UNIVERSITETET I AGDER

En eksplorativ undersøkelse av realopsjoner i eiendoms- og byggeprosjekter

Espen Kulia

Veileder

Øystein H. Meland

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet innestår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitet i Agder, 2013

Fakultet for økonomi og samfunnsvitenskap

Forord

Masteroppgaven er en obligatorisk del av masterstudiet i økonomi og administrasjon ved Universitet i Agder (UIA)

Jeg har valgt å skrive om realopsjoner i eiendoms- og byggeprosjekter. Første gang jeg lærte om finansielle opsjoner var i Corporate Finance våren 2012. Jeg syns det var spennende og tenkte med meg selv hvorfor ingen hadde overført dette til realøkonomien. Selvfølgelig var jeg ikke den første til å tenke på dette så etter et Google søk fant jeg ut at dette var et fagområde som har eksistert i over 20 år.

Selv om det fins litteratur på området er det fortsatt i stor grad basert på case hvor forutsetningene er veldig enkle. Mye av litteraturen på området dreier seg også om verdsettelse av gruver, oljeleting og utviklingsprosjekter (medisiner, patenter). Det finns veldig lite litteratur om opsjoner i eiendoms- og byggebransjen, og jeg måtte derfor starte litt på bar bakke. Jeg hadde likevel stor hjelp av artiklene til Meland, Robertsen og Elnan om realopsjoner og fast eiendom. Dette var en god innføring og den inneholder også mange gode eksempler.

Mye tid har gått med til å finne riktig verdsettelsesmetode. Jeg fant etter hvert ut at den binomiske verdsettelsesmodellen var den mest forståelige og anvendbare å bruke. Jeg har derfor brukt denne metoden i alle eksemplene mine. Jeg vil påpeke veldig sterkt at denne oppgaven må sees på som en eksplorativ undersøkelse hvor jeg bygger eksemplene mine på enkle forutsetninger. Først når fagfeltet har utviklet seg videre vil det være mulig å gjennomføre større å mer kompliserte analyser av realopsjoner inne eiendoms- og byggebransjen.

Jeg vil takke veilederen min, Dr Øystein H. Meland for godt samarbeid og for at han har gitt meg stor handlefrihet til å utforske et nytt fagområde.

Kristiansand, 3. Juni 2013

Espen Kulia

Sammendrag

Temaet for masteroppgaven er realopsjoner i eiendoms- og byggebransjen. Realopsjoner er en rett, men ingen plikt til å utsette, ekspandere og skrinlegge et prosjekt. Poenget med realopsjoner er å verdsette fleksibilitet som kan implementeres i prosjektet. En tradisjonell nåverdimodell, som i dag er den mest vanlige metoden for å verdsette prosjekter, kan ikke verdsette denne fleksibiliteten.

Det foreligger lite litteraturen om realopsjoner innen byggebransjen, så oppgaven er i den forstand en eksplorativ undersøkelse av mulighetene som foreligger for en større bruk av realopsjoner inne eiendoms- og byggebransjen.

Kapitel 2 og 3: Først vil jeg gå fort gjennom metode og sentral litteratur på området. Etter dette går jeg gjennom teorien rundt realopsjoner. Spørsmål som blir besvart er forskjellen på kjøps- og salgsopsjon, verdidrivere i realopsjoner og ulike typer realopsjoner. Jeg kommer også inn på noen viktige forutsetninger for implementering av realopsjoner.

Kapitel 4: Dette er kapitelet om verdsettelse og jeg starter med kort gjennomgang av hovedproblemene til nåverdimodellen angående verdsettelse av fleksibilitet. Jeg vil også presentere et lite eksempel som viser tilleggsverdien man får ved å implementere en venteopsjon i et prosjekt. Jeg vil videre gå over til å vise teorien bak den risikonøytrale verdsettelsesmetoden. Jeg har valgt å gjøre dette ved et regneeksempel hvor jeg ønsker å gjennomføre en nåverdiberegning med replikasjonsmetoden. Videre vil jeg løse realopsjoner med en beslutningsanalyse, markedsrepliserende portefølje og til slutt risikonøytral sannsynlighet. Til slutt vil jeg presentere den binomiske opsjonsprisingsmodellen, hvordan vi estimerer volatilitet og framgangsmåten for verdsetting med den binomiske opsjonsprisingsmodellen.

Kapitel 5: Case 1: I dette kapitelet viser jeg hvordan et prosjekt med en opprinnelig nåverdi på null får en tilleggsverdi på 56 mill NOK ved å gjennomføre prosjektet i tre separate faser.

Kapitel 6: Case 2: I dette kapitelet løser jeg en sammensatt opsjon for et kjøpesenter. Jeg starter med en individuell verdsettelse av en ekspansjonsopsjon, nedleggingsopsjon og

kontraktopsjon. Til slutt har jeg funnet den samlede opsjonsverdien som er 7 % lavere en den totale summerte verdien av de individuelle opsjonene.

Kapitel 7: Case 3: I dette kapitelet ser jeg på verdsettelsen av en kjøpsopsjon for en tomt. Først finner jeg opsjonsverdien med å forutsette at eneste usikkerhetsfaktor er utnyttelsesgraden i reguleringsplanen. Jeg legger så inn en ny usikkerhetsvariabel som er endringer i boligprisene. Resultatene på caset er at implementering av den ekstra usikkerhetsfaktoren medfører en økning i opsjonsverdien på 2 mill NOK.

Kapitel 8: Case 4: Dette er en oppgave som fokuserer på ulike måter å gjennomføre en reguleringsprosess. Jeg sammenligner tre ulike metoder. Den ene metoden er å kjøpe tomten, den andre er å kjøpe en kjøpsopsjon på tomten og den tredje er å kjøpe tomten pluss en salgsopsjon på samme tomten. Resultatene viser at å kjøpe tomten vil være det dårligste alternativet, å kjøpe tomten og en salgsopsjon er det nest beste og en kjøpsopsjon på tomten vil være det foretrukne alternativet.

Kapitel 9: I dette caset ser jeg på muligheten til å finne den riktige påslagsprosenten i en totalentreprise som differansen mellom en kjøpsopsjon og salgsopsjon. Resultatene viser at under forutsetningen om at byggekostnadene følger en lognormal sannsynlighetsfordeling fordeling hvor estimerte byggekostnader med 50 % sannsynlighet er 150 mill NOK, vil den riktige påslagsprosenten være 11 %. Ulike simuleringer viser også at påslagsprosenten holder seg konstant på 11 % uansett *volatilitet*.

Kapitel 10: I dette caset prøver jeg å verdsette en vertikal ekspansjonsopsjon på Berge Ungdomsskole i Lyngdal. Ved å legge inn noen forutsetninger kommer jeg fram til at en vertikal ekspasjonsopsjon med varighet på 17 år har en netto opsjonsverdien på mellom 4-7 mill NOK, litt varierende etter hvilke forutsetninger du legger inn.

Kapitel 11: Konklusjon: Til slutt kommer jeg med et lite sammendrag av hva jeg har funnet ut, og en anbefaling om fremtidige forskning.

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabelliste

1 INNLEDNING

Oppgaven er siste del i masterutdanningen innen økonomi og administrasjon ved Universitet i Agder. Masteroppgaven skal skrives på en akademisk riktig måte og følge forskningsetiske retningslinjer.

Siden jeg for første gang ble presentert for den tradisjonelle nåverdimodellen har jeg stusset over de deterministiske og statiske forutsetningene modellen bygger på. Et annet problem jeg har med modellen er at den forutsetter en "nå-eller-aldri" mentalitet. Videre verdsetter ikke nåverdimodellen usikkerheten i et prosjekt. Disse svakhetene kan man kompensere ved å bruke realopsjoner. Dette betyr ikke at man må forkaste den tradisjonelle modellen, men man bygger videre på denne ved å implementere fleksibilitet i prosjektet. Jostein Tvedt beskriver problemene med den tradisjonelle modellen i artikkelen "Realopsjoner -- verdien av fleksibilitet"(2000).

Et prosjekt med irreversible investeringer har større verdi når man har fleksibilitet til å velge investeringstidspunkt enn uten slik fleksibilitet. Jo større frihet, dess større verdi. Å overse dette er en av farene ved å benytte tradisjonelle nåverdiberegninger. At nåverdien av forventet fremtidig kontantstrøm er lavere enn investeringsbeløpet, betyr ikke at et prosjekt bør forkastes, men bare at det, om opsjonsverdien er høy nok, bør utsettes (Tvedt, 2000).

1.1 Problemstilling

Jeg har valgt en eksplorativ forskningsmetode siden området jeg skal undersøke er lite kjent. Jeg har også valgt å bygge oppgaven på ulike casestudier for å utforske ulike områder hvor realopsjoner kan være nyttig. Jeg startet med følgende hovedproblemstillingen:

Hvilke realopsjoner er aktuelle i eiendoms- og byggebransjen?

Jeg valgte følgende underproblemstillinger for casestudiene

1. Hva er den potensielle tilleggsverdien av å gjennomføre et byggeprosjekt stegvis?
2. Hva er verdien av å legge inn flere opsjoner samtidig i et eiendomsprosjekt?
3. Hva er verdien av en opsjon på en tomt som gjør det mulig å vente med å kjøpe tomten til reguleringsplanen er behandlet, og hva skjer med verdien når du legger inn en ekstra usikkerhetsvariabel?
4. Hva er den beste måten å gjennomføre et strategisk langsiktig tomtekjøp?
5. Er det mulig å finne en korrekt påslagsprosent for en totalentreprise?
6. Hvilke verdi har den vertikale ekspansjonsopsjonen ved Berge Ungdomsskole?

1.2 Avgrensning

For å gjøre oppgaven mest mulig oversiktlig og forståelig for lesere som ikke er kjent med realopsjoner har jeg brukt mye tid på å finne en presentasjonsform som gjør stoffet forståelig. Jeg har derfor valgt å fokusere på den binomiske opsjonsprisingsmodellen og ser bort fra Black & Scholes modellen og Monte Carlo modellen. Videre er utregningseksemplene mine basert på en del forutsetninger angående usikkerhet som ikke er

basert på en simulering. Jeg mener at disse forutsetningene gjør oppgaven mer oversiktlig samtidig som resultatene jeg kommer fram til gir et korrekt bilde.

2 METODE

Kapitelet bygger på teori hentet fra (Jacobsen, 2005; Johannessen; Zikmund, Carr, & Griffin, 2012).

Metode er en "systematisk måte å undersøke virkeligheten på" (Halvorsen, 1993). Det er vanlig å skille mellom kvantitativ og kvalitativ metode. En kvantitativ metode vil bygge på data som kan utrykkes i målbare tall. Dette er vanlig ved statistisk analyse av store tallmaterialer og spørreundersøkelser. Den kvalitative metoden benyttes når vi skal utforske et fenomen som ikke kan kvantifiseres i tall. Den kvalitative metoden kan derfor ikke si noe om sannsynligheten for et bestemt fenomen. Dette gjør det vanskelig å generalisere resultatene i en større populasjon. En kvantitativ undersøkelse vil derfor gi oss et svar på ”hvor mange” mens kvalitativ sier noe om ”hva, hvorfor og hvordan”.

2.1 Forskningsdesign

Forskningsdesignet er den overordnede strukturen som oppgaven gjennomføres etter. Problemstillingen vi har valgt vil avgjøre hvilke forskningsdesign vi må velge. Det er vanlig å dele forskningsdesign inn i deskriptivt, kausalt og eksplorativt design. Deskriptivt design ønsker å gi svar på spørsmål om hvem, hva, når, hvor og hvordan. Et kausalt design ønsker å undersøke om det finns en sammenheng mellom en uavhengig og avhengig variabel.
Min oppgave er casebasert og bygger på et forenklet bilde av virkeligheten. Jeg har derfor valgt et eksplorativt forskningsdesign. Det eksplorative forskningsdesignet gir større fleksibilitet til å endre forskningen etter hvert som man tilegner seg ny informasjon.

2.2 Validitet (Gyldighet)

Validitet sier om resultatene vi har funnet er svar på det vi ønsket å undersøke. I denne oppgaven ønsker vi å finne verdien av ulike former for fleksibilitet i eiendoms- og byggebransjen. Verdien av fleksibiliteten måler vi med opsjonsverdien. Det er derfor viktig at opsjonsverdien er et godt mål på fleksibilitet i prosjekter. Jeg mener at jeg i oppgaven har bruk opsjonsteorien på en korrekt måte og at jeg dermed kan si at den har en høy intern validitet. Siden casene bygger på enkle forutsetninger må det i fremtiden gjøres større undersøkelser på virkelige problemstillinger. Jeg kan derfor ikke si med sikkerhet hvor stor ekstern validitet oppgaven har.

2.3 Reliabilitet (Pålitelighet)

Reliabilitet sier om resultatene fra casestudiet kan gjenskapes ved å bruke samme forutsetninger med tilsvarende metoder. Det er vanlig at man gjennomfører flere separate tester for å undersøke at man får tilsvarende resultat. Jeg har i min casestudie brukt både Black&Scholes modellen og Monte-Carlo simulering for å teste resultatene i casene hvor det er europeiske opsjoner. I casene hvor det er amerikanske opsjoner har jeg laget en binomisk kontrollmodell med opptil 100 steg/tidsperioder. Jeg har ikke tatt disse med i oppgaven siden det ikke finnes noen mulighet til å tilpasse en så stor modell til et A4 dokument.

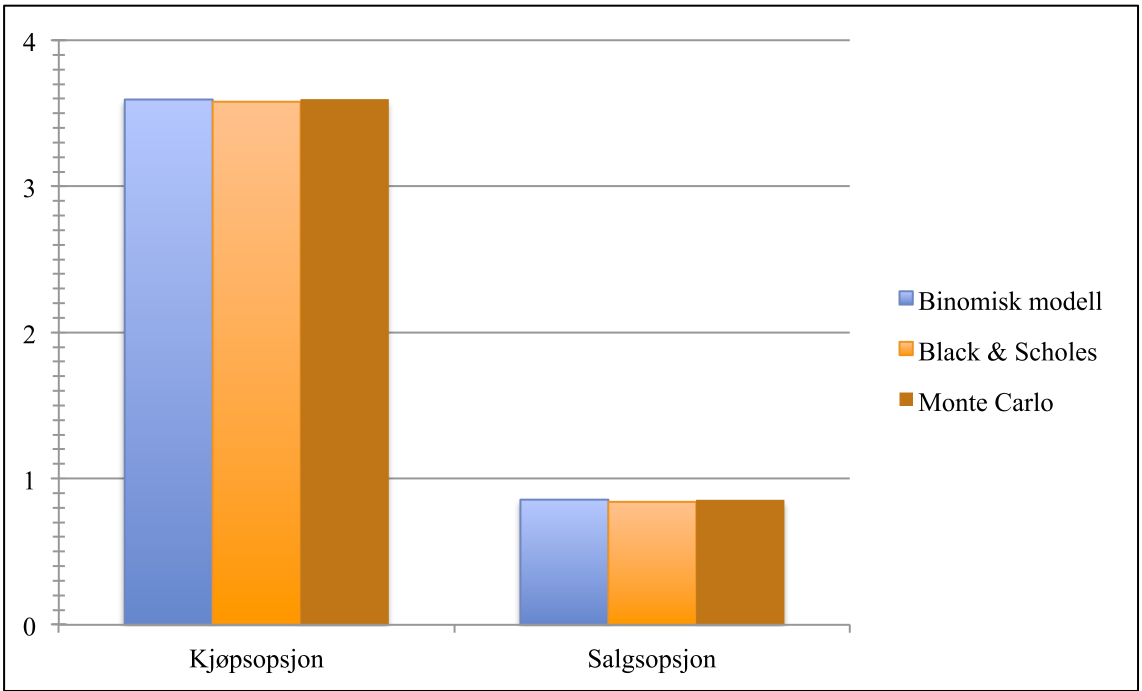
Alle modellene mine er også testet opp mot ulike case fra forskjellige vitenskapelige artikler. Dette har jeg gjort for å sjekke om jeg får samme resultater i mine modeller når jeg bruker forutsetningene som er satt opp i de vitenskapelige artiklene.

For å vise hvordan jeg testet reliabiliteten, har jeg i tabell 1 og 2 tatt et utsnitt av hvordan jeg sjekket påliteligheten til mine resultater i case 5 alternativ 2. Jeg kom fram til at kjøpsopsjonen hadde en verdi på 3.595 mill NOK. Jeg gjennomførte også 1000 Monte Carlo simuleringer hvor opsjonsverdien ble 3.68 mill NOK, mens Black&Schooles modellen ga en opsjonsverdi på 3.580 mill NOK. Siden B&S modellen forenklet kan sees på som en binomisk modell med uendelig mange steg, er 3.580 mill NOK det nærmeste du kommer den virkelige verdien. Modellen som jeg har laget gir en opsjonsverdi som er 0.42 % høyere enn B&S modellen. Dette er en ubetydelig differanse i denne sammenhengen og min konklusjon var derfor at case 5 alternativ 2 hadde en høy reliabilitet. Det er viktig å påpeke at selv om reliabilitet sier noe om kvaliteten på modellen sier den likevel ikke noe om i hvilke grad vi har funnet et svar på det vi ønsket å undersøke (validitet).

TABELL 1 UTSNITT: MODELL FOR Å SJEKKE RELIABILITETEN I CASE 5, ALTERNATIV 2

	8,00		0,85
	0,47		0,28
	10 mill NOK	N(d1)	0,80
	10 mill NOK		0,61
	4 %		3,580 mill NOK
	20 %		0,841 mill NOK
Monte carlo Simulering			
			5 mill NOK
			3,68 mill NOK
			0,95 mill NOK
	1		17
	0		11
			6
1	1		19,85745361
2	1		9,857453614
3	1		
4	0		
5	0		
6	0		9,857453614
7	1	1	0
8	1	2	0
9	1	3	5,092254985

TABELL 2 GRAFISK SAMMENLIGNING AV KONTROLLREGNING



3 TEORI

3.1 Litteratur

Opsjonsteori er en relativt ny fagdisiplin som fikk sitt gjennombrudd på 70- tallet med Black-Scholes formelen for prising av Europeiske opsjoner (Black & Scholes, 1973). Den første som kom opp med konseptet realopsjon var Myers (1977). Han påpekte at deler av selskapers markedsverdi reflekterte nåverdien av fremtidige investeringsmuligheter, og at den tradisjonelle nåverdimodellen undervurderte disse mulighetene. Trigeorgis (1993) delte senere realopsjoner inn i ulike kategorier basert på fleksibilitet, og i 1996 kom samme forfatter med en av de første store gjennomgangene av realopsjoner i boken ”Real Options Managerial Flexibility and strategy in resouce allocation”. Det er de siste 10-15 årene kommet en rekke bøker om realopsjoner. Amram og Kulatilaka sin bok ”Real Options a practitioner`s guide” er en god innføringsbok i realopsjoner (M. Amram & Kulatilaka, 2012; Martha Amram & Kulatilaka, 1999). En annen viktig innføringsbok er ”Real Options a practitioner`s guide” fra 2001 (T. Copeland & Antikarov, 2001). Andre innflytelsesrike personer innen realopsjonsteorien har vært Hull (1999; 2002; 2003), Kodukula & Papudesu (2006), Munn (2002, 2003, 2007, 2008, 2010), (H. B. Nembhard, 2009)) og (Brach, 2002).

Det har vært skrevet noen artikler på norsk. Elnan, Meland og Robertsen har to artikler i serien *Byggherren i fokus* som omhandler realopsjoner (2007 og 2007). Den mest detaljerte rapporten er *Realopsjoner og fast eiendom* som inneholder flere gode eksempler. I artikkelen *Realopsjoner og fleksibilitet i store offentlige investeringsprosjekter* er det en kort beskrivelse av realopsjoner og noen enkle eksempler (Brekke, 2004). Det er de siste årene skrevet flere masteroppgaver om realopsjoner. Det er som jeg kan se bare skrevet en masteroppgave som omhandler eiendoms og byggebransjen og den har navnet *Bruk av realopsjoner i konseptvalgfase/tidligfase hos Statsbygg* (Lyngstadås, 2012). I denne masteroppgaven ser han på vertikale og horisontale ekspansjonsopsjoner ved ulike Monte Carlo simuleringer for nye lokaler til Brønnøysundregisteret. En annen god masteroppgave er *Realopsjoner i Forsvarets økonomistyring* som har spesielt fokus på forsvaret og med en mer teoretisk innfallsvinkel (Størseth, 2006).

Innen eiendoms- og byggebransjen har Richard De Neufville (2006) kommet med flere bidrag. Han har skrevet mange artikler og jeg vil spesielt trekke frem *Real options by spreadsheet: Parking garage case example* (2006), *Identification of Real Options "in" Projects (2006).*

Det har vært skrevet en del om realopsjoner på norsk, blant annet av (Brekke, 2004; Elnan, Meland, & Robertsen, 2007b; Størseth, 2006; Sødal, 2005).

3.2 Opsjon

En opsjon er en kontrakt som gir eieren en rett, men ingen plikt til å kjøpe eller selge et *underliggende aktiva* til en forhåndsbestemt pris, innenfor en forhåndsbestemt tidsperiode. Med begrepet underliggende mener vi at objektet eller kontantstrømmen bestemmer verdien av opsjonen. En *kjøpsopsjon* er en rett til å kjøpe et aktiva, mens en *salgsopsjon* er en rett til å selge et aktiva (Smit & Trigeorgis, 2008).

Alle opsjonskontrakter inneholder en *utøvelsespris* som er den avtalte prisen man er blitt enig om. Videre vil kontrakten spesifisere varigheten eller *utløpsdato*. En opsjon som kan utøves før utløpsdatoen blir kalt en *amerikansk opsjon* mens en opsjon som kun kan utøves på utløpsdatoen kalles en *europeisk opsjon*. Å utøve en opsjonskontrakt er det samme som å benytte seg av rettigheten man har i opsjonskontrakten og forskjellen på amerikanske og europeiske opsjoner er derfor hvor lang denne perioden er.

En *finansiell opsjon* er en standardisert kontrakt som gir eieren en rett, men ingen plikt til å kjøpe eller selge et markedsomsatt finansielt aktiva til en forhåndsbestemt pris, før eller på utløpsdatoen.

En *realopsjon* er en rett, men ikke en plikt, til å gjennomføre en handling (avvise, utvide, redusere, stoppe) til en forhåndsbestemt pris, før eller på utløpsdatoen (T. E. Copeland & Antikarov, 2003). Realopsjoner omsettes ikke i det åpne markedet og må derfor lages av prosjekteieren selv.

Et annet ord for realopsjoner som ofte brukes er *fleksibilitet*. Fleksibilitet i denne konteksten definerer vi som muligheten til å endre prosjektets utforming og/eller omfang, og friheten til å utsette viktige beslutninger for hele eller deler av prosjekter (Størseth, 2006) . Fleksibilitet har bare en verdi når det er stor usikkerhet om fremtiden og stor sannsynlighet for ny informasjon. *Beslutningsfleksibilitet* er evnen til å tilpasse beslutninger til ny informasjon (Størseth, 2006).

3.2.1 Kjøpsopsjon (C)

En kjøpsopsjon gir eieren en rett, men ingen plikt til å kjøpe et underliggende aktiva til en forhåndsbestemt pris. Kjøperen av opsjonen sies å ha en lang posisjon i det underliggende aktiva mens selgeren har en kort posisjon. Opsjonen vil på utløpsdatoen (T) være verdiløs eller lik differansen mellom det underliggende aktiva (S) og utøvelsesprisen (X). En eier av en kjøpsopsjon må derfor ta en beslutning om han ønsker å utøve opsjonen.

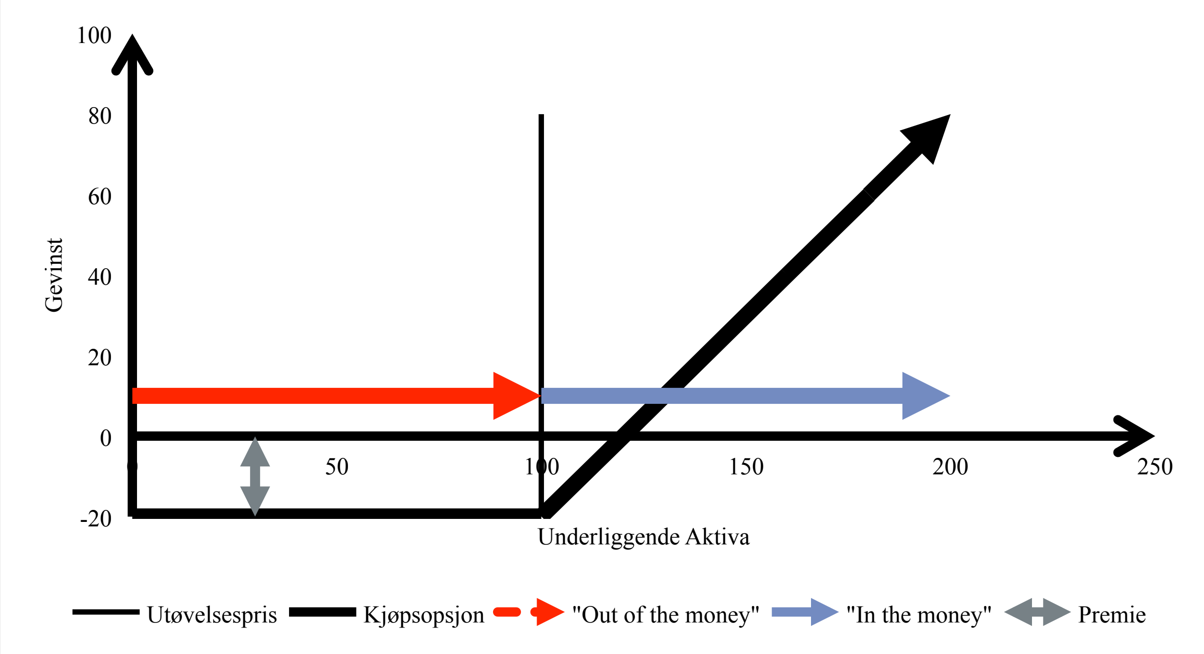
Beslutningsregelen for å utøve opsjonen er:

$$C = Maks[0, S - X]$$

Ved utløp har kjøpsopsjon positiv verdi («*in the money*») hvis $S - X > 0$, ingen verdi («*out of money*») hvis $S - X > 0$, og nøytral («*at the money*») hvis $S - X = 0$.

I figur 1 ser vi en grafisk presentasjon av opsjonen. Siden opsjonens verdi kan betraktes som en funksjon av det underliggende aktiva på utøvelsestidspunktet setter vi verdien til underliggende aktiva i den horisontale aksen og gevinsten langs den vertikale aksen. Opsjonens gevinst er nettoverdien vi sitter igjen med etter at kostnadene ved å lage opsjonen er fratrukket.

FIGUR 1 KJØPSOPSJON KILDE: (EGEN MODELL)



Hvis en entreprenør har rettighetene til å kjøpe deler av et prosjekt vil de på utøvelsestidspunktet bruke denne rettigheten hvis PV (kontantstrøm) er større en utøvelsesprisen. Hvis kostnadene ved å lage opsjonen er 20 mill NOK, utøvelsesprisen er 100 mill NOK og PV (kontantstrøm) på utløpsdatoen er 150 mill NOK vil gevinsten til prosjektet være:

$$Gevinst = 150 - 100 - 20 = 30\ mill\ NOK$$

I rapporten "Beslutninger på svakt informasjonsgrunnlag" oppgir de fire egenskaper ved kjøpsopsjonen (Sunnevåg, 2006):

- Fanger opp oppsidepotensialet i prosjektverdi knyttet til underliggende usikker variabel
- Utøving innebærer typisk utlegg i form av investeringskostnad
- Utøves når forventningene om positiv avkastning øker
- Eksempel: "invester nå eller vent"

3.2.2 Salgsopsjon (P)

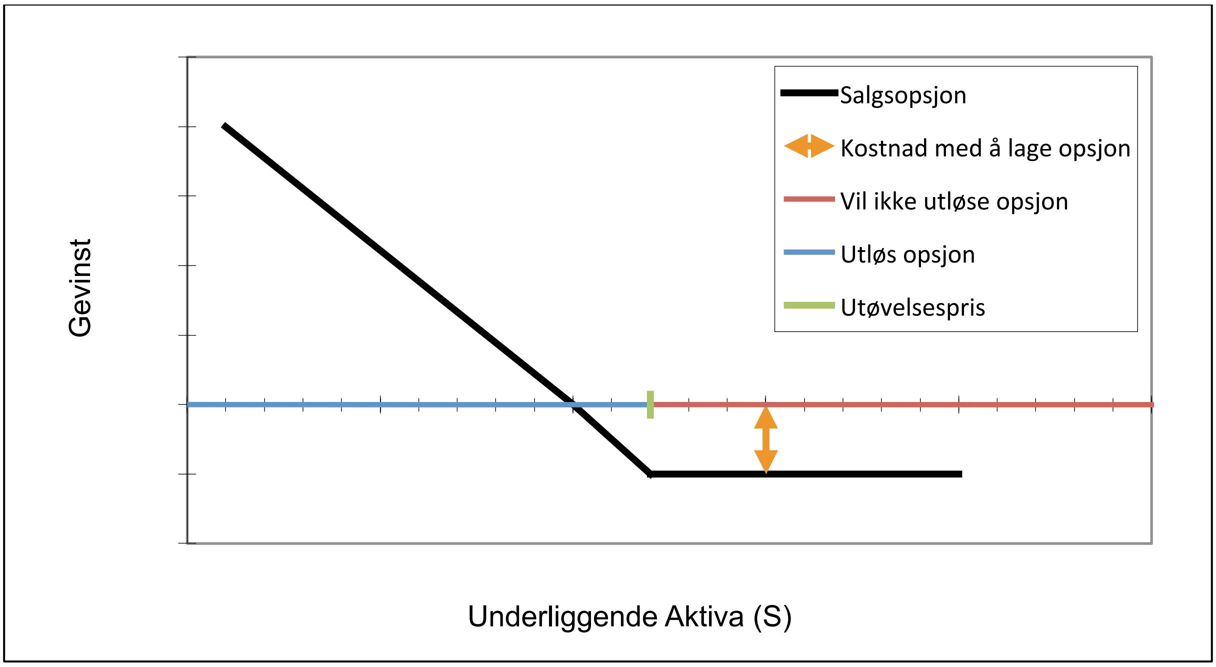
En salgsopsjon gir en rett, men ingen plikt til å selge det underliggende aktiva til en avtalt pris innenfor et avtalt tidsperiode. Den som selger salgsopsjonen sies å ha en kort posisjon og kjøperen en lang posisjon i det underliggende aktiva. Verdien av *salgsopsjonen (P)* på innløsningsdatoen (T) kan enten være verdiløs eller lik differansen mellom salgsprisen (X) og det underliggende aktiva (S):

$$C = Maks[0, X - S]$$

En salgsopsjon har en positiv verdi («*in the money*») hvis $X - S > 0$, ingen verdi («*out of money*») hvis $X - S > 0$. og nøytral («*at the money*») hvis $X - S = 0$

I figur 2 ser vi en grafisk presentasjon av salgsopsjonen. Det underliggende aktiva på utøvelsestidspunktet setter vi i den horisontale aksen og gevinsten langs den vertikale aksen. Opsjonens gevinst er nettoverdien vi sitter igjen med etter at kostnadene ved å lage opsjonen er fratrukket.

FIGUR 2 SALGSOPSJON



I rapporten ”Beslutninger på svakt informasjonsgrunnlag” oppgir de fire egenskaper ved salgsopsjonen (Sunnevåg, 2006):

- Forsikring mot tap knyttet til reduksjon i prosjektverdi på grunn av usikker variabel
- Utøving kan innebære utlegg i form av nedstengingskostnader eller lignende
- Utøves når forventningene om tap øker
- Eksempel: ”legg ned produksjonen nå eller vent”

3.2.3 Verdidrivere

Jeg vil nedenfor presentere de viktigste variablene i en opsjonsmodell. I tabell 3 ser vi en oversikt over forskjellene mellom finansielle opsjoner, forkortelsene vi bruker og hvordan en økning i variabelen påvirker verdien av kjøps- og salgsopsjonen.

TABELL 3 FAKTORER I OPSJONSMODELLEN

Kilde: (Munn, 2002, p. 100)

Finansielle opsjoner	Realopsjoner	Forkortelse	Salgsopsopsjon	Kjøpsopsjon
Dagens aksjepris	Nåverdien til forventet	S	+	-
Utøvelsespris	Investeringskostnaden	X	-	+
Utløpsdato for	Perioden hvor opsjon kan	T	+	+
Aksjeverdiens	Usikkerhet om prosjektets	σ	+	+
Risikofri rente	Risikofri rente	r_f	+	-
Utbytte	Tapt kontantstrøm ved	div	-	+

Delkapittelet 3.2.4 til 3.3 bygger på Amram&Kulatilaka (1999), Trigeorgis (1993,1996, 2008) Copeland & Antikarov (2003), Elnan, Meland, & Robertsen (2007) og Damodaran (2005).

3.2.4 Underliggende aktiva (S)

Det underliggende aktiva er det aktiva som eieren av opsjonen har en rettighet til å kjøpe eller selge til en avtalt pris. I en finansiell opsjon vil det underliggende aktiva være et markedsomsettelig aktiva som aksjer, obligasjoner og ulike råvarer. I en realopsjon vil det underliggende aktiva være nåverdien til forventet fremtidig netto kontantstrøm.

Hvis et nyoppført hotell er bygget på en måte som gir mulighet til å ekspander vertikalt på et senere tidspunkt vil dette være en vertikal ekspansjonsopsjon. Det underliggende aktiva i denne opsjonen vil være den ekstra kontantstrømmen en ekspansjon vil medføre for hotellet.

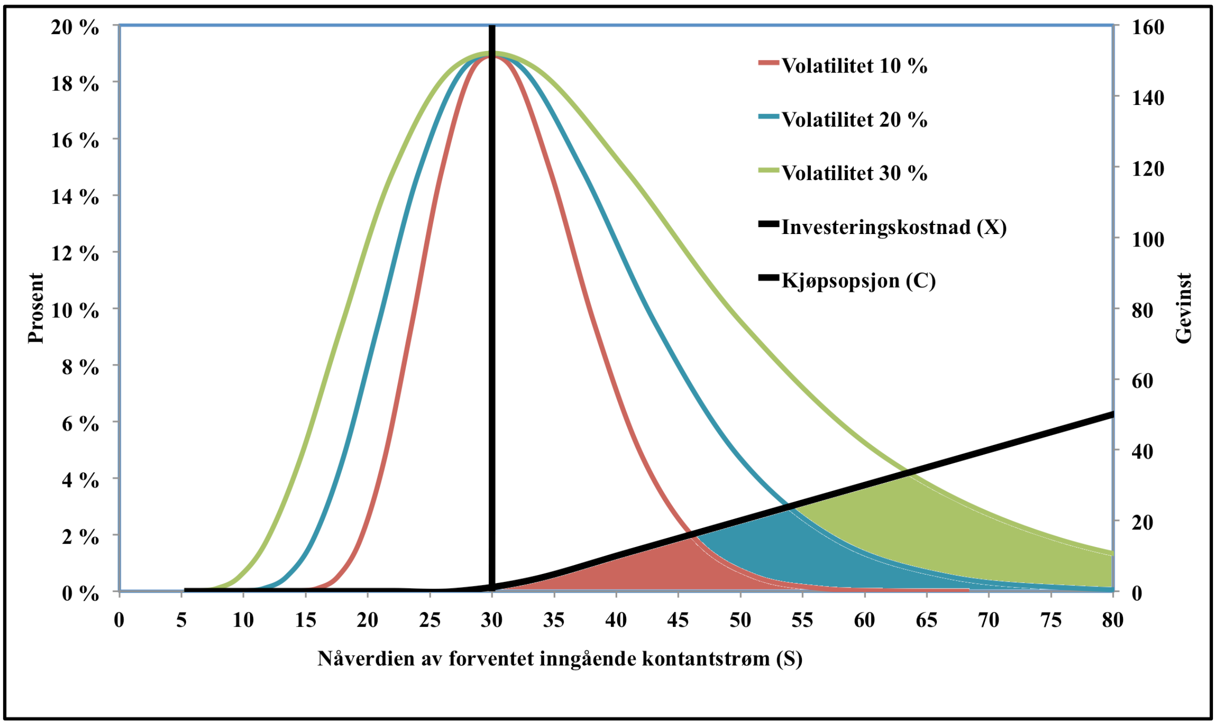
3.2.5 Utøvelsespris (X)

I en opsjonsavtale vil utøvelsesprisen være den avtalte prisen som det underliggende aktiva kan kjøpes eller selges for. I en finansiell opsjon vil utøvelsesprisen være den avtalte prisen på aksjen, obligasjonen og råvaren. I en realopsjon vil utøvelsesprisen være investeringskostnaden ved å utøve opsjonen.

3.2.6 Volatilitet (T)

Volatiliteten er standardavviket til den logaritmiske avkastningen til det underliggende aktiva. Når volatiliteten øker vil oppsidepotensialet og tapspotensialet til et prosjektet bli større. Siden opsjonen er en rettigheten og ingen plikt til å kjøpe/selge et underliggende aktiva vil en rasjonell aktør bare utøve denne rettigheten hvis kontantstrømmen er større en investeringskostnaden. I figur 3 har vi en illustrasjon på et prosjekt med tre ulike volatilitetestimat. Med en investeringskostnad på 30 mill NOK vil sannsynligheten for utøving av opsjonen (skravert område) øke med volatiliteten.

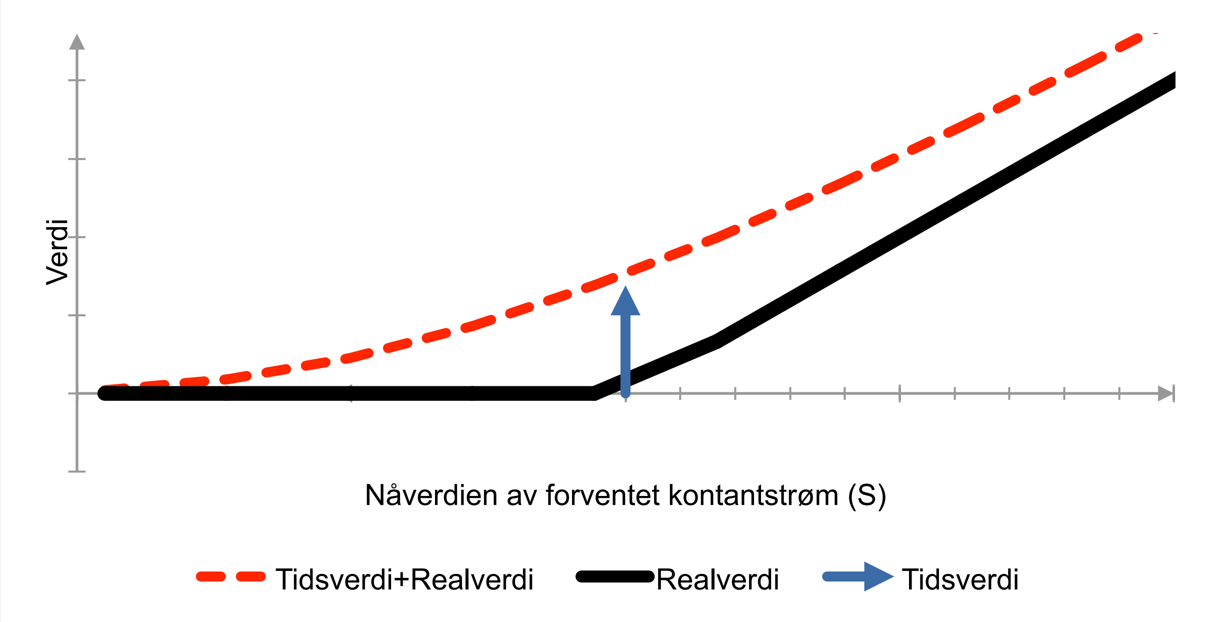
FIGUR 3 GEVINST SOM FUNKSJON AV VOLATILITET



3.2.7 Tid til forfall (T)

Den siste dagen opsjonen er gyldig kaller vi for utløpsdatoen ("Expiration date"). En opsjon har alltid positiv verdi helt fram til siste dagen opsjonen er gyldig. Årsaken er at det underliggende aktiva fram til forfall alltid har en teoretisk mulighet til å bli større enn utøvelsesprisen. Opsjonens tidsverdi er derfor verdien som denne teoretiske muligheten gir. I starten av prosjektet vil verdien av opsjonen kun bestå av tidsverdien. Fra starten av opsjonen til utøvelsesdatoen vil tidsverdien falle fra å tilføre 100 % av opsjonsverdien til 0 % av opsjonsverdien. Realverdien til opsjonen er hva opsjonen er verdt hvis man utøver opsjonen i dag. I starten av prosjektet vil realverdien tilføre 0 % av opsjonsverdien og dette øker gradvis til utøvelsesdatoen hvor realverdien tilfører 100 % av opsjonsverdien. I figur 4 ser vi realverdien som den sorte streken og tidsverdien som den røse streken. Den blå pilen viser tidsverdien i starten av prosjektet og vi ser at dette er hele verdien av opsjonen.

FIGUR 4 OPSJONENS TIDS- OG REALVERDI



3.2.8 Risikofri rente ($\boldsymbol{r_f}$)

Risikofri rente er kapitalavkastningen man får ved å investere penger i risikofrie aktiva. Den risikofrie renten er basisen som alle avkastningskrav bygger på. I internasjonal sammenheng regner man amerikanske langsiktige statsobligasjoner som en risikofri kapitalplassering. I Norge kan man bruke norske langsiktige statsobligasjoner som risikofri rente. Den har de siste årene vært 3-4 % årlig.

En økning i den risikofrie renten gir kapitalen en høyere alternativkostnad, og muligheten til å utsette investeringer og dermed også kapitalbindingen vil øke verdien av en kjøpsopsjon. En salgsopsjon er retten til å selge et aktiva. Siden dette medfører høy kapitalbinding, vil verdien av salgsopsjonen reduseres når den risikofrie rente øker.

3.2.9 Kostnad ved utsettelse (dividende) r_{div}

En bedrift som konkurrerer i et tøft marked kan risikere å miste markedsgrunnlaget hvis man utsetter viktige beslutninger ved å implementere for eksempel en venteopsjon. Hvis et legemiddelfirma utsetter lanseringen av en ny medisin med et år vil dette bety at de også mister fremtidige inntekter på grunn av begrensninger i patentenes varighet. Hvis en venteopsjon skal være lønnsom må verdien av opsjonen være større en dette årlige tapet på kontantstrømmen. Det ekvivalente i en finansiell opsjon er dividende som utbetales på en aksje. I en finansiell opsjon løser man dette ved å legge trekke fra det prosentvise tapet fra den risikofrie rente noe som reduserer opsjonsverdien.

3.3 Ulike typer realopsjoner

Det finnes mange realopsjoner og ikke alle er like relevante i eiendoms- og byggebransjen. Fremstillingen av de ulike opsjonstypene baserer seg på Aswath Damodaran (2002; 2005; 2008) og (Prasad Kodukula & Papudesu, 2006 p 101-145).

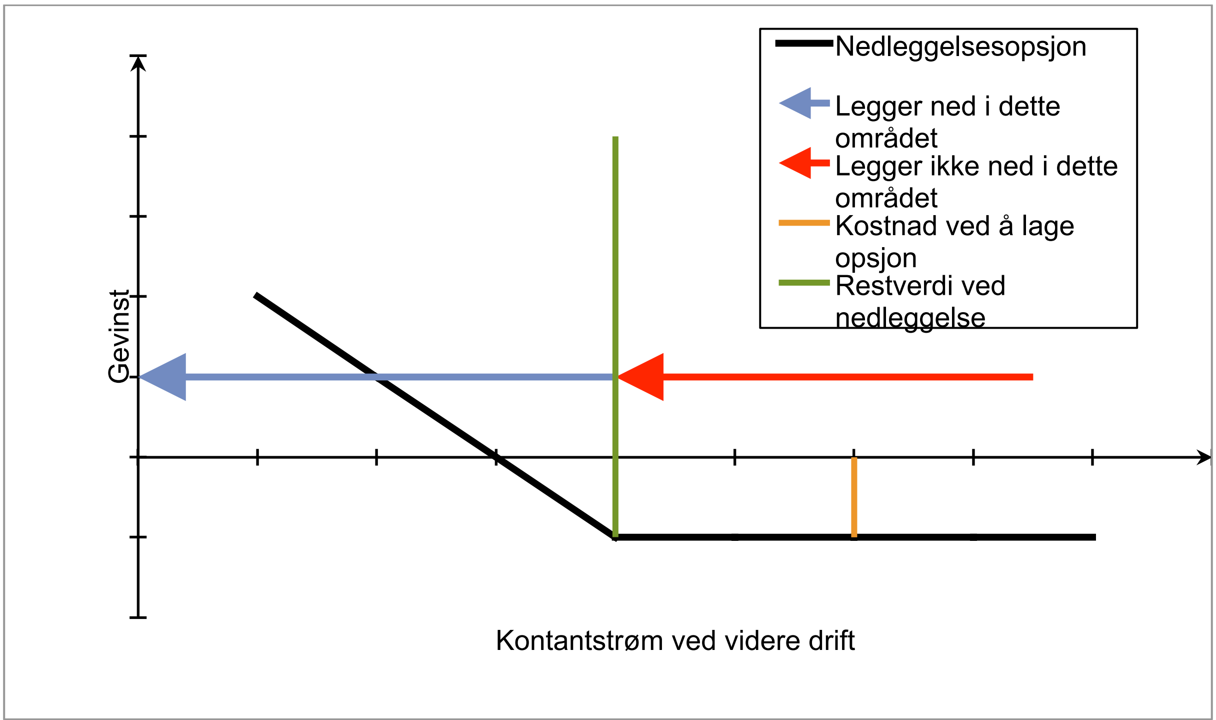
3.3.1 Nedleggelsesopsjon

En nedleggelsesopsjon er en salgsopsjon som gir en rett til å avvikle (selge) et mislykket prosjekt. En nedleggelsesopsjon kan derfor redusere risikoen til et prosjekt ved at det foreligger en mulighet til å komme seg ut hvis avkastningen ikke blir som forventet. Opsjonen reduserer dermed nedsidepotensialet samtidig som man kan realisere oppsidepotensialet hvis prosjektet blir en suksess. Beslutningen om å utøve nedleggelsesopsjonen er riktig når verdien av avvikling er større en verdien av å beholde prosjektet (restverdien ($X_{restverdi}$) > fremtidig kontantstrøm (S)). Verdien av nedleggelsesopsjonen er:

$$P = Maks[NPV\, ved\ nedleggelse(X_{restverdi} - S),0]$$

I figur 5 ser vi eksempel på en nedleggelsesopsjon. Man legger ned prosjektet når kontantstrømmen ved fortsatt drift er lavere en restverdien (vertikal grønn strek). Den netto gevinsten vi får av opsjonen er differansen mellom opsjonsverdien og kostnaden ved å lage opsjonen.

FIGUR 5 NEDLEGGELSESOPSJON



3.3.2 Ekspansjonsopsjon

Dette er en kjøpsopsjon hvor verdien av opsjonen er muligheten til å utvide prosjektet på et senere tidspunkt. I et byggeprosjekt vil man kunne legge inn utvidelsesopsjon gjennom å bygge inn elastisitet i bygget. Norsk byggforskningsinstitutt definerer elastisiteten til en bygning *som evnen en bygning har til å møte vekslende behov for arealer, dvs. muligheten for enten å dele opp arealene i bygningen i separate bruksenheter eller å bygge på bygningen for å øke arealet* (Arge, 2002). I en tradisjonell nåverdimodell vil dette ofte medføre en negativ nåverdi siden investeringskostnadene skjer tidlig mens nytte kommer sent og derfor får en lav verdi på grunn av tidsverdien. I en realopsjonsanalyse vil man se på de ekstra investeringskostnadene som kostnaden ved å lage opsjonen. Det underliggende aktiva verdien av opsjonen bygger på vil være de(n) prosentvise ekstra verdien (e) som elastisitet vil tilføre kontantstrømmen til prosjektet på et senere tidspunkt. Utøvelsesprisen vil være investeringskostnaden ved å benytte seg av opsjonen. Verdien av opsjonen er derfor.

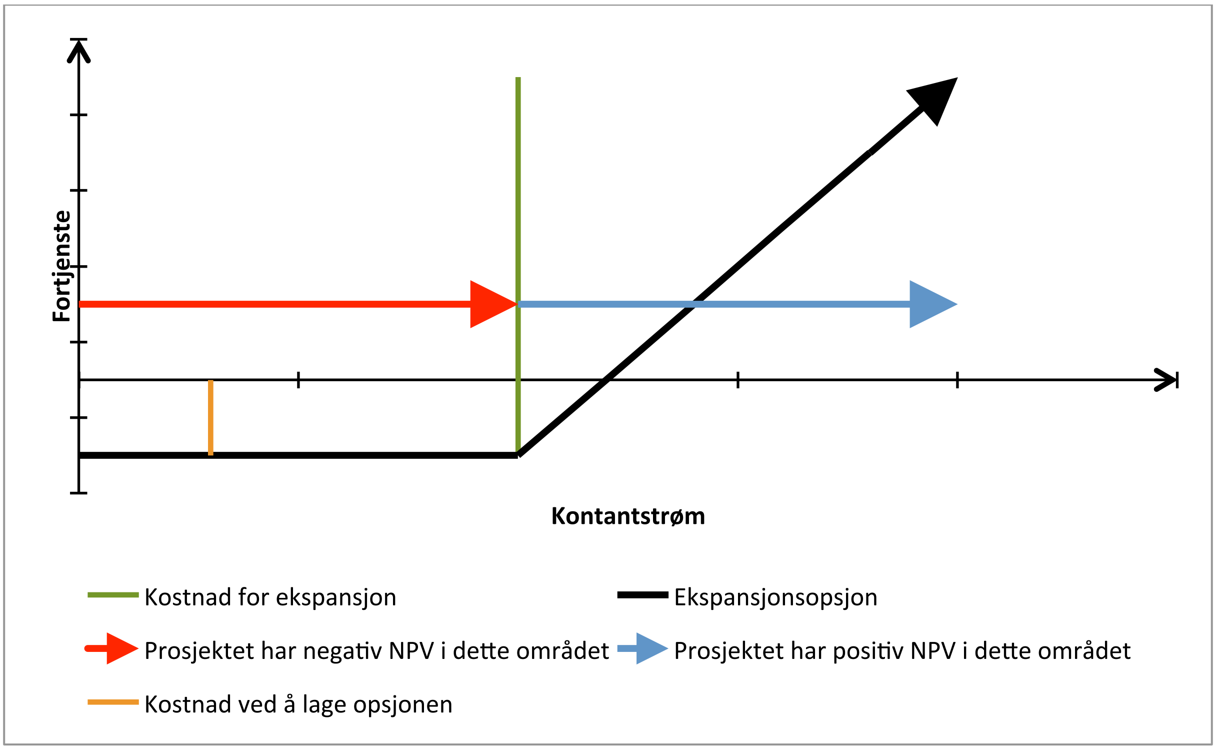
$$C = Maks[NPV\, av\, ekspansjon(eS_0 - X),0])$$

og

$$NPV\, med\, venteopsjon = NPV_{u/opsjon} + NPV_{m/opsjon}$$

I figur 6 ser vi en ekspansjonsopsjon hvor man vil utøve ekspansjonsopsjonen når den ekstra kontantstrømmen ved ekspansjon er større en investeringskostnaden.

FIGUR 6 UTVIDELSESOPSJON



3.3.3 Kontraktopsjon

Kontraktopsjonen er en salgsopsjon som gir mulighet til å nedskalere eller kontrahere (k %) prosjektet hvis de mest pessimistiske utfallene blir virkelig. Nedskalering av prosjektet faller under navnet kontraktopsjon siden verdsettelsen av å kontrahere og nedskalere med en gitt prosent gir samme opsjonsverdien. Hvis leieinntektene av et næringsbygg faller, kan eieren for eksempel inngå en 10- års leieavtale med en investor om utleie av hele eller deler av bygget. Han vil da få reduserte leieinntekter med k prosent av leiearealet, men vil også få reduserte kostnader på vedlikehold og administrasjon. En kontraktopsjon er derfor en salgsopsjon på (k%) av verdien til prosjektet og verdien av opsjonen er derfor:

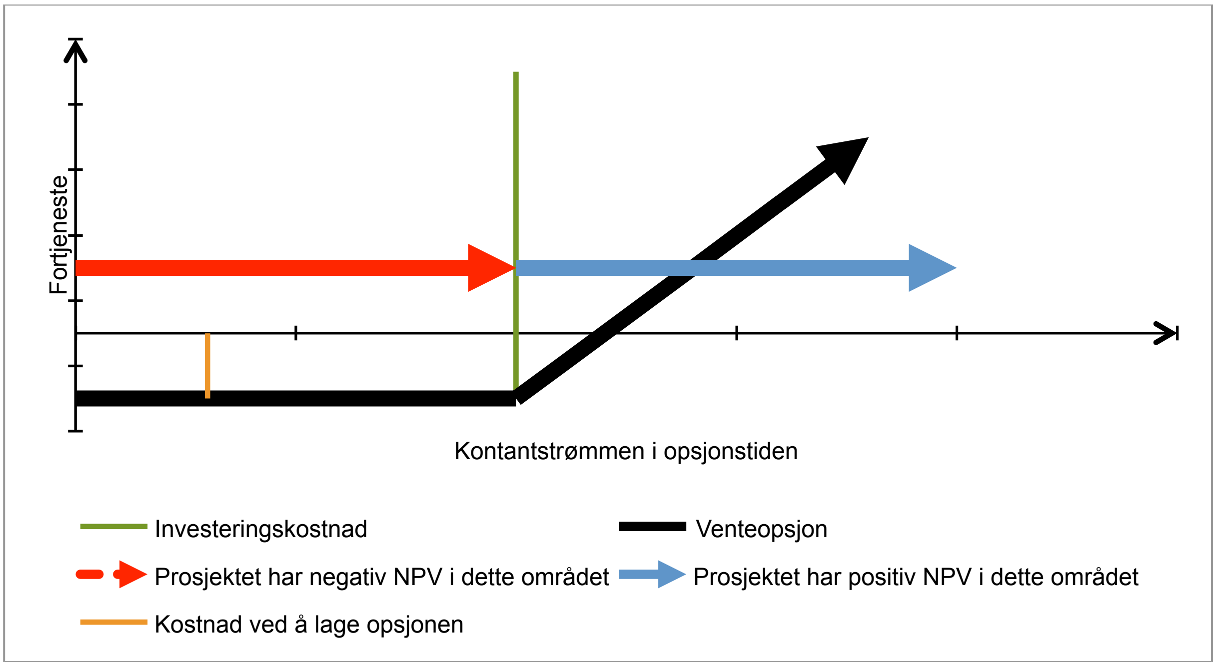
$$P = Maks(NPV\, av\, reduksjon\ (X_{Reduserte\ kostnader} - kS), 0)$$

3.3.4 Venteopsjon

En venteopsjoner er det samme som en kjøpsopsjon på den fremtidige nåverdien til et prosjekts kontantstrøm Utøvelsesprisen man må betale for å utøve opsjonen vil være investeringskostnaden til prosjektet ved en eventuell oppstart. I mange prosjekter vil en utsettelse av investeringer være fornuftig hvis man ved å gjøre dette kan skaffe mer informasjon gjennom pilotprosjekter eller mer detaljert prosjektering. Ved å vente kan deler av usikkerheten om fremtidig kontantstrøm avklares før endelig beslutning blir tatt. En venteopsjon vil utøves når nåverdien til kontantstrømmen er større enn investeringskostnaden. Siden det ikke er mulig å vente i det uendelige med å ta en endelig beslutning har opsjonen en endelig utløpsdato (T). Verdien av venteopsjonen er lik prosjektets NPV hvis man benytter seg av opsjonen.

$$C = Maks[NPV(S - X), forkaste(O)])$$

FIGUR 7 VENTEOPSJON



3.3.5 Sammensatte Opsjoner

Mange prosjekter inneholder flere opsjoner som kan kombineres for å øke beslutningsfleksibiliteten i prosjektet. Sammensatte opsjoner kan foregå parallelt eller trinnvist.

Parallelle opsjoner er opsjoner som er tilgjengelig i samme tidsperiode. Et eksempel på en parallell opsjon er et skolebygg med innebygd elastisitet (horisontal ekspansjon). Dette er både en venteopsjon og en ekspasjonsopsjon som gir mulighet til å avvente politiske beslutninger om sammenslåing av skoler.

Stegvise (trinnvise) opsjoner bryter prosjektet opp i flere atskilte faser med egne opsjoner. Dette gjør at man ikke må binde seg til hele prosjektet med en gang. Muligheten til å flytte viktige beslutninger fremover i tid gjør at vi får bedre informasjonstilgang. I et prosjekt med stegvise opsjoner vil utøvelsen av en opsjon frigjøre en ny opsjon. Den andre opsjonen vil derfor være avhengig av at den første opsjonen blir benyttet og videre vil den tredje være avhengig av at den første og andre opsjonen blir utøvd. I slutten av hver opsjon må man bestemme om man vil fortsette til neste opsjon eller skrinlegge prosjektet. En stegvis opsjon kalles ofte for en vekstopsjon siden man har opsjoner på opsjoner som er avhengig av fremtidige vekstmuligheter.

3.4 Forutsetning for bruk av realopsjon

Det er ulike forutsetninger som bør være til stede før man utøver en opsjon. Jeg har nedenfor laget en liste med de viktigste (M. Amram & N. Kulatilaka, 1999b, p. 24; Mun, 2002, p. 150):

- Når det er mulig å utføre prosjekter stegvis. Ingen andre metoder kan verdsette dette på en korrekt måte
- Når usikkerheten er stor nok til at det er fornuftig å vente på mer informasjon
- Usikkerheten driver prosjektverdien

- Når mye av prosjektets verdi ligger i muligheten til å utvide prosjektet på et senere tidspunkt
- Når usikkerheten er stor nok til å gjøre fleksibilitet til et aktuelt alternativ
- Beslutningstakeren handler ”rasjonelt”

En realopsjonsverdi vil avhenge av flere forhold. I rapporten ”Realopsjoner og fast eiendom: Hovedrapport nr 2” har de listet opp forhold som påvirker realopsjonsverdien for en byggherre (Elnan, Meland, & Robertsen, 2007a, p. 2).

- Usikkerheten som eksisterer. (Jo større usikkerhet, jo større verdi har realopsjonsmetoden).
- Resultateffekten av usikkerheten. (For eksempel har fremtidige leiepriser i markedet stor betydning for byggherrer.) Leieprisnivået har stor resultateffekt og er en av de viktigste driverne for prosjektverdien).
- Fleksibilitet i handlinger hos byggherren i forhold til å kunne gjøre noe med det som er usikkert (For eksempel til å kunne inngå avtaler om fremtidig utleie med solide leietakere og avtale om rett til salg i fremtiden til en pris avtalt i dag).
- Kostnaden på nåtidspunktet ved å erverve opsjonsmuligheten. (Desto lavere kostnaden er, desto mer interessant vil opsjonsmuligheten være). I god prosjektplanlegging kan det ligge muligheter til å finne så og si gratis realopsjoner).

I veilederen ”Behandling av usikkerhet i samfunnsøkonomiske analyser” oppgis følgende momenter som gjør opsjoner mer lønnsomme (Volden, 2006, p. 33):

- Beslutningen er mer eller mindre irreversibel, dvs. det er kostbart eller umulig å rekonstruere utgangssituasjonen når tiltaket først er iverksatt. Dette i motsetning til ved tiltak som kan igangsettes og avsluttes gjentatte ganger uten betydelige kostnader.
- Det er stor usikkerhet om den fremtidige utviklingen på faktorer som er kritiske for tiltakets lønnsomhet. Usikkerheten er vanligvis størst ved langsiktige konsekvenser, helt nye tiltak som en ikke har erfaring med, og tiltak hvis suksess avhenger av teknologisk utvikling, skiftende priser med mer, i motsetning til for eksempel den demografiske utviklingen.

- Det er stor sannsynlighet for at usikkerheten vil reduseres underveis, slik at det på et fremtidig tidspunkt blir klart hva som er den optimale utforming av prosjektet.
- Det må kunne legges til grunn at en faktisk kommer til å utnytte den fleksibiliteten som legges inn i prosjektet. Dersom den reelle beslutningen av ulike årsaker allerede er tatt (en kommer til å gjennomføre tiltaket på en bestemt måte uavhengig av hva ny informasjon viser), vil opsjonen ikke ha verdi.

4 VERDSETTELSE AV OPSJONER

4.1 NPV

Delkapittelet baserer seg på (Martha Amram & Nalin Kulatilaka, 1999, pp. 56-87) .

Den tradisjonelle nåverdimodellen forutsetter statisk fremtid uten beslutningsfleksibilitet. Metoden går ut på å lage en prognose over *PV(kontantstrøm) E(CF)*, trekke fra investeringskostnadene og diskontere kontantstrømmen til år null med *avkastningskravet (k).* Prosjekter med positiv NPV er verdiskapende og aksepteres; negativ NPV er ikke verdiskapende og skrinlegges (Thomas Copeland, 1998). I valget mellom flere utelukkende prosjekter med lik tidsvarighet vil man velge prosjektet med høyeste nåverdi. Formelen for å finne netto nåverdi til et prosjekt er:

$$NPV = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{E(CF)}{(1+k^t)} - Investeringskostnad$$

Nåverdimodellen fungerer bra i en deterministisk verden med lite usikkerhet. I den nye verdensøkonomien med større usikkerhet vil behovet for beslutningsfleksibilitet være økende. Årsaken til at man i en nåverdimodell ikke tar hensyn til usikkerheten er at modellen er begrenset til en nå/eller aldri beslutning. Det betyr at beslutningen bare kan bli tatt på grunnlag av informasjon som er tilgjengelig i dag. Matematisk vil dette være det samme som å ta en beslutning basert på å maksimere profitt basert på flere utelukkende alternativer:

$$NPV\,regel: Maks(tidspunkt\ t = 0)[0, E_0 S_T - X]$$
$$Aksepteres\ \hbar vis\ E_0(S_t) > X$$

4.1.1 NPV og fleksibilitet

I mange prosjekter vil man ofte ha et pessimistisk (lavt), forventet (50/50) og et optimistisk (høyt) anslag. Spredning i anslagene kan ofte være store, men så lenge estimatene er normalfordelt vil nåverdien bli den samme. En realopsjonsanalyse går et skritt videre ved å verdsette denne usikkerheten gjennom implementering av fleksibilitet. En nåverdianalyse kan derfor sees på som en realopsjonsanalyse uten fleksibilitet.

Beslutningsregelen i en realopsjonsanalyse vil basere seg på om prosjektet i dag eller i fremtiden vil ha en positiv nåverdi:

$$\text{ROA regel: } \mathrm{E_0 Maks(tidspunkt\ t = T)[0, E_0 S_T - X]}$$
$$\text{Aksepteres hvis } S_t > X$$

Realopsjonsanalyse ser ikke bare på nåverdien i dag, men også på sannsynligheten for positiv nåverdi i fremtiden. I en realopsjonsanalyse vil et prosjekt bli gjennomført hvis PV(kontantstrøm) på et fremtidig tidspunkt (t) er større en investeringskostnaden $S_t > X$. I nåverdimodellen vil vi bare akseptere et prosjekt når forventet netto nåverdi er positiv $E_0(S_t) > X$ på tidspunkt $t = 0$. Hvis det ikke er usikkerhet om fremtidig kontantstrøm $E_0 S_T = S_t$, vil ROA og NPV gi samme resultat.

For å få frem tilleggsverdien av fleksibiliteten i en realopsjonsanalyse vil jeg presentere et enkelt regneeksempel som baserer seg på (M. Amram & N. Kulatilaka, 1999a, pp. 84-87; Oppenheimer, 2002, pp. 226-228).

En utbygger vurderer å bygge et kontorbygg til 200 mill NOK . Utbyggeren har valget mellom å ta den endelige beslutningen nå eller vente et år. Når beslutningen om bygging er tatt er den irreversibel.

Den eneste usikkerheten i prosjektet er fremtidige leieinntekter. Usikkerheten vil bli avklart i løpet av året og har 50-50 sjanse for å bli 18 mill NOK (S_u) eller 22 mill NOK (S_d). Jeg forutsetter uendelig levetid og et avkastningskrav (k) på 10 %.

Hvis utbyggeren ikke har denne fleksibilitet må han ta beslutningen i dag gjennom en tradisjonell nåverdianalyse. Vi får da en forventet NPV på:

$$NPV_{u/fleksibilitet} = -200 + \sum\nolimits_{t=1}^{\infty} \left[\frac{0.5 \cdot 18 + 0.5 \cdot 22}{1.1^t}\right]$$
$$= -200 + 200 = 0 \; mill \; NOK$$

Netto nåverdi er null og prosjektet tilfører ikke noe ekstra verdi til utbyggeren. Hvis utbygger har fleksibilitet til å utsette investeringsbeslutningen til slutten av året vil dette tilføre prosjektet en verdi. Ved å vente til slutten av året vil usikkerheten om fremtidig kontantstrømmen (S) være avklart. Utbyggeren vil kun starte bygging hvis inngående kontantstrøm er 22 mill NOK . Nåverdien til prosjektet med fleksibilitet blir:

$$NPV_{m/fleksibilitet}$$
$$= 0.5\left[Maks\left[\frac{-200}{1.1} + \sum_{t=2}^{\infty}\frac{22}{(1.1)^t}, 0\right]\right]$$
$$+ 0.5\left[Maks\left[\frac{-200}{1.1} + \sum_{t=2}^{\infty}\frac{18}{(1.1)^t}, 0\right]\right]$$
$$= \; 0.5[18.18] + 0.5[0] = 9.09 \; mill \; NOK$$

Verdien av fleksibiliteten er differansen mellom NPV med/uten opsjon og er:

$$\text{Verdien av fleksibilitet} = NPV_{m/fleksibilitet} - NPV_{\frac{u}{fleksibilitet}}$$
$$= 9.09 - 0 = 9.09 \; mill \; NOK$$

Hvis vi forutsetter at spredningen i estimatene for kontantstrømmen endres til 15 eller 25 mill NOK vil dette ikke endre noe i den tradisjonelle nåverdimodellen:

$$NPV_{u/opsjon} = \left[-200 + \sum_{t=0}^{\infty}\frac{0.5(15) + 0.5(25)}{(1.1)^t}\right]$$
$$= -200 + 200 = 0 \; mill \; NOK$$

Økt volatilitet (usikkerhet) har ingen innvirkning på beslutningsgrunnlaget i en tradisjonell modell, mens implementering av fleksibilitet vil gi:

$$NPV_{m/fleksibilitet}$$
$$= 0.5\left[Maks\left[\frac{-200}{1.1}+\sum_{t=2}^{\infty}\frac{25}{(1.1)^t},0\right]\right]$$
$$+ 0.5\left[Maks\left[\frac{-200}{1.1}+\sum_{t=2}^{\infty}\frac{15}{(1.1)^t},0\right]\right]$$
$$= 0.5[45.45] + 0.5[0] = 22.73\ mill\ NOK$$

Økt usikkerhet vil derfor øke verdien av realopsjonen:

$$\mathrm{C} = NPV_{m/fleksibilitet} - NPV_{u/fleksibilitet} = 22.73 - 0$$
$$= 22.73\text{mill NOK}$$

Verdien av opsjonen har økt fra 9.09 til 22.73 mill NOK . Dette viser noe av svakheten ved nåverdimodellen, samtidig som det illustrerer styrken ved realopsjonsanalyse. Som vi ser av eksempelet vil verdien av opsjonen være positivt korrelert med usikkerheten.

4.2 Realopsjoner

Det er ulike metoder tilgjengelig for å verdsette realopsjoner. Man kan dele de ulike verdsettelsesmetodene i tre hovedretninger. Dette er verdsettelse ved partielle differensialligninger (Black & Scholes), simuleringer (Monte Carlo), og binomisk opsjonsprising (CRR). (Black & Scholes, 1973; Merton, 1973; Boyle, 1977; Broadie & Glasserman, 1997; Cox, Ross, & Rubinstein, 1979). Det er også kommet noen nye modeller de siste årene som *Datar–Mathews metoden* og *Fuzzy pay-off metoden* (Collan, Fullér, & Mezei, 2009).

Jeg har valgt å gi en grundig gjennomgang av den binomiske opsjonsprisingsmodellen. Dette er den mest intuitive modellen og har også størst bruksområde (T. E. Copeland & Antikarov, 2001; Prasad Kodukula & Papudesu, 2006).

Den binomiske modellen kan løses med *risikonøytral sannsynlighet* eller *markedsrepliserende portefølje*. Begge metodene vil gi identisk resultat, men den matematiske framgangsmåten er forskjellig. Jeg har i mine utregninger brukt risikonøytrale sannsynlighet.

For å forstå hvorfor man i en binomisk modell bruker risikonøytral sannsynlighet istedenfor objektiv sannsynlighet må vi skjønne forutsetningene dette bygger på. Jeg har derfor valgt å vise hvordan man kan finne riktig avkastningskrav og riktig nåverdi med replikasjonsmetoden og den markedsrepliserende porteføljen. Videre vil jeg vise hvorfor en beslutningsanalyse vil gi feil resultat. og jeg vil også gå gjennom *market asset disclaimer (MAD)* som er et alternativ til den markedsrepliserende porteføljen. Jeg baserer i stor grad fremgangsmåten i resten av kapittelet på fremstillingen av opsjonsteori i boken ”Real Options: Managing Strategic Investment in a Uncertain World” (Martha Amram & Nalin Kulatilaka, 1999, pp. 87-113). I boken presenterer de teorien ved hjelp av et eksempel og jeg følger denne fremgangsmåten siden det vil gjøre teorien enklere å forstå.

4.3 Regneeksempel

Et eiendomsutvikler ønsker å få godkjent reguleringsplan for et område som i kommuneplanen er avsatt til bebyggelse. Eiendomsutvikleren eier ikke tomten, men grunneier har tilbudt utvikleren en europeisk kjøpsopsjon på tomten med utøvelsespris på 44 mill NOK. Opsjonen vil har en varighet på et år, og kostnadene ved å lage reguleringsplanen svarer til opsjonskostnaden.

Eneste usikkerheten i prosjektet er hvor stor utnyttelse reguleringsplanen vil få. Jeg forutsetter at dette vil bli avklart i løpet av året, og at eiendomsutvikleren regner med at det er en 50-50 sjanse for 30- eller 18 enheter. Hvis utnyttelsesgraden blir 30 enheter vil tomten ha en salgsverdien om et år på 68 mill NOK. En utnyttelsesgrad på 18 enheter vil bety en tomteverdi på 26 mill NOK. Poenget med dette eksemplet er å finne verdien av opsjonen. Det første vi må gjøre er å finne netto nåverdi for investeringen uten denne fleksibiliteten. Vi forutsetter at utvikleren ikke har noe definert avkastningskrav. Det gir oss mulighet til å presentere replikasjonsmetoden.

4.4 Replikasjonsmetoden

Eiendomsutvikleren vet at markedsverdien av tomtene neste år har en 50-50 sjanse for å bli 26- eller 68 mill NOK. En viktig forutsetning ved replikasjonsmetoden er at det finnes et aktiva tilgjengelig i markedet som har samme kontantstrøm som eiendomsprosjektet i alle mulige utfall. Dette er en urimelig antagelse når det kommer til realaktiva, men la oss likevel forutsette at det i aksjemarkedet finnes omsatt en ”tvilling aksje” med markedsverdi på 20 kr per aksje. Aksjeprisen er verdsatt med forventning om at aksjeprisen neste år har en 50-50 sjanse for å bli 34 kr eller 13 kr. Poenget med ”tvilling aksjen” er at eiendomsutvikleren ved å kjøpe 2 millioner aksjer kan skape en aksjeportefølje som vil gi en avkastnings som kopierer investeringen i tomten. Siden vi nå har to investeringsmuligheter som begge har samme forventede kontantstrøm vil også ha samme avkastningskrav. Dette forutsetter at arbitrasjeprinsippet er oppfylt. Arbitrasjeprinsippet sier at diss to investeringene må ha identisk pris, ellers vil markedsaktørene kunne tjene en risikofri arbitrasjegevinst. Dette kan de gjøre ved å kjøpe billig og selge dyrt 2 instrumenter som utligner hverandre på innløsningstidspunktet for opsjonen (Elnan et al., 2007a, p. 66). En rasjonell investor vil derfor være indifferent mellom to investeringer med lik risiko og perfekt korrelert kontantstrøm. Selv om beløpene er forskjellige, kan eiendomsinvesteringen oppdeles i aksjer med samme verdi som tvilling aksjen. Eiendomsutvikleren vil derfor i ”teorien” være indifferent mellom 1 aksje i investeringen og 1 aksje i ”tvilling aksjen”. Markedsverdien av aksjen er 20 kr og siden vi vet kontantstrømmen ved en oppgang og nedgang, og i tillegg vet sannsynligheten for hvert utfall, kan vi finne avkastningskravet ved å løse ligningen for nåverdien til aksjen med hensyn til det ukjente avkastningskravet. Aksjen har en markedsverdi lik 20 kr og avkastningskravet blir derfor:

$$\mathrm{V}_0 = \frac{q(\text{Aksjens verdi ved oppgang}) + (1-q)(\text{Ved nedgang})}{(1+k)}$$

$$20\ kr = \frac{0.5 \cdot 34\ kr\ + 0.5\ \cdot 13\ kr}{(1 + k)} = 17.5\ \%$$

Videre kan vi bruke avkastningskravet fra ”tvilling aksjen” i verdsettelsen av investeringen. Uten venteopsjonen må investoren kjøpe tomten i slutten av året uansett utfallet av reguleringsplanen. Prisen for tomten er 44 mill NOK og utbetalingen skjer om et år, og kan diskonteres med den risikofrie renten på 3.5 %. Netto nåverdi til investeringen er:

$$\begin{aligned} NPV = PV&(Forventet\ salgsverdi) - PV(Avtalt\ tomtepris) \\ &= \frac{[0.5 \cdot 68 + 0.5 \cdot 26]}{1.175} - \frac{44 \text{ mill NOK}}{1.035} = 40 - 42.5 \\ &= -2.5\ \ mill\ NOK \end{aligned}$$

Investeringen har en negativ nåverdi uten venteopsjon.

En annen måte å finne nåverdien på er å lage en portefølje av tvillingaksjen og et lån/innskudd i risikofrie obligasjoner. Porteføljen kaller er investeringens markedsrepliserende portefølje, og meningen er at porteføljen skal kopiere kontantstrømmen til investeringen i alle mulige utfall. For å lage denne porteføljen må eiendomsinvestoren gjøre en investering på *m* kr i tvillingaksjen og et innskudd eller lån på *B* kr til en risikofrie obligasjoner. Det er viktig å huske på at dette er en kunstig portefølje som kun gjennomføres på et teoretisk plan. Siden investeringen og tvilling aksjens verdi begge kan gå opp eller ned i løpet av året må vi lage porteføljen slik at den uansett utfall gir lik kontantstrøm som prosjektet. Dette gjør vi ved å sette porteføljen i opp og nedgang lik kontantstrøm til investeringen. Vi har to ligninger og to ukjente og finner m og B ved innsettingsmetoden.

Opp (u): $\mathrm{m(34\ kr) + B(1 + r_f) = 68\ mill\ NOK}$
Ned (d): $\mathrm{m(13\ kr) + B(1 + r_f) = 26\ mill\ NOK}$

Resultatet viser at porteføljen må bestå av 2 millioner aksjer og 0 kr i risikofrie obligasjoner. Dette er samme svar som vi fant ved replikasjonsmetoden. For å vise at porteføljen har identisk kontantstrøm med investeringen kan vi finne nåverdien til porteføljen, og sammenligne denne med nåverdien til investeringens kontantstrøm:

$$PV(\text{markedsrepliserende porteføljen}) = PV(\text{Sa}lgsverdi\ tomt)$$
$$= m(20\ kr) + B = 2\ mill \cdot 20\ kr - 0 = 40\ mill$$

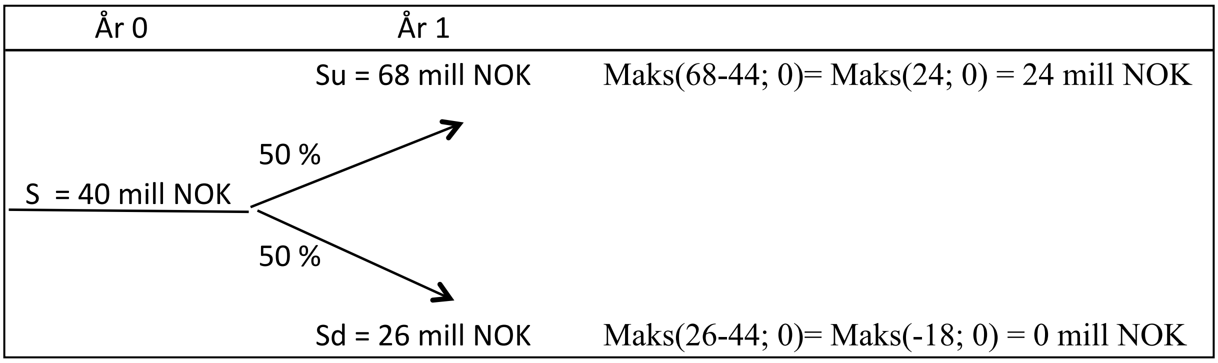
De har lik nåverdi, noe som viser at med de enkle forutsetningene vi har lagt inn kan man lage en portefølje som kopierer investeringens kontantstrøm.

Når vi har funnet NPV kan vi verdsette selve venteopsjonen som er tilgjengelig i prosjektet. Eiendomsutvikleren er tilbudt en opsjon som gir han rett til å kjøpe tomten neste år for 44 mill NOK . Før den binomiske opsjonsprisingsmodellen og Black og Scholes modellen, var det vanlig å verdsette denne typen fleksibilitet ved å benytte et beslutningstre.

4.5 Beslutningstre

Et beslutningstre kan, i motsetning til en tradisjonell nåverdianalyse, verdsette valgmuligheten en opsjon gir et prosjekt. Et beslutningstre er et nett av utfall, og sannsynligheten for hvert utfall har en nåverdi som diskonteres tilbake til start. Før prosjektet starter kan man derfor finne nåverdien i hvert utfall og maksimere avkastningen basert på hvilke avgjørelse som maksimerer nåverdien totalt. Etter at man har laget et tre kan man finne den strategien som gir den høyeste nåverdien i år 0. I vårt eksempel har vi to utfall hvor det ene utfallet gir en positiv nåverdi og det andre utfallet gir et negativ nåverdi.. Beslutningstreet gir oss mulighet til å velge den strategien som gir positiv nåverdi, noe som betyr at utvikleren kun vil kjøpe tomten av grunneieren hvis reguleringsplanen gir en høy tomteutnyttelse.

FIGUR 8: BESLUTNINGSTRE



I figur 8 ser vi beslutningstreet og netto nåverdi til prosjektet er derfor:

$$\mathrm{NPV}_{Med\ Opsjon} = \frac{(0.5 \cdot 24 \text{ mil}) + (0.5 \cdot 0 \text{ mill})}{(1 + 0.175)} = 10.212 \text{ mill.}$$

Verdien av opsjonen er differansen mellom nåverdien med og uten opsjon:

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{NPV}_{Med\ Opsjon} - \mathrm{NPV}_{Uten\ Opsjon}$$
$$= 10.212 \text{ mill NOK} — (-0.212 \text{ mill N}) = 12.712 \text{ mill NOK}$$

Beslutningstreanalysen verdsetter fleksibilitet på en god måte, men er likevel unøyaktig siden modellen bruker et konstant avkastningskrav. Siden man i et beslutningstre kan velge strategi ut fra flere utelukkende alternativer vil den reelle risikoen til prosjektet variere ettersom man beveger seg utover i treet.

4.5.1 Realopsjoner med sikret portefølje

For å utlede metoden lager vi en sikringsportefølje hvor vi eier eiendomsinvesteringen med venteopsjonen, samtidig som vi selger (m) andeler i venteopsjonen til prosjektet. Poenget er å lage en portefølje som garanterer eiendomsinvestoren samme kontantstrøm uansett utfallet av reguleringsplanen. For å oppnå dette setter vi differansen mellom tomteverdiene (S) ved høy (68 mill) og lav (26 mill) utnyttelse lik opsjonsverdien (C) ved høy utnyttelse minus opsjonsverdien ved lav utnyttelse. Deretter løser vi ligningen med hensyn på (m) og finner en sikringsrate som gir samme kontantstrøm ved både lav og høy utnyttelsesgrad:

$$68 - 26 = \mathrm{m}24 - m0$$

$$m = \frac{68 - 26}{24 - 0} = 1.75$$

Vi kan videre kontrollere at sikringsraten gir samme avkastning ved både høy og lav utnyttelse.

$$\text{Portefølje ved oppgang}: S_0 - mC_u = 68 - 1.75(24)$$
$$= 26 \text{ mill NOK}$$
$$\text{Portefølje ved nedgang}: S_0 - mC_u = 26 + 1.75(0)$$
$$= 26 \text{ mill NOK}$$

Den risikofrie porteføljen vil gi eiendomsutvikleren en kontantstrøm på 26 mill NOK uansett utfallet av utnyttelsen. Siden porteføljen er risikofri kan vi sette sikringsraten m inn i nåverdien til porteføljen og videre bruke dette til å verdsette opsjonen. Nåverdien til sikringsporteføljen vil være nåverdien av eiendomsinvesteringen med opsjon minus verdien av venteopsjonen:

$$\text{PV(Eiendomsinvestering med opsjon)} - \text{sikringsrate}$$
$$\cdot \text{(Verdien av venteopsjon)} = \mathrm{S_0 - mC_0}$$
$$= 40 \text{ mill} - 1.75 \cdot \mathrm{C_0}$$

Siden porteføljen i løpet av året har renteinntekter lik (r_f) uansett utfall, setter vi rentefaktoren $(1 + r_f)$ inn i nåverdien til porteføljen i år 0 og setter denne lik kontantstrømmen ved oppgang minus andelen i venteopsjonen:

$$(S_0 - mC_0)(1 + r_f) = uS_0 - mC_u$$

Hvis vi løser ligningen med hensyn på opsjonsverdien får vi:

$$C_0 = \frac{uS_0 - mC_u - S_0\left(1 + r_f\right)}{-m(1 + r_f)}$$

$$= \frac{68 - 1.75(24) - 4 - (1.035)}{-.035(1.035)} = 8.5 \text{ mill NOK}$$

Dette er det samme resultat som vi fikk ved Markedsrepliserende portefølje og Market Asset Disclaimer.

Vi kan nå sette (m) inn i ligningen og løse med hensyn på opsjonsverdien (C) og får:

$$C_0 = \left[\left(\frac{(1 + r_f) - d}{u - d}\right)C_u - \left(\frac{u - (1 + r_\mathrm{f})}{\left(1 + r_f\right)}\right)C_d\right] \div \left(1 + r_f\right)$$

Ligningene i parentesen er den risikonøytrale sannsynligheten for opp- (p) og nedgang (1-p). Vi kan forenkle ligningen ved å erstatte ligningene i parentesen med p og (1-p). Dette gir oss en formel for opsjonsverdien som en funksjon av den risikonøytrale sannsynligheten multiplisert med opsjonsverdiene ved opp og nedgang.

$$C_0 = \frac{pC_\mathrm{u} + (1 - p)C_d}{1 + r_f}, \hbar vor \;\; p = \frac{(1 + r_f) - d}{u - d}$$

Nevneren i ligningen tilsvarer den risikofrie kontantstrømmen i år. Siden dette er en risikofri kontantstrøm kan vi diskontere den med den risikofrie renten.. Hvis vi går tilbake til tomteeksemplet vil verdien av venteopsjonen være lik den risikonøytrale sannsynligheten for opsjonsverdien ved høy og lav utnyttelse, diskontert med den risikofrie renten.

$$\text{Risikonøytral sannsynlighet for høy utnyttelse: p} = \frac{1.035 - 0.65}{1.7 - 0.65} = 0.366,$$

$$\text{Risikonøytral sannsynlighet for lav utnyttelse;} \quad (1 - \mathrm{p}) = (1 - 0.366) = 0.634$$

Verdien av venteopsjonen i år 0 er derfor: $\mathrm{C}_0 = \frac{0.366 \cdot 24 + (1 - 0.366) \cdot 0}{1.035} = 8.5$ mill NOK

Dette er samme svar som vi har fått med de andre metodene. Forskjellen er at den risikonøytrale metoden er enklere og gjennomføre i praksis. Vi kan videre bevise den risikonøytrale sannsynligheten for oppgang og nedgang blir 100 %.

$$\left[\frac{(1+r_f)-d}{u-d}\right]+\left[\frac{u-(1+r_f)}{u-d}\right]=\left(\frac{u-d}{u-d}\right)=\left[\frac{1.7-0.65}{1.7-0.65}\right]=1$$

Eiendomsinvesteringen med opsjon hadde en objektiv (virkelig) sannsynlighet på 50/50 og et avkastningskrav på 41 %. Den risikonøytrale verdsettelsen gir en risikojustert sannsynlighet på 36 % og 64 % ved henholdsvis høy og lav utnyttelse. Det er derfor viktig å presisere at den risikonøytrale sannsynligheten er et matematisk grep for å kompensere for risiko og at den virkelige sannsynligheten fortsatt er 50 % .

I figur 9 ser vi en oppsummering av de tre verdsettelsesmetodene vi har gjennomgått i de forrige kapitelene.

FIGUR 9 HVA MÅLER ULIKE BESLUTNINGSMETODER (T. COPELAND, 1998)

	Kontantstrømbasert	Risikojustert	Verdsetter fleksibilitet
Realopsjonsanalyse	☑	☑	☑
Beslutningstreanalyse	☑	☒	☑
NPV	☑	☑	☒

Vi har nå funnet den risikonøytrale sannsynligheten og kan derfor presentere den binomiske verdsettelsesmetoden.

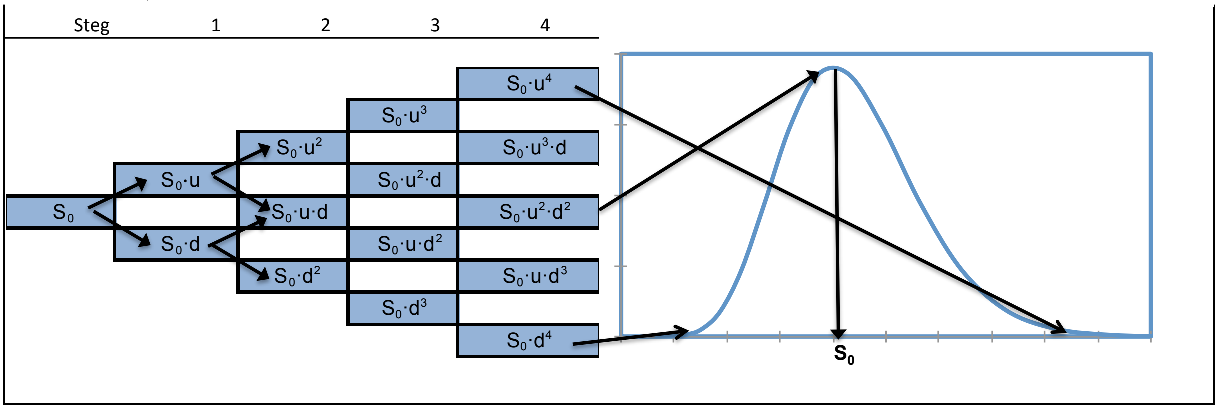
4.6 Binomisk Opsjonsprisingsmodell

Den binomiske metoden ligner noe på et vanlig beslutningstre men der hvor et beslutningstre kan ha mange utfall med forskjellig sannsynlighet bygger det binomiske utfallstreet på den enkle forutsetningen at kontantstrømmen (S) i et tidsrom (Δt) kun kan bevege seg opp (u) og ned (d) , begge med en objektiv sannsynlighet på 50 %. Et binomisk tre har viktige forutsetninger som beslutningstreet ikke har. Den underliggende variabelen er en stokastisk prosess og hvert tidssteg kan kun gå opp eller ned. Den binomisk modellen bygger derfor på forutsetningen om at den underliggende variabelen følger en såkalt ”random walk”. Det er noen viktige forkortelser som jeg ønsker å starte med å forklare. Disse forkortelsene kan virke forvirrende, men det er fordi de opprinnelig var laget for å beskrive utviklingen i aksjekursen. Jeg velger likevel å bruke disse forkortelsene siden det er den mest vanlige praksis i realopsjonslitteraturen (se tabell 4)

TABELL 4 VARIABLER	
Binomisk tre	Grafisk framstilling av den binomiske modellen.
u	Endring $(1+\%)$ i kontantstrømmen ved oppgang
d	Endring $(1-\%)$ i kontantstrømmen ved nedgang
T	Antall år på opsjonens varighet
Δt	Lengden på hvert steg $(T/\text{ Antall steg})$
Steg	Er en tidsperiode hvor kontantstrømmen kan gå enten opp eller ned.
Node	Et utfall i det binomiske treet.
Sluttnode	Alle utfallene som er mulig på opsjonens siste dag.
S_0	PV(kontantstrøm i år null)
$S_0 \cdot u^1$	PV(kontantstrøm) ved en oppgang
$S_0 \cdot d^1$	PV(kontantstrøm) ved en nedgang
$S_0 \cdot u^2 \cdot d^2$	PV(kontantstrøm) ved to oppganger og to nedganger
$S_0 \cdot u^i \cdot d^j$	PV(kontantstrøm) ved i oppganger og j nedganger
Antall steg	Antall oppganger n $+$ Antall nedganger i

I figur 10 ser vi et binomisk tre med fire steg. På grunn av Pascal triangel vil sannsynligheten for å havne i det horisontale utfallsrommet ($S_0 \cdot u^2 \cdot d^2$) være større enn ytterpunktene ($S_0 \cdot u^4$) og ($S_0 \cdot d^4$). I høyre graf i figur 10 ser vi sannsynlighetsfordelingen til det binomiske treet. Etter som treets størrelse øker, vil sannsynlighetsfordelingen bli tilnærmet normalfordelt.

FIGUR 10: BINOMISK TRE OG SANNSYNLIGHETSFORDELING (EGEN MODELL)



Volatilitet er viktig for å estimere hvor stor prosentvis opp og nedgang kontantstrømmen vil ha i hvert steg.

4.6.1 Estimere volatilitet

Å estimere riktig volatilitet er den potensielt største feilkilden i en realopsjonsanalyse. Det er også den variabelen som har størst betydning på hvilke opsjonsverdi man ender opp med. Volatiliteten er standardavviket til kontantstrømmens logaritmiske avkastning. Så lenge kontantstrømmen er positiv vil dette være ok, men hvis det er fluktuasjon mellom negativ og positiv kontantstrøm vil volatiliteten bli misvisende siden man ikke kan finne den naturlige logaritmen til et negativ tall. Den mest korrekte måten å gjennomføre en volatilitetsmåling er å gjennomføre en Monte Carlo simulering av de ulike usikkerhetsfaktorene i prosjektet. Dette kan man gjøre i et vanlig Excel ark ved å bruke =rand() funksjonen. Andre metoder å finne volatilitet er å bruke en "Proxy" eller et subjektivt volatilitetestimat.

Et markeds proxy er et aktiva med sammenlignbar risikoprofil og kontantstrøm. Hvis vi skal verdsette en gullgruve kan vi for eksempel bruke den historiske volatiliteten til gullprisene som en proxy for volatiliteten i gruveprosjektet. En annen proxy er en proxy volatilitet fra et ekvivalent prosjekt som kan brukes i prosjektet som kan vurderes. I eiendomsprosjekter finnes det undersøkelser som viser at eiendomsprosjekter har en volatilitet som ofte ligge på mellom 10 til 25 % årlig (R. de Neufville, 2002; Geltner, 2007).

I mine utregninger har jeg benyttet "Management Assumption Approach" som jeg henter fra boken "Project Valuation and Real Options" av Kodukula og Papudesu (2006, side 91-92). I denne metoden kommer prosjektleder med et optimistisk, pessimistisk og gjennomsnittlig anslag på kontantstrømmen i prosjektet levetid (t). En optimistisk estimat på 100 mill NOK betyr at det er 98 % sannsynlighet for at kontantstrømmen ikke vil overstige 100 mill NOK, mens det er 2 % sannsynlighet for at kontantstrømmen vil bli lavere en 20 mill NOK. Det gjennomsnittlige anslaget tilsvarer 50 % sannsynlighet. Med en forutsetning om at kontantstrømmen føler en lognormal distribusjon kan vi ved å estimere to av de tre estimatene ovenfor finne volatiliteten til kontantstrømmen. ved å bruke en av de følgende formlene:

$$\sigma = \frac{\ln\left[\frac{S_{opt}}{S_0}\right]}{Z\sqrt{t}}, \sigma = \frac{\ln\left[\frac{S_0}{S_{pess}}\right]}{Z\sqrt{t}} \, eller \; \sigma = \frac{\ln\left[\frac{S_{opt}}{S_{pess}}\right]}{Z\sqrt{t}}$$

Jeg kan illustreres fremgangsmåten med et lite eksempel. Et prosjekt med varighet på to år har en gjennomsnittlig kontantstrøm på 10 mill NOK og et optimistisk anslag på 20 mill NOK. Det er 90 % sannsynlighet for at kontantstrømmen om to år ikke vil bli over 20 mill NOK. Det vil si at det er 10 % sannsynlighet for at kontantstrømmen vil overstige 20 mill NOK. For å finne Z verdien kan vi enten slå opp i en tabell eller vi kan bruke =NORM.S.INVERS(0,9) som gir en Z-verdi på 1,28 som betyr at det optimistiske anslaget ligger 1,28 standardavvik over gjennomsnittet. Volatiliteten til eksempelet:

$$\sigma = \frac{\ln\left[\frac{20 \text{ mill NOK}}{10 \text{ mill NOK}}\right]}{1{,}28\sqrt{2}} = 39\%$$

Fordelen med ”Management Assumption Approach” er at det er modell som kan lages ved to estimater over fremtidig kontantstrøm. Ulempen er at dårlige estimater kan gi feil volatilitet og dermed feil opsjonspris.

4.7 Hvordan finne opsjonsverdien?

Vi skal nå gå videre til den analytiske delen, og i de neste kapitelene skal vi løse forskjellige case. Jeg vil i noen av oppgavene vise hvordan jeg kommer fram til svarene, men på grunn av plassmangel kan jeg ikke gjøre dette for alle casene. Dette delkapittelet er derfor laget for å vise hvordan man løser et case eller en reel situasjon hvor man ønsker å finne den riktige opsjonsverdien. Forskjellige fagbøker gi ulike framgangsmåter, men jeg har i stor grad basert meg på fremgangsmåten i *Project Valuation Using Real Options: A Practitioner's Guide* (Kodukula & Papudesu, 2006 p 101-203).

4.7.1 Identifisere opsjoner og beslutningsregel

Det første vi må gjøre er å finne hvilke opsjonsmuligheter som er tilstede i caset vi skal løse. Det vil variere fra case til case hvor mange opsjoner det er snakk om. En viktig avklaring er om det er snakk om en europeisk opsjon eller en amerikansk opsjon. (Europeiske opsjoner kan bare utøves på den siste dagen av opsjonen. En amerikansk opsjon kan utøves i hele opsjonsperioden). Videre må vi avklare om det er en salgsopsjon eller kjøpsopsjon og videre hvilke type opsjon beskrevet i delkapittel 3.3 som vi står ovenfor. Til slutt må vi identifisere en beslutningsregel for når vi eventuelt skal bruke opsjonsrettigheten.

TABELL 5 VARIABLENE I EN BINOMISK MODELL

S	PV(kontantstrøm) på tidspunkt t.
X	Investeringskostnaden. Forutsetter i mine utregninger at det ikke er usikkerhet angående fremtidig investeringskostnad.
$\boldsymbol{\sigma}$	I mine utregninger finner jeg volatilitet ved subjektiv volatilitetestimat.
T	Opsjonens varighet (T år).
Antall steg	Antall steg i modellen. Flere steg betyr større nøyaktighet.
$\boldsymbol{\Delta t}$	Tidslengden på hvert steg og er $(T{:}(antall\ steg))$.
$\boldsymbol{r_f}$	Årlige risikofri rente. Jeg bruker kontinuerlig diskontering.
$\boldsymbol{u}$	Oppgangsfaktoren finner vi med $\mathrm{u} = \mathrm{e}^{\sigma * \sqrt{\Delta t}}$
d	Nedgangsfaktoren finner vi med $\mathrm{d} = \mathrm{e}^{-\sigma * \sqrt{\Delta t}}\ eller\ \frac{1}{u}$
$\boldsymbol{p}$	Risikonøytral sannsynlighet for oppgang $p = \frac{(r_f * \Delta t) - d}{u - d}$
$\boldsymbol{(1-p)}$	Risikonøytral sannsynlighet for nedgang.
$\boldsymbol{r_{div}}$	Årlig prosentvis verditap $p = \frac{(r_f - r_{div}) * \Delta t) - d}{u - d}$

I et binomisk tre vil objektiv sannsynlighet for oppgang og nedgang alltid være 50 % for at forutsetningen om ”random walk” skal oppfylles.

4.7.2 Lag binomisk utfallstre

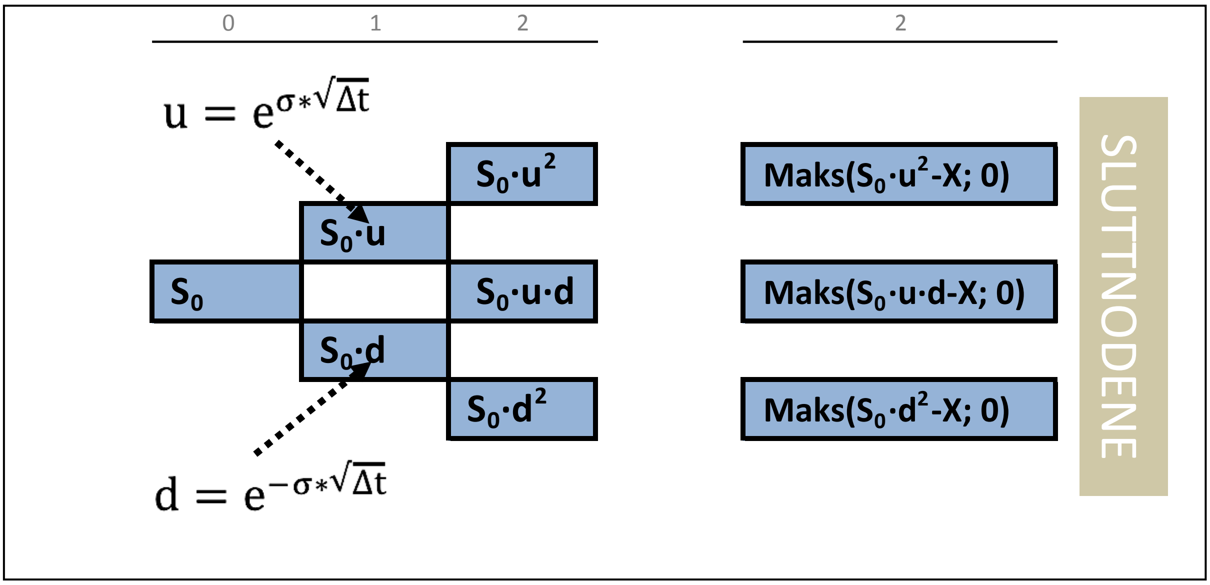
Når vi har identifisert variablene lager vi et binomisk tre som viser utviklingen til kontantstrømmen. I år null starter vi med nåverdiestimatet på 50 % og multipliserer dette med opp- eller nedfaktoren i alle nodene til vi kommer til sluttnoden. I Excel er det to metoder å gjøre dette på. Det kan i starten virke litt forvirrende, så jeg ønsker derfor å presenter de to ulike metodene i Excel. Den første figuren viser et binomisk tre som ofte benyttes når vi har mange steg for å spare plass. I dette horisontale treet vil en bevegelse i horisontal retning tilsvare en oppgang, mens en bevegelse skrått vertikalt viser til en nedgang.

4.7.3 Finn opsjonsverdiene

For å finne opsjonsverdien starter vi i sluttnodene. Sluttnodene er den siste muligheten til å utøve opsjonen før den løper ut. Det betyr at opsjonsverdien er lik realverdien. I figuren 11 ser vi et binomisk tre med utviklingen til kontantstrømmen i to perioder. I sluttnodene vil man maksimere avkastningen basert på hvilke kontantstrøm S som foreligger og det tilhørende investeringskostnaden (X). Beslutningsregelen i sluttnodene er derfor:

$$Ved\ kjøpsopsjon\colon Maks\left(S_{i,j} - X\right)$$
$$Ved\ salgsopsjon\colon Maks(X - S_{i,j})$$

FIGUR 11 BINOMISK TRE OG SLUTTNODENE



4.7.4 Finn opsjonsverdiene i tidligere noder ved bakover induksjon.

Når vi har funnet opsjonsverdiene i sluttnodene bruker vi bakover induksjon for å finne opsjonsverdiene i de foregående periodene. I node $S_0 u^j d^i$ vil opsjonsverdien være den vektede risikonøytrale sannsynligheten av opsjonsverdiene til node $\left(S_0 u^{(j+1)} d^{(i)}\right)$ *og* $\left(S_0 u^{(j)} d^{(i+1)}\right)$, diskontert med den kontinuerlige risikofrie renten $e^{-r_f \cdot \Delta t}$. Verdien på et gitt tidspunkt (t) vil være:

maks(forventet nåverdi av å vente; verdien av å utøve opsjonen)

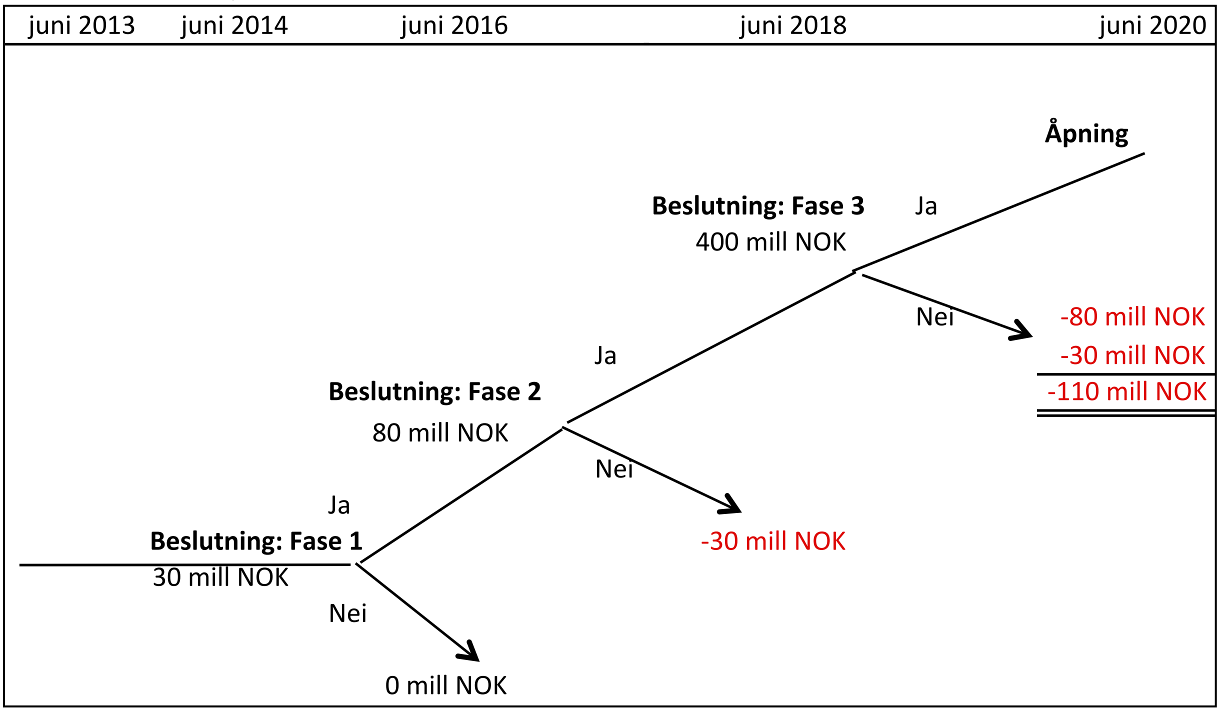
5 CASE 1: STEGVIS OPSJON

En stor byggevarekjede vurderer om de skal etablere et 40 000 kvm varehus i Sørlandsparken. Det knytter seg stor usikkerhet til markedspotensialet i Sør-Norge. Selskapet ønsker derfor å gjennomføre prosjekter i tre separate faser, hvor man i slutten av hver fase har mulighet til å stoppe prosjektet. Dette vil være aktuelt hvis de mest pessimistiske scenariene blir virkelige. Prosjektet deles inn tre faser:

i. Fase 1: Kartlegging og kjøp av tomt, heretter kalt kjøpsfasen
ii. Fase 2: Regulering, prosjektering, grunnarbeid heretter kalt designfasen
iii. Fase 3: Bygging av varehuset, heretter kalt byggefasen

Hver fase er avhengig av den forutgående fasen og kan ikke påbegynnes før forutgående fase er avsluttet. I 2013 har bedriften et unikt konsept i Norge, men det forventes at konkurrenter vil komme inn i markedet før 2020. Sørlandet vil ikke ha marked for to byggevarehus av denne størrelsen, og selskapet har dermed kommet fram til at etableringen må skje før 2020. Hvis man avslutter prosjektet før byggefasen vil de forutgående kostnadene selskapet har hatt med tomtekjøp, prosjektering, design og grunnarbeid være tapt.

FIGUR 12 BESLUTNINGSTRE (RØDE TALL ER "SUNK COST" VED SKRINLEGGES)



Man regner med at byggefasen vil ta to år. Designfasen har en forventet varighet på to år mens kjøpsfasen ventes å ta et år. Designfasen kommer før byggefasen, mens kjøpsfasen kommer før designfasen. Prosjektet må være ferdig før 2020 noe som vil si at beslutningen om å starte byggefasen må skje senest år 2018. Designfasen vil ta to år og må dermed startes senest år 2016, noe som gir selskapet tre år på å ta en beslutning om de ønsker å starte designfasen. Innkjøp av land vil ta et år og gjennomføres før designfasen. Dette gir selskapet maksimalt et år før man beslutter om man ønsker å kjøpe tomt i Sørlandsparken. Opsjonstiden er henholdsvis ett, tre og fem år. Opsjonstiden viser hvor lang tid selskapet kan utsette beslutningen om å starte neste fase. Nåverdien av investeringens fremtidige kontantstrøm på investeringstidspunktet

TABELL 6 VARIABLER

Nåverdien av investeringens fremtidige kontantstrøm	400 mill NOK
Årlig standardavviket til fremtidig kontantstrøm	40 %
Investeringskostnad tomtekjøp X_1	54 mill
Investeringskostnad ved prosjektering, design og grunnarbeid X_2	80 mill
Investeringskostnad ved bygging av varehus X_3	400 mill
Risikofri rente r_f	4 %
Varighet av opsjon på tomt T_1	1. år
Varighet av opsjon på prosjektering T_2	2. år
Varighet av opsjon på bygging T_3	5. år

Oppgangsfaktoren $u = = e^{0.4\sqrt{5}} = 1.35$

Nedgangsfaktoren $d = = \frac{1}{u} = \frac{1}{1.35} = 0.74$

Risikonøytral sannsynlighet opp $p = \frac{e^{(.04*1)} - 0.74}{0.74 - 1.35} = 0.49$

Risikonøytral sannsynlighet ned $(1 - p) = 0.51$

Kjøpsfasen har en kostnadsramme på 54 mill NOK. Designfasen har en kostnadsramme på 80 mill NOK , mens byggefasen har en forventet kostnad på 400 mill NOK. Nåverdien av forventet kontantstrøm (S) forventes og være lognormal fordelt. En markedsanalyse viser at forventet nåverdien av fremtidig kontantstrøm er 400 mill NOK. Det årlig logaritmisk standardavvik (volatilitet) er 30 % og baserer seg på "Management Assumption Approach" med et optimistisk anslag på 600 mill NOK og et pessimistisk anslag på 40 mill NOK. Det er 95 % sannsynlig at kontantstrømmen vil ligge mellom optimistisk og pessimistisk anslag.

$$\sigma = \frac{\ln\left[\frac{S_{optimistisk}}{S_{pessemistisk}}\right]}{4\sqrt{t}}$$

$$\sigma = \frac{\ln\left[\frac{600 \text{ mill NOK}}{40 \text{ mill NOK}}\right]}{4\sqrt{5}} = 30\%$$

For å unngå stor kompleksitet forutsetter vi at investeringskostnadene ved de tre fasene er konstante. Vi forutsetter videre at det ikke foreligger verditap ved og utsetter beslutningen. Forutsetter også at volatiliteten kun er basert på markedsrisikoen og ser bort fra prosjekt intern risiko (privat risiko). En tradisjonell nåverdianalyse viser at prosjektet ikke bør gjennomføres.

$$NPV = 400 - \left(54 + \frac{80}{1.07^2} + \frac{400}{1.07^4}\right)$$

$$NPV = 400 - (54 + 70 + 305) = -29 \; mill \; NOK$$

Ved en tradisjonell analyse får vi en negativ nåverdi på -29 mill NOK, og prosjektet ville derfor med stor sannsynlighet ikke bli gjennomført. Spørsmålet blir da om fleksibiliteten ved å ta beslutninger stegvis vil tilføre prosjektet ekstra verdi.

For å verdsette denne fleksibiliteten vil jeg bruke den binomiske opsjonsmodellen. Det første vi må gjøre er å identifisere de eksogene variablene i prosjektet (se tabell 6). Etter dette finne vi de eksogene variablene.

Byggeopsjonen er avhengig av at selskapet utøver de to foregående opsjonene. Vi starter derfor med byggeopsjonen og bruker opsjonsverdiene som underliggende aktiva i opsjonsverdsettingen av den forutgående fasen.

5.1.1 Byggeopsjon (Fase 3)

I tabell 7 har vi det binomiske treet for byggefasen.

TABELL 7: KONTANTSTRØM OG OPSJONSVERDIEN BYGGEOPSJON

År 0		År 1		År 2		År 3		År 4		År 5	
										S_0u^5	1793
										3 %	1393
								S_0u^4	1328		
								6 %	944		
						S_0u^3	984			S_0u^4d	984
						13 %	615			16 %	584
				S_0u^2	729			S_0u^3d	729		
				25 %	386			25 %	345		
		S_0u	540			S_0u^2d	540			$S_0u^3d^2$	540
		50 %	235			38 %	195			31 %	140
S_0	400			S_0du	400			$S_0d^2u^2$	400		
	140			50 %	108			38 %	66		
		S_0d	296			S_0d^2u	296			$S_0d^3u^2$	296
		50 %	58			38 %	31			31 %	0
				S_0d^2	220			S_0d^3u	220		
				25 %	15			25 %	0		
						S_0d^3	163			S_0d^4u	163
						13 %	0			16 %	0
								S_0d^4	120		
								6 %	0		
										S_0d^5	89
										3 %	0

Utfall (Node)	Kontantstrøm
Objektiv	Opsjonsverdi

Den binomiske modellen har fem steg og en varighet på fem år. Hvert tidsintervall er derfor på et år og i løpet av det første året vil nåverdien av forventet kontantstrøm gå opp eller ned:

$$I\ node\ S_0u\ er\ PV(kontantstrøm)\ lik\ S_0u = 400 * 1.35$$
$$= 540\ millioner$$
$$I\ node\ \mathrm{S}_0d\ er\ PV(kontantsrøm)\ lik\ S_0d = 400 * 0.74$$
$$= 296\ millioner$$

Vi fortsetter og kalkulerer bruttoverdien til alle noder. I år fem vil mye av markedsusikkerheten være avklart og PV(kontantstrøm) vil i det mest optimistiske og pessimistiske scenariet være.

$$Opptimistisk: S_0u^5 \ = 400 * 1.35^5 = 1793\ millioner$$
$$Pessemistisk\ lik\ S_0d^5 = 400 * 0.74^5 = 89\ millioner$$

Sluttnode S_0u^5 har en forventet kontantstrøm på 1793 mill NOK mens, utøvelsesprisen (investeringskostnad) for byggeopsjonen er 400 mill NOK. Netto nåverdi vil i dette utfallet være:

$NPV_{\text{år 5}} = \text{PV(kontantstrøm)} - \text{(investeringskostnader)} = [\ S_0u^5 - X] = 1793 - 400 = 1393\ mill\ NOK$

Selskapet ønsker å maksimere verdien og vil bare utøve opsjonen hvis PV(kontantstrøm) er større enn investeringskostnaden. Verdien av opsjonen (C) i node S_0u^5 er:

$$\begin{aligned} &\text{Maks[PV(kontantstrøm)} - \text{PV(investeringskostnader); 0]} \\ &= Maks[S - X, 0] = [1793 - 400, 0] \\ &= Maks[1393{,}0] = 1393\ millioner \end{aligned}$$

Opsjonsverdien er 1393 mill NOK. Differansen mellom utøvelse i dag versus neste år tilsvarer tidsverdien til opsjonen. Tidsverdien gjør at det sjelden vil være lønnsomt å utøve en kjøpsopsjon før utløpsfristen. Siden utløpsfristen er siste sjanse til å benytte seg av opsjonen vil tidsverdien alltid være null i sluttnoden.

$$\begin{gathered} Tidsverdi = C - NPV = 1393 - 1393 = 0\ millioner \\ Realverdien = C - Tidsverdien = 1393\ millioner \end{gathered}$$

Verdien av opsjonen i sluttnode S_0u^5 er derfor 1393 mill NOK

Sluttnode S_0d^5 representerer det verst tenkelige utfallet med en PV(kontantstrøm) på 89 mill NOK og utøvelsespris på 400 mill NOK. Selskapet vil velge å stoppe prosjektet hvis investeringskostnaden er større enn PV(kontantstrøm):

$$\begin{aligned} &\text{Maks[PV(kontantstrøm)} - \text{(investeringskostnad); 0]} \\ &= Maks[S - X, 0] = [89 - 400{,}0] \\ &= Maks[-311, 0] = 0\ millioner \end{aligned}$$

Gjennomføring av byggefasen vil i dette utfallet gi en NPV på -311 mill NOK. Siden NPV<0 vil vi ikke gjennomføre byggefasen i dette utfallet. Siden byggeopsjonen rett og ingen plikt vil selskapet skrinlegge prosjektet. Opsjonsverdien node S_0d^5 er lik null.

Etter vi har funnet opsjonsverdiene til alle sluttnodene går vi et år tilbake for å finne opsjonsverdiene i år 2017. Tar vi node S_0u^3d vil selskapet i dette utfallet ha tre år med oppgang og et år med nedgang. Hvis selskapet velger å starte byggingen i dette året vil nåverdien til framtidig kontantstrøm være 729 mill NOK . Utøvelsesprisen er 400 mill NOK, noe som gir en NPV på 329 mill NOK.

$$NPV = [\ S_0u^4 - X] = 729 - 400 = 329\ mill\ NOK$$

Siden opsjonen er tidsbestemt kan vi bruke baklengs induksjon for å regne ut opsjonsverdien i node S_0u^3d. Verdien av opsjonen er den vektede risikonøytrale sannsynligheten til opsjonsverdien til node $(S_0u^4d)\ og\ \left(S_0u^3d^2\right)$, diskontert med den kontinuerlige risikofrie renten. Verdien av opsjonen i node $\mathrm{S_0u^3d}$ er derfor:

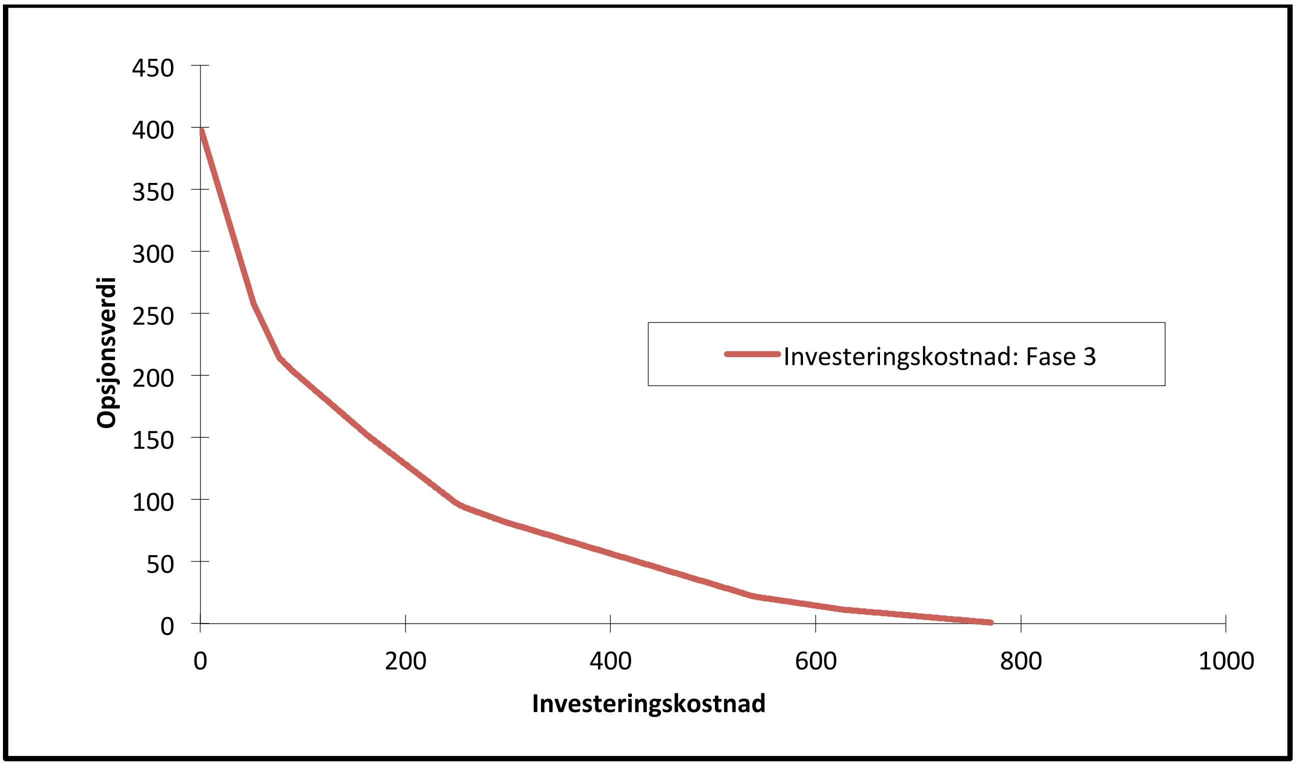
$$\mathrm{C} = \left[\mathrm{p} * \left(\mathrm{p}(\mathrm{S_0u^4d}) + \mathrm{q}(\mathrm{S_0u^3d^2})\right) * \mathrm{e}^{(-\mathrm{r_f} * \Delta \mathrm{e})}\right]$$
$$= [0.49 * 584 + 0.51 * 140] * 0.96 = 345\ \text{mill NOK}$$

Siden selskapet har en amerikansk opsjon kan de velge om de vil utøve opsjonen i dag eller om de vil vente.:

$$maks(forventet\ nåverdi\ av\ åvente\ med\ åutøve;\ verdien\ \text{av å}\ utøve(NPV)\ )$$
$$= Maks(345\ mill\ NOK; 329\ mill\ NOK) = 345\ mill\ NOK$$

I dette tilfellet vil man vente siden opsjonsverdien er større NPV. Vi fortsetter med samme fremgangsmåte og finner at opsjonsverdien i år 0 (2013) vil være 140 mill NOK.

FIGUR 13 OPSJONSVERDIEN SOM FUNKSJON AV INVESTERINGSKOSTNADEN



5.1.1 Designopsjon (Fase 2)

Vi fant i forrige delkapittel opsjonsverdiene til byggeopsjonen. Men det essensielle med en sekvensiell opsjon er at den siste opsjonen (byggeopsjonen) er avhengig av at de foregående opsjonene (tomt; design) blir benyttet. Hvis designfasen ikke blir gjennomført vil heller ikke byggefasen gjennomføres, og hvis tomteopsjonen ikke gjennomføres vil ikke design- og byggeopsjonen gjennomføres.

TABELL 8 DESIGNOPSJON

År 0		År 1		År 2		År 3	
						S_0u^3	615
						13 %	535
				S_0u^2	386		
				25 %	309		
		S_0u	235			S_0u^2d	195
		50 %	173			38 %	115
S_0	140			S_0du	108		
	94			50 %	55		
		S_0d	58			S_0d^2u	31
		50 %	26			38 %	0
				S_0d^2	15		
				25 %	0		
						S_0d^3	0
						13 %	0

Utfall (Node)	Kontantstrøm (S)
Objektiv Sannsynlighet	Opsjonsverdi (C)

Siden byggefasen er avhengig av at designopsjonen gjennomføres bruker vi opsjonsverdiene til byggeopsjonen som det underliggende aktiva i verdisettingen av designopsjonen. Endelig beslutningen om å starte designfasen må inntreffe før 2016 (utløpsdato), noe som betyr at opsjonens varighet er tre år. Kostnaden for å starte designfasen (utøvelsesprisen) er 80 mill NOK.

Vi starter i sluttnoden S_0u^3 hvor selskapet står ovenfor beslutningen om man ønsker å skrinlegge prosjektet eller om man ønsker å fortsette til neste fase. Vi finner opsjonsverdien ved å maksime avkastningen:

$$\begin{aligned} C &= \text{Maks}[S - X, 0] = \text{Maks}[615 - 80{,}0] = \text{Maks}[535, 0] \\ &= 535 \text{ mill NOK} \end{aligned}$$

Siden opsjonsverdien er større en utøvelseskostnaden, vil selskapet i dette utfallet velge å starte designfasen. Opsjonsverdien er 535 mill NOK. Vi regner ut opsjonsverdiene i alle sluttnodene på tilsvarende måte.

I nodene som ikke ligger i utløpsåret (2016) bruker vi bakover induksjon. Ved å regne oss bakover vil opsjonsverdien i node S_0 (2013) være lik den vektede risikonøytrale sannsynligheten til opsjonsverdiene i node (S_0u) og (S_0d), diskontert med den risikofrie renten. Verdien av opsjonen i node S_0du er dermed:

$$\mathrm{C} = \left(\mathrm{p}(\mathrm{S_0d}) + \mathrm{q}(\mathrm{S_0u})\right) * \mathrm{e}^{(-\mathrm{r_f} * \Delta\mathrm{t})}$$
$$\mathrm{C} = [0.49 * 26 + 0.51 * 173] * 0.96 = 94 \text{ mill NOK}$$

Hvis man velger å utøve opsjonen vil dette gi en NPV på:

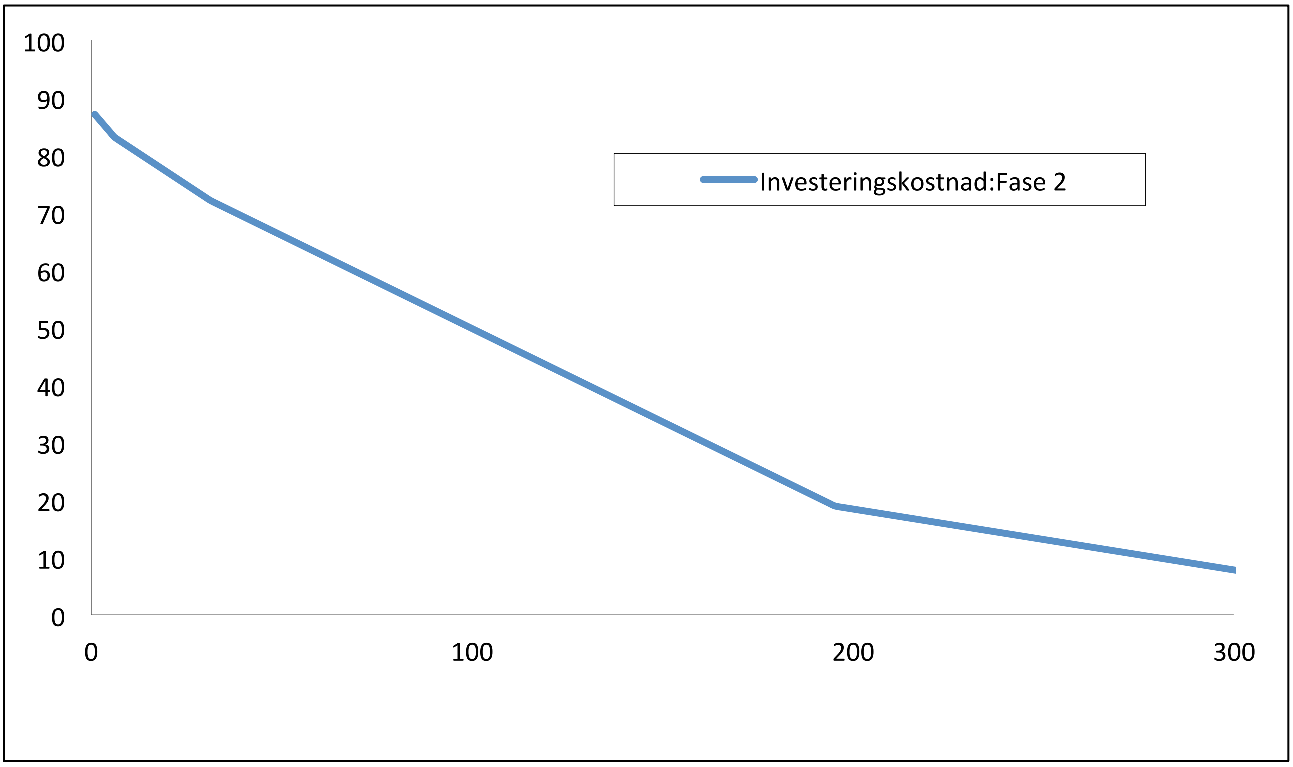
$$NPV = [\ S_0 - X] = 140 - 80 = 60\ mill\ NOK$$

Verdien av opsjonen finner vi ved å maksimere:

$$maks(forventet\ nåverdi\ av\ åvente\ med\ åutøve;\ verdien\ av\ å\ utøve(NPV)\ )$$
$$= Maks(94\ mill\ NOK; 60\ mill\ NOK) = 94\ mill\ NOK$$

Siden opsjonsverdien er større enn NPV vil man ikke utøve opsjonen og opsjonsverdien er derfor lik 94 mill NOK.

FIGUR 14 OPSJONSVERDIEN SOM EN FUNKSJON AV INVESTERINGSKOSTNADEN



5.1.2 Tomteopsjon (Fase 1)

Den siste opsjonen har en varighet på ett år. Designopsjonen er avhengig av at selskapet benytter seg av tomteopsjonen. Vi bruker derfor opsjonsverdiene til designopsjonen som det underliggende aktiva S (kontantstrøm). Opsjonens varighet er ett år og investeringskostnaden (utøvelsesprisen) er 56 mill NOK.

FIGUR 15 BIOMISK TRE

År 0 (2013)	År 1 (2014)

S_0u	173
50 %	119

S_0	94
	56

S_0d	26
50 %	0

Utfall (Node)	Kontantstrøm (S)
Objektiv sannsynlighet	Opsjonsverdi (C)

Vi starter i sluttnoden S_0u og finner opsjonsverdien ved og maksimer valget:

$$C = \text{Maks}[S - X, 0] = [173 - 54, 0] = 119 \text{ mill NOK}$$

Opsjonsverdien er 119 mill NOK. Hvis dette blir utfallet, vil selskapet starte den første fasen med å finne tomt.

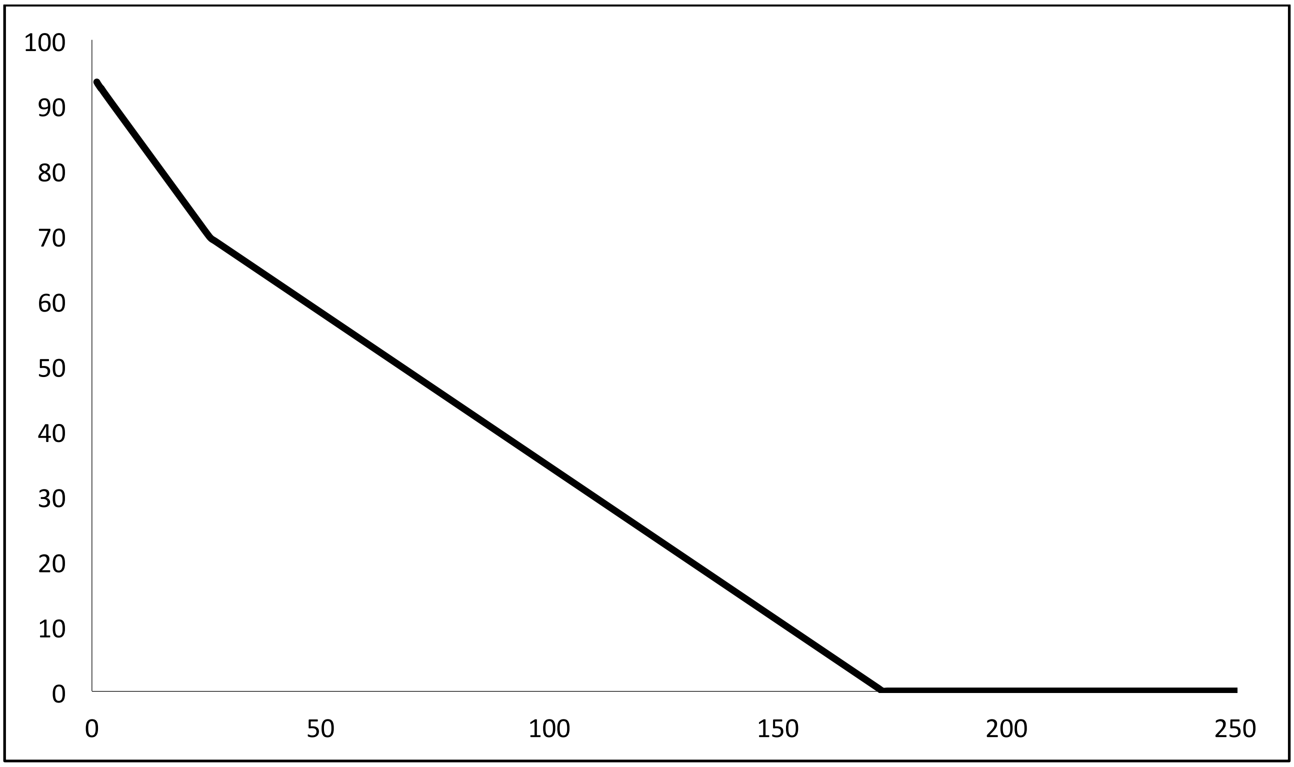
I node S_0d vil opsjonsverdien være null $[26 - 54, 0]$. Selskapet vil derfor ikke utøve tomteopsjonen, og prosjektet skrinlegges.

Vi finner opsjonsverdien i node S_0 ved å bruke bakover induksjon, hvor vi tar den vektede risikonøytrale sannsynligheten for opsjonsverdiene i opp- og ned utfallene og diskonterer dette med den risikofrie renten. Verdien av opsjonen i år 0 (2013) er:

$$C = \left(p(S_0d) + q(S_0u)\right) * e^{(-r_f * \Delta)}$$
$$C = [0.49 * 119 + 0.51 * 0] * .49 * 119 + 0.51 * 0\text{sjon}$$

Dette er også den totale verdien av den stegvise opsjonen.

FIGUR 16 OPSJONSVERDIEN SOM FUNKSJON AV INVESTERINGSKOSTNADEN



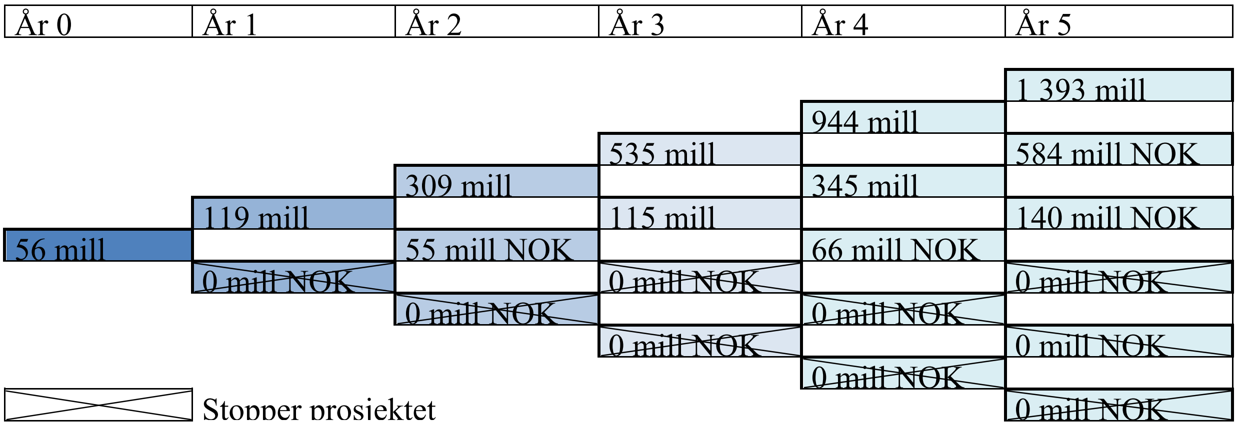
5.2 Kombinert opsjonsverdien

Ved å dele prosjektet i tre separate faser får vi en opsjonsverdi på 56 mill NOK, noe som er en vesentlig forbedring fra -29 mill NOK i en tradisjonell modell. Hvis vi benytter opsjonen vil den nye bli:

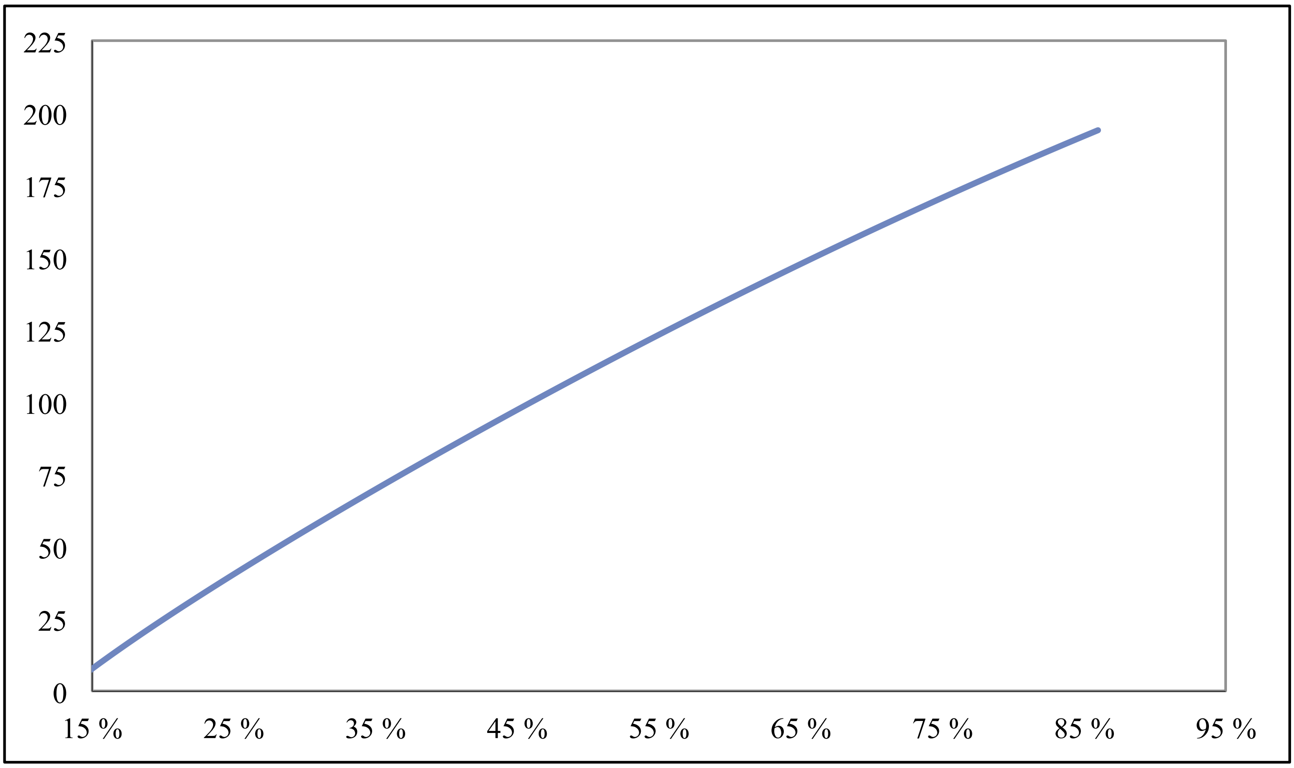
$$\text{NPV} = \text{NPV uten opsjon} + \text{C} = -29 + 56 = 27 \text{ mill NOK}$$

De kombinerte opsjonsverdiene for alle fem årene ser vi figur 17.

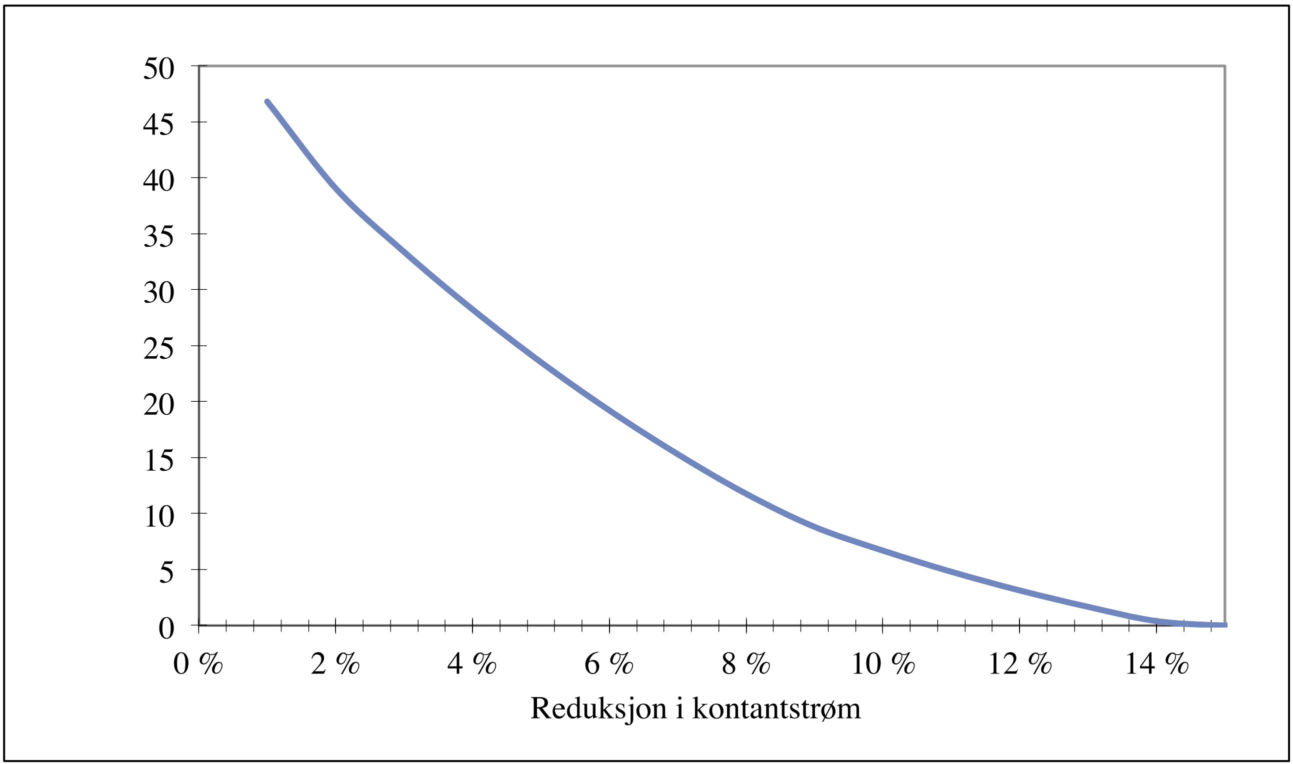
FIGUR 17 BINOMISK TRE FOR DEN STEGVISE OPSJONEN.



FIGUR 18 OPSJONSVERDI SOM FUNKSJON AV VOLATILITET



FIGUR 19 OPSJONSVERDI SOM FUNKSJON AV REDUKSJON I KONTANTSTRØM



6 CASE 2: SAMMENSATTE OPSJONER

En byggherre ønsker å bygge et kjøpesenter på 4 000 kvm gulvflate. Byggekostnadene er 10 000 kr pr kvm noe som gir en byggekostnad på 40 mill kr. Den risikofrie renten er 3 % p.a. og avkastningskravet er 10 %. Netto leieinntekt per kvm er 1000 kr og årlige leieinntekter er 4 mill NOK. Hvis vi forutsetter uendelig levetid gir det prosjektet en netto nåverdi på:

$$NPV = -40\ mill\ NOK + \frac{4\ mill\ NOK}{0.1} = -40 + 40$$
$$= 0\ mill\ NOK$$

Den tradisjonelle nåverdiberegningen gir derfor en netto nåverdi på null, noe som ikke gir noe klart svar på om prosjektet bør gjennomføres. Det knytter seg sto usikkerhet til om kjøpesenteret vil bli en suksess eller ikke. Byggherren ønsker derfor å se på hvilke realopsjonsmuligheter som ligger i prosjektet i den neste fem årene. Gjennom en grundig analyse klarer man å identifisere tre realopsjonsmuligheter.

1. Ekspansjonsopsjon: Hvis kjøpesenter blir en suksess kan man utvide utleiearealene med et tilbygg i løpet av de første fem årene. Dette vil føre til en økning i utleieareal på 2400 kvm, noe som gir en ekspansjonsfaktor på 1.6. Man regner med at utvidelsen vil koste 30 mill NOK.

2. Nedleggelsesopsjon: Man regner med at salgsverdien på kjøpesenteret vil være 30 mill NOK i løpet av de neste fem årene. Den andre opsjonen er muligheten til å selge pensjonatet for 30 mill NOK.

3. Kontraktsopsjon: Den tre opsjonen er muligheten er å leie ut 50% av arealene i en langsiktig leiekontrakt. Nåverdien av reduserte kostnader og leieinntekter vil være 15 mill NOK.

Jeg kommer til å starte med å verdsette opsjonene individuelt før jeg til slutt vil verdsette opsjonene samlet. For hver opsjon vil jeg også gjennomføre simuleringer for å se sammenhengene mellom opsjonsverdien og variablene.

TABELL 9 VARIABLER

PV(kontantstrøm)	40 mill NOK
Investeringskostnad	40 mill NOK
Volatilitet	20 %
Risikofri rente	3,0 %
Verdinedgang	0 %
Opsjonens Varighet	År 5
Tid per steg	1
Oppgangsfaktor (u)	1,221
Nedgangsfaktoren (d)	0,819
Risikonøytral sannsynlighet opp	0,53
Risikonøytral sannsynlighet ned	0,47
Antall steg	5
Ekspansjonsfaktor	1,6
Ekspansjonskostnad	20 mill NOK
Kontraktsfaktor	50 %
Reduserte kostnader	15 mill NOK
Restverdi	30 mill NOK
Diskontering per steg	0,97

Det er stor usikkerhet om fremtidige leieinntektene, men en analyse viser at man med 95 % sannsynlighet mener at de ikke vil bli høyere en 100 mill kr, og at det med 50 % sannsynlighet vil være 40 mill NOK. Siden leieinntektene ikke kan bli negativ forutsetter vi at sannsynlighetsfordelingen er lognormal og vi finner den årlige volatiliteten:

$$\sigma = \frac{\ln\left[\frac{100 \text{ mill NOK}}{40 \text{ mill NOK}}\right]}{25} = 20\ \%$$

Når vi har funnet volatiliteten kan vi regne ut opp- og nedfaktoren og den risikonøytrale sannsynligheten. Det binomiske treet vil ha tre steg, og hver tidsperiode blir derfor på et år.

Oppgangsfaktoren	$\mathrm{u} = \mathrm{e}^{0,2*\sqrt{1}} = 1.22$
Nedgangsfaktoren	$\mathrm{d} = \mathrm{e}^{-0,2*\sqrt{1}} = 0.819$
Risikonøytral sannsynlighet opp	$p = \frac{(1,035)-0.819}{1.22-0.819} = 0.53$
Risikonøytral sannsynlighet ned	$(1-\mathrm{p}) = 0.47$

Vi kan nå lage et binomisk tre over forventet utvikling til leieinntektene

TABELL 10 FORVENTET UTVIKLING TIL KONTANTSTRØMMEN

År 0,0	År 1,0	År 2,0	År 3,0	År 4,0	År 5,0
					108,7 mill
				89,0 mill	
			72,9 mill		72,9 mill NOK
		59,7 mill		59,7 mill	
	48,9 mill		48,9 mill		48,9 mill NOK
40,0 mill		40,0 mill		40,0 mill	
	32,7 mill		32,7 mill		32,7 mill NOK
		26,8 mill		26,8 mill	
			22,0 mill		22,0 mill NOK
				18,0 mill	
					14,7 mill NOK

Byggherren har identifisert tre ulike opsjoner, og det første vi må gjøre er å verdsette opsjonene individuelt før vi finner den samlede opsjonsverdien. Vi vil også gjennomføre simuleringer for å se hvordan opsjonsverdien påvirkes av uavhengige variablene.

6.1 Ekspasjonsopsjon

Beslutningsregelen for å utvide kjøpesenteret er

$$PV(kontantstrøm)_{år\ t} * 1.6 - 20\ \ mill\ NOK > PV(kontantstrøm)_{år\ t}$$

TABELL 11 VERDIEN AV OPSJON TIL Å EKSPANDERE

År 0,0	År 1,0	År 2,0	År 3,0	År 4,0	År 5,0
					154,0 mill
				123,0 mill	
			97,8 mill		96,6 mill NOK
		77,2 mill		76,1 mill NOK	
	60,8 mill		59,4 mill		58,2 mill NOK
47,9 mill		46,5 mill		44,8 mill NOK	
	36,6 mill		35,2 mill		32,7 mill NOK
		28,1 mill		26,8 mill NOK	
			22,0 mill		21,952 mill
				17,973 mill	
					14,715 mill

Opsjonen til å utvide kjøpesenteret med 60 % til 20 mill NOK kan utøves i alle nodene. Vi starter verdsettelsen i sluttnode, hvor valget et å maksimere:

$$\text{Maks}[\text{PV}(\text{kontantstrøm})_{\text{år } 5} * 1.6$$
$$- 20 \text{ mill NOK}; \text{PV}(\text{kontantstrøm})_{\text{år } 5}]$$

I node S_0u^5 vil ha valget mellom å:

$$\text{Maks}[108.7\text{m}\times 1.6 \ - 20 \text{ mill NOK}; 108.7 \text{ mill}]$$
$$= [154{,}0 \text{ mill NOK} ; 108.7 \text{ mill NOK}]$$
$$= 154 \; mill \; NOK = UTVIDER$$

På samme måte finner vi verdien til alle sluttnodene før vi verdsetter de bakenforliggende nodene (år 0 til år 4). La oss ta S_0u^4 som et eksempel. I denne noden vil verdien av å holde opsjonen åpen være det diskonterte vektede risikonøytrale sannsynligheten av opsjonsverdiene i node S_{u^5} og node S_{u^4d}.

$$[p(S_0u^5) + \ (1 - \ p)(S_0du^4)] * \ e^{(-r_f\sqrt{t})}$$
$$= \ [0.53(154 \; millioner)$$
$$+ \ (1 - \ 0.53)(96.6 \ \ millioner)] * \ e^{(-0.03)(1)}$$
$$= \ 123 \; mill \; NOK$$

Siden vi har en amerikansk opsjon har vi valget mellom å ekspandere eller vente. Hvis vi ekspander istedenfor å vente vil dette gi en forventet kontantstrøm på:

$$Ekspandere\text{: } 89 \text{ mill NOK} \times 1.6 \; - 20 \text{ mill NOK} = 122{,}4$$

Valget er dermed mellom:

$$\begin{aligned} & Maks(ekspandere; Vente) \\ &= Maks(123 \text{ m}ill\ NOK;\ 122.4 \text{ mill NOK}\,) \\ &= 123 \text{ mill NOK} = \text{VENTE} \end{aligned}$$

Vi fortsetter på samme måte å regne opsjonsverdiene i alle nodene tilbake til år null ($t = 0$). Verdien av opsjonen i år null er:

$$\begin{aligned} & [p(S_o u) + \ (1 - \ p)(S_o d)] * \ e^{(-r_f\sqrt{t})} \\ &= \ [0.53(60.8 \ \text{ mill NOK}) \\ &+ \ (1 - \ 0.53)(36.6 \text{ mill NOK})] * 6e^{(-0.03)(1)} \\ &= \ 47.9 \text{ mill NOK} \end{aligned}$$

Netto kontantstrøm fra leieinntektene er i år null lik 40 mill NOK. Hvis vi legger inn en ekspansjonsopsjon vil den øke til 47.9 mill NOK. Verdien av opsjonen til å ekspandere er derfor lik :

$$\begin{aligned} \text{C}_0 &= \text{PV(CF)}_{\text{med opsjon}} - \text{ed(CF)}_{\text{uten opsjon}} = 47.9 - 40 \\ &= 7.9 \text{ mill NOK} \end{aligned}$$

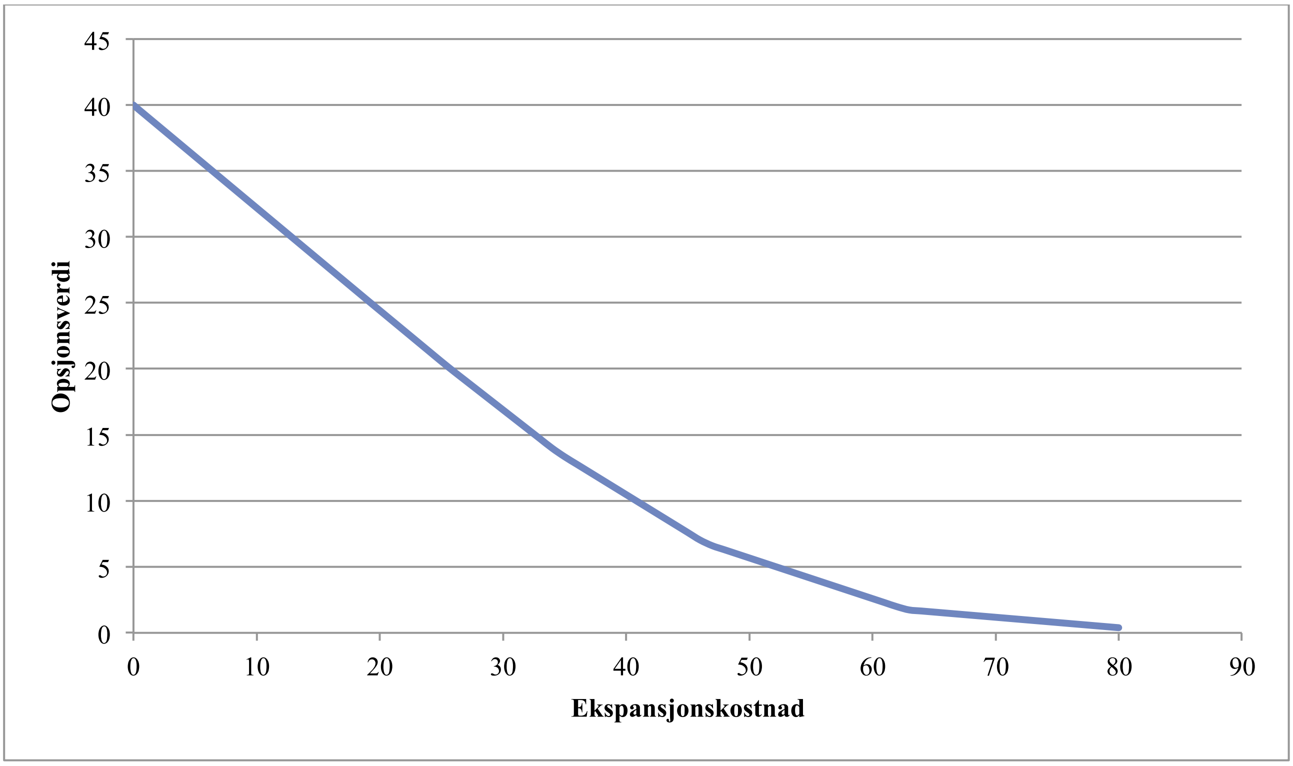
Sannsynligheten for at kjøpesenteret utvides i løpet av de fem årene er 50 % (se figur 12)

TABELL 12 STRATEGI

					EKSPANDER	0,0312
				FORTSET		
			FORTSET		EKSPANDER	0,1562
		FORTSET		FORTSET		
	FORTSET		FORTSET		EKSPANDER	0,3125
FORTSET		FORTSET		FORTSET		
	FORTSET		FORTSET		IKKE	0,3125
		FORTSET		FORTSET		
			FORTSET		IKKE	0,1562
				FORTSET		
					IKKE	0,0312

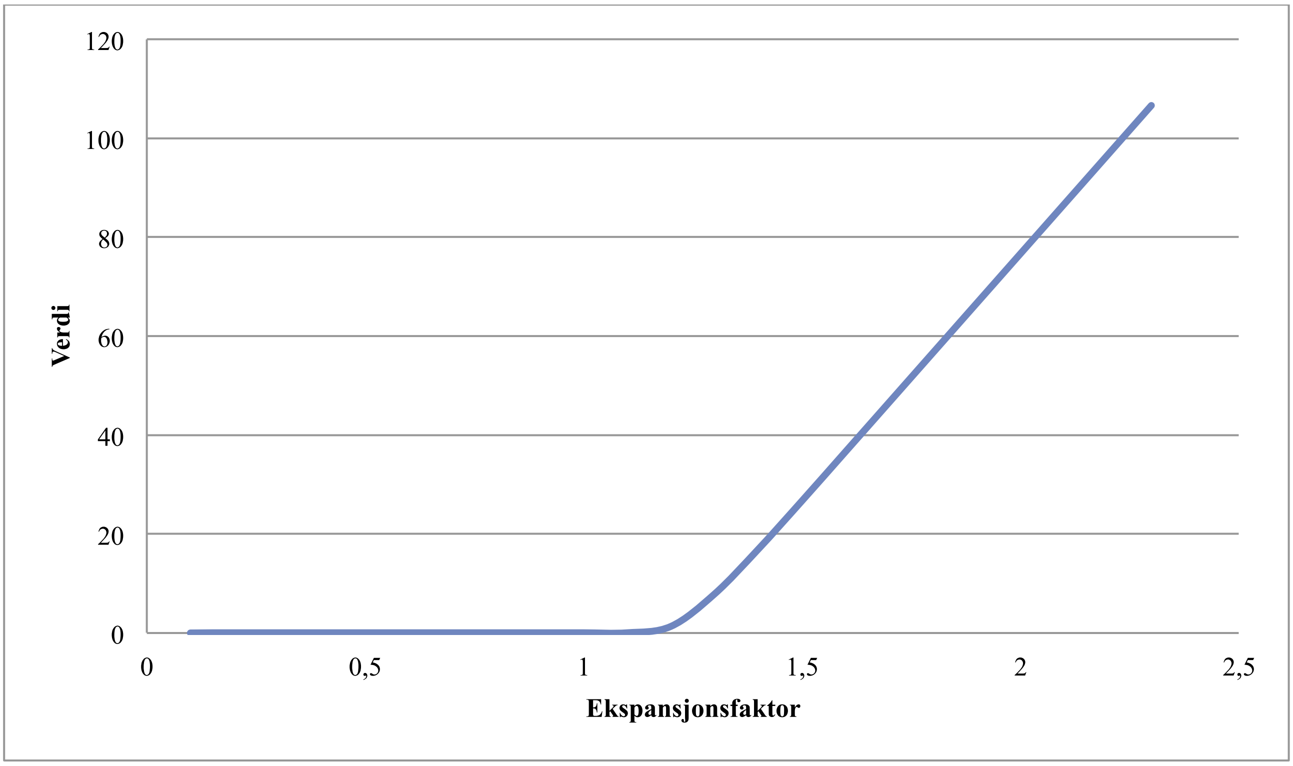
I figur 20 ser vi at opsjonsverdien reduseres når ekspansjonskostnaden øker, gitt alle andre variabler er konstant.

FIGUR 20 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV EKSPANSJONSKOSTNAD



I figur 21 ser vi opsjonsverdien som en funksjon av ekspansjonsfaktoren. Vi ser at opsjonsverdien er verdiløs så lenge ekspansjonsfaktoren til prosjekter er under 1.3.

FIGUR 21 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV EKSPANSJONSFAKTOR



I tabell 13 ser vi opsjonsverdien som en funksjon av ekspansjonsfaktor og ekspansjonskostnad. Tabellen tar dermed hensyn til begge variablene fra figur 26 og 27.

TABELL 13 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV EKSPANSJONSFAKTOR OG EKSPANSJONSKOSTNAD

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1,3	3,9	0,7	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,4	7,6	2,2	0,5	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,5	11,4	5,0	1,8	0,5	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,6	15,4	7,9	3,4	1,5	0,5	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0
1,7	19,4	11,5	6,1	3,0	1,1	0,6	0,2	0,0	0,0	0,0
1,8	23,4	15,2	8,9	4,5	2,6	0,9	0,6	0,2	0,0	0,0
1,9	27,4	19,0	11,8	7,1	4,1	2,2	1,0	0,6	0,3	0,0
2	31,4	22,9	15,4	10,0	5,6	3,7	1,8	1,0	0,6	0,3
2,1	35,4	26,9	19,1	12,9	8,2	5,2	3,3	1,4	1,0	0,7
2,2	39,4	30,8	22,9	15,8	11,1	6,7	4,8	2,9	1,4	1,1
2,3	43,4	34,8	26,6	19,3	13,9	9,2	6,3	4,4	2,5	1,4

6.2 Nedleggelsesopsjon

Beslutningsregelen for å selge kjøpesenteret for 30 mill NOK er:

$$Salgsverdien > PV(kontantstrøm)_{år\ t}$$

TABELL 14 NEDLEGGELSESOPSJON

År 0,0	År 1,0	År 2,0	År 3,0	År 4,0	År 5,0
					108,7 mill
				89,0 mill	
			72,9 mill		72,9 mill NOK
		59,7 mill		59,7 mill	
	49,2 mill		48,9 mill		48,9 mill NOK
41,3 mill		40,8 mill		40,0 mill	
	35,3 mill		34,5 mill		32,7 mill NOK
		31,4 mill		30,5 mill	
			30,0 mill		30,0 mill NOK
				30,0 mill	
					30,0 mill NOK

Opsjonen til å selge kjøpesenteret for 30 mill kan utøves i alle nodene. Vi starter verdsettelsen i sluttnode hvor valget et å maksimere:

$$\text{Maks}[\text{Salgsverdien; PV(kontantstrøm)}_{\text{år 5}}]$$

I node S_0u^5 vil ha valget mellom å:

$$\text{Maks}[\text{30 mill NOK; 108.7 mill NOK}] = 108.7\ mill\ NOK$$
$$= IKKE\ UTØV\ OPSJON$$

I node S_0d^5 vil ha valget mellom å

$$\text{Maks}[\text{30 mill NOK; 14.7 mill NOK}] = 14.7\ mill\ NOK$$
$$= SELG\ KJØPESENTERET$$

På samme måte finner vi verdien til alle sluttnodene før vi verdsetter de bakenforliggende nodene (år 0 til år 4). La oss ta S_0d^4 som et eksempel. I denne noden vil verdien av å holde opsjonen åpen være den diskonterte vektede risikonøytrale sannsynligheten av opsjonsverdiene i node S_{d^5} og node S_{d^4u}.

$$[p(S_0u^5) + (1 - p)(S_0du^4)] * e^{(-r_f\sqrt{t})}$$
$$= [0.53(30\text{mill NOK})$$
$$+ (1 - 0.53)(96.6 \ mill\ NOK)] * e^{(-0.03)(1)}$$
$$= 29.11\ mill\ NOK$$

Siden vi har en amerikansk opsjon har vi valget mellom å utøve opsjonen (selge) eller vente. Hvis vi selger istedenfor å vente vil dette gi en forventet kontantstrøm på:

$$Maks(17.937; 30) = 30\ mill\ NOK$$

Valget er dermed mellom:

$$Maks(Selge\ n\text{å}; Vente\ til\ neste\ periode) = (30; 29.11) = 30$$
$$= \text{Selge nå}$$

Opsjonsverdien i node S_0d^4 er derfor 30 mill NOK. Vi fortsetter på samme måte å finner opsjonsverdiene i alle nodene tilbake til år null ($t = 0$). Verdien av opsjonen i år null er:

$$[p(S_ou) + (1 - p)(S_od)] * e^{(-r_f\sqrt{t})}$$
$$= [0.53(49.2 \ mill\ NOK)$$
$$+ (1 - 0.53)(35.3.6\ mill\ NOK)] * e^{(-0.03)(1)}$$
$$= 41.3\ mill\ NOK$$

Netto kontantstrøm fra leieinntektene er i år null lik 40 mill NOK. Hvis vi legger inn en nedleggelsesopsjon vil kontantstrømmen øke til 41.3 mill NOK. Verdien av ekspansjonsopsjonen er derfor lik :

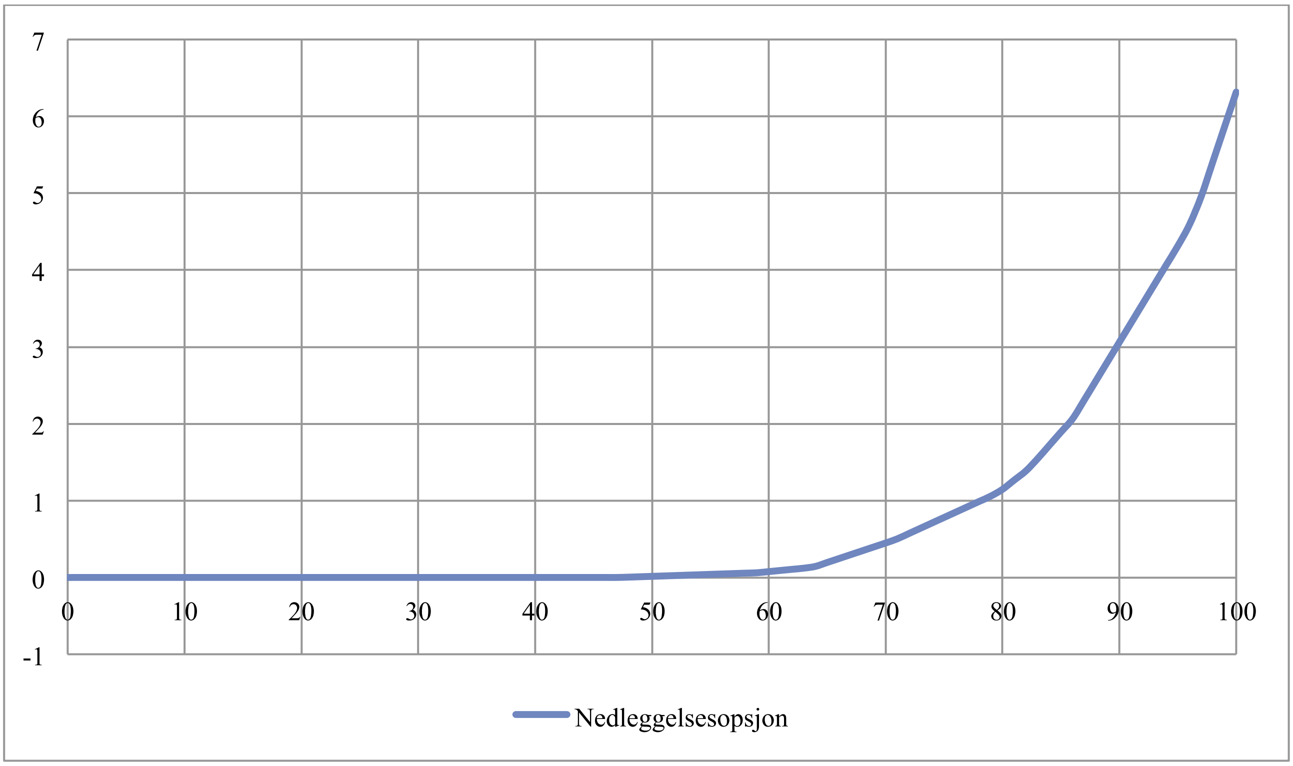
$$\mathrm{C_0} = \mathrm{PV(CF)}_{med\ opsjon} - PV(CF)_{uten\ opsjon} = 41.3 - 40$$
$$= 1.3\ mill\ NOK$$

Sannsynligheten for at kjøpesenteret selges i løpet av de fem årene er 19 % (se tabell 15)

TABELL 15 STRATEGI

År 0	År 1	År 2	År 3	År 4	År 5	p
					IKKE LEGG	3 %
				FORTSET		
			FORTSET		IKKE LEGG	16
		FORTSET		FORTSET		
	FORTSET		FORTSET		IKKE LEGG	31
FORTSET		FORTSET		FORTSET		
	FORTSET		FORTSET		IKKE LEGG	31
		FORTSET		FORTSET		
			LEGG		LEGG NED	16
				LEGG		
					LEGG NED	3 %

FIGUR 22 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV RESTVERDIEN



6.3 Kontraktsopsjon

Beslutningsregelen for å leie ut 50 % og dermed redusere kostnadene og øke leieinntektene er:

$$15\ mill\ NOK + 0.5 \times PV(kontantstrøm)_{år\ t} > PV(konantstrøm)_{år\ t}$$

TABELL 16 VERDIEN AV OPSJON TIL Å KONTRAHERE.

År 0.0	År 1.0	År 2.0	År 3.0	År 4.0	År 5.0
					108,7 mill
				89,0 mill NOK	
			72,9 mill		72,9 mill NOK
		59,7 mill		59,7 mill NOK	
	49,0 mill		48,9 mill		48,9 mill NOK
40,7 mill		40,4 mill		40,0 mill NOK	
	34,0 mill		33,6 mill		32,7 mill NOK
		29,1 mill		28,664 mill	
			26,0 mill		25,976 mill
				23,987 mill	
					22,358 mill

Vi starter verdsettelsen i sluttnoden hvor valget et å maksimere og ser at i node S_0u^5 vil man ha valget mellom å:

$$\text{Maks}[15 \text{ mill NOK} + 0.5 * 108.7 \text{ mill NOK};\ 108.7]$$
$$= (69{,}35\ mill\ NOK; 108.7) = 108.7\ mill\ NOK$$
$$= IKKE\ UTØV\ OPSJON$$

I node S_0d^5 vil ha valget mellom å:

$$\text{Maks}[15 \text{ mill NOK} + 0.5 * 14.7 \text{ mill NOK};\ 14.7]$$
$$= (22.358\ mill\ NOK; 14.7) = 108.7\ mill\ NOK$$
$$= IKKE\ UTØV\ OPSJON$$

På samme måte finner vi verdien til alle sluttnodene før vi verdsetter de bakenforliggende nodene (år 0 til år 4). La oss ta S_0d^4 som et eksempel. I denne noden vil verdien av å holde opsjonen åpen være det diskonterte vektede risikonøytrale sannsynligheten av opsjonsverdiene i node S_{d^5} og node S_{d^4u}.

$$[p(S_0u^5) + (1 - p)(S_0du^4)] * e^{(-r_f\sqrt{t})}$$
$$= [0.53(25.976 \text{mill NOK})$$
$$+ (1 - 0.53)(22.358\ \ mill\ NOK)] * e^{(-0.03)(1)}$$
$$= 23.54\ mill\ NOK$$

Siden vi har en amerikansk opsjon har vi valget mellom å utøve opsjonen (kontrahere) eller vente til neste periode (år 5). Hvis vi selger i år 4 istedenfor å vente til år 5 vil dette gi en forventet kontantstrøm på:

$$15 \text{ mill NOK} + 0.5 * 18 \text{ mill NOK} = 24$$

Valget er dermed å kontrahere eller vente en periode:

$$Maks(Kontrakt; Vente\ til\ neste\ periode) = (24; 23.54)$$
$$= 23.54 = \text{Kontrakt nå}$$

Verdien av å inngå en langsiktig leiekontrakt er større en å vente til neste periode, og strategien i dette utfallet vil være å inngå kontrakten. Verdien av å inngå kontrakt er også lik opsjonsverdien i dette utfallet.

På samme måte finner vi opsjonsverdiene i alle nodene tilbake til år null ($t = 0$). Verdien av opsjonen i år null er:

$$[p(S_o u) + (1 - p)(S_o d)] * e^{(-r_f \sqrt{t})}$$
$$= [0.53(49\ mill\ NOK)$$
$$+ (1 - 0.53)(34\ mill\ NOK)] * e^{(-0.03)(1)}$$
$$= 40.7 mill\ NOK$$

Verdien av opsjonen til å inngå kontrakten er derfor lik:

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{PV(CF)}_{med\ opsjon} - PV(CF)_{uten\ opsjon} = 40.7 - 40$$
$$= 0.7\ mill\ NOK$$

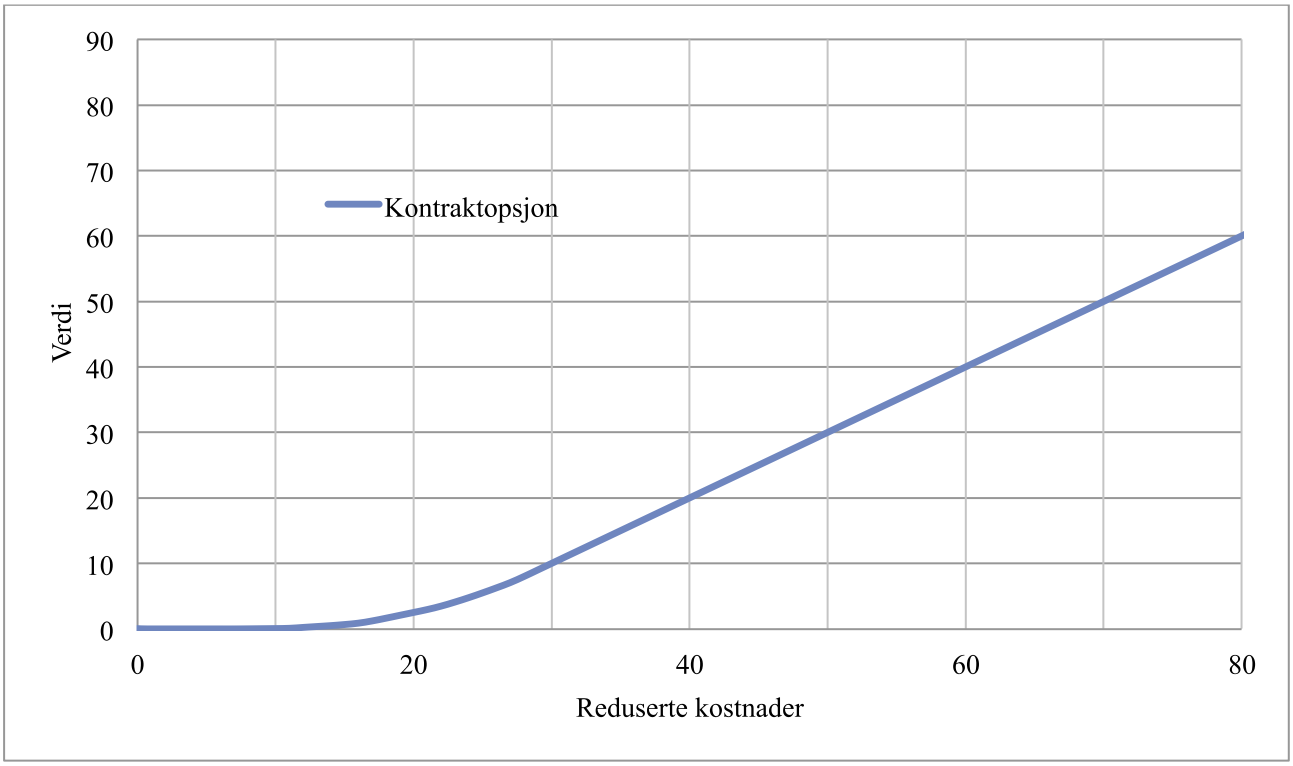
TABELL 17 STRATEGI

År 0	År 1	År 2	År 3	År 4	År 5	p
					IKKE	3 %
				FORTSETT		
			FORTSETT		IKKE	16
		FORTSET		FORTSETT		
	FORTSET		FORTSETT		IKKE	31
FORTSET		FORTSET		FORTSETT		
	FORTSET		FORTSETT		IKKE	31
		FORTSET		FORTSETT		
			KONTRAK		KONTRAKT	16
				KONTRAK		
					KONTRAKT	3 %

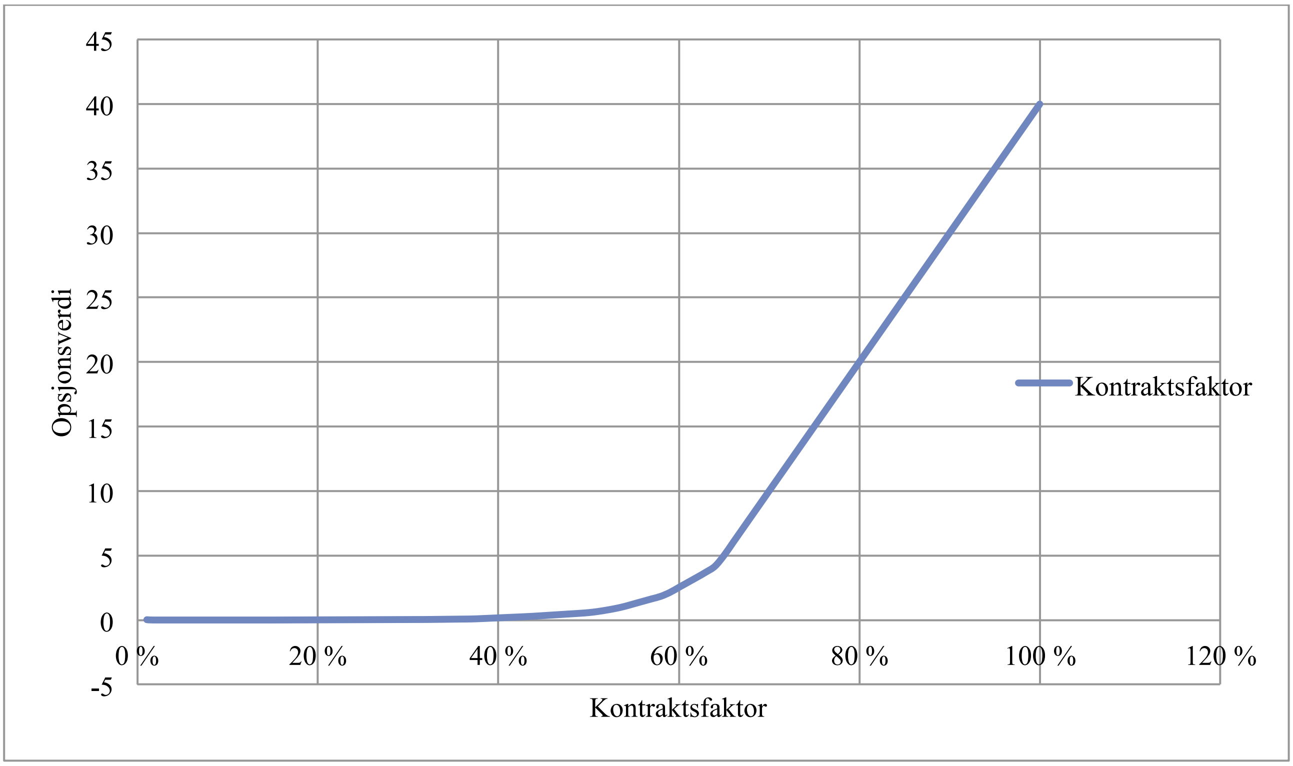
TABELL 18 OPSJONSVERDI SOM FUNKSJON AV KONTRAKTPROSENT OG REDUSERTE KOSTNADER

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5 %	0,00	0,13	1,57	5,67	12,37	22,00	32,00	42,00	52,00	62,00
10 %	0,00	0,19	1,95	6,52	14,00	24,00	34,00	44,00	54,00	64,00
15 %	0,00	0,33	2,52	7,57	16,00	26,00	36,00	46,00	56,00	66,00
20 %	0,00	0,48	3,14	8,80	18,00	28,00	38,00	48,00	58,00	68,00
25 %	0,00	0,62	3,77	10,19	20,00	30,00	40,00	50,00	60,00	70,00
30 %	0,00	0,77	4,45	12,00	22,00	32,00	42,00	52,00	62,00	72,00
35 %	0,01	0,95	5,39	14,00	24,00	34,00	44,00	54,00	64,00	74,00
40 %	0,02	1,30	6,60	16,00	26,00	36,00	46,00	56,00	66,00	76,00
45 %	0,04	1,89	8,01	18,00	28,00	38,00	48,00	58,00	68,00	78,00
50 %	0,05	2,51	10,00	20,00	30,00	40,00	50,00	60,00	70,00	80,00
55 %	0,10	3,26	12,00	22,00	32,00	42,00	52,00	62,00	72,00	82,00
60 %	0,24	4,40	14,00	24,00	34,00	44,00	54,00	64,00	74,00	84,00
65 %	0,38	6,00	16,00	26,00	36,00	46,00	56,00	66,00	76,00	86,00
70 %	0,65	8,00	18,00	28,00	38,00	48,00	58,00	68,00	78,00	88,00
75 %	1,26	10,00	20,00	30,00	40,00	50,00	60,00	70,00	80,00	90,00
80 %	2,20	12,00	22,00	32,00	42,00	52,00	62,00	72,00	82,00	92,00
85 %	4,00	14,00	24,00	34,00	44,00	54,00	64,00	74,00	84,00	94,00
90 %	6,00	16,00	26,00	36,00	46,00	56,00	66,00	76,00	86,00	96,00

FIGUR 23 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV REDUSERTE KOSTNADER



FIGUR 24 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV KONTRAKTSFAKTOR



6.4 Samlet opsjoner

Hvis man ønsker å verdsette verdien av alle opsjonene samlet kan vi ikke summere disse sammen siden enkelte opsjoner er gjensidig utelukkende. Vi må bruke resultatene vi har fra utregningene og maksimere verdien av:

$$\text{Maks}[\text{Ekspansjonsopsjon}; \text{Nedleggelsesopsjon}, \text{Kontraktopsjon}; \ \text{Vente}\ ]$$

TABELL 19 VERDIEN AV ALLE OPSJONENE SAMLET.

År 0	År 1	År 2	År 3	År 4	År 5	p
					154,0 mill	3 %
				123,0 mill		
			97,8 mill		96,6 mill	16
		77,2 mill		76,1 mill		
	61,2 mill		59,4 mill		58,2 mill	31
49,2 mill		47,3 mill		44,8 mill		
	39,1 mill		36,9 mill		32,7 mill	31
		32,6 mill		30,5 mill		
			30,0 mill		30,0 mill	16
				30,0 mill		
					30,0 mill	3 %

Vi starter verdsettelsen i sluttnoden $S_0 u^5$ vil ha valget mellom å:

$$\begin{aligned}
&\text{Maks[Ekspansjonsopsjon; nedleggelsesopsjon, kontraheringsopsjon; ikke utøve opsjon]} \\
&\quad = Maks[154\ mill; 108.7\ mill; 108.7\ mill; 108.7\ mill] = 80\ mill \\
&\quad = EKSPANDERER
\end{aligned}$$

I node $S_0 d^5$ vil ha valget mellom å:

$$\begin{aligned}
&\text{Maks[Ekspansjonsopsjon; nedleggelsesopsjon, kontraheringsopsjon; ikke utøve opsjon]} \\
&\quad = Maks[14.7 mill; 30\ mill; 22.35\ mill; 14.7] = 30\ mill = Selger\ kjøpesenteret
\end{aligned}$$

Vi ser at i denne noden har vi to utelukkende opsjonsmuligheter. Både nedleggelsesopsjonen og kontraktopsjonen har større PV(kontantstrøm) enn det man får ved å ikke utøve noen opsjon. Siden opsjonen til å utvide kjøpesenteret er større enn kontraktopsjonen vil man i dette utfallet velge å selge.

På samme måte finner vi verdien til alle sluttnodene før vi verdsetter de bakenforliggende nodene (år 0 til år 4). La oss ta $S_0 d^4$ som et eksempel. I denne noden vil verdien av å holde opsjonen åpen være den diskonterte vektede risikonøytrale sannsynligheten av opsjonsverdiene i node S_{d^5} og node $S_{d^4 u}$.

$$\begin{aligned}
&[p(S_0 u^5) + (1 - p)(S_0 d u^4)] * e^{(-r_f \sqrt{t})} \\
&= [0.53(30\text{mill NOK}) \\
&+ (1 - 0.53)(30\ mill\ NOK)] * e^{(-0.03)(1)} \\
&= 29.113\ mill\ NOK
\end{aligned}$$

Siden vi har en amerikansk opsjon kan vi også utløse en av de tre opsjonene. Vi må derfor maksimere avkastningen av :

$$\begin{aligned}
&\text{Maks[Ekspansjonsopsjon; nedleggelsesopsjon, kontraheringsopsjon; Vente]} \\
&\quad = Maks[14.715\ mill; 30\ mill; 23.98\ mill; 29.113\ mill] = 30\ mill \\
&\quad = Selge\ kjøpesenteret
\end{aligned}$$

I år null ($t = 0$) vil verdien av opsjonen være. Verdien av opsjonen i år null er:

$$
\begin{aligned}
& [p(S_o u) + (1 - p)(S_o d)] * e^{(-r_f \sqrt{t})} \\
&= [0.53(61.2 \ mill\ NOK) \\
&+ (1 - 0.53)(39.1 mill\ NOK)] * e^{(-0.03)(1)} \\
&= 49.2\ mill\ NOK
\end{aligned}
$$

Kontantstrømmen til prosjektet uten fleksibilitet er 40 mill NOK og den sammensatte opsjonen har en verdi lik 49.2. Verdien av opsjonen til å inngå kontrakten er derfor lik:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_0 &= \mathrm{PV(CF)}_{med\ opsjon} - PV(CF)_{uten\ opsjon} = 49.2 - 40 \\
&= 9.2\ mill\ NOK
\end{aligned}
$$

En verdi lik (118-100) 18 mill NOK. Hvis vi hadde slått sammen de tre individuelle opsjonene til en totalverdi ville dette gitt oss 0,6 mill NOK i for høy verdi. Årsaken til differansen er at i den sammensatte opsjonen vil opsjonen til å nedskalere driften miste sin verdi siden nedleggelsesopsjonen er foretrukket i de aktuell nodene.

TABELL 20 STRATEGI

År 0	År 1	År 2	År 3	År 4	År 5	p
					Ekspander	3 %
				Fortsett		
			Fortsett		Ekspander	16 %
		Fortsett		Fortsett		
	Fortsett		Fortsett		Ekspander	31 %
Fortsett		Fortsett		Fortsett		
	Fortsett		Fortsett		Ikke utøv opsjon	31 %
		Fortsett		Fortsett		
			Selg		Selg	16 %
				Selg		
					Selg	3 %

Fra tabell 9 ser vi at den sammensatte opsjonene er verdt 93 % av summen av de individuelle opsjonene.

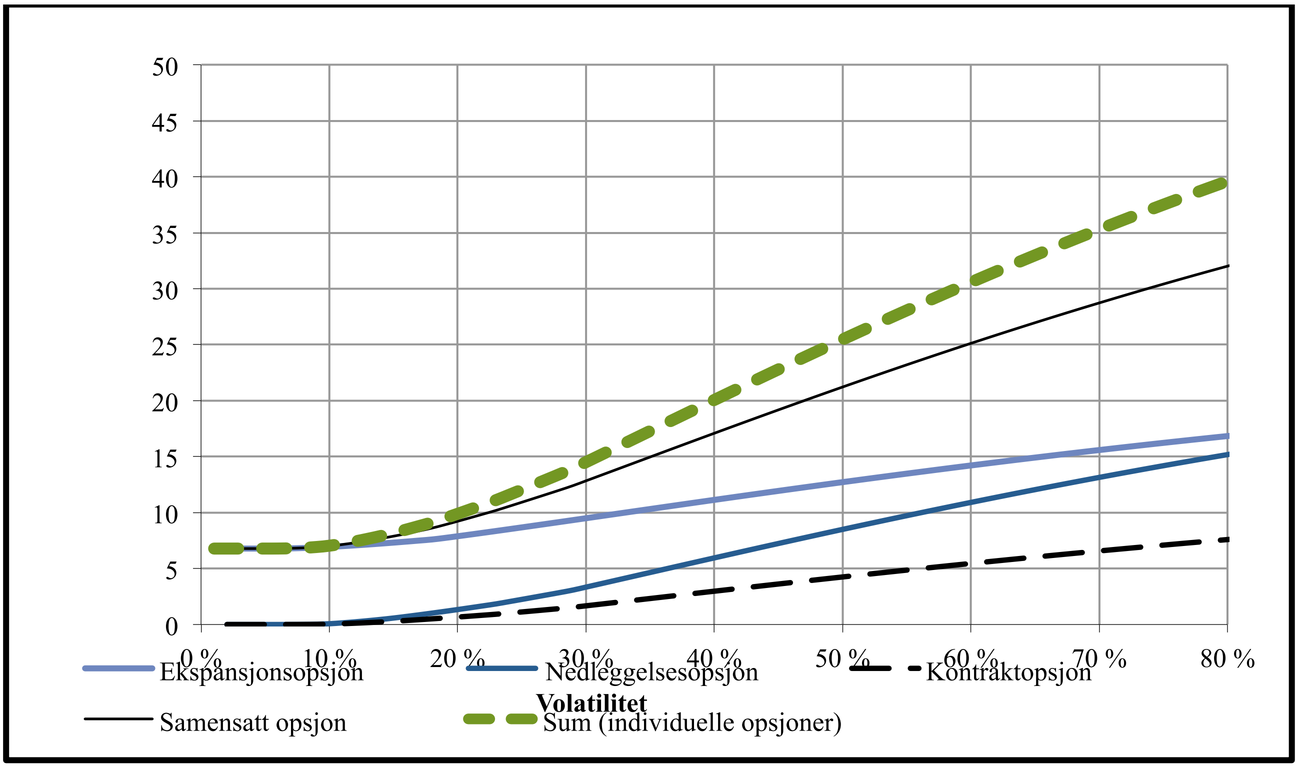
TABELL 21 SAMMENLIGNING MELLOM SAMMENSATT OG INDIVIDUELL OPSJON

Individuelt		Sammensatt
Ekspansjonsopsjon	7,9 mill	
Nedleggelsesopsjon	1,3 mill	
Kontraktsopsjon	0,7 mill	
Totalt	9,9 mill	9,2 mill NOK
Differanse	93 %	

Strategien som vil bli foretrukket i ulike utfall ser vi i tabell 20.

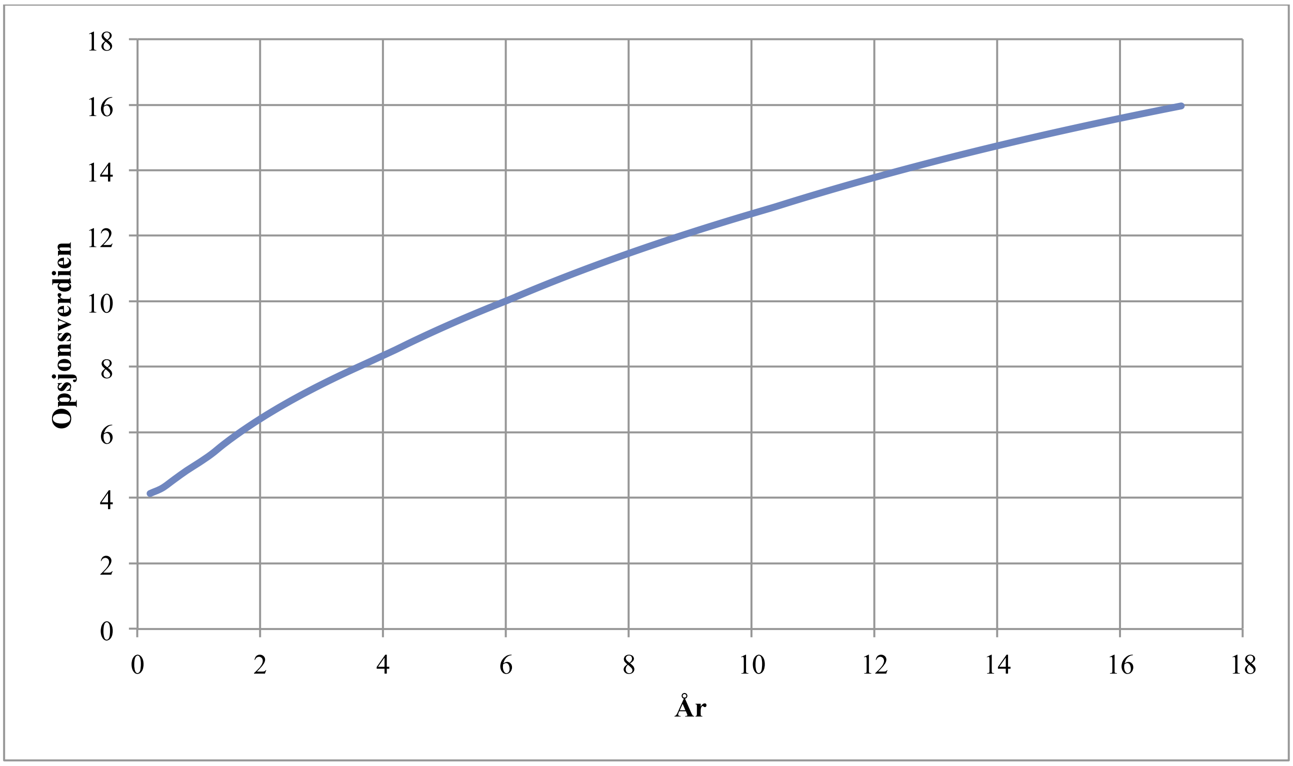
Det er ulike simuleringer vi kan gjøre for å se hvordan de ulike endogene variablene påvirker verdien til opsjonene. I figur 25 ser vi hvordan volatiliteten påvirker opsjonsverdiene.

FIGUR 25 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV VOLATILITET



I figur 26 ser vi sammenhengen mellom verdien av den sammensatte opsjonen og lengden på opsjonen.

FIGUR 26 OPSJONSVERDIEN SOM EN FUNKSJON AV OPSJONENS VARIGHET



7 CASE 3: KJØPSOPSJON TOMT

En byggherre ønsker å bygge ut et 100 mål stor område som i kommuneplanenes arealdel er satt av til bebyggelse og anlegg med underformål boligbebyggelse.

Byggherren mener at usikkerheten i prosjektet dreier seg om utnyttelsesgrad, boligtyper, byggehøyde og rekkefølgebestemmelser. Denne usikkerheten vil bli avklart gjennom å gjennomføre en reguleringsplan som vil ta to år.

Byggherren mener at nåverdien til tomten er 30 mill NOK. Grunneieren ønsker 30 mill NOK for å selge tomten, noe som gir prosjektet en NPV=0. Byggherren ønsker derfor å inngå en opsjonsavtale med grunneieren. Avtalen går ut på at byggherren kjøper en kjøpsopsjon på tomten med varighet to år. Den avtalte utøvelsesprisen settes til 30 mill NOK, og byggherren vil utøve opsjonen hvis verdien av tomten ved slutten av opsjonen er større eller lik 30 mill NOK .

Byggherren bruker ”Management Assumption Approach” for å finne volatiliteten til prosjektet. Vi bruker den estimerte verdien fra nåverdianalysen som base case (50 % sannsynlighet). Byggherren mener at tomteverdien med 92% prosent sannsynlighet vil ligge under det mest optimistiske anslaget på 67 mill NOK . Siden tomteverdien ikke kan gå under null forutsetter vi en lognormal sannsynlighetsfordeling og volatiliteten blir:

$$\sigma = \frac{\ln\left[\frac{S_{\text{optimistisk}}}{S_{\text{base case}}}\right]}{1{,}28\sqrt{t}} = \frac{\ln\left[\frac{67}{30}\right]}{1.28\sqrt{2}} = 40\%$$

TABELL 22: VARIABLER

PV(tomteverdi)	30,0 mill NOK	Tid per steg	1
Pris tomt	30,0 mill NOK	Opp-faktor	1,49
Risikofri rente	3,5 %	Ned-faktor	0,67
Volatilitet	40 %	Risikonøytral Sannsynlighet opp	0,44
Steg	2	Risikonøytral Sannsynlighet ned	0,56
Lengde (år)	2	Diskontering per steg	0,966

$$\text{oppgangsfaktor u} = \ e^{\sigma\sqrt{t}} = e^{0.4\sqrt{2}} = 1.49$$

$$\text{nedgangsfaktor d} = \frac{1}{u} = \frac{1}{1.49} = 0.67$$

$$\text{Risikonøytral sannsynlighet opp, p} = \frac{e^{(r*\Delta t)} - d}{u - d}$$

$$= \frac{e^{(.035*1)} - 0.67}{0.67 - 1.49} = 0.44 \text{ og nedgang } = 1 - 0{,}49$$

$$= 0{,}56$$

TABELL 23 BINOMISK TRE, TOMTEVERDI

År 0		År 1		År 2	
				S_0u^2	67 mill NOK
				25 %	37 mill NOK
		S_0u	45 mill NOK		
		50 %	16 mill NOK		
S_0	30			S_0du	30 mill NOK
	6.778 mill NOK			p = 50 %	0 mill NOK
		S_0d	20 mill NOK		
		p = 50 %	0 mill NOK		
				S_0d^2	13 mill NOK
				p = 25 %	0 mill NOK

Scenario(Node)	PV(kontantstrøm)$_t$
Sannsynlighet	Opsjonsverdi

Beslutningsregelen for å kjøpe tomten er:

$$Verdien\ av\ tomten > Avtalt\ Pris\ (utøvelsespris)$$

Hvert tidsintervall er på et år, og det er dermed to mulige utfall det første året. En oppgang eller nedgang vil dermed gi følgende forventet bruttoverdi:

$$S_0u = 30 * 1.49 = 45\ mill$$

$$S_0d = 30 * 0.67 = 20\ mill$$

Vi fortsetter og kalkulerer tomteverdien til alle utfallene (nodene). I år to vil verdien av tomten være avklart og kan enten være:

$$Optimistisk\text{: } S_0u^2 \ = 30 * 1.49^2 = 67 \text{ mill NOK}$$

$$Forventet\text{: } S_0\text{ud } = 30 * 1{,}49 * 0{,}67 = 30 \text{ mill NOK}$$

$$Pessimistisk\text{: } S_0d^2 = 30 * 0.67^2 = 13 \text{ mill}$$

I en tradisjonell nåverdimodell ville vi fått en av følgende NPV:

$$Optimistisk\text{: } NPV = [\ S_0u^2 - X] = 67 - 30 = 37 \text{ mill}$$

$$Forventet\text{: } NPV = [\ S_0\text{ud} - X] = 30 - 30 = 0 \text{ mill}$$

$$Pessimistisk\text{: } NPV = \left[\ S_0d^2 - X\right] = 13 - 30 = -17 \text{ mill}$$

Siden byggherren har en opsjon på tomten vil han kun utøve opsjonen hvis salgsverdien er større enn den avtalte prisen. Opsjonsverdien i de tre utfallene er dermed:

$$\begin{aligned} &\text{Opsjonsverdi i optimistisk utfall: C} = \text{Maks}[\text{S} - \text{X}, 0] \\ &\quad = \text{Maks}[\text{Salgsverdi} - \text{Avtalt pris}, 0] = [67 - 30, 0] \\ &\quad = 37 \text{ mill} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Opsjonsverdi i forventet utfall: C} = \text{Maks}[\text{S} - \text{X}, 0] \\ &\quad = \text{Maks}[\text{Salgsverdi} - \text{Avtalt pris}, 0] = [30 - 30, 0] \\ &\quad = 0 \text{ mill} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Opsjonsverdi i pessemistisk utfall: C} = \text{Maks}[\text{S} - \text{X}, 0] \\ &\quad = \text{Maks}[\text{Salgsverdi} - \text{Avtalt pris}, 0] = [13 - 30, 0] \\ &\quad = 0 \text{ mill} \end{aligned}$$

Etter vi har funnet opsjonsverdiene i det siste året (år 2) går vi et år tilbake for å finne opsjonsverdiene i år 1.Siden opsjonen bare kan utøves på utløpsdatoen finner vi verdien av opsjonen som det vektede risikonøytral sannsynligheten av opsjonsverdien til node (S_0u^2) og $(S_0\text{u}d)$, diskontert med den kontinuerlige risikofrie renten.

$$\begin{aligned} &Opsjonsverdi\ i\ node\ S_u\text{: C} = \left[\left(\text{p}(\text{S}_0\text{u}^2) + \text{q}(\text{S}_0\text{ud})\right) * \text{e}^{(-\text{r}_\text{f}*\Delta\text{t})}\right] \\ &\quad == [0.44 * 37 + 0.56 * 0] * 0.97 = 16 \text{ mill NOK} \end{aligned}$$

$$\text{Opsjonsverdi i node } S_d\text{: } C = \left[\left(p(S_0ud) + q(S_0d^2)\right) * e^{(-r_f*\Delta t)}\right]$$
$$= [0.44 * 0 + 0.56 * 0] * 0.97 = 0 \text{ mill NOK}$$

I år ($t = 0$) vil verdien av opsjonen være:

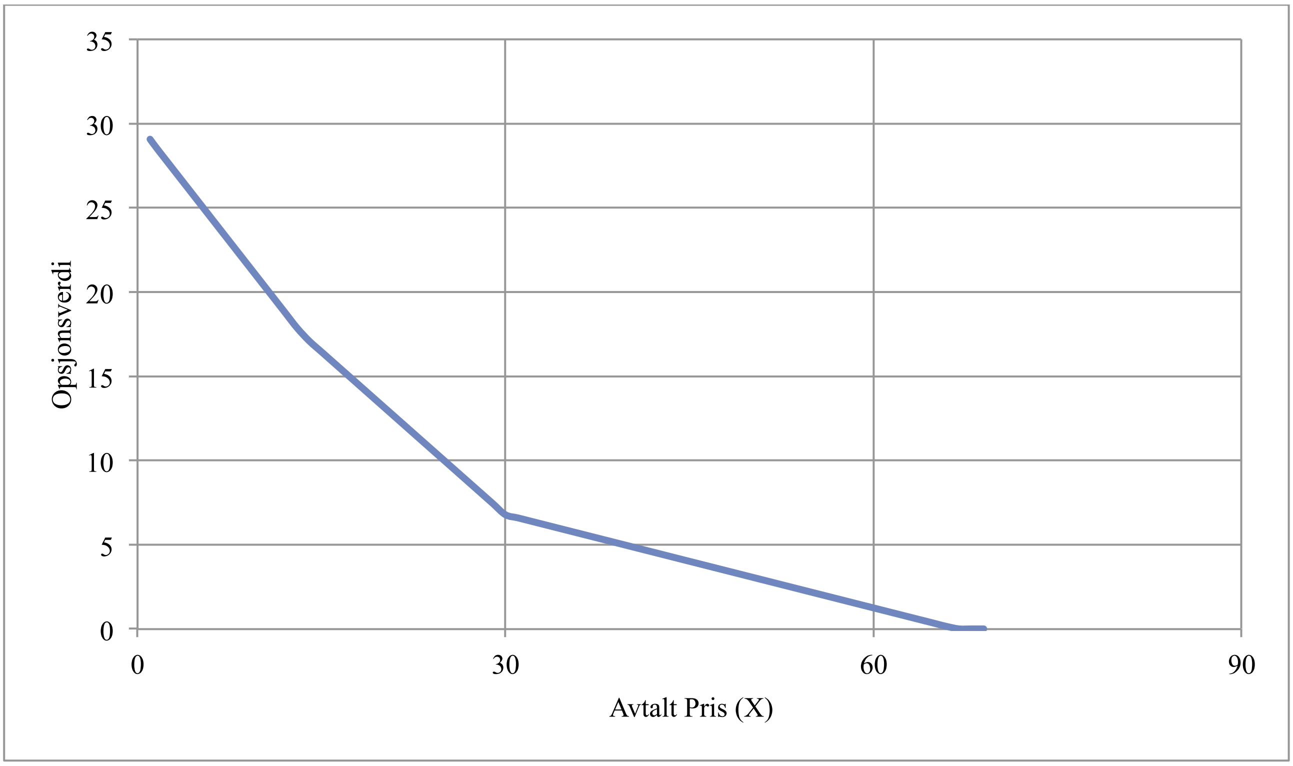
$$\text{Opsjonsverdi i node } S_0\text{: } C = \left[\left(p(S_0u) + q(S_0d)\right) * e^{(-r_f*\Delta t)}\right]$$
$$= [0.44 * 16 + 0.56 * 0] * 0.97 = 6{,}778 \text{ mill NOK}$$

Verdien av kjøpsopsjonen er 6,778 mill NOK. Forventet NPV for prosjektet vil være:

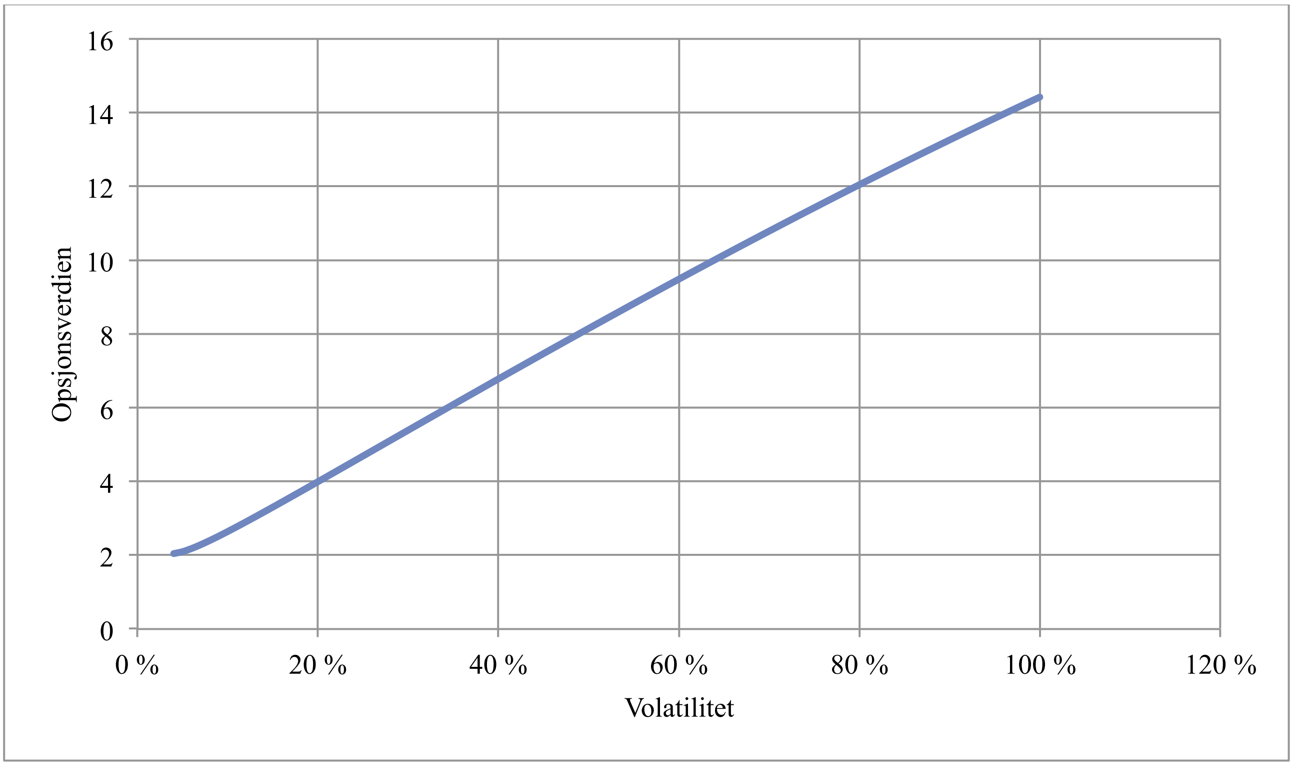
$$NPV = \textit{Verdien av kjøpsopsjonen}$$
$$- \textit{Kostnad ved å kjøpe opsjonen av grunneier}$$
$$- \textit{Kostnader ved å utarbeide reguleringsplan}$$

Byggherren kan derfor tilby grunneieren opp til 6,7 mill NOK for en opsjon på tomten.

FIGUR 27 OPSJONSVERDI SOM FUNKSJON AV UTØVELSESPRIS



FIGUR 28 OPSJONSVERDIEN SOM EN FUNKSJON AV VOLATILITET



7.1 To usikkerhetsfaktorer

Utbygger vet at det også er noe usikkerhet angående fremtidige boligpriser. Jeg forutsetter at den årlige volatiliteten til boligprisene er 5 % og at det ikke foreligger korrelasjonen **mellom** utnyttelsesgrad og boligprisene. Når man har flere kilder til usikkerhet må vi utvide treet og får fire utfallsnoder i stedet for to. Det første vi må gjøre er å finne risikonøytral sannsynlighet for den andre kilden til usikkerhet.

TABELL 24: VARIABEL 2: BOLIGPRISER	
Opp-faktor (u2)	1,05
Ned-faktor (d2)	0,95
Risikonøytral Sannsynlighet opp (p_2)	0,84
Risikonøytral Sannsynlighet ned	0,16

Jeg har nedenfor beregnet utfallstreet til kontantstrømmen:

$$S_0 \mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 = 30 * 1.49 * 1.05 = 47\ mill$$
$$S_0 \mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 \mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 = 47 * 1.49 * 1.05 = 74\ mill$$
$$S_0 \mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 \mathrm{u}_1 \mathrm{d}_2 = 47 * 1.49 * 0.95 = 37\ mill$$
$$S_0 \mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 \mathrm{d}_1 \mathrm{u}_2 = 47 * 0.67 * 1.05 = 33\ mill$$
$$S_0 \mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 \mathrm{d}_1 \mathrm{d}_2 = 47 * 0.67 * 0.95 = 30\ mill$$

Verdien i sluttnodene er

$$\mathrm{Maks[Salgsverdi - Avtalt\ pris, 0]}$$

$$\begin{aligned}
&[p1p2(S_O u1u2u1u2) + p1(1 - p2)(S_O u1u2u1d2) \\
&\quad + (1 - p1)p2(S_O u1u2d1u2) \\
&\quad + (1 - p1)(1 - p2)(S_O u1u2d1d2)] * e^{(-r_f \delta t)} \\
&= [0.44 * 0.84 * (74\ mill) + 0.44 * 0.16 * (37\ mill) \\
&\quad + (1 - 0.510) * 0.577 * (33\ mill) + (0.56) \\
&\quad * (0.16) * (30\ mill)] * e^{(-0.035*1)} = 20\ mill\ NOK
\end{aligned}$$

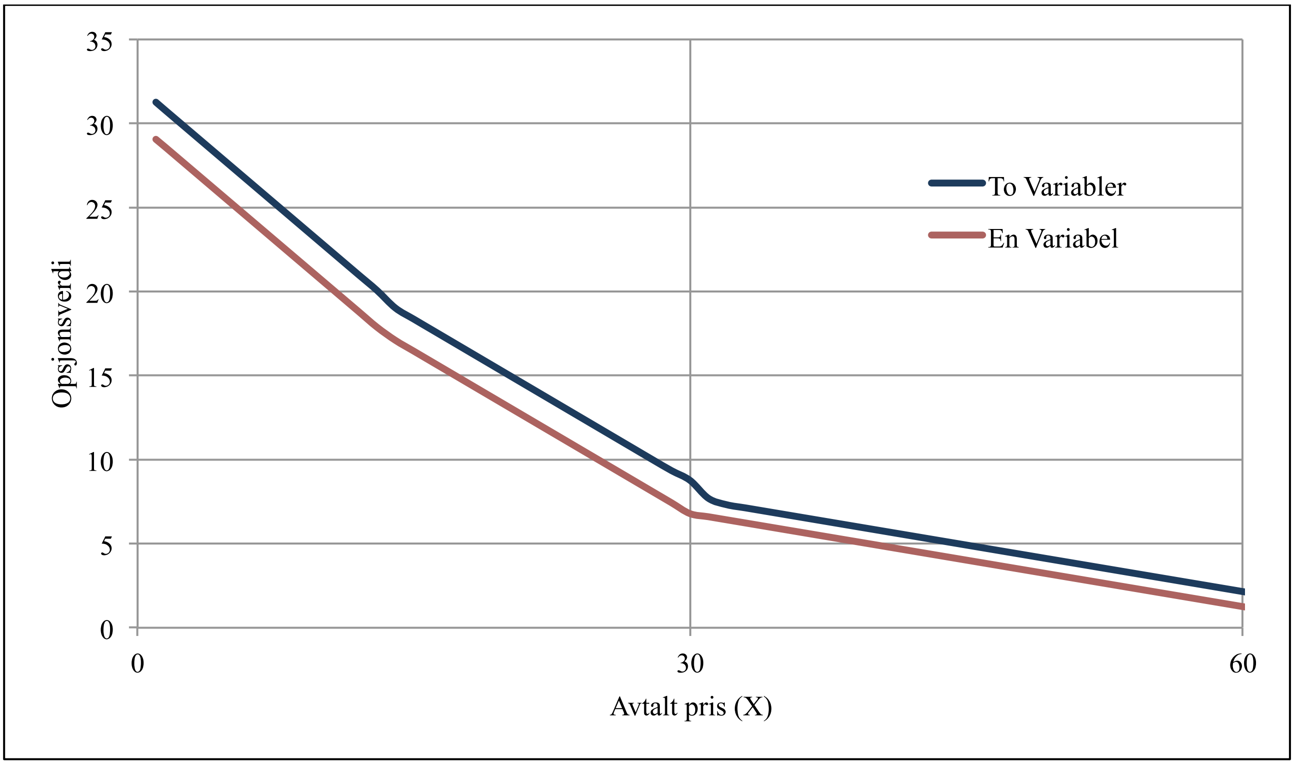
Etter vi har funnet opsjonsverdiene i det siste året (år 2) går vi et år tilbake for å finne opsjonsverdiene i år 1.Siden opsjonen bare kan utøves på utløpsdatoen finner vi verdien av opsjonen som den vektede risikonøytral sannsynligheten av opsjonsverdiene i sluttnotatene. Analysen viser at den nye opsjonsverdien blir 8.710 mill NOK. Dette er en oppgang fra 6.778 mill NOK hvis vi bruker en variabel.

TABELL 25 BINOMISK TRE MED TO USIKRE VARIABLER

				74 mill	44 mill
				67 mill	37 mill NOK
		47 mill	20 mill	33 mill	3 mill NOK
				30 mill	0 mill NOK
				67 mill	37 mill
				60 mill	30 mill
		43 mill	15 mill	30 mill	0 mill NOK
				27 mill	0 mill NOK
30 mill NOK	8,710 mill				
				33 mill	3 mill NOK
		21 mill	1 mill NOK	30 mill	0 mill NOK
				15 mill	0 mill NOK
				13 mill	0 mill NOK
				30 mill	0 mill NOK
		19 mill	0 mill NOK	27 mill	0 mill NOK
				13 mill	0 mill NOK
Underliggend	Opsjonsverdi			12 mill	0 mill NOK

En simulering viser at to variabler gir en høyere opsjonspris for alle utøvelsespriser .

FIGUR 29 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV UTØVELSESPRIS



Ved å implementere en ny variabel har opsjonsverdien økt fra 6,7 til 8,7 mill NOK. I figur 29 ser vi at den nye variabelen tilfører en ekstra verdi for alle utøvelsesprisene. I tabell 26 ser vi hvordan ulike kombinasjoner av de to variablene gir ulike opsjonspriser. Horisontal linje er årlig volatilitet i boligprisene mens loddrett linje er årlig volatilitet til og tomteprisene.

TABELL 26 OPSJONSVERDI SOM EN FUNKSJON AV VOLATILITET

	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %	11 %	12 %	13 %
5 %	4,5	4,3	4,2	4,2	4,2	4,3	4,4	4,4	4,5	4,6	4,8	4,9	5
10 %	5	4,7	4,6	4,6	4,6	4,7	4,7	4,8	4,8	4,9	5	5,1	5,3
15 %	5,7	5,3	5,2	5,2	5,2	5,3	5,3	5,4	5,5	5,5	5,6	5,6	5,7
20 %	6,3	6	5,9	5,9	5,9	6	6	6,1	6,1	6,2	6,2	6,3	6,4
25 %	7	6,7	6,6	6,6	6,6	6,6	6,7	6,8	6,8	6,9	6,9	7	7,1
30 %	7,7	7,4	7,3	7,3	7,3	7,3	7,4	7,5	7,5	7,6	7,6	7,7	7,8
35 %	8,4	8,1	8	8	8	8,1	8,1	8,2	8,2	8,3	8,3	8,4	8,5
40 %	9,1	8,8	8,7	8,7	8,7	8,8	8,8	8,9	8,9	9	9	9,1	9,2
45 %	9,8	9,5	9,4	9,4	9,4	9,5	9,5	9,6	9,6	9,7	9,7	9,8	9,9
50 %	10,5	10,1	10,1	10,1	10,1	10,1	10,2	10,2	10,3	10,4	10,4	10,5	10,6
55 %	11,2	10,8	10,8	10,8	10,8	10,8	10,9	10,9	11	11	11,1	11,2	11,2
60 %	11,9	11,5	11,4	11,4	11,5	11,5	11,6	11,6	11,7	11,7	11,8	11,8	11,9
65 %	12,5	12,2	12,1	12,1	12,1	12,2	12,2	12,3	12,3	12,4	12,4	12,5	12,6
70 %	13,2	12,8	12,8	12,8	12,8	12,8	12,9	12,9	13	13	13,1	13,2	13,2
75 %	13,8	13,5	13,4	13,4	13,4	13,5	13,5	13,6	13,6	13,7	13,7	13,8	13,9

8 CASE 5: TOMTEOPSJON

En eiendomsutvikler har lokalisert en tomt med stort potensial for fremtidig vekst. Det vil ta mange år før det endelige potensial til tomten er klarlagt. Utvikleren mener tomten har en verdi lik 10 mill NOK i dag og at det om åtte år er 98% prosent sannsynlighet at tomteverdien er mindre enn 38 mill NOK. Vi forutsetter log normal distribusjon og finner den årlige volatiliteten til tomteverdien som:

$$\sigma = \frac{\ln\left[\frac{38}{10}\right]}{2\sqrt{8}} = 20\%$$

Eiendomsutvikleren ønsker å sammenligne tre ulike gjennomføringsmodeller:

- Kjøpe tomten av kommunen for 10 mill NOK
- Forhandle fram en kjøpsopsjon på tomten med varighet på åtte år
- Kjøpe tomten i dag for 10 mill NOK . Forhandle frem en salgsopsjon på tomten med varighet på åtte år og utøvelsespris på 10 mill NOK

Det første vi gjøre er å utlede de endogene og eksogene variablene. Jeg vil videre gå gjennom de tre ulike gjennomføringsmodellene.

TABELL 27 VARIABLER

PV(verdi tomt)	10,0 mill NOK	Tid per steg	0,471
Avtalt Pris	10,0 mill NOK	Opp-faktor	1,147
Risikofri rente	4 %	Ned-faktor	0,872
Volatilitet	20 %	Risikonøytral Sannsynlighet opp	0,535
Steg	17	Risikonøytral Sannsynlighet ned	0,465
Lengde (år)	8	Diskontering per steg	0,9881

8.1 Alternativ 1: Kjøpe tomten av kommunen.

Hvis utvikleren kjøper tomten av kommunen vil det koste 10 mill NOK. Siden forventet nåverdi av tomten er lik kostnaden med å kjøpe tomten vil netto nåverdi være lik null

TABELL 28 BINOMISK TRE FOR UTVIKLING I NPV (MILL NOK)

Stegg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
NPV	0	1	3	5	7	10	13	16	20	24	29	35	42	50	58	68	80	93
		-1	0	1	3	5	7	10	13	16	20	24	29	35	42	50	58	68
			-2	-1	0	1	3	5	7	10	13	16	20	24	29	35	42	50
				-3	-2	-1	0	1	3	5	7	10	13	16	20	24	29	35
					-4	-3	-2	-1	0	1	3	5	7	10	13	16	20	24
						-5	-4	-3	-2	-1	0	1	3	5	7	10	13	16
							-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	3	5	7	10
									-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	3	5
									-7	-6	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
										-7	-7	-6	-6	-5	-4	-3	-2	-1
											-7	-7	-7	-6	-6	-5	-4	-3
												-8	-7	-7	-7	-6	-6	-5
													-8	-8	-7	-7	-7	-6
														-8	-8	-8	-7	-7
															-9	-8	-8	-8
																-9	-9	-8
																	-9	-9
																		-9

8.2 Alternativ 2: Kjøpe en opsjon på tomten

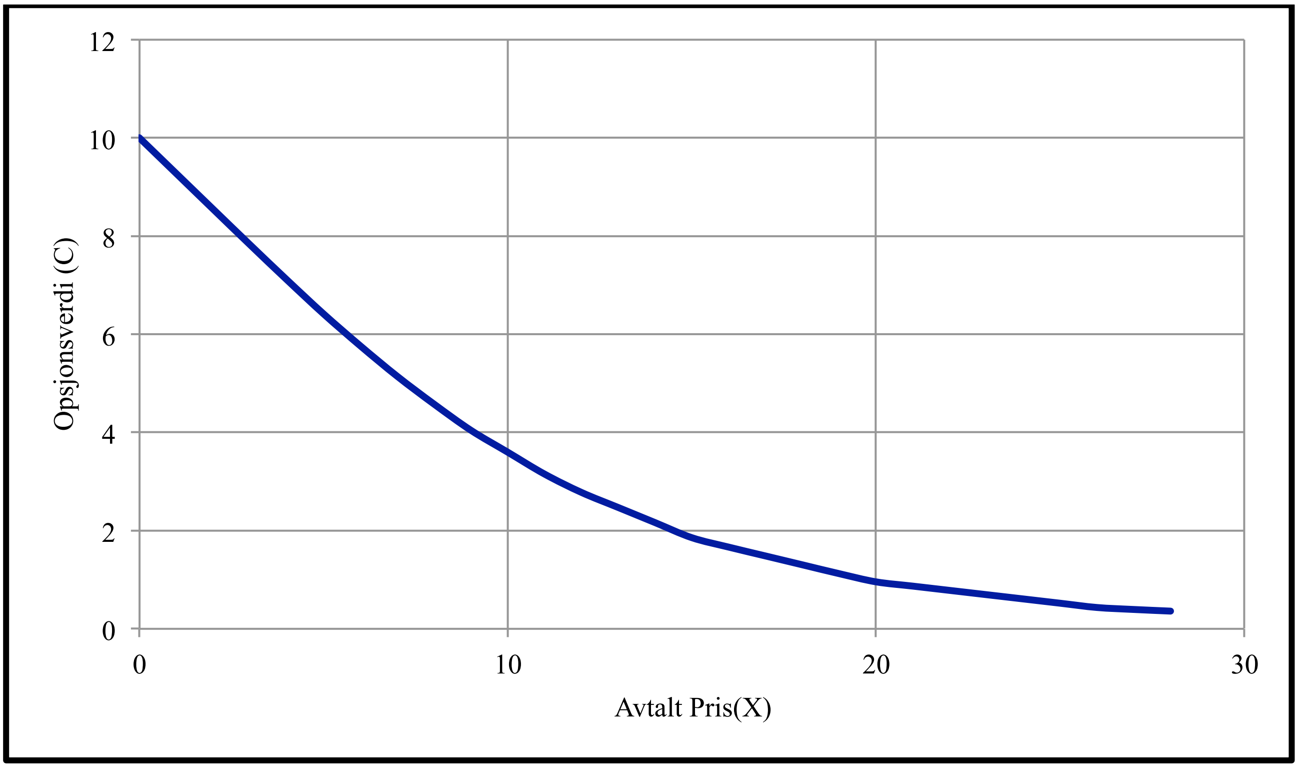
Den andre muligheten utvikleren vurderer er å tilby kommunen en europeisk kjøpsopsjon med varighet på åtte år. Utvikleren ønsker å tilby en utøvelsespris på 10 mill NOK og opsjonen vil derfor bare bli utøvd hvis tomteverdien er større enn den avtalte prisen på utøvelsestidspunktet. b. Vi lager et binomisk tre og finner den maksimale prisen man kan tilby grunneieren for opsjonen.

TABELL 29 BINOMISK TRE FOR KJØPSOPSJON (MILL NOK)

Steg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1
C	3,6	5	6	8	10	12	15	18	22	26	31	36	43	50	59	69	80	93
		2	3	4	6	7	9	12	14	18	21	25	30	36	42	50	58	68
			2	2	3	4	5	7	9	11	14	17	21	25	30	36	42	50
				1	1	2	3	4	5	7	9	11	14	17	21	25	30	35
					1	1	1	2	2	3	5	6	8	11	13	16	20	24
						0	0	1	1	1	2	3	4	6	8	10	13	16
							0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	10
								0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5
									0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
										0	0	0	0	0	0	0	0	0
											0	0	0	0	0	0	0	0
												0	0	0	0	0	0	0
													0	0	0	0	0	0
														0	0	0	0	0
															0	0	0	0
																0	0	0
																	0	0
																		0

Verdien av kjøpsopsjonen er 3,595 mill NOK. Den maksimale prisen eiendomsutvikleren kan tilby kommunen vil være 3,595 mill NOK. NPV til prosjektet vil være avhengig av hvilke pris kommunen aksepterer og kan bli mellom 0 og 3,595 mill NOK. Verdien av opsjonen vil være avhengig av den avtalte prisen. Sammenhengen mellom avtalt pris og opsjonsverdien er:

FIGUR 30 OPSJONSVERDI SOM FUNKSJON AV UTØVELSESPRIS



8.3 Alternativ 2: Kjøpe tomten og en salgsopsjon.

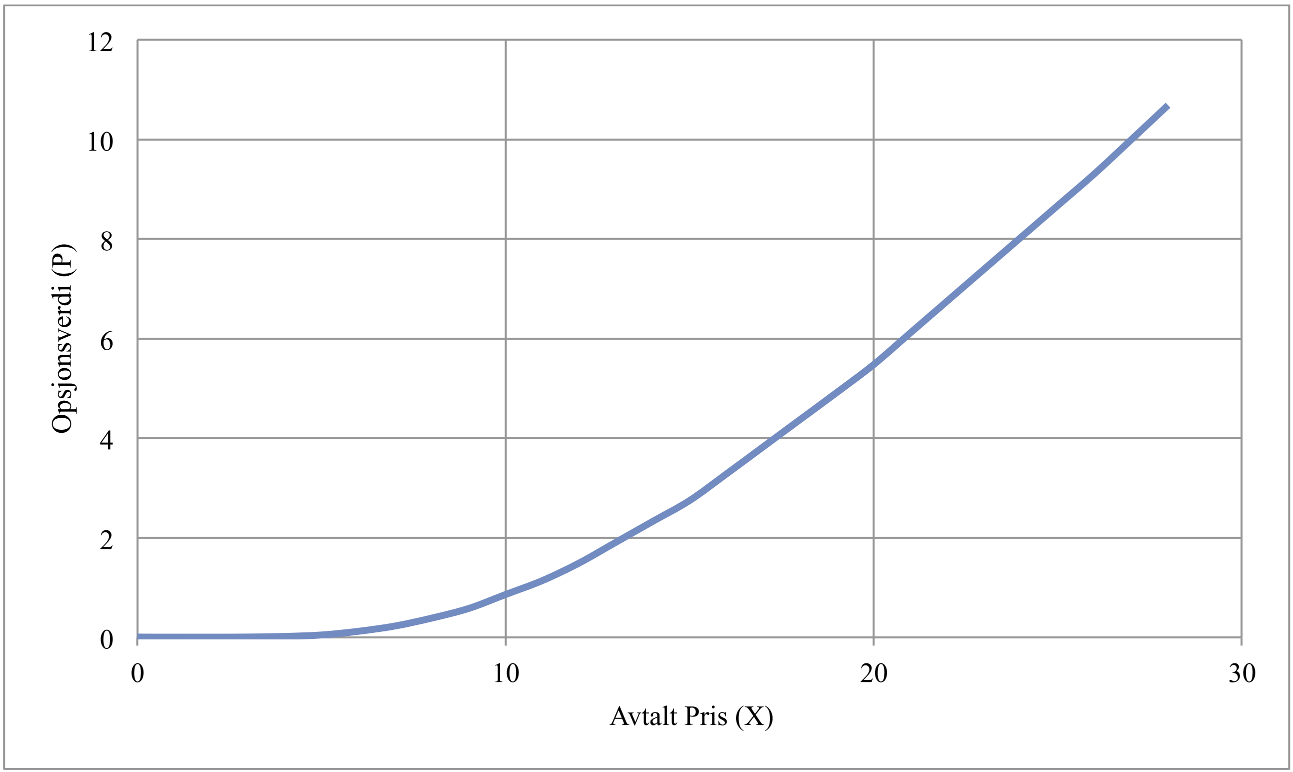
Det siste alternativet er å kjøpe tomten for 10 mill NOK i dag samtidig som man kjøper en salgsopsjon på tomten med utøvelsespris på 10 mill NOK. Vi lager et binomisk tre for salgsopsjonen, se tabell 30.

TABELL 30 BINOMISK TRE FOR SALGSOPSJONEN (MILL NOK)

St	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
P	4	5	6	8	10	12	15	18	22	26	31	36	43	50	59	69	80	93
		2	3	4	6	7	9	12	14	18	21	25	30	36	42	50	58	68
			2	2	3	4	5	7	9	11	14	17	21	25	30	36	42	50
				1	1	2	3	4	5	7	9	11	14	17	21	25	30	35
					1	1	1	2	2	3	5	6	8	11	13	16	20	24
						0	0	1	1	1	2	3	4	6	8	10	13	16
							0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	10
								0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5
									0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
										0	0	0	0	0	0	0	0	0
											0	0	0	0	0	0	0	0
												0	0	0	0	0	0	0
													0	0	0	0	0	0
														0	0	0	0	0
															0	0	0	0
																0	0	0
																	0	0
																		0

Verdien av salgsopsjonen er lik 0,9 mill NOK. Den maksimale prisen eiendomsutvikleren kan betale for opsjonen er 0,9 mill NOK. NPV til prosjektet vil være avhengig av prisen på salgsopsjonen og vil ligge mellom 0 og 0,9 mill NOK. Verdien av salgsopsjonen vil være avhengig av den avtalte prisen. Sammenhengen mellom avtalt pris og opsjonsverdien for salgsopsjonen finner vi i diagram. Avhengig av hvilke pris grunneier aksepterer kan netto nåverdi bli mellom 0 og 0.9 mill NOK. Prisen eiendomsmegleren kan være villig til å betale vil avhenge av utøvelsesprisen.

FIGUR 31 OPSJONSVERDI SOM FUNKSJON AV UTØVELSESPRIS.



8.4 Sammenligning av alternativer

Hvis vi sammenligner de tre metodene ser vi at å kjøpe tomten er det siste alternativet som bør vurderes.

TABELL 31 SAMMENDRAG OG RANGERING

Alternativer	NPV	Rangering
Kjøpe tomten i (år 0)	0 mill NOK	3
Kjøpe opsjon på tomten	0-3,9 mill NOK	1
Kjøpe tomt og en salgsopsjon.	0-0,9 mill NOK	2

9 CASE 6: TOTALENTREPRISE

I en totalentreprise er det vanlig å bruke en påslagsprosent på 15-20% (av de forventede byggekostnadene). Poenget med dette eksempelet er å se om det er mulig å finne en påslagsprosent som kompenserer entreprenøren for risikoen. Det er så langt jeg kan se ingen relevant litteratur på området. Jeg bruker et regneeksempel for å illustrere hvordan jeg finner påslagsprosenten ved å bruke opsjonsteori.

La oss anta at en kommune ønsker å bygge en skole. For å unngå budsjettoverskridelser ønsker de å benytte en totalentreprise. En entreprenør som skal komme med tilbud til kommunen må ta en beslutning om hvor stor påslagsprosent han skal legge i anbudet. Er den for lav vil han risikere å tape penger, og er den for høy kan han risikere å bli utkonkurrert av andre entreprenører.

Jeg mener at man kan se på totalentreprisen som en europeisk opsjonskontrakt hvor de reelle byggekostnadene tilsvarer det underliggende aktiva. Volatiliteten kan sees på som usikkerheten om de forventede byggekostnadene. Jeg forutsetter at byggekostnadene er lognormal fordelt med 50 % sannsynlighet for å bli 150 mill NOK.

Siden prisen er fast kan vi se på kommunen som eier av en kjøpsopsjon. Videre eier entreprenøren en salgsopsjon på byggeprosjektet. Hvis vi setter utøvelsesprisen lik forventede byggekostnader, vil entreprenøren ha et overskudd lik verdien av salgsopsjonen hvis byggekostnadene blir lavere en 150 mill NOK. Hvis byggekostnadene blir over 150 mill NOK vil kommunen ha en gevinst lik verdien av kjøpsopsjonen.

Vi kan derfor finne påslagsprosenten ved å lage en binomisk modell med åtte steg hvor årlig volatiliteten er lik 10 % og risikofri rente er 3 %. Jeg har satt lengden på opsjonen lik 3 år. Hvis vi har en kortere varighet kompenserer vi dette med en høyere volatilitet.

TABELL 32 VARIABLER

E(byggekostnad)	150	Tid per steg	0,333
Utøvelsespris	150	Oppgangsfaktor (u)	1,059
Risikofri rente	4 %	Nedgangsfaktor (d)	0,944
Volatilitet	10 %	Risikonøytral Sannsynlighet opp	0,602
Steg	9	Risikonøytral Sannsynlighet ned	0,398
Lengde (år)	3	Diskontering per steg	0,987

Vi finner påslagsprosenten som differansen mellom kjøpsopsjonen og salgsopsjon. delt på de forventede byggekostnadene.

$$Min(På slagsprosent) = \frac{(Kjøpsopsjon - Salgsopsjon)}{Forventede\ byggekostnader}$$

TABELL 33 UTVIKLING BYGGEKOSTNADER (MIL NOK)

Tid (år)	0	0,3	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0
Byggekostnad	150,0	158,9	168,3	178,3	188,9	200,2	212,1	224,7	238,0	252,2
		141,5	150,0	158,9	168,3	178,3	188,9	200,2	212,1	224,7
			133,6	141,5	150,0	158,9	168,3	178,3	188,9	200,2
				126,1	133,6	141,5	150,0	158,9	168,3	178,3
					119,0	126,1	133,6	141,5	150,0	158,9
						112,3	119,0	126,1	133,6	141,5
							106,0	112,3	119,0	126,1
								100,1	106,0	112,3
									94,51	100,1
										89,21

I tabell har vi en binomisk Fra den binomiske modellen lager vi en tabell over individuell sannsynlighet og kumulativ sannsynlighet for byggekostnadene (tabell 34).

TABELL 34 KUMULATIV SANNSYNLIGHET FOR BYGGEKOSTNADER

Utfall	Byggekostnader	Sannsynlighet	Persentil
1	252 mill NOK	0,20 %	100,00 %
2	225 mill NOK	1,76 %	88,80 %
3	200 mill NOK	7,03 %	77,70 %
4	178 mill NOK	16,41 %	66,60 %
5	159 mill NOK	24,61 %	55,50 %
6	142 mill NOK	24,61 %	44,40 %
7	126 mill NOK	16,41 %	33,30 %
8	112 mill NOK	7,03 %	22,20 %
9	100 mill NOK	1,76 %	11,10 %
10	89 mill NOK	0,20 %	0,00 %

Vi kan nå verdsette kjøps- og salgsopsjonen.

Vi starter med kjøpsopsjonen. I sluttnodene vil retten til å kunne kjøpe skolen for 150 mill NOK i år 3 finner være lik:

$$Maks(Reele\ byggekostnader - 150\ mill; 0)$$

I de resterende nodene bruker vi bakover induktiv prosess og verdien kommunen har ved en fast pris er 20.6 mill NOK.

TABELL 35 UTVIKLING KJØPSOPSJON (MILL NOK)

Tid (År)	0	0,3	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0
Kjøpsopsjon	20,60	26,17	32,73	40,27	48,72	57,99	67,98	78,65	90,05	102,21
		12,87	17,14	22,44	28,85	36,36	44,85	54,15	64,08	74,70
			6,86	9,70	13,52	18,49	24,75	32,31	40,95	50,20
				2,79	4,27	6,46	9,64	14,16	20,35	28,37
					0,66	1,11	1,87	3,14	5,29	8,92
						0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
							0,00	0,00	0,00	0,00
								0,00	0,00	0,00
									0,00	0,00
										0,00

Salgsopsjonen vil ha motsatt effekt. I sluttnodene vil retten til å kunne selge skolen for 150 mill NOK være lik:

$$Maks(150 - Reele\ byggekostnader; 0)$$

I de resterende nodene bruker vi bakover induktiv prosess og verdien entreprenøren har ved en fast pris er 3.64 mill NOK .

TABELL 36 UTVIKLING SALGSOPSJON (MILL NOK)

Tid (År)	0	0,3	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0
Salgsopsjon	3,64	2,08	1,00	0,37	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		6,11	3,77	2,00	0,82	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
			9,85	6,59	3,84	1,78	0,51	0,00	0,00	0,00
				15,12	10,96	7,08	3,76	1,30	0,00	0,00
					21,92	17,17	12,34	7,61	3,31	0,00
						29,82	25,05	19,91	14,37	8,41
							38,04	33,66	28,95	23,86
								45,92	41,93	37,61
									53,50	49,87
										60,79

Siden entreprenøren eier en salgsopsjonen og kommunen eier en kjøpsopsjon vil differansen mellom disse være minimumstillegget entreprenøren må legge inn i en totalentreprise. Vi bruker opsjonsverdiene fra tabell 35 og 36 og setter det inn i ligningen:

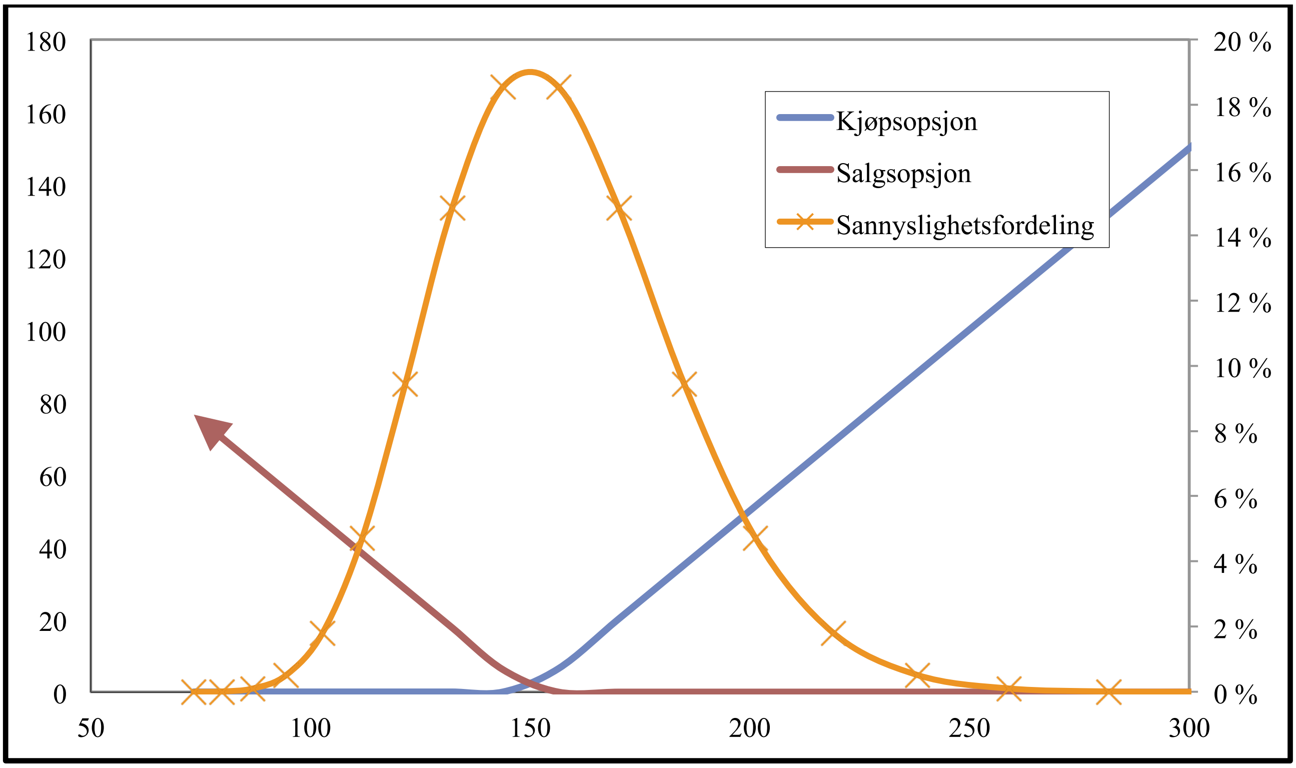
$$Min(Påslagsprosent) = \frac{Kjøpsopsjon - Salgsopsjon}{forventede\ byggekostnader}$$
$$= \frac{20.6 \text{ mill NOK} - 3.7 \text{ mill NOK}}{150\ mill\ NOK} = 11\ \%$$

I en anbudskonkurranse bør entreprenørens minimum anbudspris være lik:

$$Min(Pris\ Totlentrepris)$$
$$= Forventede\ byggekostnader$$
$$* Min(Påslagsprosent) = 150\ mill\ NOK * 0{,}11$$
$$= 166.5\ mill\ NOK$$

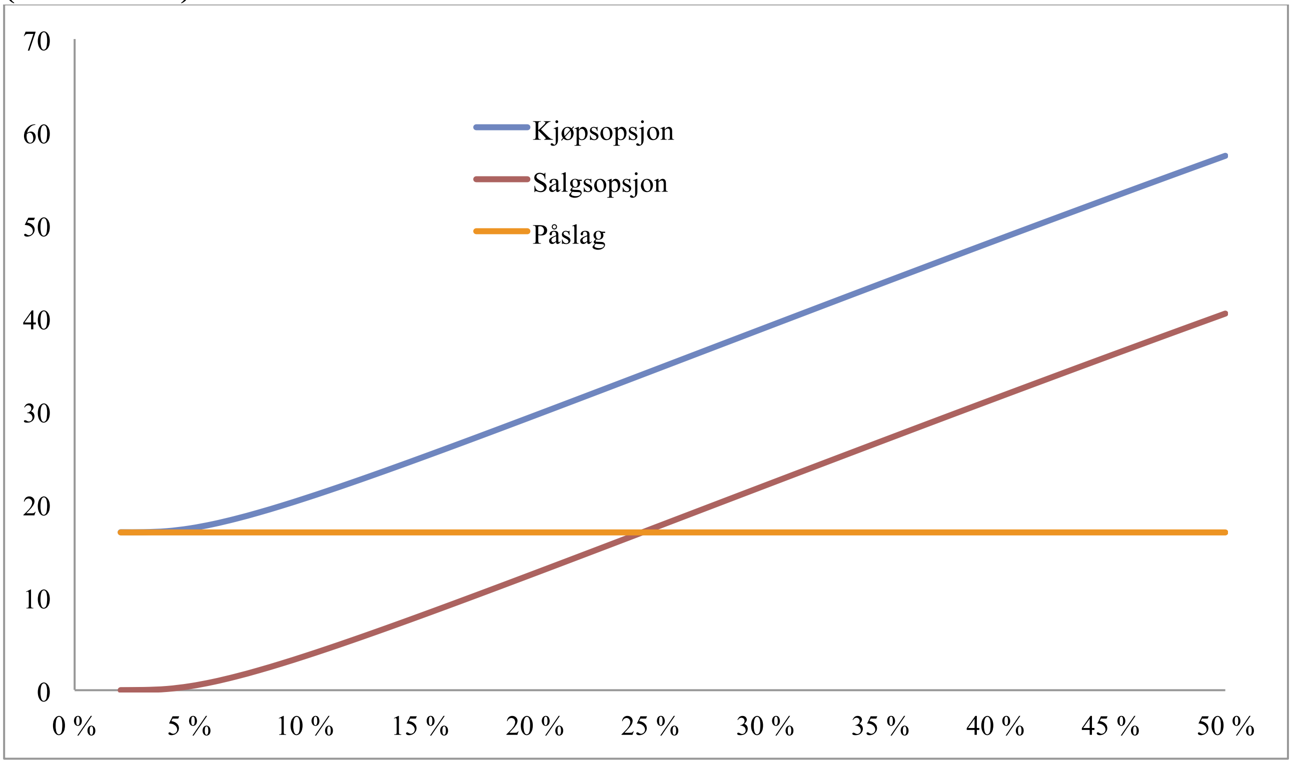
I figur 32 ser vi sannsynlighetsfordelingen for byggekostnadene. Salgsopsjonen viser gevinsten til entreprenøren i forhold til reelle byggekostnader og kjøpsopsjonen viser gevinsten til kommunen i forhold til de reelle byggekostnadene.

FIGUR 32 SANNSYNLIGHETSFORDELING OG KJØPS- OG SALGSOPSJON



I figur 33 ser vi at verdiene av begge opsjonene stiger med økningene i volatilitet. Siden begge opsjonene øker i verdi vil påslaget holder seg konstant uansett volatilitet. Det er viktig å påpeke at dette forutsetter at byggekostnadene har en lognormal sannsynlighetsfordeling.

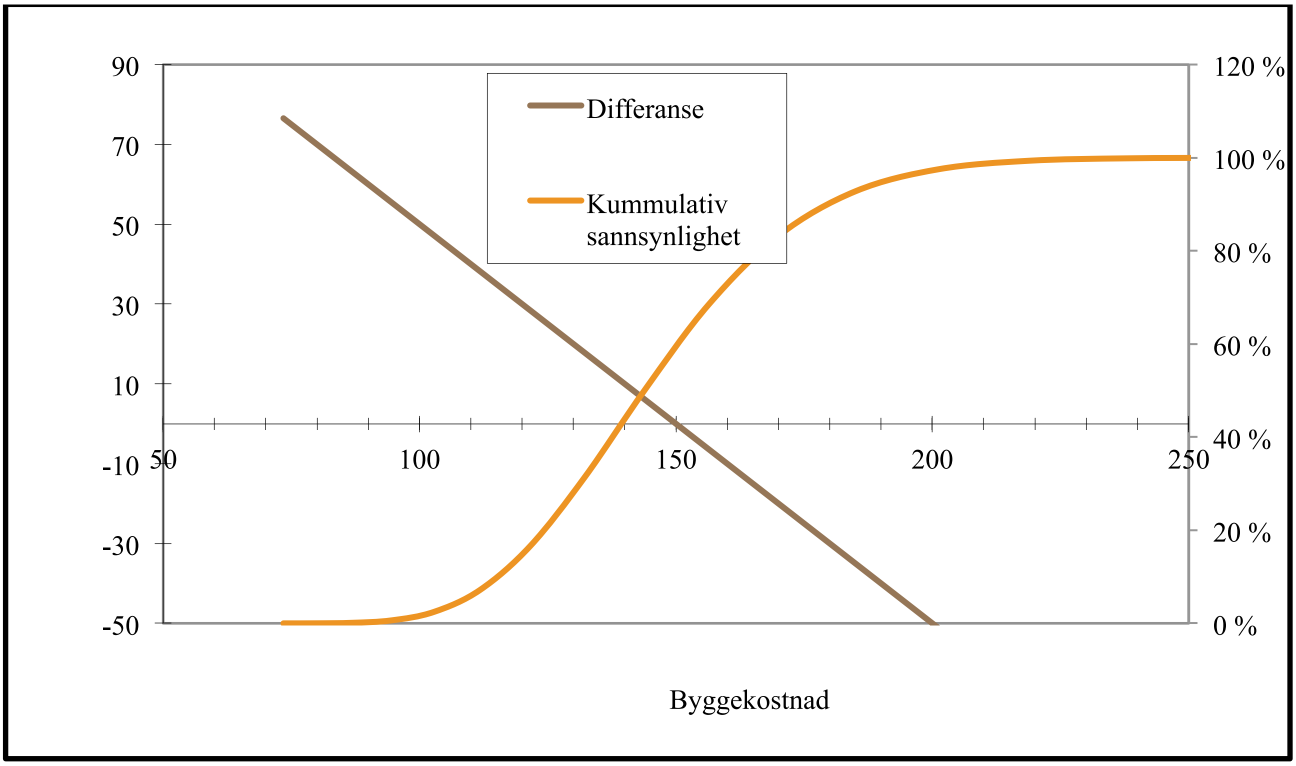
FIGUR 33 VERDIEN AV OPSJONENE SOM EN FUNKSJON AV VOLATILITET (MILL NOK)



TABELL 37 SAMMENDRAG	
Byggekostnad	150 mill NOK
Kjøpsopsjon	+24 mill NOK
Salgsopsjon	-7 mill NOK
Totalentreprise	167 mill NOK
Påslag (kr)	17 mill NOK
Påslag (%)	11 %

I figur 34 ser vi den kumulative sannsynligheten for byggekostnadene (høyre vertikale akse) og gevinst/tap for entreprenøren som en funksjon av de reelle byggekostnadene.

FIGUR 34 (KJØPSOPSJON-SALGSOPSJON) SOM EN FUNKSJON AV BYGGEKOSTNADENE



10 CASE 7: VERTIKAL EKSPANSJON VED NYE BERGE UNGDOMSSKOLE.

Når nye Berge Ungdomsskole i Lyngdal ble bygget ble det lagt inn en vertikal ekspasjonsopsjon i bygget. Dette ble gjort for at det skulle være mulig å utvide skolen ved en eventuell sammenslåing av Berge Ungdomsskole og Å Ungdomsskole. Kostnadene ved å lage opsjonen var 2 mill NOK, og en eventuell utvidelse vil gi en ekspansjonskostnad på 13 mill NOK. Uten den vertikale opsjonen ville en senere sammenslåing ha kostet 26 mill NOK. Ved utøvelse av opsjonen ville derfor opsjonens netto verdi være differansen mellom utvidelseskostnaden uten opsjon og utvidelseskostnaden med opsjon.

Når vi skal finne opsjonsverdien som var innebygd i skoleutbyggingen står vi ovenfor problemet med offentlig beslutningstaker. Etter å ha gjennomsøkt opsjonslitteraturen har jeg ikke funnet beskrevet hvordan man løser problemet med en offentlig beslutningstager. En offentlig aktør er avhengig av politisk støtte og politisk støtte bygger på opinionen. Dette gjør at det er vanskelig å spesifisere hvilke beslutningskriterium som legges til grunn for å utvide skolene.

Sammenslåing av Berge og Å ungdomsskoler var fra begynnelsen av økonomisk lønnsomt. Når et prosjekt er lønnsomt vil man vanligvis gjennomføre det lønnsomme prosjektet med en gang. Forutsetningen for beslutningen om å utsette gjennomføring er derfor ikke rasjonell fra et profittmaksimerende synspunkt. Det er viktig å påpeke at dette ikke er noen form for kritikk av Lyngdal kommune. En kommune har andre hensyn å ta stilling til når man skal bestemme en sammenslåing av to skoler enn de rent økonomiske. Dette medfører likevel et problem i verdsettelsen av opsjonen.

Selv om det er problemer knyttet til beslutningsregelen har jeg etter en nøye vurdering av ulike modeller kommet fram til å lage en binomisk modell hvor jeg forutsetter at den samfunnsøkonomiske nytten ved en utvidelse er 13 mill NOK i år 0. Videre setter jeg utøvelsesprisen til 13 mill NOK som er kostnaden ved den horisontale ekspansjonen. Videre setter jeg opsjonstiden til 17 år

TABELL 38 VIKTIGE FORUTSETNINGER

Variabel	Forklaring	I år 0	Merknad
Underliggende aktiva	Samfunnsøkonomisk nytte	13 mill NOK	Egentlig langt høyere
Utøvelsespris	Kostnad ved utvidelsen	13 mill NOK	Uten opsjon 26 mill NOK
Maksimal nytte	Nytten ved en utvidelse er begrenset	60 mill NOK	Baserer seg på en helhetlig vurdering

Jeg har laget en binomisk modell med 17 steg hvor hvert steg tilsvarer 1 år. Jeg har valgt en kontinuerlig forrentning siden utvidelsen kan skje i alle 17 årene (amerikansk opsjon).

TABELL 39 VARIABLER	
Risikofri rente	3,5 %
Volatiliteten	20 %
Hvor lenge er opsjonen åpen	17 år
Antall steg	17
Lengde på hvert steg	1,00
Oppgangsfaktor (u)	1,22
Nedgangsfaktoren (d)	0,82
Risikonøytral sannsynlighet opp	54 %
Risikonøytral sannsynlighet ned	46 %
Diskontering per steg	0,9656

TABELL 40 BINOMISK TRE FOR OPSJONSVERDIEN

År	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	p
Ve	6,7	8,9	11,	15,	19,	25,	31,	39,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	0
		4,6	6,3	8,5	11,	14,	19,	24,	31,	39,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	0
			3,0	4,2	5,9	8,0	10,	14,	19,	24,	31,	39,	47,	47,	47,	47,	47,	47,	0
				1,8	2,6	3,8	5,4	7,5	10,	13,	18,	24,	31,	39,	47,	47,	47,	47,	1
					1,0	1,5	2,2	3,3	4,8	6,8	9,6	13,	17,	23,	31,	39,	47,	47,	2
						0,5	0,7	1,2	1,8	2,8	4,1	6,1	8,8	12,	17,	23,	30,	39,	5
							0,2	0,3	0,5	0,8	1,3	2,2	3,4	5,2	7,9	11,	16,	22,	9
								0,1	0,1	0,2	0,3	0,5	0,9	1,5	2,5	4,2	6,8	10,	15
									0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,2	0,4	0,8	1,5	2,9	19
										0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	19
											0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	15
												0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	9
													0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	5
														0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2
															0,0	0,0	0,0	0,0	1
																0,0	0,0	0,0	0
																	0,0	0,0	0
																		0,0	0

Med forutsetningene jeg har lagt inn i modellen vil bruttoverdien av ekspansjonsopsjonen være 6,7 mill NOK. Ved å trekke fra de 2 mill NOK det kostet å lage opsjonen får vi netto nåverdi av opsjonen på 4,7 mill NOK.

TABELL 41 SAMMENDRAG

Kostnad ved å lage opsjonen	- 2,0 mill NOK
Verdien av opsjonen	6,7 mill NOK
Verdi av Opsjon til å utvide	4,70 mill NOK

I tabell 42 ser vi når opsjonen blir benyttet. Med mine forutsetninger blir opsjonen utøvd med 50 % sannsynlighet i løpet av opsjonens varighet.

TABELL 42 STRATEGI

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg
	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg
		Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg
			Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg	Bygg
				Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg	Bygg	Bygg
					Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg
						Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg
							Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg
								Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Bygg
									Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Ikke
										Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Ikke
											Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Ikke
												Vent	Vent	Vent	Vent	Vent	Ikke
													Vent	Vent	Vent	Vent	Ikke
														Vent	Vent	Vent	Ikke
															Vent	Vent	Ikke
																Vent	Ikke
																	Ikke

11 OPPSUMMERING OG KONKLUSJON

Denne masteroppgaven har vært et forsøk på en eksplorativ undersøkelse innen realopsjoner i eiendoms- og byggebransjen. Jeg har presentert relevant teori og har presentert syv case. Jeg vil presentere konklusjonen for hva jeg mener å ha funnet ut i løpet av denne oppgaven.

I det første caset ser jeg på stegvise opsjoner i et prosjekt hvor fremtidig kontantstrøm er usikkert. Min konklusjon er at prosjekter med stor usikkerhet vil en stegvis framgangsmåte kunne tilføre prosjekter en stor ekstraverdi. Det vil etter min mening gi muligheter for å starte flere prosjekter og videre legge ned de prosjektene som ikke har ønsket utvikling. Stegvise opsjoner kan også brukes for å verdsette prosjekter hvor man ved å gjennomføre ekstra prosjekteringsarbeid kan redusere usikkerheten i prosjekter. Mitt inntrykk er at mange eiendoms- og byggeprosjekter sparer inn på prosjekteringsarbeidet. En opsjonstilnærming kan endre på dette ved å få frem tilleggsverdien av hver ekstra krone brukt på prosjektering.

I det andre caset så jeg på sammensatte opsjoner. Formålet med dette caset var å vise at det i prosjekter kan finnes flere opsjoner og når man skal verdsette opsjonene samlet kan man ikke slå disse sammen, siden noen opsjoner er gjensidig utelukkende. I prosjektet så vi at kjøpesenterplanene fikk en tilleggsverdi på 9.2 mill NOK når man la inn de tre opsjoner. Vi så også at ekspansjonsopsjonen hadde den desidert største verdien.

I det tredje caset har jeg sett på en kjøpsopsjon på en tomt med varighet på to år. Det er to formål med denne oppgaven. Det første formålet er å vise at for eiendomsutviklere vil det lønne seg å kjøpe opsjoner på tomter de utvikler istedenfor å kjøpe tomten. Dette binder mindre kapital og gjør det også mulig å starte flere eiendomsutviklingsprosjekter samtidig. Man kan dermed starte de prosjektene hvor utfallet av reguleringsplanen gir høy utnyttelse og skrinlegge de reguleringsplanene hvor utnyttelsen er lav. Dette er en vinn-vinn-situasjon for grunneiere og byggherrer ved at byggherren reduserer eksponeringen i enkeltprosjekter og grunneieren får en opsjonspremie på tomten sin og en mulighet til å sitte igjen med tomten også. Det andre formålet med oppgaven var å se på hva som skjer når vi implementerer en ekstra usikkerhetsvariabel. Den ekstra variabelen jeg tok inn i modellen var usikkerheten angående boligprisene på utøvelsestidspunktet. Med den enkle forutsetningen om at det ikke var korrelasjon mellom de to variablene er resultatet at opsjonen øker fra 6.7 til 8.7 mill NOK.

Det fjerde caset har likheter med tredje caset, men skiller seg ut ved at dette er en langsiktig opsjon på en tomt som har et fremtidig vekstpotensialet og ingen reel utnyttelsesverdi i dag. Jeg ønsket å se på tre strategier som en eiendomsutvikler kan bruke for gjennomføre en langsiktig strategi på den aktuelle tomten som i dag var eiet av kommunen. Den første strategien var å kjøpe tomten direkte av kommunen, noe som i dette caset var det minst foretrukne alternativet. Det andre alternativet var å kjøpe tomten samtidig som man avtalte en salgsopsjon på tomten. Dette alternativet var bedre enn å kjøpe tomten direkte, men etter mine analyser ville det beste alternativet være å kjøpe en kjøpsopsjon av kommunen på tomten og dermed, avhengig av prisen på opsjonen, binde kun 10% av den kapitalen som et kjøp i dag ville medføre. Jeg mener at særlig på tomter som vil ha verdi om 5 til 10 år kan kjøpsopsjoner vil være nyttige. Ved å lage en portefølje med mange kjøpsopsjoner på tomter i vekstområder, kan man utvikle de prosjektene hvor verdien stiger og å la de andre opsjonene stå ubenyttet. Dette gir også grunneiere en muligheten til å tjene på tomten selv, om den ikke på nåværende tidspunkt er aktuell for utbygging.

Det femte caset er det mest usikre caset fra min side. Jeg har likevel tatt det med fordi jeg mener at en videre analyse av området er ønskelig. Mine forutsetninger er at man kan se på en totalentreprise som et bytteforhold, hvor entreprenøren har en salgsopsjon på den forventede byggekostnadene mens kommunen i dette tilfellet har en kjøpsopsjon på de forventede byggekostnadene. Når byggekostnadene blir høyere en den forventede verdien vil kommunen ha en fortjeneste siden de har en kjøpsopsjon til avtalt pris. Hvis byggekostnadene blir lavere enn forventet vil det medføre en gevinst for entreprenøren siden den avtalte prisen blir større en de reelle kostnadene. Min hypotese er derfor at differansen mellom kjøps- og salgsopsjonen er det påslaget entreprenøren må legge på de forventede byggekostnadene for å ta høyde for risikoen. Min analyse viser at entreprenøren minimum må ha et påslag på 11 % for å ta hensyn til risikoen.

Det siste caset er en vurdering av en vertikal ekspansjonsopsjon på Berge Ungdomsskole i Lyngdal. Siden denne ekspansjonen fra starten av var lønnsomt, men ikke gjennomført på grunn av politiske hensyn, vil dette gjøre en verdsettelsen av opsjonen bli usikker siden beslutningen om utøving av opsjonen ikke blir tatt på bakgrunn av en kvantitativ beslutningsregel. Jeg gjennomførte to analyser. Den første analysen var en bionomisk analyse hvor jeg brukte objektiv sannsynlighet, og en Proxy beslutningsregel basert på elevtall ved Å Skole. Den andre analysen var teoretisk riktig hvor jeg brukte risikonøytral sannsynlighet og kostnadene ved en ekspansjon som det underliggende aktiva. Begge metodene ga noenlunde samme svar og verdsetter ekspansjonsopsjonen til 5 mill NOK. Med en forutsetning om at opsjonen kostet 2 mill NOK gir det en netto ekstraverdi på 3 mill NOK . Selv om det knytter seg usikkerhet om reliabiliteten til disse tallene vil jeg likevel konkludere med at den vertikale ekspansjonsopsjonen ga netto ekstraverdi på flere mill NOK . Siden dette var en ganske liten ekspasjonsopsjon viser dette potensialet med å bygge inn mulighetene for slike opsjoner i byggeprosjekter.

Jeg mener at det er stort potensialet for å benytte opsjoner i byggebransjen. Dette er nytt i bransjen, og jeg tror at entreprenører og eiendomsutviklere som starter tidlig med bruk av verktøyene får konkurransefortrinn.

12 KILDER

Amram, M., & Kulatilaka, N. (2012). Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World. *OUP Catalogue*. Retrieved from http://ideas.repec.org/b/oxp/obooks/9780875848457.html

Amram, Martha, & Kulatilaka, N. (1999). *Real options managing strategic investment in an uncertain world*. Boston, Mass.: Harvard Business School Press. Retrieved from http://www.books24x7.com/marc.asp?bookid=3450

Arge, K. (2002). Generalitet, fleksibilitet og elastisitet i kontorbygninger. Hvilke typer tilpasningsdyktighet bør norske byggherrer velge og hva velger de? Prosjektrapport 340-2003 (Norges byggforskningsinstitutt).

Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 637–654.

Boyle, P. P. (1977). Options: A monte carlo approach. *Journal of Financial Economics*, *4*(3), 323–338.

Brach, M. A. (2002). *Real options in practice* (Vol. 139). Wiley. Retrieved from http://www.google.com/books?hl=no&lr=&id=W8myu0D61C0C&oi=fnd&pg=PR7&dq=+Real+Options+Analysis+&ots=eAObGAd455&sig=el6zZYKayQiB8EEHhmbJ_J13NF4

Broadie, M., & Glasserman, P. (1997). Pricing American-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *21*(8), 1323–1352.

Chevalier-Roignant, B., & Trigeorgis, L. (2011). *Competitive strategy options and games*. Cambridge, MA: MIT Press. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=407776

Collan, M., Fullér, R., & Mezei, J. (2009). A fuzzy pay-off method for real option valuation. *Advances in Decision Sciences*, *2009*. Retrieved from http://www.hindawi.com/journals/ads/2009/238196/abs/

Copeland, T., & Antikarov, V. (2001). *Real options: A practioner's guide*. Texere London. Retrieved from http://www.lavoisier.fr/livre/notice.asp?id=RASWL6A6O3SOWX

Copeland, Thomas. (1998). How much is flexibility worth? *The McKinsey Quarterly*, (2), 38–49.

Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, *7*(3), 229–263.

Damodaran, A. (2002). Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset, Second Edition (2nd ed.). Wiley.

Damodaran, A. (2005). The promise and peril of real options.

Damodaran, A. (2008). *Damodaran on valuation*. John Wiley & Sons.

De Neufville, R. (2002). Architecting/designing engineering systems using real options. Monograph, Engineering Systems Division Internal Symposium, Massachusetts Institute of Technology.

De Neufville, Richard, Scholtes, S., & Wang, T. (2006). Real options by spreadsheet: parking garage case example. *Journal of infrastructure systems*, *12*(2), 107–111.

Elnan, H., Meland, Ø., & Robertsen, K. (2007a). Eiendomsøkonomi : prinsipper og modellerHovedrapport nr 1:Byggherren i fokus (BIF) –forretningsorientert prosjektutvikling. Retrieved from http://brage.bibsys.no/hia/handle/URN:NBN:no-bibsys_brage_9905

Elnan, H., Meland, Ø., & Robertsen, K. (2007b). Realopsjoner og fast eiendom : Hovedrapport nr 2 : Byggherren i fokus (BIF) –forretningsorientert prosjektutvikling. Retrieved from http://brage.bibsys.no/hia/handle/URN:NBN:no-bibsys_brage_9906

Geltner, D. (2007). *Commercial real estate analysis & investments*. Cengage Learning. Retrieved from http://www.google.com/books?hl=no&lr=&id=3BnM_LeN1vgC&oi=fnd&pg=PR5&dq=geltner+2007&ots=7IHr920zV4&sig=rIhG64jltHPFBt2a_vq45qW-3bY

Guma, A. C. (2008). *A real options analysis of a vertically expandable real estate development*. Massachusetts Institute of Technology. Retrieved from http://web.mit.edu/CRE/alumni/pdf/msred-thesis-08_aacre-award_anthony-guma_real-options.pdf

Howard, R. A., & Matheson, J. E. (1972). Risk-Sensitive Markov Decision Processes. *Management Science Management Science*, *18*(7), 356–369.

Hull, J. (2003). *Options, futures & other derivatives*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Hull, J. C. (1999). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India.

Hull, J., & Hull, J. (2002). *Fundamentals of futures and options markets*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Kodukula, P., & Papudesu, C. (2006). *Project valuation using real options: a practitioner's guide*. J Ross Pub. Retrieved from

Lyngstadås, H. (2012). Bruk av realopsjoner i konseptvalgfase/tidligfase hos Statsbygg. *117*. Retrieved from http://brage.bibsys.no/umb/handle/URN:NBN:no-bibsys_brage_37850

Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 141–183.

Mun, J. (2006). Modeling risk: Applying Monte Carlo simulation, real options analysis, forecasting, and optimization techniques (Vol. 347). Wiley.

Mun, Johnathan. (2002). *Real options analysis tools and techniques for valuing strategic investments and decisions*. New York: John Wiley & Sons. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=79080

Mun, Johnathan. (2003). Real options analysis course: business cases and sofware applications. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Mun, Johnathan. (2007). *Advanced risk analytics: certified in risk management (CRM)*. Dublin, Calif.: Real Options Valuation, Inc.

Mun, Johnathan. (2008). Advanced analytical models: over 800 models and 300 applications from the Basel II accord to Wall Street and beyond ; [DVD includes trial versions of the modeling toolkit, risk simulator, and real options SLS software]. Hoboken, NJ: Wiley.

Mun, Johnathan. (2010). Modeling risk applying Monte Carlo risk simulation, strategic real options, stochastic forecasting, and portfolio optimization. Hoboken, N.J.: Wiley. Retrieved from http://site.ebrary.com/id/10395561

Myers, S. C. (1977). Determinants of corporate borrowing. *Journal of financial economics*, *5*(2), 147–175.

Nembhard, H. B. (2009). Real options in engineering design, operations, and management. CRC.

Nembhard, Harriet Black, & Aktan, M. (2010). *Real options in engineering design, operations, and management*. Boca Raton: CRC Press.

Oppenheimer, P. H. (2002). A critique of using real options pricing models in valuing real estate projects and contracts. *Briefings in Real Estate Finance*, *2*(3), 221–233.

Smit, H. T. J., & Trigeorgis, L. (2008). *Strategic investment: Real options and games*. Princeton University Press. Retrieved from

Størseth, K. (2006). Realopsjoner i Forsvarets økonomistyring. *Masteroppgave, NTNU-IØT*. Retrieved from http://www.concept.ntnu.no/attachments/054_rapport_07_realopsjoner_forsvarets_okonomistyring_vedlegg.pdf

Trigeorgis, L. (1996). Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation. The MIT Press.

Wang, T., & De Neufville, R. (2005). Real options “in” projects. *9th Real Options Annual International Conference, Paris, FR*.

Østensvig, J. (2010). CO2 fangst, transport og lagring fra gasskraftverket på Kårstø. Terram ar AS og Asplan viak.

Aasen, E. (2006). Verdsettelse av investeringsprosjekt i oljebransjen: realopsjoner kontra tradisjonelle metoder.

13 VEDLEGG

	A	B	S
1	Lyngdal Ungdomsskole		
2	Samfunnsmessig nytte:	13	
3	Samfunnsmessig kostnad (Utvidelseskostnaden)	13	
4	Samfunnsmessig lønnsomhet	=B2-B3	
5	Maksimal Samfunnsmessig nytte	60	
6			
7			
8			
9	Risikofri rente	0,035	
10	Kostnad ved å vente med utvidelse (% per år)	0	
11	Volatiliteten (Samfunnsmessig nytte)	0,2	
12	Hvor lenge er opsjonen åpen	17	
13	antall steg	17	
14			
15	Lengde på hvert steg	=B12/B13	
16	Opp faktor	=EKSP(B11*ROT(B15))	
17	Nedfaktor	=1/B16	
18	Risikonøytral sannsynlighet opp	=(EKSP((B9-B10)*B15)-B17)/(B16-B17)	
19	Risikonøytral sannsynlighet ned	=1-B18	
20	Diskontering per steg	=EKSP(-B9*B15)	
21			
22	Kostnad ved å lage opsjonen	-2	
23	Verdien av opsjonen	=B52	
24	Verdi av Opsjon til å utvide	=B23+B22	
25			
26			
27			
28	ÅR	0	=$C$28*S30
29			
30	Antall oppganger	0	=R30+1
31	Netto nytte av utvidelse	=B2	=MIN(R31*$B$16;$B$5)
32			=MIN(R32*$B$16;$B$5)
33			=MIN(R33*$B$16;$B$5)
34			=MIN(R34*$B$16;$B$5)
35			=MIN(R35*$B$16;$B$5)
36			=MIN(R36*$B$16;$B$5)
37			=MIN(R37*$B$16;$B$5)
38			=MIN(R38*$B$16;$B$5)
39			=MIN(R39*$B$16;$B$5)
40			=MIN(R40*$B$16;$B$5)
41			=MIN(R41*$B$16;$B$5)
42			=MIN(R42*$B$16;$B$5)
43			=MIN(R43*$B$16;$B$5)
44			=MIN(R44*$B$16;$B$5)
45			=MIN(R45*$B$16;$B$5)
46			=MIN(R46*$B$16;$B$5)
47			=MIN(R47*$B$16;$B$5)
48			=MIN(R47*$B$17;$B$5)
49			
50			
51	Antall oppganger	0	=R51+1
52	Verdi opsjon	=MAKSA(($B$18*C52+$B$19*C53)*B	=MAKSA(0;(S31-$B$3))
53			=MAKSA(0;(S32-$B$3))
54			=MAKSA(0;(S33-$B$3))
55			=MAKSA(0;(S34-$B$3))
56			=MAKSA(0;(S35-$B$3))
57			=MAKSA(0;(S36-$B$3))
58			=MAKSA(0;(S37-$B$3))
59			=MAKSA(0;(S38-$B$3))
60			=MAKSA(0;(S39-$B$3))
61			=MAKSA(0;(S40-$B$3))
62			=MAKSA(0;(S41-$B$3))
63			=MAKSA(0;(S42-$B$3))
64			=MAKSA(0;(S43-$B$3))
65			=MAKSA(0;(S44-$B$3))
66			=MAKSA(0;(S45-$B$3))
67			=MAKSA(0;(S46-$B$3))
68			=MAKSA(0;(S47-$B$3))
69			=MAKSA(0;(S48-$B$3))
70			
71	**Strategi**		
72	Antall oppganger	0	=R72+1
73		=HVIS(($B$18*C52+$B$19*C53)*$B$20	=HVIS((($B$3)>S31);"Ikke bygg";"Bygg")
74			=HVIS((($B$3)>S32);"Ikke bygg";"Bygg")
75			=HVIS((($B$3)>S33);"Ikke bygg";"Bygg")
76			=HVIS((($B$3)>S34);"Ikke bygg";"Bygg")
77			=HVIS((($B$3)>S35);"Ikke bygg";"Bygg")
78			=HVIS((($B$3)>S36);"Ikke bygg";"Bygg")
79			=HVIS((($B$3)>S37);"Ikke bygg";"Bygg")
80			=HVIS((($B$3)>S38);"Ikke bygg";"Bygg")
81			=HVIS((($B$3)>S39);"Ikke bygg";"Bygg")
82			=HVIS((($B$3)>S40);"Ikke bygg";"Bygg")
83			=HVIS((($B$3)>S41);"Ikke bygg";"Bygg")
84			=HVIS((($B$3)>S42);"Ikke bygg";"Bygg")
85			=HVIS((($B$3)>S43);"Ikke bygg";"Bygg")
86			=HVIS((($B$3)>S44);"Ikke bygg";"Bygg")
87			=HVIS((($B$3)>S45);"Ikke bygg";"Bygg")
88			=HVIS((($B$3)>S46);"Ikke bygg";"Bygg")
89			=HVIS((($B$3)>S47);"Ikke bygg";"Bygg")

	A	B	C	D	E	F
1	PV(Inntekter)	400				
2						
3	Binomisk Modell					
4	År	5				
5		=B4/B6				
6	Perioder	5	0			
7	Investeringskostnad:Fase 1	54		1		
8	Investeringskostnad:Fase 2	80		=D12-D11		
9	Investeringskostnad:Fase 3	400		=D13-D12		
10	Verditap	0				
11	r	0,04	T1	1		
12	dr	=EKSP(-B11*B5)	T2	3		
13	SD	0,3	T3	5		
14	S, up	=EKSP(B13*ROT(B5))				
15	S, down	=1/B14				
16						
17	p	=(EKSP(B11*B5)-B15)/(B14-B15)				
18	1-p	=1-B17				
19						
20	C	=E55				
21						
22						
23						
24	0	=A24+1	=B24+1	=C24+1	=D24+1	=E24+1
25						
26						
27						=E29*$B$14
28						=MAKSA(F27-$B$9;0)
29					=D31*$B$14	
30					=MAKSA($B$17*F28*$B$12+$B$18*F32*$B$12;E29-$B$9)	
31				=C33*$B$14		=E33*$B$14
32				=MAKSA($B$17*E30*$B$12+$B$18*E34*$B$12;D31-$B$9)		=MAKSA(F31-$B$9;0)
33			=B35*$B$14		=D35*$B$14	
34			=MAKSA($B$17*D32*$B$12+$B$18*D36*$B$12;C33-$B$9)		=MAKSA($B$17*F32*$B$12+$B$18*F36*$B$12;E33-$B$9)	
35		=A37*$B$14		=C37*$B$14		=E37*$B$14
36		=MAKSA($B$17*C34*$B$12+$B$18*C38*$B$12;B35-$B$9)		=MAKSA($B$17*E34*$B$12+$B$18*E38*$B$12;D35-$B$9)		=MAKSA(F35-$B$9;0)
37	=B1		=B39*$B$14		=D39*$B$14	
38	=MAKSA($B$17*B36*$B$12+$B$18*B40*$B$12;A37-$B$9)		=MAKSA($B$17*D36*$B$12+$B$18*D40*$B$12;C37-$B$9)		=MAKSA($B$17*F36*$B$12+$B$18*F40*$B$12;E37-$B$9)	
39		=A37*$B$15		=C41*$B$14		=E41*$B$14
40		=MAKSA($B$17*C38*$B$12+$B$18*C42*$B$12;B39-$B$9)		=MAKSA($B$17*E38*$B$12+$B$18*E42*$B$12;D39-$B$9)		=MAKSA(F39-$B$9;0)
41			=B39*$B$15		=D43*$B$14	
42			=MAKSA($B$17*D40*$B$12+$B$18*D44*$B$12;C41-$B$9)		=MAKSA($B$17*F40*$B$12+$B$18*F44*$B$12;E41-$B$9)	
43				=C41*$B$15		=E45*$B$14
44				=MAKSA($B$17*E42*$B$12+$B$18*E46*$B$12;D43-$B$9)		=MAKSA(F43-$B$9;0)
45					=D43*$B$15	
46					=MAKSA($B$17*F44*$B$12+$B$18*F48*$B$12;E45-$B$9)	
47						=E45*$B$15

	A	B	C	D	E	F	G
1		Realopsjon					
2		X	=C5				
3		S	=C6				
4		Diskontering per steg	=EKSP(-C13*C8)	Utnyttelse	u1	=EKSP(C10*ROT(C8))	
5		S	30		d1	=1/F4	
6		X	30				
7		T	2	Tomtepriser	u2	=EKSP(C11*ROT(C8))	
8		dt	=C7/2		d2	=1/F7	0,01
9							
10	Årlig volatilitet	Utnyttelse	0,4	Variabel 1	p1	=((EKSP(C13*C8)-F5))/(F4-F	
11	Årlig volatilitet	Tomtepriser	0,05		1-p1	=1-F10	
12							
13		risiko fri rente	0,035	Variabel 2	p2	=((EKSP(C13*C8)-F8))/(F7-F	
14					1-p2	=1-F13	
15					=C16*F4	=MAKSA(E15-$C$3;0)	=BINOM.FORDELING.(0;H19;0,5;USAN
16			=A17*F4	=($F$10*F15+$F$11*F17)*$C$4			
17	=C5	=($F$10*D16+$F$11*D18)*$C$4			=C16*F5	=MAKSA(E17-$C$3;0)	=BINOM.FORDELING.(1;H19;0,5;USAN
18			=A17*F5	=($F$10*F17+$F$11*F19)*$C$4			
19					=C18*F5	=MAKSA(E19-$C$3;0)	=BINOM.FORDELING.(2;H19;0,5;USAN
20							
21						=D23*($F$4*$F$7)	=MAKSA(F21-$C$6;0)
22						=D23*$F$4*$F$8	=MAKSA(F22-$C$6;0)
23			=F10*F13	=A32*F4*F7	=($F$10*$F$13*G21+$F$10*$F$14*G22+$F$11*$F$13*G23+$F$11*$F$14*G24)*EKSP(-$C$13)	=D23*$F$5*$F$7	=MAKSA(F23-$C$6;0)
24						=D23*$F$5*$F$8	=MAKSA(F24-$C$6;0)
25							
26							
27						=D29*$F$4*$F$7	=MAKSA(F27-$C$6;0)
28						=D29*$F$4*$F$8	=MAKSA(F28-$C$6;0)
29			=F10*F14	=A32*F4*F8	=($F$10*$F$13*G27+$F$10*$F$14*G28+$F$11*$F$13*G29+$F$11*$F$14*G30)*EKSP(-$C$13)	=D29*$F$5*$F$7	=MAKSA(F29-$C$6;0)
30						=D29*$F$5*$F$8	=MAKSA(F30-$C$6;0)
31							
32	=C5	=(C23*E23+C29*E29+C34*E34+C40*E40)/(1+C13)					
33						=D34*$F$4*$F$7	=MAKSA(F33-$C$6;0)
34			=F11*F13	=A32*F5*F7	=($F$10*$F$13*G33+$F$10*$F$14*G34+$F$11*$F$13*G35+$F$11*$F$14*G36)*EKSP(-$C$13)	=D34*$F$4*$F$8	=MAKSA(F34-$C$6;0)
35						=D34*$F$5*$F$7	=MAKSA(F35-$C$6;0)
36						=D34*$F$5*$F$8	=MAKSA(F36-$C$6;0)
37							
38							
39						=D40*$F$4*$F$7	=MAKSA(F39-$C$6;0)
40			=F11*F14	=A32*F5*F8	=($F$10*$F$13*G39+$F$10*$F$14*G40+$F$11*$F$13*G41+$F$11*$F$14*G42)*EKSP(-$C$13)	=D40*$F$4*$F$8	=MAKSA(F40-$C$6;0)
41						=D40*$F$5*$F$7	=MAKSA(F41-$C$6;0)

	B	C	D	E	F	G
2	**Opsjonstype**	1				
3						
4	PV(Inngående kontantstrøm)	100				
5	Investeringskostnad	100				
6	Nåverdi prosjekt uten opsjoner	=C4-C5	Tid per steg	=C10/C11		
7	Volatilitet	0,15	Opp faktor	=EKSP(C7*ROT(E6))		
8	Risikofri rente	0,05	Ned faktor	=1/E7		
9	Verdinedgang	0	Risikonøytral sannsynlighet opp	=(EKSP((C8-C9)*E6)-E8)/(E7-E8)		
10	Opsjonens Varighet	5	Risikonøytral sannsynlighet ned	=(1-E9)		
11	Antall steg	5	Diskontering per steg	=EKSP(-C8*E6)		
12	Ekspansjonsfaktor	1,4				
13	Ekspansjonskostnad	30	Individuelt		Samensatt opsjon	
14	Kontraktsfaktor	0,5	Ekspansjonsopsjon	=B42-C4		
15	Reduserte kostnader	40	Nedleggelsesopsjon	=B73-C4		
16	Restverdi	80	Kontraktopsjon	=B103-C4		
17			Totalt	=SUMMER(E14:E16)	=B135-C4	
18			Differanse	=F17/E17		
19	Underliggende					
20	0	=0+$E$6	=C20+$E$6	=D20+$E$6	=E20+$E$6	=F20+$E$6
21						
22						=F23*$E$7
23					=E24*$E$7	
24				=D25*$E$7		=F25*$E$7
25			=C26*$E$7		=E26*$E$7	
26		=B27*$E$7		=D27*$E$7		=F27*$E$7
27	=C4		=C28*$E$7		=E28*$E$7	
28		=B27*$E$8		=D29*$E$7		=F29*$E$7
29			=C28*$E$8		=E30*$E$7	
30				=D29*$E$8		=F31*$E$7
31					=E30*$E$8	
32						=F31*$E$8
33						
34	Ekspandere					
35	0	=0+$E$6	=C35+$E$6	=D35+$E$6	=E35+$E$6	=F35+$E$6
36						
37						=MAKSA(G22;G22*$C$12-$C$13)
38					=MAKSA(F23*$C$12-$C$13;($E$9*G37+$E$10*G39)*$E$11)	
39				=MAKSA(E24*$C$12-$C$13;($E$9*F38+$E$10*F40)*$E$11)		=MAKSA(G24;G24*$C$12-$C$13)
40			=MAKSA(D25*$C$12-$C$13;($E$9*E39+$E$10*E41)*$E$11)		=MAKSA(F25*$C$12-$C$13;($E$9*G39+$E$10*G41)*$E$11)	
41		=MAKSA(C26*$C$12-$C$13;($E$9*D40+$E$10*D42)*$E$11)		=MAKSA(E26*$C$12-$C$13;($E$9*F40+$E$10*F42)*$E$11)		=MAKSA(G26;G26*$C$12-$C$13)
42	=MAKSA(B27*$C$12-$C$13;($E$9*C41+$E$10*C43)*$E$11)		=MAKSA(D27*$C$12-$C$13;($E$9*E41+$E$10*E43)*$E$11)		=MAKSA(F27*$C$12-$C$13;($E$9*G41+$E$10*G43)*$E$11)	
43		=MAKSA(C28*$C$12-$C$13;($E$9*D42+$E$10*D44)*$E$11)		=MAKSA(E28*$C$12-$C$13;($E$9*F42+$E$10*F44)*$E$11)		=MAKSA(G28;G28*$C$12-$C$13)
44			=MAKSA(D29*$C$12-$C$13;($E$9*E43+$E$10*E45)*$E$11)		=MAKSA(F29*$C$12-$C$13;($E$9*G43+$E$10*G45)*$E$11)	
45				=MAKSA(E30*$C$12-$C$13;($E$9*F44+$E$10*F46)*$E$11)		=MAKSA(G30;G30*$C$12-$C$13)
46					=MAKSA(F31*$C$12-$C$13;($E$9*G45+$E$10*G47)*$E$11)	
47						=MAKSA(G32;G32*$C$12-$C$13)
48						
49	Strategi					
50						
51						
52						
53						=HVIS(G22*$C$12-$C$13>G22;"EKSPANDE
54					=HVIS(F23*$C$12-$C$13>$E$9*G37*$E$11+$E$10*G39*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")	
55				=HVIS(E24*$C$12-$C$13>$E$9*F38*$E$11+$E$10*F40*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(G24*$C$12-$C$13>G24;"EKSPANDE
56			=HVIS(D25*$C$12-$C$13>$E$9*E39*$E$11+$E$10*E41*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(F25*$C$12-$C$13>$E$9*G39*$E$11+$E$10*G41*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")	
57		=HVIS(C26*$C$12-$C$13>$E$9*D40*$E$11+$E$10*D42*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(E26*$C$12-$C$13>$E$9*F40*$E$11+$E$10*F42*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(G26*$C$12-$C$13>G26;"EKSPANDE
58	=HVIS(B27*$C$12-$C$13>$E$9*C41*$E$11+$E$10*C43*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(D27*$C$12-$C$13>$E$9*E41*$E$11+$E$10*E43*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(F27*$C$12-$C$13>$E$9*G41*$E$11+$E$10*G43*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")	
59		=HVIS(C28*$C$12-$C$13>$E$9*D42*$E$11+$E$10*D44*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(E28*$C$12-$C$13>$E$9*F42*$E$11+$E$10*F44*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(G28*$C$12-$C$13>G28;"EKSPANDE
60			=HVIS(D29*$C$12-$C$13>$E$9*E43*$E$11+$E$10*E45*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(F29*$C$12-$C$13>$E$9*G43*$E$11+$E$10*G45*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")	
61				=HVIS(E30*$C$12-$C$13>$E$9*F44*$E$11+$E$10*F46*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")		=HVIS(G30*$C$12-$C$13>G30;"EKSPANDE
62					=HVIS(F31*$C$12-$C$13>$E$9*G45*$E$11+$E$10*G47*$E$11;"EKSPANDER";"FORTSETT")	
63						=HVIS(G32*$C$12-$C$13>G32;"EKSPANDE
64						
65	NEDLEGGE					
66	0	=0+$E$6	=C66+$E$6	=D66+$E$6	=E66+$E$6	=F66+$E$6
67						
68						=MAKSA(G22;$C$16)
69					=MAKSA(G68*$E$9*$E$11+G70*$E$10*$E$11;$C$16)	
70				=MAKSA(F69*$E$9*$E$11+F71*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(G24;$C$16)
71			=MAKSA(E70*$E$9*$E$11+E72*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(G70*$E$9*$E$11+G72*$E$10*$E$11;$C$16)	
72		=MAKSA(D71*$E$9*$E$11+D73*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(F71*$E$9*$E$11+F73*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(G26;$C$16)
73	=MAKSA(C72*$E$9*$E$11+C74*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(E72*$E$9*$E$11+E74*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(G72*$E$9*$E$11+G74*$E$10*$E$11;$C$16)	
74		=MAKSA(D73*$E$9*$E$11+D75*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(F73*$E$9*$E$11+F75*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(G28;$C$16)
75			=MAKSA(E74*$E$9*$E$11+E76*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(G74*$E$9*$E$11+G76*$E$10*$E$11;$C$16)	
76				=MAKSA(F75*$E$9*$E$11+F77*$E$10*$E$11;$C$16)		=MAKSA(G30;$C$16)
77					=MAKSA(G76*$E$9*$E$11+G78*$E$10*$E$11;$C$16)	

	A	B	C	D	E	F
49						
50	0	=A50+1	=B50+1	=C50+1	0	1
51						
52				=D32		=B57
53				=MAKSA(D52-$B$8;0)		=MAKSA(F52-$B$7;0)
54			=C34		=A59	
55			=MAKSA($B$17*D53*$B$12+$B$18*D57*$B$12;C54-$B$9)		=MAKSA($B$17*F53*$B$12+$B$18*F57*$B$12;E54-$B$9)	
56		=B36		=D36		=B61
57		=MAKSA($B$17*C55*$B$12+$B$18*C59*$B$12;B56-$B$9)		=MAKSA(D56-$B$8;0)		=MAKSA(F56-$B$7;0)
58	=A38		=C38			
59	=MAKSA($B$17*B57*$B$12+$B$18*B61*$B$12;A58-$B$9)		=MAKSA($B$17*D57*$B$12+$B$18*D61*$B$12;C58-$B$9)			
60		=B40		=D40		
61		=MAKSA($B$17*C59*$B$12+$B$18*C63*$B$12;B60-$B$9)		=MAKSA(D60-$B$8;0)		
62			=C42			
63			=MAKSA($B$17*D61*$B$12+$B$18*D65*$B$12;C62-$B$9)			
64				=D44		
65				=MAKSA(D64-$B$8;0)		
66						
67	0	=A67+1	=B67+1	=C67+1	=D67+1	=E67+1
68						
69						=F28
70					=E30	
71				=D53		=F32
72			=C55		=E34	
73		=F53		=D57		=F36
74	=E55		=C59		=E38	
75		=F57		=D61		=F40
76			=C63		=E42	
77				=D65		=F44
78					=E46	
79						=F48
80						
81	Avkastningskrav		0,08			
82	Nåverdimetoden		=A1	=B1		
83			=A7	=B7*EKSP(-$C$81*(D11-1))		
84			=A8	=B8*EKSP(-$C$81*(D12-1))	2	
85			=A9	=B9*EKSP(-$C$81*(D13-1))	4	
86			NNV	=D82-D83-D84-D85	=HVIS(D86>0;"invester";"ikke invester")	
87						
88	Realopsjonmetoden		Verdi	=E55	=HVIS(D88>0;"invester";"ikke invester")	
89						
90	Tileggsverdi med realopsjon			=D88-(D86)		

	A	B	S
1	Lyngdal Ungdomsskole		
2	Samfunnsmessig nytte:	13	
3	Samfunnsmessig kostnad (Utvidelseskostnaden)	13	
4	Samfunnsmessig lønnsomhet	=B2-B3	
5	Maksimal Samfunnsmessig nytte	60	
6			
7			
8			
9	Risikofri rente	0,035	
10	Kostnad ved å vente med utvidelse (% per år)	0	
11	Volatiliteten (Samfunnsmessig nytte)	0,2	
12	Hvor lenge er opsjonen åpen	17	
13	antall steg	17	
14			
15	Lengde på hvert steg	=B12/B13	
16	Opp faktor	=EKSP(B11*ROT(B15))	
17	Nedfaktor	=1/B16	
18	Risikonøytral sannsynlighet opp	=(EKSP((B9-B10)*B15)-B17)/(B16-B17)	
19	Risikonøytral sannsynlighet ned	=1-B18	
20	Diskontering per steg	=EKSP(-B9*B15)	
21			
22	Kostnad ved å lage opsjonen	-2	
23	Verdien av opsjonen	=B52	
24	Verdi av Opsjon til å utvide	=B23+B22	
25			
26			
27			
28	ÅR	0	=$C$28*S30
29			
30	Antall oppganger	0	=R30+1
31	Netto nytte av utvidelse	=B2	=MIN(R31*$B$16;$B$5)
32			=MIN(R32*$B$16;$B$5)
33			=MIN(R33*$B$16;$B$5)
34			=MIN(R34*$B$16;$B$5)
35			=MIN(R35*$B$16;$B$5)
36			=MIN(R36*$B$16;$B$5)
37			=MIN(R37*$B$16;$B$5)
38			=MIN(R38*$B$16;$B$5)
39			=MIN(R39*$B$16;$B$5)
40			=MIN(R40*$B$16;$B$5)
41			=MIN(R41*$B$16;$B$5)
42			=MIN(R42*$B$16;$B$5)
43			=MIN(R43*$B$16;$B$5)
44			=MIN(R44*$B$16;$B$5)
45			=MIN(R45*$B$16;$B$5)
46			=MIN(R46*$B$16;$B$5)
47			=MIN(R47*$B$16;$B$5)
48			=MIN(R47*$B$17;$B$5)
49			
50			
51	Antall oppganger	0	=R51+1
52	Verdi opsjon	=MAKSA(($B$18*C52+$B$19*C53)*B	=MAKSA(0;(S31-$B$3))
53			=MAKSA(0;(S32-$B$3))
54			=MAKSA(0;(S33-$B$3))
55			=MAKSA(0;(S34-$B$3))
56			=MAKSA(0;(S35-$B$3))
57			=MAKSA(0;(S36-$B$3))
58			=MAKSA(0;(S37-$B$3))
59			=MAKSA(0;(S38-$B$3))
60			=MAKSA(0;(S39-$B$3))
61			=MAKSA(0;(S40-$B$3))
62			=MAKSA(0;(S41-$B$3))
63			=MAKSA(0;(S42-$B$3))
64			=MAKSA(0;(S43-$B$3))
65			=MAKSA(0;(S44-$B$3))
66			=MAKSA(0;(S45-$B$3))
67			=MAKSA(0;(S46-$B$3))
68			=MAKSA(0;(S47-$B$3))
69			=MAKSA(0;(S48-$B$3))
70			
71	**Strategi**		
72	Antall oppganger	0	=R72+1
73		=HVIS(($B$18*C52+$B$19*C53)*$B$20	=HVIS((($B$3)>S31);"Ikke bygg";"Bygg")
74			=HVIS((($B$3)>S32);"Ikke bygg";"Bygg")
75			=HVIS((($B$3)>S33);"Ikke bygg";"Bygg")
76			=HVIS((($B$3)>S34);"Ikke bygg";"Bygg")
77			=HVIS((($B$3)>S35);"Ikke bygg";"Bygg")
78			=HVIS((($B$3)>S36);"Ikke bygg";"Bygg")
79			=HVIS((($B$3)>S37);"Ikke bygg";"Bygg")
80			=HVIS((($B$3)>S38);"Ikke bygg";"Bygg")
81			=HVIS((($B$3)>S39);"Ikke bygg";"Bygg")
82			=HVIS((($B$3)>S40);"Ikke bygg";"Bygg")
83			=HVIS((($B$3)>S41);"Ikke bygg";"Bygg")
84			=HVIS((($B$3)>S42);"Ikke bygg";"Bygg")
85			=HVIS((($B$3)>S43);"Ikke bygg";"Bygg")
86			=HVIS((($B$3)>S44);"Ikke bygg";"Bygg")
87			=HVIS((($B$3)>S45);"Ikke bygg";"Bygg")
88			=HVIS((($B$3)>S46);"Ikke bygg";"Bygg")
89			=HVIS((($B$3)>S47);"Ikke bygg";"Bygg")