utdannings- og forskningsdepartementet) (2005) *Kunnskapsløftet: Læreplaner for gjennomgående fag i grunnskolen og videregående opplæring* (Midlertidig trykt utg ed.). Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Van Der Waerden, B. L. (1961) *Science Awakening*. New York: Oxford University Press.

White, M. (2002) *Leonardo: Historien om Leonardo da Vinci, den første vitenskapsmann.* Oslo: Damm.

Winicki, G. (2000) The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers in V. J. Katz (2000) *Using history to teach mathematics: An international perspective*. Washington, D.C: Mathematical Association of America, s. 129 – 134.

Internetthenvisninger:

Bjørkeng, P. K. (2006) Broen som ingen får se. http://www.aftenposten.no/kul_und/article1573477.ece

Laubenbacher, R. C. & Pengelley, D. J. (1994). Recovering Motivation in Mathematics: Teaching with Original Sources, *UME Trends* 6. http://math.nsmu.edu/~history/ume.html.

Løvli, G. (2007). Da Vinci-bro utenfor FN-bygningen I USA. http://www.f-b.no/article/ 20070901/ SPEILET/709010010

Nies, K. A. Leonardo's Kinematic Technique.http://www.hypatiamaze.org/leonardo/leo_lune3.html.

Sand, V. (2001) The Leonardo Project. http://www.vebjorn-sand.com/leonardo.html.

Van Remoortel, H. Leonardo da Vinci. http://mathsforeurope.digibel.be/Leonardo.html

http://no.wikipedia.org/wiki/Perspektiv_%28kunst%29