

Diversifikasjon på Oslo Børs

I perioden 2002 – 2011

Knut Dagfinn Finstad

Veileder

Dennis Frestad

Masteroppgaven er gjennomført som ledd i utdanningen ved Universitetet i Agder og er godkjent som del av denne utdanningen. Denne godkjenningen innebærer ikke at universitetet inntår for de metoder som er anvendt og de konklusjoner som er trukket.

Universitetet i Agder, 2012

Fakultet for økonomi og samfunnsvitenskap

Institutt for økonomi/Handelshøyskolen i Kristiansand

Sammendrag

I denne oppgaven har jeg tatt for meg utviklingen i den usystematiske risikoen på Oslo Børs i perioden 2002 til og med 2011. Vi så en kraftig oppgang i den estimerte usystematiske risikoen under krisen som rammet verdens finansmarkeder i andre halvdel av 2008. Forholdet mellom usystematisk risiko og markedsrisiko ble derimot redusert, slik at diversifikasjonsgevinsten var lavest da investorene trengte den som mest. Gjennomsnittlig korrelasjon mellom enkeltaksjenes avkastninger ble tredoblet da urolighetene nådde Oslo Børs, og korrelasjonene mellom avkastningene til de ulike sektorene økte i tiden etter konkursen til Lehman Brothers. Ved å bruke historiske tall fra perioden 2002 til og med 2011 har jeg vist at en veldiversifisert likevektet portefølje ville bestått av mellom 35 og 40 tilfeldig valgte aksjer på Oslo Børs. For å finne optimal porteføljestørrelse for en risikoavers investor har jeg inkludert høyere ordens momenter i nyttefunksjonen. Jeg viser at en optimal likevektet portefølje ville bestått av 15 eller 70 tilfeldig valgte aksjer dersom investoren ønsket å maksimere forventet nytte av porteføljenes daglige avkastninger. Dersom investoren heller ønsket å maksimere nytten av porteføljenes sluttverdier for en tiårig investeringshorisont, ville det vært optimalt å inkludere 70 eller 80 tilfeldig valgte aksjer i en likevektet portefølje.

* Jeg vil rette en stor takk til min veileder, førsteamanuensis Dennis Frestad ved Universitetet i Agder, for gode diskusjoner og konstruktive innspill underveis i prosessen.

1	INNLEDNING	1
2	TEORI	2
2.1	RISIKO I AKSJEMARKEDET	2
2.2	MARKOWITZ' INNSIKT	4
2.3	HVOR MANGE AKSJER MÅ TIL FOR Å FÅ EN VELDIVERSIFISERT PORTEFØLJE?.....	8
3	DATA OG METODE	11
3.1	ESTIMERING AV DEN USYSTEMATISKE RISIKOEN	11
3.2	DATAINNHEITING.....	13
3.3	AVKASTNING PÅ OSLO BØRS	14
3.4	VOLATILITET PÅ OSLO BØRS.....	15
4	USYSTEMATISK RISIKO PÅ OSLO BØRS	17
4.1	OVERSIKT.....	17
4.2	EN MODELL FOR USYSTEMATISK RISIKO PÅ OSLO BØRS.....	20
4.3	RELATIV DIVERSIFIKASJONSGEVINST	22
4.4	GJENNOMSNIITTLIG KORRELASJONSKOEFFISIENT MELLOM ENKELTAKSJENE.....	25
4.5	USYSTEMATISK RISIKO I DE ULIKE SEKTORENE.....	30
5	SAMMENHENGEN MELLOM PORTEFØLJESTØRRELSE OG RISIKO	35
5.1	PORTEFØLJERISIKO	35
5.2	OPTIMAL AVVEINING MELLOM FORVENTET AVKASTNING OG RISIKO	38
5.3	RISIKO VED INVESTERINGENS SLUTTVERDI	42
5.4	OPTIMAL PORTEFØLJESTØRRELSE FOR EN TIÅRIG INVESTERINGSHORISONT	44
6	OPPSUMMERING OG KONKLUSJON	47
7	REFERANSER	49
8	APPENDIKS	52
8.1	SELSKAPSOVERSIKT	52
8.2	USYSTEMATISK RISIKO I ULIKE SEKTORER	56
8.3	FORVENTET NYTTE AV PORTEFØLJENES DAGLIGE AVKASTNINGER	59
8.4	FORVENTET NYTTE AV PORTEFØLJENES SLUTTVERDIER.....	60

1 Innledning

Et viktig prinsipp i moderne porteføljeteori er at man kan dekomponere den totale risikoen til en portefølje i henholdsvis systematisk- og usystematisk risiko. Ved å inkludere et større antall aksjer i porteføljen kan man eliminere den usystematiske risikoen, slik at porteføljens risiko utelukkende består av systematisk risiko.

I Norge har diversifikasjon og usystematisk risiko blitt viet liten interesse av det akademiske miljøet. Jeg ønsker derfor å belyse disse områdene i denne oppgaven. Formålet med oppgaven er todelt. For det første ønsker jeg å undersøke hvordan den usystematiske risikoen og diversifikasjonsgevinsten på Oslo Børs har utviklet seg i perioden januar 2002 til desember 2011. Denne tidsperioden er av spesiell interesse. En kraftig børsoppgang i begynnelsen av perioden ble etterfulgt av en periode med sterk nedgang og økt volatilitet. Dette ble utløst av subprime-boblen som sprakk i USA, konkursen til investeringsbanken Lehman Brothers høsten 2008 og den påfølgende usikkerheten vedrørende gjeldssituasjonen til Hellas, Portugal, Spania og Italia.

For det andre ønsker jeg å se på sammenhengen mellom antall aksjer i porteføljen og porteføljens risiko, og hvilken porteføljestørrelse som maksimerer en investors forventede nytte. Som en konsekvens av den kraftige markedsoppgangen og den påfølgende finanskrisen, har vi har observert flere ekstreme avkastninger enn det som ville vært tilfelle dersom avkastningene fulgte en normalfordeling. Tradisjonell Markowitz-optimering forutsetter normalfordelte avkastninger, og kan gi ikke-optimale løsninger dersom denne forutsetningen brytes. Jeg har derfor tatt utgangspunkt i en nyttefunksjon som hensyntar avkastningenes høyere ordens momenter.

Oppgaven er organisert på følgende måte: I del to presenterer jeg Markowitz' bidrag til moderne porteføljeteori, og jeg gir en oversikt over litteraturen

vedrørende diversifikasjon. I del tre viser jeg hvordan en porteføljes usystematiske risiko kan estimeres, og jeg gir en oversikt over datamaterialet som brukes videre i oppgaven. I del fire tar jeg for meg utviklingen i den usystematiske risikoen og korrelasjonen mellom selskapene på Oslo Børs. Jeg kvantifiserer sammenhengen mellom antall aksjer i en portefølje og porteføljens risiko i del fem, og jeg finner optimal porteføljestørrelse for en risikoavers investor. Jeg definerer her risiko på to forskjellige måter – avkastningenes avvik fra forventningsverdien og sannsynligheten for at porteføljen gir lavere sluttverdi enn en risikofri plassering. Avslutningsvis er en oppsummering av oppgaven gitt i del seks.

2 Teori

2.1 Risiko i aksjemarkedet

En investor som plasserer midler i en aksje ønsker å oppnå avkastning på sin investering. Det vil imidlertid være usikkerhet knyttet til den fremtidige kursutviklingen, uansett hvor god kjennskap man måtte ha til det aktuelle selskapet, aksjemarkedet og økonomien som helhet. Aksjekursen vil reagere på ny informasjon (Fama, 1970), og det er ikke mulig å predikere når ny informasjon vil ankomme eller hvorvidt den vil være positiv eller negativ med hensyn til prisutviklingen. Aksjens fremtidige kurs (og avkastning) vil dermed være en stokastisk variabel, og dens utvikling over tid vil være en stokastisk prosess (Wang, 2008). Dersom investorer er risikonøytrale, vil aksjekursen følge en martingal² (Lukas, 1978). I praksis er derimot ikke investorer risikonøytrale, men risikoaverse. For å kompensere for alternativkostnaden og systematisk risiko forventer de en positiv fremtidig prisutvikling, og en submartingal³ vil da forklare aksjeprisens utvikling (Harrison & Kreps, 1979).

² En stokastisk prosess X_n ($n = 1, 2, \dots$) med $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ for alle n er en martingal dersom $\mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = X_n$.

³ En stokastisk prosess X_n ($n = 1, 2, \dots$) med $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ for alle n er en submartingal dersom $\mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] > X_n$.

I finansielle lærebøker (Berk & DeMarzo, 2011; Bodie, Kane & Marcus, 2009) er det vanlig å bruke standardavviket til en aksjes avkastninger som et mål for aksjens risiko. En aksjes historiske standardavvik er gitt ved formelen $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}$ der $\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$ og $r_t = \frac{P_t + Div_t}{P_{t-1}} - 1$. Standardavviket er et mål for avvik fra forventningsverdien, og tar hensyn til både positive og negative avvik. Dersom sannsynlighetsfordelingen til aksjens avkastninger er symmetrisk rundt forventningen, vil standardavviket være et fullstendig mål for usikkerhet⁴. Om dette ikke er tilfelle, må vi også ta i betraktning fordelings høyere ordens momenter. For en stokastisk variabel \mathcal{X} er fordelings n-te moment definert som (Bodie et al., 2009):

$$\mu_n = \mathbb{E}[(\mathcal{X} - \mathbb{E}[\mathcal{X}])^n]$$

Enheten til μ_n vil være den n-te potensen av enheten til \mathcal{X} . For å gjøre målet enhetsløst er det vanlig å dividere med den n-te potensen av standardavviket til \mathcal{X} . Det normaliserte n-te momentet er derfor definert som:

$$\gamma_n = \frac{\mu_n}{\sigma^n} = \frac{\mathbb{E}[(\mathcal{X} - \mathbb{E}[\mathcal{X}])^n]}{\sigma^n}$$

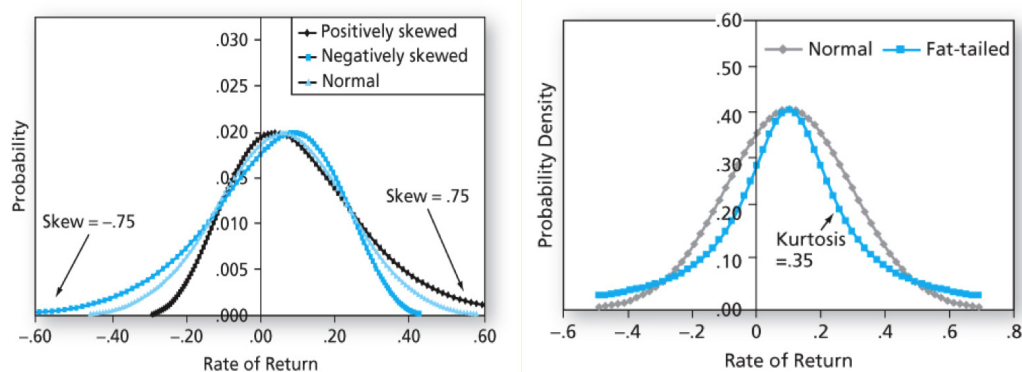
En fordelings normaliserte tredje moment kalles for skjevhet, og en symmetrisk fordeling vil ha skjevhet lik null. Positiv skjevhet innebærer at det er mer masse i fordelings høyre hale, mens negativ skjevhet innebærer at det er mer masse i den venstre halen. En investor vil foretrekke positiv skjevhet, siden dette medfører at de ekstreme positive utfallene dominerer de ekstreme negative utfallene (Scott & Horvath, 1980).

Fordelings normaliserte fjerde moment kalles for kurtose, og er et mål for graden av fete haler. En normalfordeling har kurtose lik tre, og dersom en fordeling har kurtose større enn tre sier vi at den har fet hale. Dette innebærer at

⁴ En symmetrisk sannsynlighetsfordeling kjennetegnes ved at alle momentene av oddetalls orden er null, mens alle momentene av partalls orden er funksjoner av fordelings standardavvik.

det er relativt større sannsynlighet for å observere ekstreme utfall sammenliknet med en normalfordeling. For en risikoavers investor vil forventet nytte øke med redusert kurtose (Scott & Horvath, 1980).

Figur 1 er hentet fra (Bodie et al., 2009), og illustrerer hvordan ulik grad av skjevhet og kurtose påvirker sannsynlighetsfordelinger med samme forventningsverdi og standardavvik.



Figur 1: Skjevhet og kurtose i sannsynlighetsfordelinger. Fordelingene til venstre har alle forventningsverdi 0.06 og standardavvik 0.17, men ulik skjevhet. Fordelingene til høyre har begge forventningsverdi 0.10 og standardavvik 0.20, men ulik kurtose.

2.2 Markowitz' innsikt

Bakgrunner for det som vi i dag kjenner som moderne porteføljeteori, er Harry Markowitz artikkel "Portfolio Selection" (1952). For sitt arbeid ble Markowitz i 1990 tildelt Sveriges Riksbanks pris i økonomisk vitenskap til minne om Alfred Nobel (I).

I "Portfolio Selection" viser Markowitz hvordan man kan konstruere optimale porteføljer - porteføljer som for et gitt standardavvik maksimerer avkastningen, eller som for en gitt avkastning minimerer standardavviket. Porteføljene som for et gitt standardavvik maksimerer avkastningen vil utgjøre en "efficient frontier," og Markowitz slår fast at rasjonelle investorer ikke vil investere i andre porteføljer enn disse.

I artikkelen avviser Markowitz hypotesen om at investorer kun skal maksimere forventet fremtidig avkastning. Denne hypotesen innebærer at en investor skal plassere alle sine midler i den aksjen som har hatt størst historisk avkastning - han skal legge alle eggene i en kurv. Dersom to eller flere aksjer har hatt identisk historisk avkastning, vil enhver kombinasjon av disse aksjene være like god som en hvilken som helst annen kombinasjon.

Vi tenker oss først at vi har en portefølje bestående av to enkeltaksjer: A og B. I aksje A har vi investert andelen w_A , og i aksje B har vi investert w_B . Aksje A har forventet avkastning $\mathbb{E}[r_A]$ og standardavvik σ_A , og tilsvarende størrelser for aksje B er $\mathbb{E}[r_B]$ og σ_B . Porteføljens forventede avkastning og standardavvik er da gitt ved:

$$\mathbb{E}[r_p] = w_1 \cdot \mathbb{E}[r_A] + w_2 \cdot \mathbb{E}[r_B]$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + w_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot Cov(r_A, r_B)}$$

Porteføljens forventede avkastning er lik den vektete summen av de to enkeltaksjenes forventede avkastninger, men porteføljens standardavvik er *ikke* lik den vektete summen av enkeltaksjenes standardavvik. Dersom korrelasjonskoeffisienten er mindre enn én, vil porteføljens standardavvik være lavere enn den vektete summen av enkeltaksjenes standardavvik.

Vi kan utvide denne innsikten til en portefølje bestående av n ulike aksjer. Porteføljens avkastning vil være lik den vektete summen av enkeltaksjenes avkastninger:

$$r_p = w_1 \cdot r_1 + w_2 \cdot r_2 + \dots + w_n \cdot r_n = \sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i$$

Porteføljens varians er gitt ved:

$$Var(r_p) = Cov(r_p, r_p) = Cov\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i, r_p\right) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot Cov(r_i, r_p)$$

Varians er altså lik den vektete summen av enkeltaksjenes kovarians med porteføljen. Ved å dividere begge sider av uttrykket med porteføljens standardavvik, får vi et uttrykk som illustrerer hver enkelt aksjes bidrag til porteføljens volatilitet:

$$\sigma_{r_p} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \sigma_{r_i} \cdot \rho_{r_i r_p}$$

Såfremt ikke samtlige aksjer i porteføljen er perfekt korrelert med hverandre, vil porteføljens volatilitet være lavere enn den vektete summen av enkeltaksjenes volatilitet:

$$\sigma_{r_p} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \sigma_{r_i} \cdot \rho_{r_i r_p} \leq \sum_{i=1}^n w_i \cdot \sigma_{r_i}$$

I en likevektet portefølje vil variansen være gitt ved:

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_p) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \bar{\sigma}_{ij} \end{aligned}$$

Når vi øker antall aksjer i porteføljen, vil bidraget fra den gjennomsnittlige variansen reduseres, mens bidraget fra den gjennomsnittlige kovariansen vil øke. Dersom n blir uendelig stor, er porteføljens varians utelukkende bestemt av den gjennomsnittlige kovariansen mellom enkeltaksjenes avkastninger:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(r_p) = \bar{\sigma}_{ij}$$

Dette resultatet har en svært viktig implikasjon. Vi kan redusere risikoen i en portefølje ved å inkludere flere aksjer, men vi kan ikke eliminere den.⁵ Vi kan derfor skille mellom to ulike typer risiko: Diversifiserbar risiko og ikke-diversifiserbar risiko. Den diversifiserbare risikoen kalles gjerne for usystematisk risiko, og representerer risiko som enkeltelskaper er eksponert mot. Den ikke-diversifiserbare risikoen går også under navnet systematisk risiko, og representerer risiko som økonomien som helhet er eksponert mot. Mens den systematiske risikoen er på makronivå, er den ikke-systematiske risikoen på mikronivå.

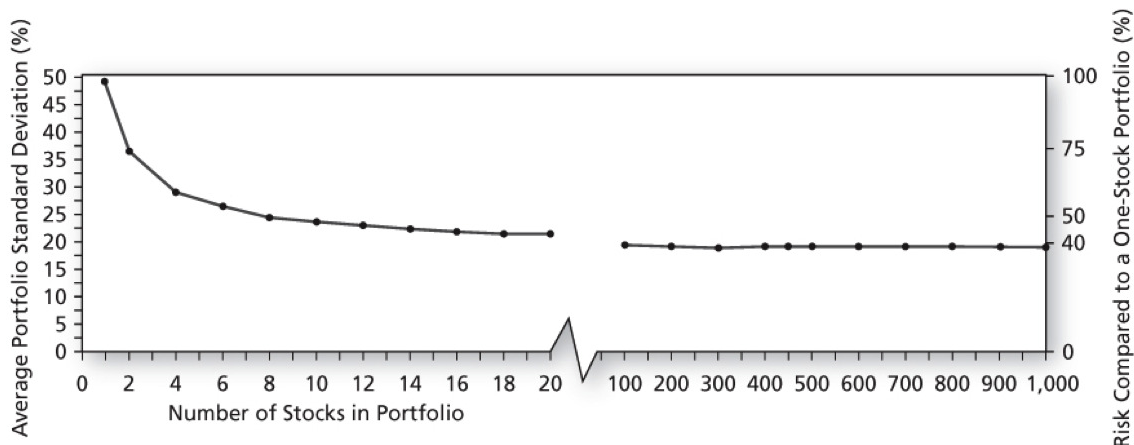
For å illustrere dette tenker vi oss at vi har investert i aksjer i oljeselskapet Statoil. Selskapets inntekter er sterkt avhengige av prisen på olje, og investeringen vår er derfor eksponert mot svingninger i oljeprisen. Vi kan redusere denne eksponeringen ved å også investere i et selskap der kostnadene er avhengige av oljeprisen, for eksempel flyselskapet Norwegian. En nedgang i oljepris vil gi lavere inntekter til Statoil, men samtidig vil drivstoffkostnadene til Norwegian reduseres. Dersom oljeprisen stiger, vil de økte drivstoffkostnadene til Norwegian i vårt tilfelle bli kompensert for i form av høyere inntekter til Statoil. Vi ser at vi bare ved å inkludere to aksjer i porteføljen har redusert eksponeringen mot én risikofaktor. Dersom vi øker antall aksjer i vår portefølje, kan vi redusere den usystematiske risikoen til et minimum.

Den systematiske risikoen kan derimot ikke reduseres gjennom økt diversifikasjon. Denne risikoen representerer en markedsrisiko som alle markedsdeltakerne er eksponert mot.

Figur 2 viser sammenhengen mellom antall aksjer i en likevektet portefølje og porteføljens standardavvik, og er hentet fra (Bodie et al., 2009). Gjennomsnittlig standardavvik for en enkeltaksje er 49.2 %. Vi kan redusere risikoen betraktelig ved å inkludere flere aksjer i porteføljen, og allerede ved 8 aksjer er porteføljerisikoen halvert sammenliknet med risikoen ved å investere i en

⁵ Vi kan eliminere porteføljens risiko dersom alle aksjene er stokastisk uavhengige, men dette er ikke tilfelle i praksis.

tilfeldig valgt enkeltaksje. Ved å inkludere et stort antall aksjer i porteføljen kan vi redusere risikoen til 19.2 %. Vi har da eliminert den usystematiske risikoen, og sitter kun igjen med systematisk risiko.



Figur 2: Effekten av diversifikasjon. Gjennomsnittlig standardavvik for de årlige avkastningene til en amerikansk enkeltaksje i perioden juni 1971 til juni 1974 var 49.2 %. I samme periode var gjennomsnittlig kovarians til avkastningene mellom to aksjer 7.06 %%. Ved å inkludere flere aksjer i en likevektet portefølje kunne man redusere risikoen betraktelig, og allerede ved åtte aksjer var risikoen halvert. Ved å inkludere alle tilgjengelige aksjer i porteføljen kunne risikoen redusert til 19,2 %.

2.3 Hvor mange aksjer må til for å få en veldiversifisert portefølje?

Den første kvantitative analysen av sammenhengen mellom antall aksjer i en portefølje og porteføljens risiko ble utført av Evans og Archer (1968), og deres konklusjon var at 10 aksjer var tilstrekkelig for å oppnå en veldiversifisert portefølje. Jennings (1971) oppjusterte antallet til 15, da denne porteføljestørrelsen gav en optimal avveining mellom avkastning og risiko. Ved å undersøke frekvensfordelingene og spredningene til forholdet mellom sluttverdiene og investeringsbeløpene for porteføljer av ulike størrelser, fant Fisher & Lorie (1970) at porteføljer bestående av åtte aksjer hadde samme frekvensfordeling som porteføljer bestående av flere aksjer. Forfatterne konkluderte dermed med at åtte aksjer var tilstrekkelig for å oppnå en diversifisert portefølje.

Tidligere funn ble bekreftet av Upson, Jessup & Matsumoto (1975), men forfatterne poengterte at måten man definerte risiko på var avgjørende for resultatene. Tidligere hadde man definert porteføljerisiko som avkastningens avvik fra gjennomsnittet, men det er også risiko forbundet med at porteføljens gjennomsnittlige avkastning kan være forskjellig fra markedets gjennomsnittlige avkastning. En konsekvens av dette er at antall aksjer som er nødvendig for å oppnå tilstrekkelig diversifikasjon øker. Selv om det er mulig å konstruere en liten portefølje som er like risikabel som markedet, må man ha en stor portefølje for å konsekvent oppnå markedsavkastning. Elton & Gruber (1977) kom med en analytisk løsning på tilnærmingen til Upson et al., og slo fast at man må ha mer enn 15 aksjer for å oppnå tilstrekkelig diversifikasjon.

Statman (1987) benyttet en prisingsmodell, og sammenliknet avkastningen man gir avkall på ved å ikke holde en veldiversifisert portefølje med kostnaden ved å investere i en veldiversifisert portefølje. Så lenge kostnaden er lavere enn tapt avkastning, er en investor bedre stilt med å investere i den veldiversifiserte porteføljen. Konklusjonen til Statman var at en optimal portefølje måtte bestå av 30 aksjer.

Artikkelen til Statman har flere mangler, og Murphy (1991) stilte spørsmålsteget ved tallmaterialet som Statman hadde benyttet. Ved å bruke tall fra en annen kilde, beregnet Murphy gjennomsnittlig standardavvik for en portefølje bestående av 10 aksjer til 20.65 %. Dette var betraktelig lavere enn Statsmans resultat, der tilsvarende størrelse var beregnet til 23.92 %. Dersom tallene til Murphy er korrekte, medfører det at antall aksjer som må til for å få en veldiversifisert portefølje er lavere enn hva Statman opprinnelig beregnet.

Newbould & Poon (1993) argumenterte for at det antall aksjer man må ha for å oppnå full diversifikasjon er mye større enn 20. Det faktiske tallet vil avhenge av hvilket aksjemarked man undersøker og hvordan man vekter aksjene i porteføljen. Ved å benytte markedsvekter fant forfatterne at porteføljens risiko beveget seg mot en horisontal asymptote for en økning i antall aksjer i

porteføljen. Asymptoten ble imidlertid nådd på tidligere tidspunkt dersom aksjene i porteføljen ble vektet likt.

I en omfattende artikkel fant Campbell, Lettau, Malkiel & Xu (2001) empirisk bevis for at den bedriftsspesifikke risikoen hadde økt betraktelig i perioden fra 1962 til 1997. Dette til tross for at volatiliteten til markedet som helhet hadde holdt seg uforandret i den samme tidsperioden. Korrelasjonen mellom avkastningene til enkeltaksjene hadde falt, mens antall aksjer som måtte til for å oppnå diversifikasjon hadde økt.

Ved å sammenlikne grensenytten med grensekostnaden viste Statman (2004) at den optimale porteføljestørrelsen var på minst 300 aksjer. Selv på dette nivået oversteg risikoreduksjonen transaksjonskostnaden ved å øke størrelsen på porteføljen med én aksje.

For en investor er det investeringens sluttverdi ved enden av investeringshorisonten som er avgjørende. Når man investerer i aksjer påtar man seg risiko. Dersom man investerer i et lite antall aksjer, vil denne risikoen være knyttet opp mot de ulike enkeltaksjene. Om man derimot investerer i et bredt utvalg av aksjer, vil den være knyttet opp mot markedet som helhet. Felles for begge tilfeller er at man ønsker å bli kompensert for risikoen. Et minstekrav til kompensasjon er derfor at man oppnår minst like god avkastning på sin plassering som ved en risikofri plassering. Domian, Louton & Racine (2007) tok utgangspunkt i en investor med en investeringshorisont på 20 år. Dersom investoren ønsket å redusere risikoen for at investeringen kunne gi lavere sluttverdi enn en tilsvarende plassering i amerikanske statsobligasjoner til én prosent, måtte porteføljen bestå av minst 164 aksjer.

Det har blitt forsket lite på diversifikasjonsgevinstene i det norske aksjemarkedet. Professor Bernt Arne Ødegaard (2006) brukte fremgangsmåten til Evans og Archer på aksjer på Oslo Børs, og konkluderte med at mye av den usystematiske risikoen ble diversifisert bort allerede ved 10 aksjer.

3 Data og metode

3.1 Estimering av den usystematiske risikoen

Det er den usystematiske risikoen som gir opphav til diversifikasjonsgevinster. Ved å inkludere flere aksjer i en portefølje vil denne risikoen kunne elimineres, og porteføljens risiko vil utelukkende være bestemt av den systematiske risikoen. En porteføljens usystematiske risiko kan ikke observeres, og må derfor estimeres på bakgrunn av en modell. Xu & Malkiel (2003) foreslår følgende dekomponering av den totale risikoen i henholdsvis systematisk- og usystematisk risiko:

Vi tar utgangspunkt i at en aksjes meravkastning utover risikofri avkastning kan skrives som summen av en systematisk- og en usystematisk komponent:

$$R_{i,t} = R_{i,t}^S + r_{i,t}$$

Dette innebærer at vi også kan dekomponere aksjens varians i en systematisk- og en usystematisk komponent:

$$Var(R_{i,t}) = Var(R_{i,t}^S) + Var(r_{i,t}) + 2Cov(R_{i,t}^S, r_{i,t})$$

Dersom vi antar at markedets meravkastning⁶ R_t^M utgjør aksjens systematiske komponent, får vi:

$$Var(R_{i,t}) = Var(R_t^M) + Var(r_{i,t}) + 2Cov(R_t^M, r_{i,t})$$

Siden $Cov(R_t^M, r_{i,t}) = 0$ per definisjon, kan uttrykket over skrives:

$$Var(R_{i,t}) = Var(R_t^M) + Var(r_{i,t})$$

⁶ Vi definere markedets meravkastning som den verdivektete summen av enkeltaksjenes meravkastninger: $R_t^M = \sum_{i=1}^n w_{i,t} R_{i,t}$

Dersom vi vekter aksje i med andelen w_i , får vi for en portefølje bestående av n ulike aksjer følgende vektete sum:

$$\begin{aligned} w_1 \cdot \text{Var}(R_{1,t}) &= w_1 \cdot \text{Var}(R_t^M) + w_1 \cdot \text{Var}(r_{1,t}) \\ w_2 \cdot \text{Var}(R_{2,t}) &= w_2 \cdot \text{Var}(R_t^M) + w_2 \cdot \text{Var}(r_{2,t}) \\ &\vdots \\ w_n \cdot \text{Var}(R_{n,t}) &= w_n \cdot \text{Var}(R_t^M) + w_n \cdot \text{Var}(r_{n,t}) \end{aligned}$$

Siden $\sum_{i=1}^n w_i \text{Var}(R_t^M) = \text{Var}(R_t^M)$, kan vi beregne den totale variansen i en portefølje som summen av porteføljens systematiske- og aggregerte usystematiske varians:

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{Var}(R_{i,t}) = \text{Var}(R_t^M) + \sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{Var}(r_{i,t})$$

Vi kan da beregne aggregert usystematisk varians på følgende måte:

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{Var}(r_{i,t}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{Var}(R_{i,t}) - \text{Var}(R_t^M)$$

$$\hat{v}_{U_{sys,t}}^2 = \hat{v}_{Total,t}^2 - \hat{v}_{Marked,t}^2$$

Ved å ta kvadratroten av begge sider av likhetstegnet får vi et mål for usystematisk risiko:

$$\hat{v}_{U_{sys,t}} = \sqrt{\hat{v}_{Total,t}^2 - \hat{v}_{Marked,t}^2} \quad (1)$$

Dersom markedsvolatiliteten endres over tid, er det ønskelig å se på forholdet mellom den usystematiske risikoen og markedsrisikoen. Et mål for dette er gitt ved:

$$\phi_t = \sqrt{\frac{\hat{v}_{Total,t}^2 - \hat{v}_{Marked,t}^2}{\hat{v}_{Marked,t}^2}} \quad (2)$$

Denne størrelsen kan vi se på som et mål for relativ diversifikasjonsgevinst – den forteller oss hvor mange enheter usystematisk risiko som er diversifisert bort for hver enhet markedsrisiko.

3.2 Datainnhenting

Informasjonen om aksjekurser, dividendeutbetalinger og markedsverdier er hentet fra Thomson Reuters Datastream. I min analyse har jeg tatt utgangspunkt i daglige observasjoner i perioden fra 1.1.2002 til 31.12.2011 for 95 aksjer. 84 av selskapene har vært børsnoterte i hele perioden, mens 11 har blitt børsnoterte i løpet av perioden. En oversikt over disse selskapene er presentert i appendiks. I gjennomsnitt har dette utvalget utgjort 89 % av markedsverdiene på Oslo Børs ved årsslutt.

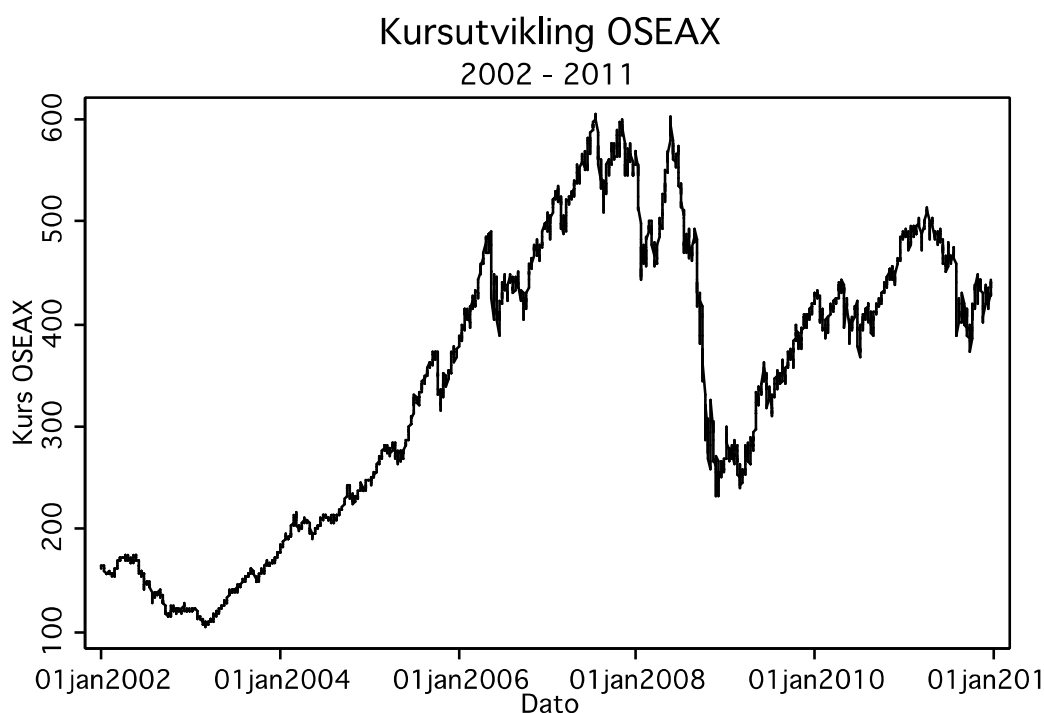
Av de 95 aksjene har jeg konstruert en verdivektet portefølje hvis formål er at dens avkastning og risiko i størst mulig grad skal gjenspeile avkastningen og risikoen i markedet som helhet.

Korrelasjonskoeffisienten mellom de månedlige standardavvikene til Oslo Børs All-Share Index (OSEAX) og porteføljen er på 0.993. Dersom vi ser på de daglige avkastningene, ligger korrelasjonskoeffisienten på 0.997. OSEAX inneholder alle børsnoterte selskaper på Oslo Børs, og den er justert for utbytte og kapitalhendelser (II). Den gir derfor et godt bilde av utviklingen på Oslo Børs. De høye korrelasjonskoeffisientene innebærer at porteføljens avkastning og standardavvik i svært høy grad gjenspeiler markedets avkastning og standardavvik.

Siden jeg har benyttet daglige observasjoner, kan vi anta at den daglige risikofrie avkastningen er tilnærmet lik null. Porteføljens daglige avkastninger vil da være lik porteføljens daglige meravkastninger.

3.3 Avkastning på Oslo Børs

Kursutviklingen for OSEAX i den aktuelle perioden er vist i figur 3:



Figur 3: Kursutviklingen på Oslo Børs All-Share Index (OSEAX) i perioden 1.1.2002 til 31.12.2011.

Oslo Børs var på sitt laveste nivå den 25. februar 2003. Herfra gikk det bratt oppover, og toppnivået ble nådd den 19. juli 2007. I løpet av denne tiden hadde børsen tredoblet sin verdi. Urolighetene i verdens finansmarkeder i andre halvdel av 2008 som følge av subprime-boblen som sprakk i USA og finanskrisen som fulgte, spredte seg til Norge og Oslo Børs. Lehman Brothers ble slått konkurs den 15. september, og Oslo Børs falt med hele 12 % de tre påfølgende dagene. Ved utgangen av 2008 var verdien på børsen mer enn halvert sammenliknet med verdien ved inngangen av året.

Mens 2008 var et svært dårlig år for investorer på Oslo Børs, var 2009 og 2010 betraktelig bedre. 2011 startet også bra, og i mars passerte OSEAX igjen 500 poeng. Andre halvdel av året ble derimot preget av økende usikkerhet vedrørende Hellas og andre EU-medlemmers statsfinanser, og dette førte til en nedgang på ni prosent for året som helhet.

En oversikt over årlig avkastning på OSEAX er gitt i tabell 1:

År	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Årlig avkastning	-25,2 %	48,0 %	39,1 %	52,2 %	33,3 %	13,5 %	-52,6 %	55,5 %	15,8 %	-9,0 %

Tabell 1: Utviklingen i årlig avkastning på OSEAX for perioden 2002 til og med 2011.

3.4 Volatilitet på Oslo Børs

Effekten av finanskrisen ser vi tydelig når vi gransker den historiske volatiliteten på Oslo Børs. Dersom vi ser på det årlige standardavviket, var volatiliteten i 2008 mer enn doblet sammenliknet med året før. Sett i forhold til 2004, som var det minst urolige året, var volatiliteten tredoblet. Uroen avtok i de to påfølgende årene, og i 2010 var volatiliteten tilbake på omtrent samme nivå som før finanskrisen.

Tabell 2 presenterer årlig volatilitet på OSEAX for den aktuelle perioden:

År	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Årlig standardavvik	20,3 %	15,0 %	14,1 %	17,3 %	23,8 %	19,4 %	45,6 %	31,2 %	20,8 %	24,2 %

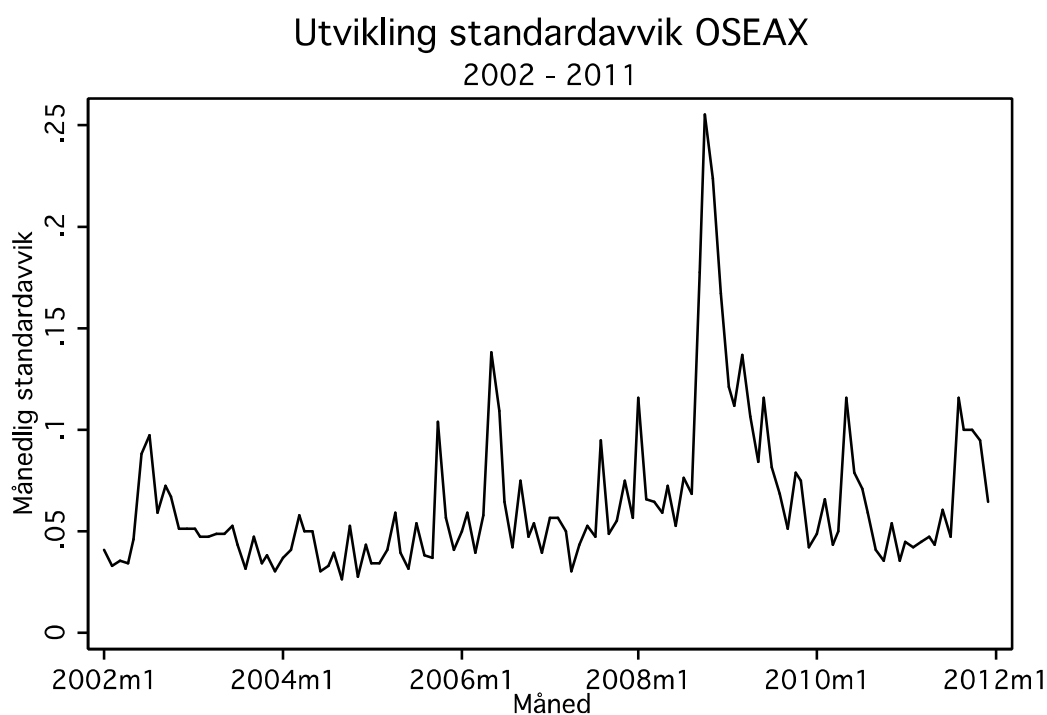
Tabell 2: Utviklingen i det årlige standardavviket til de daglige avkastningene på OSEAX i perioden 2002 til og med 2011.

Virkningene av Lehman Brothers' kollaps kommer enda tydeligere fram dersom vi ser på den månedlige volatiliteten⁷. Mens den i august 2008 lå på normale 6.9 %, økte den i september til 17.7 %. I oktober, da Oslo Børs var på sitt mest

⁷ For en måned bestående av D handelsdager er månedlig volatilitet (standardavvik) beregnet ved $\sqrt{\frac{22}{D-1} \sum_{t=1}^D (r_t - \bar{r})^2}$ der $\bar{r} = \frac{1}{D} \sum_{t=1}^D r_t$.

urolige, var det månedlige standardavviket på hele 25.5 %. Dette tilsvarer et årlig standardavvik på nærmere 86 %. Den 24. oktober vedtok Stortinget en tiltakspakke som tillot banker å bytte obligasjoner med fortrinnsrett mot statsobligasjoner (III). Dette sikret likviditet til norske banker, og dempet uroen i det norske aksjemarkedet.

Utviklingen i den månedlige volatilitet på Oslo Børs er vist i figur 4. Vi ser her en kraftig økning i andre halvdel av 2008. For hver kalendermåned i perioden januar 2002 til desember 2011 har jeg beregnet standardavviket til de daglige avkastningene på OSEAX i den aktuelle måneden. Dette har jeg multiplisert med en faktor på $\sqrt{22}$, som representerer gjennomsnittlig antall handelsdager i en måned. Jeg har deretter plottet disse verdiene mot deres respektive kalendermåneder.

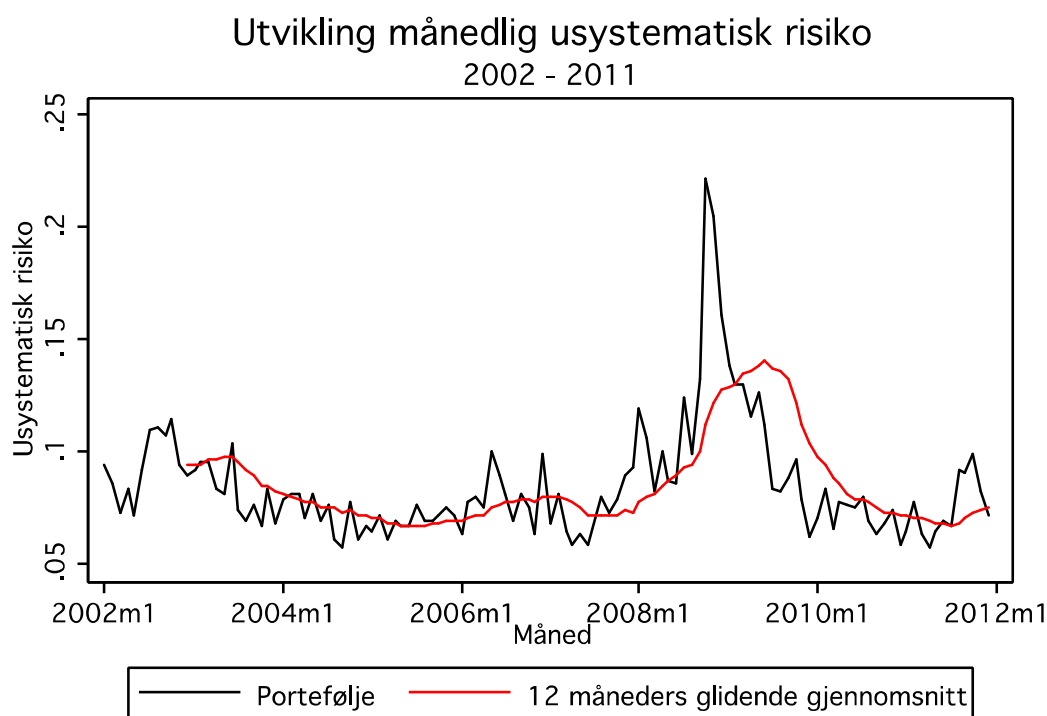


Figur 4: Utviklingen i månedlig standardavvik på OSEAX i perioden januar 2002 til desember 2011. For hver kalendermåned har jeg beregnet standardavviket til de daglige avkastningene på OSEAX i den aktuelle måneden, og multiplisert med en faktor på $\sqrt{22}$.

4 Usystematisk risiko på Oslo børs

4.1 Oversikt

Med utgangspunkt i de daglige avkastningene i perioden 1.1.2002 til 31.12.2011 har jeg ved utgangen av hver måned beregnet månedlig varians til 95 enkeltaksjer og til en verdivektet portefølje bestående av disse aksjene. Jeg har deretter estimert månedlig usystematisk risiko $\hat{v}_{U_{sys},t}$ fra formel 1. Utviklingen i den usystematiske risikoen er vist i figur 5, sammen med et 12-måneders glidende gjennomsnitt.



Figur 5: Utviklingen i den månedlige usystematiske risikoen for en verdivektet portefølje bestående av 95 aksjer i perioden januar 2002 til desember 2011. Beregningene er foretatt ved siste handelsdag i den aktuelle måneden, og er gitt ved $\hat{v}_{U_{sys},t} = \sqrt{\hat{v}_{Total,t}^2 - \hat{v}_{Marked,t}^2}$.

For hele perioden var gjennomsnittlig månedlig usystematisk risiko 8.50 %, og det høyeste nivået ble estimert i oktober 2008 på hele 22.1 %. Dersom vi ser bort fra siste halvdel av 2008 og første halvdel av 2009, så ser den usystematiske risikoen ut til å være jevnt fordelt rundt gjennomsnittsverdien.

For å undersøke hvorvidt sannsynlighetsfordelingen til den månedlige usystematiske risikoen er den samme for hele perioden, tester vi for stasjonæritet i tidsserien. Vi sier at en tidsserie er *svakt stasjonær* dersom følgende tre betingelser er oppfylt (Wang, 2008):

- i. $\mathbb{E}[X(t)] = \mu$ for alle t
- ii. $Var[X(t)] < \infty$ for alle t
- iii. $Cov[X(t), X(t + j)] = \gamma_j$ for alle j og t

En svakt stasjonær tidsserie er med andre ord en tidsserie som kjennetegnes av at forventningsverdien og variansen ikke avhenger av tidspunktet t , og at autokovariansen kun avhenger av tidsintervallet j .

En *strengt stasjonær* tidsserie tilfredsstiller betingelse (i) og (ii), samtidig som betingelsene utvides til høyere ordens momenter. Vektorene $\{X(t_1), X(t_2), \dots, x(t_n)\}$ og $\{X(t_1 + j), X(t_2 + j), \dots, x(t_n + j)\}$ vil da ha den samme simultane sannsynlighetsfordelingen. Dersom tidsserien ikke er stasjonær, sier vi at den inneholder en enhetsrot.

Vi tester for stasjonæritet ved å utføre en utvidet Dickey Fuller-test (Dickey & Fuller, 1981) på den aktuelle tidsserien. Vår nullhypotese er at tidsserien inneholder en enhetsrot. Denne testes mot en alternativ hypotese om stasjonæritet i tidsserien. Ettersom vi kan se tegn til en negativ tidstrend i utviklingen til den usystematiske risikoen, tar vi utgangspunkt i følgende modell:

$$\hat{v}_{U_{sys},t} = \mu + \gamma t + \rho \hat{v}_{U_{sys},t-1} + \sum_{i=1}^p \rho_i \Delta \hat{v}_{U_{sys},t-i} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Delta \hat{v}_{U_{sys},t} = \mu + \gamma t + (\rho - 1) \hat{v}_{U_{sys},t-1} + \sum_{i=1}^p \rho_i \Delta \hat{v}_{U_{sys},t-i} + \varepsilon_t$$

Testobservatoren for en utvidet DF-test er gitt ved:

$$DF_{\tau} = \frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$$

Dersom testobservatoren er mindre enn den kritiske verdien, kan vi forkaste vår nullhypotese om en enhetsrot. Vi konkluderer da med at tidsserien er stasjonær.

Før vi kan utføre testen må vi først bestemme antall lags i modellspefikasjonen. Greene (2007) og Brooks (2008) foreslår flere metoder for dette. Man kan spesifisere modellen med et vilkårlig antall lags, og justere dette helt til det siste er statistisk signifikant. Man kan også ta utgangspunkt i dataens frekvens, eller finne den størrelsen som minimerer et informasjonskriterium slik som Akaike og Schwarz informasjonskriteria. I denne oppgaven velger jeg å inkludere et antall lags slik at det siste er statistisk signifikant på 5 %-nivå.

Resultatene av testen er vist i tabell 3. Vi kan forkaste hypotesen om enhetsrot for et signifikansnivå på 5 %, og konkludere med at tidsserien er stasjonær. Dette innebærer at forventningsverdien og spredningen til den månedlige usystematiske risikoen på Oslo Børs er lik for hele perioden. Finanskrisen har med andre ord ikke påvirket fordelingen til den usystematiske risikoen.

Dickey-Fuller test for unit root		Number of obs = 119			
Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller				
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value		
Z(t)	-3.621	-4.034	-3.447	-3.147	
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0281					
D.si	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
si					
L1.	-.2036414	.056243	-3.62	0.000	-.3150379 -.092245
_trend	9.03e-06	.0000416	0.22	0.828	-.0000733 .0000914
_cons	.0165891	.0054328	3.05	0.003	.0058288 .0273494

Tabell 3: Resultatet av en utvidet Dickey-Fuller-test på fordelingen til den månedlige usystematiske risikoen for en verdivektet portefølje bestående av 95 aksjer i perioden januar 2002 til desember 2011. Vi forkaster nullhypotesen om enhetsrot på 5 %-signifikantnivå, og konkluderer med at tidsserien er stasjonær.

Ved å forkaste hypotesen om enhetsrot for en trendstasjonær serie forkastet vi også hypotesen om en stokastisk trend. Vi kan da teste for en deterministisk trend ved å se på t-verdien til trendkoeffisienten γ . Denne er ikke signifikant på 5%-nivå, slik at trenden vi ser antydning til i figur 5 ikke er statistisk signifikant.

4.2 En modell for usystematisk risiko på Oslo Børs

For å bedre forstå utviklingen til den usystematiske risikoen må vi forsøke å modellere den underliggende prosessen på en best mulig måte.

Når vi skal modellere en prosess som har generert en observert tidsserie, er det vanlig å ta utgangspunkt i to typer prosesser (Brooks, 2008): Glidende gjennomsnittsprosesser (MA-prosesser) og autoregressive prosesser (AR-prosesser).

Dersom den underliggende prosessen er en MA-prosesser, vil X_t bestemmes av den nåværende og tidligere verdier av feilleddet ε_t . En MA-prosesser av orden q er derfor gitt ved:

$$X_t = \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

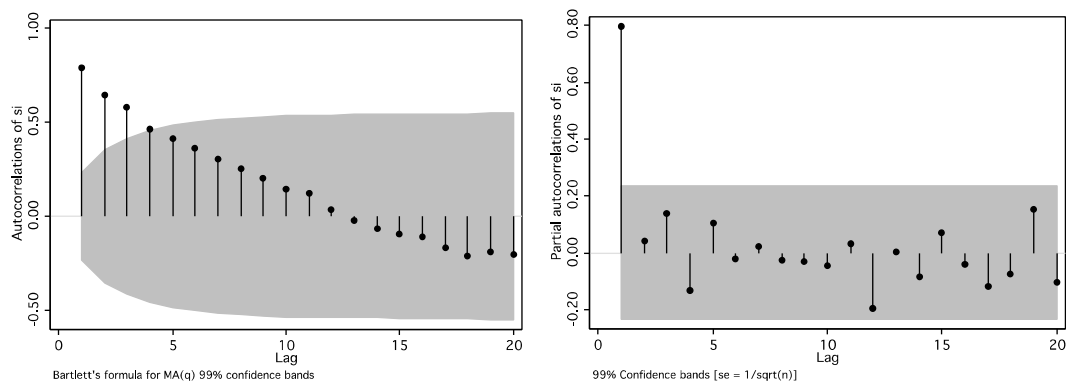
Dersom en AR-prosesser ligger til grunn, vil den nåværende verdien av X_t avhenge av dens tidligere verdier samt feilleddet ε_t . En AR-prosesser av orden p er da gitt ved:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \delta_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Ved å se på autokorrelasjonsfunksjonen og den partielle autokorrelasjonsfunksjonen til tidsserien kan vi si noe om den underliggende prosessen. En MA(q)-prosesser kjennetegnes ved at autokorrelasjonsfunksjonen (acf) trunkerer for lag større enn q , mens den partielle autokorrelasjonsfunksjonen (pacf) gradvis konvergerer mot null. En AR(p)-prosesser kjennetegnes derimot ved at den partielle autokorrelasjonsfunksjonen

trunkerer for lag større enn p , mens autokorrelasjonsfunksjonen gradvis konvergerer mot null.

I henhold til Box-Jenkins-tilnærmingen (Box & Jenkins, 1976) er første steg i modelleringen å identifisere den mest hensiktsmessige modellspesifikasjonen. Dette gjøres grafisk ved å studere autokorrelasjonsfunksjonen og den partielle autokorrelasjonsfunksjonen. I figur 6 er *acf* og *pacf* for den månedlige usystematiske risikoen for porteføljen vist:



Figur 6: Autokorrelasjonsfunksjonen (acf) og den partielle autokorrelasjonsfunksjonen (pacf) for den månedlige usystematiske risikoen ($\hat{v}_{U_{sys,t}}$). Egenskapene ved acf og pacf indikerer at vi kan modellere utviklingen i den månedlige usystematiske risikoen som en AR(1)-prosess.

Av figurene fremkommer det tydelig at prosessen kan modelleres som en AR(1)-prosess: *acf* konvergerer gradvis mot null, mens *pacf* er null for alle lag større enn én. Gjennom OLS estimeres modellen til:

$$X_t = 0.0171 + 0.797X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Fra Wolds dekomponeringsteorem (Greene, 2007) har vi at enhver stasjonær AR(1)-prosess kan uttrykkes som en MA(∞)-prosess. Vi kan derfor uttrykke vår modell som:

$$X_t - \frac{\mu}{1 - \delta} = \varepsilon_t + \delta\varepsilon_{t-1} + \delta^2\varepsilon_{t-2} + \dots + \delta^\infty\varepsilon_{t-\infty}$$

Siden $\delta = 0.797 < 1$ vil sjokk som systemet utsettes for gradvis miste sin effekt. Kollapsen til Lehman Brothers og den påfølgende børsuroen er et eksempel på et slikt sjokk. Dette hadde umiddelbart en stor effekt på den usystematiske risikoen på Oslo Børs. Vi ser i figur 5 at den estimerte usystematiske risikoen var tilbake på et normalt nivå igjen i juni 2010. Dersom vi antar at det siste sjokket i forbindelse med finanskrisen rammet Oslo Børs i oktober 2009, så stemmer dette bra med vår modell. Effekten av sjokket avtok gradvis, og etter åtte måneder var den redusert med 83.7 % av sin opprinnelige verdi. Dersom δ i modellen hadde vært lavere enn 0.797, ville det tatt kortere tid før den usystematiske risikoen hadde normalisert seg. Det ville derimot tatt lengre tid dersom δ hadde vært større enn den estimerte verdien.

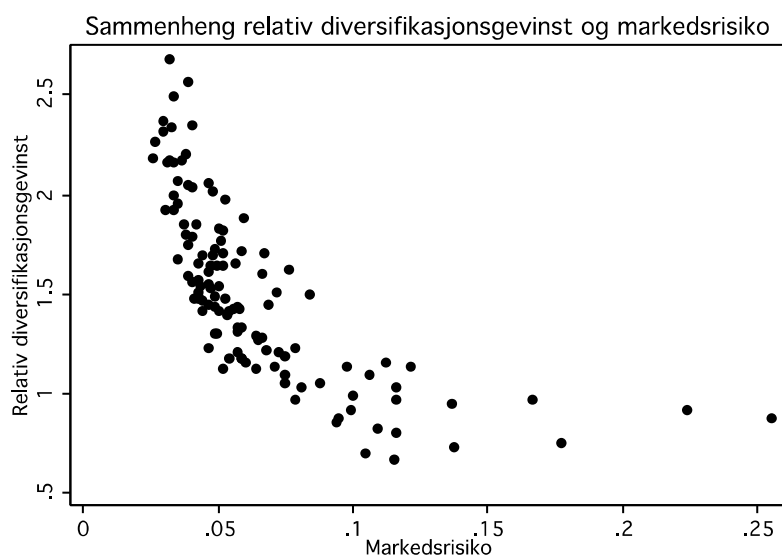
For å kontrollere at modellspesifikasjonen og estimatene er tilfredsstillende, er det vanlig å overspesifisere modellen samt å analysere residualene til den foreslåtte modellen. Dersom vi spesifiserer modellen vår som en ARMA(p,q) med $p > 1$ og $q > 0$, vil ingen av de nye koeffisientene være signifikant forskjellig fra null. Det er heller ingen struktur i residualene til den opprinnelige AR(1) modellen. Vi kan derfor konkludere med at vår modell forklarer utviklingen i den usystematiske risikoen på Oslo Børs for den aktuelle perioden.

4.3 Relativ diversifikasjonsgevinst

Den usystematiske risikoen angir diversifiserbar risiko, og representerer diversifikasjonsgevinsten ved at man holder en veldiversifisert portefølje. For en investor er det ønskelig at diversifikasjonsgevinsten ikke reduseres for høyere markedsrisiko. Hele formålet med diversifikasjon er å redusere risiko, og behovet for redusert risiko er følgelig størst i urolige tider. Dersom den relative diversifikasjonsgevinsten ϕ_t er en positivt stigende funksjon av markedsrisikoen, vil en investor som holder en veldiversifisert portefølje bli ytterligere belønnet for dette i perioder med økt markedsuro.

For å finne sammenhengen mellom den relative diversifikasjonsgevinsten og markedsrisikoen, har jeg for hver måned i perioden januar 2002 til desember

2011 beregnet markedsrisikoen og ϕ_t fra formel 2 på det aktuelle tidspunktet. Jeg har deretter plottet disse størrelsene mot hverandre, og resultatet er vist i figur 7.



Figur 7: Sammenhengen mellom den relative diversifikasjonsgevinsten (ϕ_t) til en verdivektet portefølje bestående av 95 aksjer og den månedlige markedsrisikoen for perioden januar 2002 til desember 2011. I perioder med stor markedsuro er den relative gevinsten liten, og man blir i mindre grad belønnet for å holde en veldiversifisert portefølje sammenliknet med rolige perioder.

Av figuren ser vi tydelig at den relative diversifikasjonsgevinsten er betraktelig lavere i perioder med stor markedsuro sammenliknet med mindre urolige perioder. Man blir belønnet for å holde en veldiversifisert portefølje under normale markedsomstendigheter, men denne belønningen reduseres med økt markedsuro. Dette kommer tydelig fram når vi sammenlikner utviklingen fra august til september 2008. August var på mange måter en normal børs måned. Det månedlige standardavviket til de daglige avkastningene på Oslo Børs All-Share indeks lå på 6.9 %, og den usystematiske risikoen var 1.44 ganger markedsrisikoen. Den neste måneden var derimot alt annet enn normal – Lehman Brothers ble slått konkurs, og usikkerhet i finansmarkedene verden over førte til at det månedlige standardavviket på Oslo Børs økte til 17.7 %. Den usystematiske risikoen denne måneden utgjorde derimot bare 0.75 ganger markedsrisikoen. Mens man for hver prosent markedsrisiko i august kunne diversifisere bort 1.45 prosent usystematisk risiko, kunne man i september bare

diversifisere bort 0.75 prosent usystematisk risiko for hver prosent markedsrisiko. Den relative diversifikasjonsgevinsten ble med andre ord halvert.

Dette er i tråd med resultater fra tidligere studier. Ang & Chen (2002) viste at korrelasjonen mellom amerikanske aksjer og det amerikanske aksjemarkedet er betraktelig større i perioder med kraftige markedsnedgang sammenliknet med perioder med kraftige oppgang. Diversifikasjonsgevinsten er med andre ord minst når en investor trenger den mest.

Dette rammer investorer ekstra hardt, siden individuelle investorer har asymmetriske nyttefunksjoner (Levy & Levy, 2009). Slike nyttefunksjoner kjennetegnes ved at verdien av den negative nytten forbundet med å tape et beløp d er større enn verdien av nytten ved å vinne et tilsvarende beløp:

$$|U(\text{gain} = -d)| > |U(\text{gain} = d)|$$

Dette medfører at incentivet til redusere usikkerhet er større når usikkerheten er stor. Vi har sett at en strategi der man holder en veldiversifisert lokal portefølje med aksjer fra ett og samme land ikke gir tilstrekkelig diversifikasjon i nedgangstider. Man kan inkludere aksjer fra andre land i porteføljen, men også korrelasjonen mellom ulike lands aksjemarkeder øker i tider med markedsnedgang (Longin & Solnik, 2001). Økt globalisering har også økt sannsynligheten for at to aksjemarkeder skal krasje samtidig (Beine, Cosma & Vermeulen, 2010) Diversifikasjonsgevinsten ved å også inkludere aksjer fra utenlandske selskaper i porteføljen vil derfor være liten i tider med nedgang i det hjemlige aksjemarkedet.

Kritzman, Lowry & Van Royen (2001) viste at korrelasjonene mellom ulike aktivaklasser derimot ble redusert i perioder med markedsturbulens. Spesielt gull har vist seg å stige i verdi når aksjekursene stuper (Baur & Lucey, 2010). I kjølevannet av finanskrisen har vi sett at prisen på gull har steget til historiske høyder. Selv om gull ikke gir noen utbetalinger mens man holder det, har investorer blitt tiltrukket av dets iboende verdi.

4.4 Gjennomsnittlig korrelasjonskoeffisient mellom enkeltaksjene

Det kan være interessant å studere utviklingen i korrelasjonen mellom enkeltaksjene i perioden, og hvilken sammenheng det er mellom gjennomsnittlig korrelasjon og diversifikasjonsgevinsten. Siden korrelasjonen mellom enkeltaksjer i stor grad skyldes felles risikofaktorer, kan vi forvente en negativ sammenheng mellom gjennomsnittlig korrelasjon og graden av diversifikasjon.

Med en portefølje bestående av 95 aksjer kan beregningen av den gjennomsnittlige korrelasjonskoeffisienten mellom selskapenes avkastninger bli en særdeles brysom affære. Dette fordi vi for hvert tidspunkt t i den aktuelle perioden må beregne 4465 korrelasjonskoeffisienter. Beregningen kan derimot forenkles betraktelig dersom vi har en veldiversifisert portefølje (Kearney & Poti, 2007).

Markowitz viste at variansen til en portefølje bestående av n aksjer kan beregnes ved følgende uttrykk:

$$\begin{aligned}\sigma_{p,t}^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,t} w_{j,t} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t} \rho_{ij,t} \\ &= \sum_{i=1}^n w_{i,t}^2 \sigma_{i,t}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{i,t} w_{j,t} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t} \rho_{ij,t}\end{aligned}$$

$w_{i,t}$ angir andelen som er investert i aksje i på tidspunkt t , $\sigma_{i,t}$ angir standardavviket til aksje i på tidspunkt t og $\rho_{ij,t}$ angir korrelasjonskoeffisienten mellom aksje i og aksje j på tidspunkt t .

Vi innfører nå en størrelse $\bar{\rho}_t$ som angir gjennomsnittlig korrelasjon mellom de n ulike aksjene. Dersom vi skriver uttrykket for porteføljevariansen på matriseform, er gjennomsnittlig korrelasjon en størrelse som på hvert tidspunkt t er slik at:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & 1 & & \rho_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\rho} & \dots & \bar{\rho} \\ \bar{\rho} & 1 & & \bar{\rho} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{\rho} & \bar{\rho} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vi kan da skrive uttrykket for porteføljens varians som:

$$\sigma_{p,t}^2 = \sum_{i=1}^n w_{i,t}^2 \sigma_{i,t}^2 + \bar{\rho}_t \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{i,t} w_{j,t} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t}$$

Dersom alle aksjene i porteføljen var uavhengige ($\rho_{ij,t} = 0 \ \forall i \neq j$), ville porteføljeveriansen vært gitt ved $\sigma_{Uav,t}^2 = \sum_{i=1}^n w_{i,t}^2 \sigma_{i,t}^2$.

Om alle aksjene derimot var perfekt korrelerte ($\rho_{ij,t} = 1 \ \forall i \neq j$), ville porteføljeveriansen vært gitt ved $\sigma_{Perf,t}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,t} w_{j,t} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t}$

Dermed kan vi skrive uttrykket for porteføljeveriansen som:

$$\sigma_{p,t}^2 = \sigma_{Uav,t}^2 + \bar{\rho}_t (\sigma_{Perf,t}^2 - \sigma_{Uav,t}^2)$$

Løst for $\bar{\rho}_t$ har vi da:

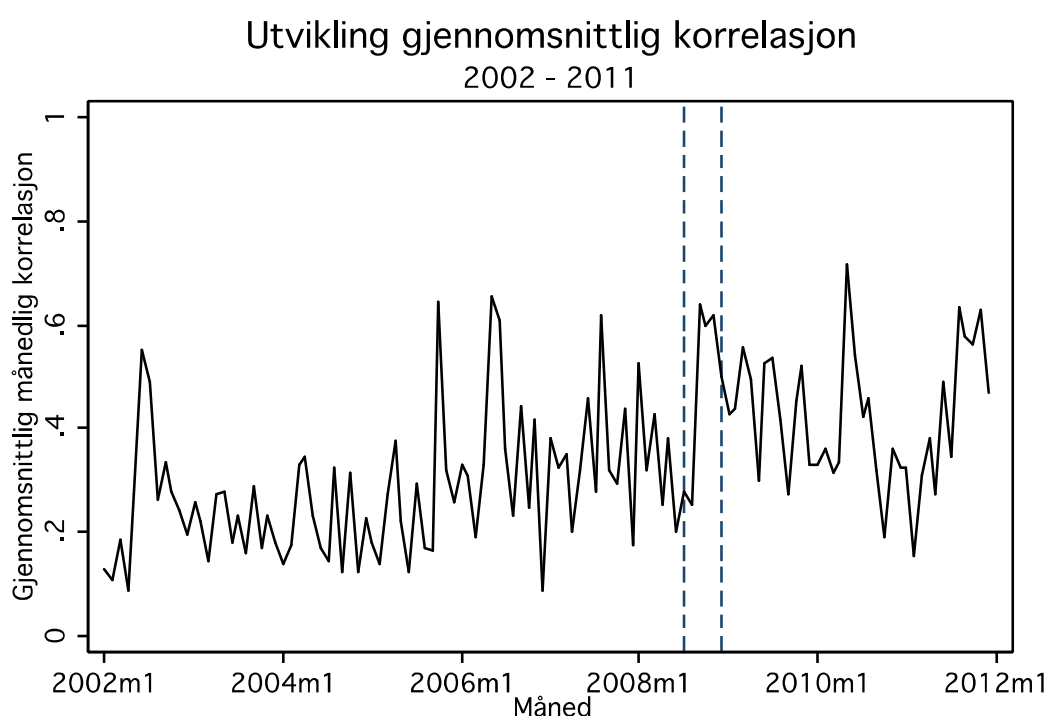
$$\bar{\rho}_t = \frac{\sigma_{p,t}^2 - \sigma_{Uav,t}^2}{\sigma_{Perf,t}^2 - \sigma_{Uav,t}^2} \quad (3)$$

Dersom vi har en veldiversifisert likevektet portefølje vil $\sigma_{Uav,t}^2 = 0$, siden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{i,t}^2 = 0$. Vi kan da beregne gjennomsnittlig korrelasjonskoeffisient på tidspunkt t ved:

$$\bar{\rho}_t = \frac{\sigma_{p,t}^2}{\sigma_{Perf,t}^2} = \frac{\sigma_{p,t}^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,t} w_{j,t} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t}} = \frac{\sigma_{p,t}^2}{(\sum_{i=1}^n w_{i,t} \sigma_{i,t})^2}$$

Dersom vi har en veldiversifisert *verdivektet* portefølje, vil uttrykket over være en tilnærming. Hvorvidt tilnærmingen er god eller dårlig, vil avhenge av hvordan den aktuelle porteføljen er konstruert. Jeg ønsker å beregne gjennomsnittlig korrelasjon i en verdivektet portefølje bestående av 95 aksjer, hvor et lite antall aksjer dominerer porteføljen. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n w_{i,t}^2 \sigma_{i,t}^2$ vil da være ulik null, og $\bar{\rho}_t$ må beregnes ut fra det komplette uttrykket gitt ved formel 3.

For hver kalendermåned i perioden januar 2002 til desember 2011 har jeg beregnet gjennomsnittlig korrelasjon mellom avkastningene til de ulike selskapene i den aktuelle måneden ved formel 3. Utviklingen i $\bar{\rho}_t$ i perioden er vist i figur 8.



Figur 8: Gjennomsnittlig korrelasjon mellom avkastningene til enkeltaksjene i en verdivektet portefølje bestående av 95 aksjer. Ved utgangen av hver måned i perioden januar 2002 til desember

2011 er korrelasjonen beregnet ved $\bar{\rho}_t = \frac{\sigma_{p,t}^2 - \sigma_{av,t}^2}{\sigma_{perf,t}^2 - \sigma_{av,t}^2}$.

I figuren ser vi antydning til en stigende trend i den gjennomsnittlige korrelasjonen. For å teste om denne er statistisk signifikant utfører vi en utvidet Dickey Fuller-test på følgende modell:

$$\hat{\rho}_t = \mu + \gamma t + \varphi \hat{\rho}_{t-1} + \varphi_1 \Delta \hat{\rho}_{t-1} + \varepsilon_t$$

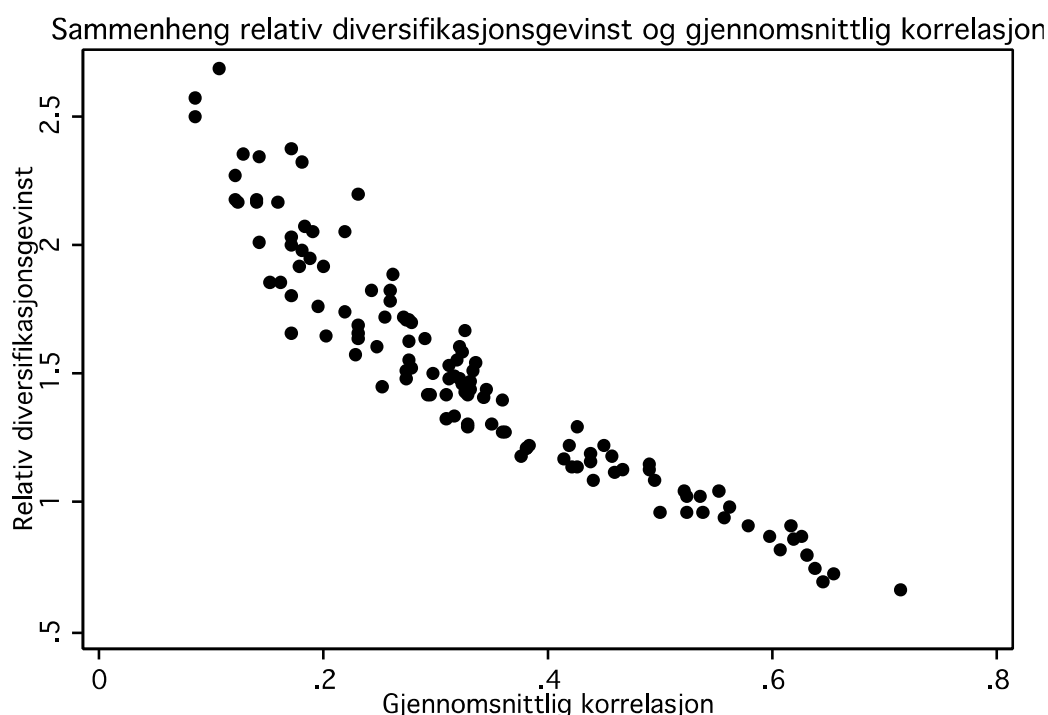
Testresultatene er oppsummert i tabell 4. Vi avviser hypotesen om enhetsrot i tidsserien, og kan teste for en deterministisk trend ved å se på t-verdien til koeffisienten γ . Denne er signifikant på 1 %-nivå, og vi kan konkludere med at det er en positiv tidstrend i den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom avkastningene til enkeltaksjene i porteføljen.

Augmented Dickey-Fuller test for unit root		Number of obs = 118			
Test Statistic	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value		
Z(t)	-6.071	-4.034	-3.448	-3.148	
Mackinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000					
D.averagek~r	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
averagekorr					
L1.	-.7028021	.1157694	-6.07	0.000	-.9321404 -.4734638
LD.	-.0917416	.0936564	-0.98	0.329	-.2772742 .0937909
_trend	.0014717	.0004225	3.48	0.001	.0006348 .0023086
_cons	.1489231	.0334429	4.45	0.000	.0826729 .2151733

Tabell 4: Resultatene av en utvidet Dickey Fuller-test på utviklingen i den gjennomsnittlige månedlige korrelasjonen mellom de daglige avkastningene til enkeltaksjene i en verdivektet portefølje bestående av 95 aksjer i perioden januar 2002 til desember 2011. Tidsserien er stasjonær, og vi konkluderer med at den inneholder en positiv deterministisk tidstrend.

I figur 8 er andre halvdel av 2008 av spesiell interesse, og denne perioden er derfor markert med to stiplede vannrette linjer. I september var den gjennomsnittlige korrelasjonen nesten tredoblet sammenliknet med den foregående måneden, og korrelasjonen holdt seg høy ut året. Dette indikerer at samvariasjonen mellom enkeltaksjene øker i tider med kraftig markedsnedgang. Den høyeste korrelasjonen ble målt i mai 2010 på hele 0.715. På dette tidspunktet var usikkerheten vedrørende Hellas' statsgjeld på sitt høyeste, og Oslo Børs sank med 9 % i løpet av måneden.

Jeg ønsker nå å se på sammenhengen mellom den relative diversifikasjonsgevinsten – forholdet mellom usystematisk risiko og markedsrisiko – og gjennomsnittlig korrelasjon. Fra Markowitz har vi at økt gjennomsnittlig korrelasjon vil lede til redusert diversifikasjonsgevinst. For hver måned i perioden januar 2002 til desember 2011 har jeg beregnet ϕ_t fra formel 2 og $\bar{\rho}$ fra formel 3. I figur 9 har jeg plottet disse to størrelsene mot hverandre.



Figur 9: Sammenhengen mellom relativ diversifikasjonsgevinst (ϕ_t) og gjennomsnittlig korrelasjon mellom avkastningene til enkeltaksjene ($\bar{\rho}_t$) for en verdivektet portefølje bestående av 95 aksjer. For hver måned i perioden januar 2002 til desember 2011 er størrelsene beregnet ved henholdsvis

$$\phi_t = \sqrt{\frac{\hat{v}_{Total,t}^2 - \hat{v}_{Marked,t}^2}{\hat{v}_{Marked,t}^2}} \text{ og } \bar{\rho}_t = \frac{\sigma_{\bar{p},t}^2 - \sigma_{Uav,t}^2}{\sigma_{Perf,t}^2 - \sigma_{Uav,t}^2}. \text{ Vi ser en klar negativ sammenheng mellom de to størrelsene.}$$

Av figuren ser vi en klar negativ sammenheng – økt gjennomsnittlig korrelasjon leder til redusert relativ diversifikasjonsgevinst. Da den gjennomsnittlige korrelasjonen var 0.085 kunne man diversifisere bort usystematisk risiko lik 2.57 ganger markedsrisikoen. Da den gjennomsnittlige korrelasjon var 0.72. kunne man derimot kun diversifisere bort usystematisk risiko tilsvarende 0.67 ganger markedsrisikoen. Diversifikasjonsgevinsten er dermed størst når markedet er forholdsvis rolig og den gjennomsnittlige korrelasjon mellom

selskapenes avkastninger er liten. I krisetider med kraftig markedsuro og høy korrelasjon mellom selskapenes avkastninger vil diversifikasjonsgevinsten være lav.

4.5 Usystematisk risiko i de ulike sektorene

For å undersøke i hvilken grad de ulike sektorene på Oslo Børs er eksponert mot usystematisk risiko, klassifiserer jeg de 95 enkeltaksjene i henhold til "The Global Industry Classification Standard" (GICS) (IV). Denne standarden ble introdusert av Morgan Stanley Capital International, og den blir anvendt av flere aksjebørser – deriblant Oslo Børs. Standarden plasserer selskapene i én av ti sektorer:

GICS	Sektor
10	Energi
15	Materialer
20	Industri
25	Forbruksvarer
30	Konsumvarer
35	Helsevern
40	Finans
45	IT
50	Telekommunikasjon
55	Forsyning

Tabell 5: GICS-klassifikasjon av de ulike sektorene på Oslo Børs.

Aksjeutvalget mitt reflekterer forskjellen i antall børsnoterte selskaper i de ulike sektorene. Energi- og industrisektoren har flest børsnoterte selskaper, mens telekommunikasjons- og forsyningssektoren har færrest. Telekommunikasjonssektoren skiller seg spesielt ut, da Telenor utgjør 99.7 % av markedsverdien i denne sektoren. Dersom man holder en verdivektet portefølje bestående av Telenor og Telio, vil porteføljerisikoen være så godt som lik den aggregerte

totale risikoen, og den usystematiske risikoen vil være tilnærmet lik null. Jeg har derfor sett bort fra denne sektoren i beregningene av den usystematiske industririsikoen.

Jeg definerer usystematisk industrivarians som differansen mellom den verdivektede summen av variansen til de daglige avkastningene til selskapene i sektor j og variansen til en verdivektet portefølje bestående av de samme selskapene:

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{Var}(r_{i|j,t}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{Var}(R_{i|j,t}) - \text{Var}(R_t^j)$$

Dette skriver vi:

$$\hat{v}_{U_{sys}|j,t}^2 = \hat{v}_{Total|j,t}^2 - \hat{v}_{Sektor\ j,t}^2$$

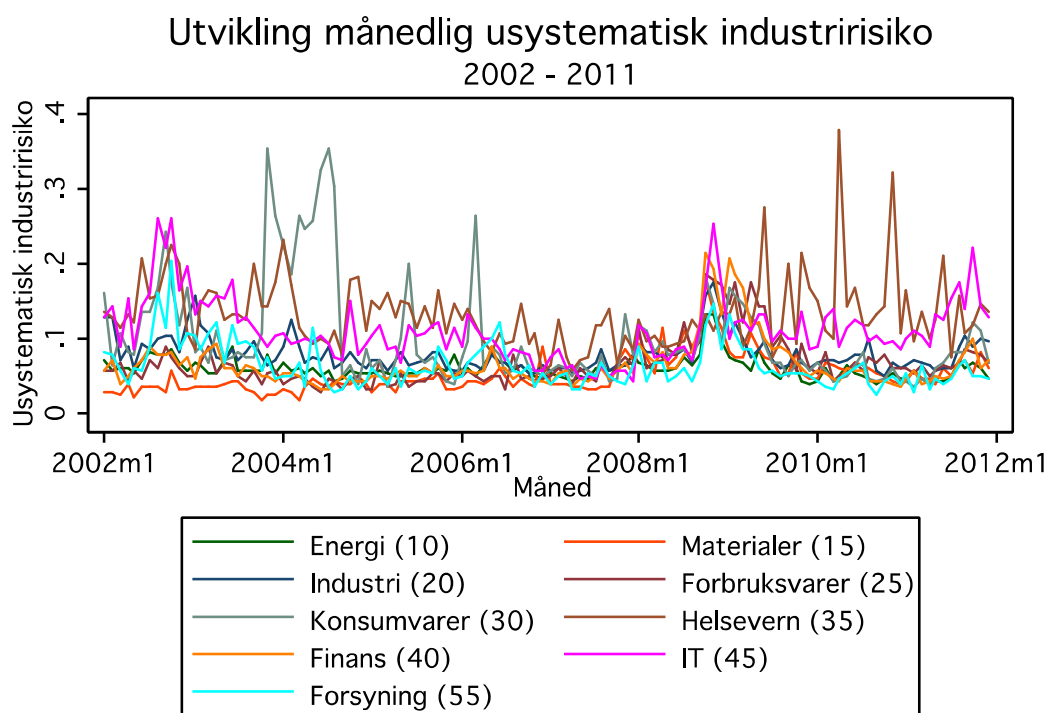
Ussystematisk industririsiko beregnes dermed ved:

$$\hat{v}_{U_{sys}|j,t} = \sqrt{\hat{v}_{Total|j,t}^2 - \hat{v}_{Sektor\ j,t}^2} \quad (4)$$

Den usystematiske industririsikoen kan forstås som den risikoen man diversifiserer bort ved å holde en verdivektet portefølje av aksjer i samme industrisektor. Den representerer derfor sektorens diversifikasjonsgevinst.

Helsevern- og IT-sektoren har hatt størst gjennomsnittlig månedlig usystematisk industririsiko for hele perioden, med henholdsvis 13.4 % og 11.3 %. At helsevernsektoren kjennetegnes av en høy andel usystematisk risiko er ikke overraskende. Vi ser store svingninger i aksjekursen til selskapene i denne sektoren, og det er forholdsvis lav korrelasjon mellom selskapenes avkastninger. I denne bransjen er det derfor en relativ høy andel bedriftsspesifikk risiko, og man oppnår dermed en høy diversifikasjonsgevinst ved å investere i en portefølje bestående av de ulike selskapene. På den andre enden av skalaen finner vi material- og energisektoren, med gjennomsnittlig månedlig

usystematisk industririsiko på henholdsvis 5.4 % og 6.2 %. Dette er sektorer som kjennetegnes av forholdsvis høy korrelasjon mellom avkastningene til de ulike selskapene, slik at diversifikasjonsgevinsten blir relativt liten. En oversikt over utviklingen i den månedlige usystematiske industririsikoen i de ulike sektorene er vist i figur 10. En oversikt over utviklingen i hver enkeltsektor er gitt i appendiks.



Figur 10: Månedlig usystematisk industririsiko for de ulike sektorene i perioden januar 2002 til desember 2011. Tallene er beregnet ved at vi for hver kalendermåned i perioden tar kvadratroten av den usystematiske industrivariansen, som er definert som differansen mellom den aggregerte variansen og porteføljevariansen for en verdivektet portefølje bestående av aksjer fra samme sektor. For perioden som helhet hadde helsevernssektoren høyest gjennomsnittlig månedlig usystematisk risiko, mens materialsektoren hadde lavest.

Den usystematiske risikoen i en sektor representerer sektorens faktiske diversifikasjonsgevinst. For å kunne si noe om sektorenes ytterligere diversifikasjonspotensiale, må vi se på samvariasjonen mellom avkastningene til de ulike industriporteføljene. Jeg har beregnet korrelasjonskoeffisientene mellom de daglige avkastningene til de ulike industriporteføljene, og korrelasjonsmatrisen for perioden som helhet er vist i tabell 6. Av beregningene

fremkommer det at gjennomsnittlig korrelasjonskoeffisient i tiårsperioden er 0.401.

GICS	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Energi (10)	1									
Materialer (15)	0,727	1								
Industri (20)	0,648	0,644	1							
Forbruksvarer (25)	0,421	0,444	0,533	1						
Konsumvarer (30)	0,356	0,353	0,395	0,269	1					
Helsevern (35)	0,282	0,294	0,336	0,288	0,200	1				
Finans (40)	0,585	0,607	0,643	0,530	0,371	0,303	1			
IT (45)	0,540	0,547	0,660	0,467	0,319	0,312	0,565	1		
Telekom (50)	0,440	0,457	0,490	0,366	0,280	0,248	0,477	0,450	1	
Forsyning (55)	0,259	0,260	0,320	0,212	0,177	0,180	0,285	0,326	0,186	1

Tabell 6: Korrelasjonsmatrisen for korrelasjonen mellom avkastningene til de ulike industriporteføljene i perioden 1.1.2002 til 31.12.2011. Gjennomsnittlig industrikorrelasjon for hele perioden er 0.401

Helsevernsektoren har lavest gjennomsnittlig korrelasjon med de andre sektorene (0.271). Ikke bare er korrelasjonen mellom avkastningene til de ulike selskapene i helsevernsektoren lav - det er også lav korrelasjonen mellom avkastningene til helsevernporteføljen og de andre industriporteføljene.

I den andre enden av skalaen finner vi industrisektoren med en gjennomsnittlig korrelasjon med de andre industriporteføljene på 0.519. I denne sektoren finner vi tungvektene som Norsk Hydro og Yara. Dette er selskaper som utgjør en stor andel av markedsverdien på Oslo Børs, slik at diversifikasjonspotensialet i denne sektoren er forholdsvis lavt.

De to enkeltsektorene med høyest korrelasjon er energi- og materialesektoren (0.727), mens konsum- og forsyningssektoren er minst korrelerte (0.177). Man oppnår dermed en høyere diversifikasjonsgevinst ved kombinere selskaper fra konsum- og fornyingssektoren i en portefølje enn ved en hvilket som helst annen industrikombinasjon.

Dersom vi deler opp tidsperioden i to delperioder – tiden før og etter konkursen til Lehman Brothers, har gjennomsnittlig korrelasjon mellom industri-

porteføljene økt fra 0.323 til 0.487. Dette representerer en økning på 50%. Faktisk så har hvert eneste element i korrelasjonsmatrisen økt, slik at korrelasjonen mellom avkastningene til samtlige sektorer er høyere i tiden etter Lehman Brothers' fall. De to korrelasjonsmatrisene er gitt i tabell 7 og 8. Tidligere studier har vist at samvariasjonen mellom enkeltaksjer øker i tider med kraftig markedsnedgang (Ang & Chen, 2002). Resultatene mine viser at ikke bare øker samvariasjonen mellom de ulike sektorene i krisetider, den forblir høy også i tiden etter krisen.

Før Lehman:

GICS	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Energi (10)	1									
Materialer (15)	0,669	1								
Industri (20)	0,519	0,522	1							
Forbruksvarer (25)	0,224	0,258	0,424	1						
Konsumvarer (30)	0,254	0,246	0,322	0,154	1					
Helsevern (35)	0,232	0,247	0,279	0,244	0,168	1				
Finans (40)	0,454	0,492	0,553	0,477	0,271	0,279	1			
IT (45)	0,434	0,443	0,577	0,431	0,251	0,297	0,523	1		
Telekom (50)	0,350	0,367	0,419	0,344	0,192	0,239	0,426	0,430	1	
Forsyning (55)	0,194	0,201	0,275	0,131	0,143	0,149	0,228	0,274	0,141	1

Tabell 7: Korrelasjonsmatrisen for korrelasjonen mellom avkastningene til de ulike industriporteføljene i perioden 1.1.2002 til 14.9.2008. Gjennomsnittlig industrikorrelasjon for delperioden er 0.323.

Etter Lehman:

GICS	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Energi (10)	1									
Materialer (15)	0,784	1								
Industri (20)	0,778	0,749	1							
Forbruksvarer (25)	0,595	0,575	0,629	1						
Konsumvarer (30)	0,496	0,486	0,497	0,407	1					
Helsevern (35)	0,342	0,346	0,403	0,337	0,249	1				
Finans (40)	0,696	0,678	0,722	0,565	0,495	0,337	1			
IT (45)	0,647	0,634	0,739	0,500	0,412	0,332	0,607	1		
Telekom (50)	0,539	0,544	0,567	0,390	0,403	0,259	0,533	0,473	1	
Forsyning (55)	0,387	0,377	0,417	0,353	0,254	0,247	0,408	0,435	0,275	1

Tabell 8: Korrelasjonsmatrisen for korrelasjonen mellom avkastningene til de ulike industriporteføljene i perioden 15.9.2008 til 31.12.2011. Gjennomsnittlig industrikorrelasjon for delperioden er 0.487.

5 Sammenhengen mellom porteføljestørrelse og risiko

5.1 Porteføljerisiko

For å kvantifisere sammenhengen mellom antall aksjer i en portefølje og porteføljens risiko, anvender jeg fremgangsmåten til Evans & Archer (1968). Jeg tar utgangspunkt i daglige observasjoner fra 84 aksjer som har vært handlet på Oslo Børs i perioden 1. januar 2002 til 31. desember 2011. Av disse velger jeg tilfeldig ut n aksjer, og hver aksje vektes likt i porteføljen med faktoren $\frac{1}{n}$. Denne utvelgelsen foretar jeg 100 ganger for hvert nivå n . Utvelgelsen skjer uten tilbakelegging, slik at hver enkeltportefølje består av n ulike aksjer. Vi tenker oss at en investor følger en "buy-and-hold"-strategi der aksjene kjøpes første handelsdag i 2002, og selges siste handelsdag i 2011.

Siden porteføljene er likevektede, kunne jeg alternativt ha kvantifisert sammenhengen algebraisk i henhold til Markowitz (1959). Dette forutsetter dog at de daglige avkastningene til aksjene følger en normalfordeling, noe som i praksis har vist seg å ikke være tilfelle. Sammenhengen må derfor kvantifiseres gjennom en simuleringstilnærming.

For en portefølje i bestående av n aksjer er årlig standardavvik til de daglige porteføljeavkastningene beregnet ved:

$$\sigma_n^i = \sqrt{\sum_{t=1}^T \frac{(r_t^i - \bar{r}^i)^2}{T-1}} \cdot \sqrt{252}$$

Hvor r_t^i er porteføljens avkastning på tidspunkt t , og \bar{r}^i er porteføljens gjennomsnittlige avkastning for hele perioden. Disse er beregnet ved henholdsvis:

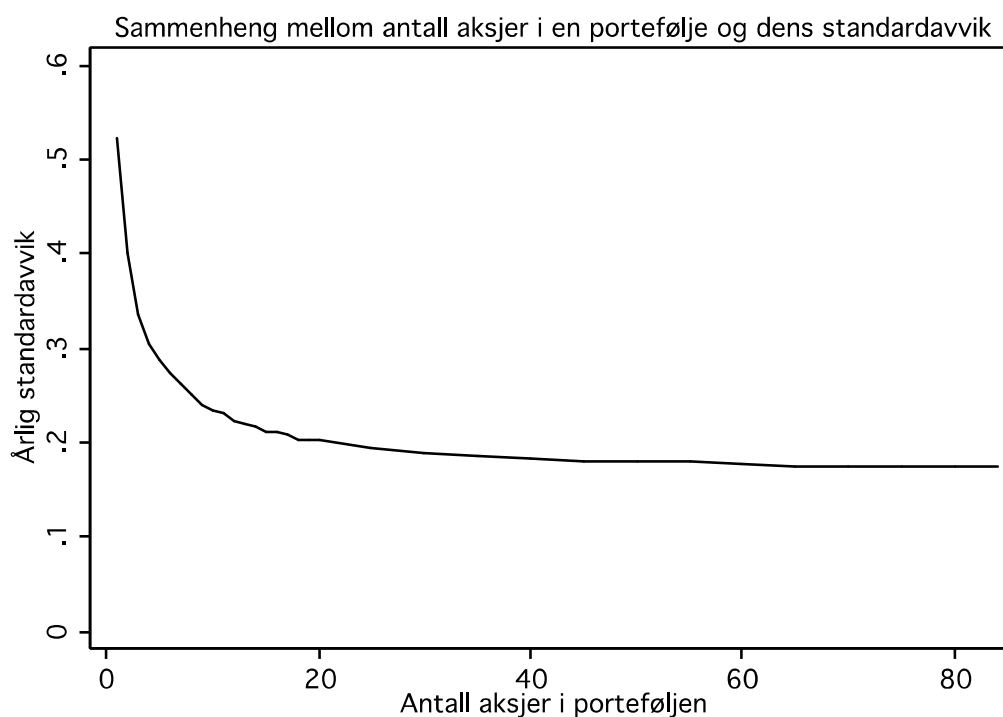
$$r_t^i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n r_t^j \quad \text{og} \quad \bar{r}^i = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T r_t^i$$

der r_t^j angir avkastningen til aksje j på tidspunkt t .

Gjennomsnittlig årlig standardavvik for 100 porteføljer bestående av n aksjer er da gitt ved:

$$\bar{\sigma}_n = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} \sigma_n^i$$

Ved å plote $\bar{\sigma}_n$ mot n får vi en kurve som samsvarer med tidligere undersøkelser (Evans & Archer, 1968; Ødegaard, 2006). Resultatet er vist i figur 11:



Figur 11: Gjennomsnittlig årlig standardavvik til de daglige avkastningene i perioden 1.1.2002 til 31.12.2011 for 100 likevektede porteføljer bestående av n tilfeldige aksjer.

Dersom vi har et lite antall aksjer i porteføljen, kan vi redusere det årlige gjennomsnittlige standardavvik kraftig ved å inkludere én ekstra aksje i porteføljen. Ved å øke porteføljestørrelsen fra 2 til 3 aksjer kan vi redusere gjennomsnittlig årlig risiko fra 40.2 % til 33.7 %. Risikoreduksjonen ved å inkludere flere aksjer i porteføljen avtar med størrelsen på den opprinnelige porteføljen. Dersom vi øker porteføljestørrelsen fra 30 til 35 aksjer, reduserer vi gjennomsnittlig årlig risiko med kun 0.4 prosentpoeng. Ved å inkludere alle 84

aksjene i porteføljen, kan vi redusere det årlige standardavviket til 17.3 %. Resultatene er oppsummert i tabell 9:

Antall aksjer	Årlig standardavvik	Reduksjon fra n=1	Ytterligere potensiale
1	0,523	0 %	100 %
2	0,402	23 %	65 %
3	0,337	36 %	47 %
4	0,306	42 %	38 %
5	0,287	45 %	32 %
10	0,234	55 %	17 %
15	0,213	59 %	11 %
20	0,202	61 %	8 %
25	0,196	63 %	6 %
30	0,190	64 %	5 %
35	0,186	64 %	4 %
40	0,184	65 %	3 %
45	0,180	66 %	2 %
50	0,181	65 %	2 %
55	0,180	66 %	2 %
60	0,176	66 %	1 %
65	0,176	66 %	1 %
70	0,174	67 %	0 %
75	0,174	67 %	0 %
80	0,174	67 %	0 %
84	0,173	67 %	0 %

Tabell 9: Gjennomsnittlig annualisert standardavvik, realisert risikoreduksjon og potensiell risikoreduksjon til de daglige avkastningene i perioden 1.1.2002 - 31.12.2011 for 100 likevektede porteføljer bestående av n ulike aksjer.

Kolonnen "Reduksjon fra $n=1$ " er beregnet ved $\frac{\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1}$, og viser prosentvis årlig risikoreduksjon ved at porteføljen inneholder n ulike aksjer sammenliknet med en investeringsstrategi der man investerer kun i én tilfeldig valgt enkeltaksje. Kolonnen "Ytterligere potensiale" er beregnet ved $\frac{\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_{84}}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_{84}}$, og representerer forholdet mellom realisert risikoreduksjon og potensiell risikoreduksjon.

Fra figur 11 kan det se ut som det gjennomsnittlige årlige standardavviket beveger seg mot en horisontal asymptote for større porteføljestørrelser. Dette innebærer at vi kan skrive sammenhengen mellom årlig standardavvik og antall aksjer i porteføljen som en funksjon :

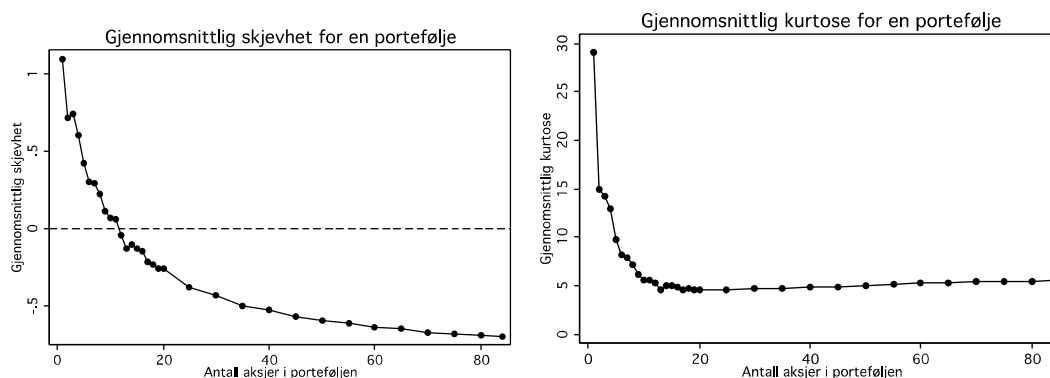
$$\bar{\sigma}_n = \beta_0 + \frac{1}{n} \cdot \beta_1$$

β_0 vil da være et estimat for den horisontale asymptoten, siden $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_n = \beta_0$. En portefølje er veldiversifisert når dens risiko er mindre eller lik β_0 . Den minste porteføljen med risiko mindre eller lik β_0 angir derfor størrelsen på en veldiversifisert portefølje.

Gjennom OLS estimeres $\bar{\beta}_0$ og $\bar{\beta}_1$ til henholdsvis 0.185 og 0.381. Modellen har en R^2 på 95% og signifikante β_i -koeffisienter. Variasjonen i porteføljestørrelsen forklarer derfor i svært høy grad variasjonen i porteføljens standardavvik. En portefølje med gjennomsnittlig årlig standardavvik lik 18.5% vil da være fri for usystematisk risiko, og denne porteføljen vil fra resultatene av simuleringen bestå av mellom 35 og 40 aksjer.

5.2 Optimal avveining mellom forventet avkastning og risiko

Reduksjonen i det årlige standardavviket ved å øke antall aksjer i porteføljen kommer med en pris. Dersom vi gransker fordelingen til de daglige porteføljeavkastningene over perioden for de ulike porteføljene med størrelse n , så ser vi at fordelingenes gjennomsnittlige skjevhet reduseres. Fordelingens tyngdepunkt flyttes fra den høyre- til den venstre halen, slik at sannsynligheten for å observere høye daglige avkastninger reduseres. På den annen side reduseres også gjennomsnittlig kurtose, slik at sannsynligheten for å observere ekstreme positive og negative avkastninger reduseres. Sammenhengen mellom gjennomsnittlig skjevhet og kurtose for ulike porteføljestørrelser er vist i figur 12.



Figur 12: Figuren til venstre viser sammenhengen mellom gjennomsnittlig skjevhet til de daglige avkastningene i perioden 1.1.2002 – 31.12.2011 for 100 likevektede porteføljer bestående av n tilfeldig valgte aksjer og antall aksjer i porteføljen. Figuren til høyre viser sammenhengen mellom gjennomsnittlig kurtose til de daglige porteføljeavkastningene og antall aksjer i porteføljen for samme periode.

For å finne optimal porteføljestørrelse må man derfor foreta en avveining mellom forventet avkastning, varians, skjevhet og kurtose. Forventet nytte er økende i forventet avkastning og skjevhet, og avtakende i varians og kurtose (Scott & Horvath, 1980).

Vi tar utgangspunkt i at en investors forventede nytte er en funksjon av porteføljens avkastning:

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[U(r_p)]$$

Fra Taylors teorem har vi at en kontinuerlig differensierbar funksjon kan estimeres lokalt som en sum av polynomer. Vi kan da skrive nyttefunksjonen som en Taylor-utvidelse av grad ∞ (Jondeau & Rockinger, 2006):

$$\mathbb{E}[U(r_p)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\bar{r}_p)(r_p - \bar{r}_p)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\bar{r}_p)}{k!} \mathbb{E}[(r_p - \bar{r}_p)^k]$$

hvor $\bar{r}_p = \mathbb{E}(r_p)$

Vi er interesserte i en nyttefunksjon som inkluderer fire momenter, og trunkerer derfor Taylor-utvidelsen ved $k=4$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(r_p)] &= U(\bar{r}_p) + U^{(1)}(\bar{r}_p)\mathbb{E}[r_p - \bar{r}_p] + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{r}_p)\mathbb{E}[(r_p - \bar{r}_p)^2] \\ &+ \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{r}_p)\mathbb{E}[(r_p - \bar{r}_p)^3] + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{r}_p)\mathbb{E}[(r_p - \bar{r}_p)^4] + O(r_p^4)\end{aligned}$$

$O(r^4)$ representerer differansen mellom den faktiske funksjonsverdien og Taylor-estimatet.

Vi definerer porteføljeavkastningenes forventningsverdi, varians, skjevhet og kurtose som:

$$\begin{aligned}\mu_p &= \mathbb{E}[r_p] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \\ \sigma_p^2 &= \mathbb{E}[(r_p - \mu_p)^2] = \mathbb{E}[(r_p - \bar{r}_p)^2] \\ s_p^3 &= \mathbb{E}[(r_p - \mu_p)^3] = \mathbb{E}[(r_p - \bar{r}_p)^3] \\ k_p^4 &= \mathbb{E}[(r_p - \mu_p)^4] = \mathbb{E}[(r_p - \bar{r}_p)^4]\end{aligned}$$

Siden $\mathbb{E}[r_p - \bar{r}_p] = 0$ og $O(r^4) \approx 0$ kan vi skrive uttrykket for den forventede nytten som:

$$\mathbb{E}[U(r_p)] \approx U(\bar{r}_p) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{r}_p)\sigma_p^2 + \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{r}_p)s_p^3 + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{r}_p)k_p^4$$

Vi antar nå at en investor har en konstant absolutt risikoaversjon, slik at nyttefunksjonen kan uttrykkes:

$$U(r_p) = -e^{-\lambda r_p}, \quad \lambda > 0$$

hvor λ angir investorens risikoaversjon. Denne nyttefunksjonen kjennetegnes ved positiv, men avtagende grensenytte, og den er kontinuerlig differensierbar.

Vi har at $U^{(n)} = -(-\lambda)^n e^{-\lambda r_p}$, og kan da skrive uttrykket for forventet nytte som:

$$\begin{aligned}
E[U(r_p)] &\approx -e^{-\lambda \bar{r}_p} - \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda \bar{r}_p} \sigma_p^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 e^{-\lambda \bar{r}_p} s_p^3 - \frac{1}{24} \lambda^4 e^{-\lambda \bar{r}_p} k_p^4 \\
&\approx -e^{-\lambda \bar{r}_p} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_p^2 - \frac{1}{6} \lambda^3 s_p^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 k_p^4 \right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

For hver av de simulerte porteføljene estimerer jeg de fire første momentene til de daglige avkastningene som (Sheskin, 2000):

$$\begin{aligned}
\bar{r}_p &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{p,t} \quad , \quad \hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{p,t} - \bar{r}_p)^2 \quad , \quad \hat{s}_p^3 = \frac{T}{(T-1)(T-2)} \sum_{t=1}^T (r_{p,t} - \bar{r}_p)^3 \quad \text{og} \\
\hat{k}_p^4 &= \frac{T(T+1)}{(T-1)(T-2)(T-3)} \sum_{t=1}^T (r_{p,t} - \bar{r}_p)^4
\end{aligned}$$

Jeg tar utgangspunkt i tre forskjellige nivåer for λ : Lav risikoaversjon er gitt ved $\lambda = 0.5$, middels risikoaversjon er gitt ved $\lambda = 1.0$ mens høy risikoaversjon er gitt ved $\lambda = 2.0$.

For et gitt nivå for risikoaversjon λ og porteføljestørrelse n beregner jeg forventet nytte fra formel (5). Dette gir meg 100 ulike nyttensnivåer, og jeg beregner forventet nytte gitt porteføljestørrelse n og risikoaversjon λ ved å ta det aritmetiske gjennomsnittet av disse nyttensnivåene.

Optimal porteføljestørrelse er den porteføljestørrelsen som gir høyest forventet nytte gitt λ . Resultatet er presentert i tabell 10, mens en oversikt over forventet nytte for de ulike porteføljestørrelsene gitt risikoaversjon λ er gitt i appendiks.

Risikoaversjon	Optimal porteføljestørrelse
0.5 (Lav)	15
1.0 (Middels)	70
2.0 (Høy)	70

Tabell 10: Optimal størrelse på en likevektet portefølje for en investor med risikoaversjon λ . Resultatene forutsetter at investoren har konstant absolutt risikoaversjon og ønsker å maksimere forventet nytte av porteføljens daglige avkastning i perioden 1.1.2002 til 31.12.2011.

For en investor med lav risikoaversjon er optimal avveining mellom de fire første momentene til en porteføljes daglige avkastninger gitt ved å inkludere 15 aksjer i porteføljen. En slik portefølje vil bestå av både systematisk- og usystematisk risiko, og vi ser fra tabell 9 at man kan redusere det årlige standardavviket med ytterligere 11 % ved å inkludere flere aksjer i porteføljen. Dette vil også medføre redusert kurtose, men da på bekostning av redusert skjevhet. Grensenytten ved å ta inn flere aksjer i porteføljen utover de opprinnelige 15 vil derimot være negativ for denne graden av risikoaversjon. For en investor med middels og høy grad av risikoaversjon er det optimalt å inkludere 70 aksjer i porteføljen. Dette er porteføljer som er veldiversifiserte, og hvor den usystematiske risikoen er eliminert.

5.3 Risiko ved investeringens sluttverdi

En langsiktig investor som har et mål for fremtidig sluttverdi skal være spesielt opptatt av "shortfall risk" – risikoen for at investeringens sluttverdi kan være lavere enn målet. Dette gjelder spesielt for personer som ønsker å spare til sin egen pensjon eller til barnas utdanning i land hvor høyere utdanning er kostbart. Jeg ønsker nå å undersøke hvor mange aksjer en portefølje må bestå av for at vi kan eliminere risikoen for at investeringen gir en lavere sluttverdi etter 10 år enn en risikofri investering.

Jeg konstruerer 100 likevektede porteføljer bestående av n ulike aksjer fra Oslo Børs. Aksjene velges tilfeldig ut fra et utvalg på 84 aksjer. Porteføljene kjøpes første handelsdag i 2002, og selges siste handelsdag i 2011. Sluttverdien per investerte krone til en portefølje i bestående av n ulike aksjer er lik den vektete summen av sluttverdiene til aksjene i porteføljen:

$$SV_n^i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n SV_j$$

der:

$$SV_j = \prod_{t=1}^T (1 + r_{j,t})$$

I januar 2002 kunne man kjøpe en tiårig norsk statsobligasjon med årlig effektiv rente på 6.24 % (V). Hver investerte krone ville da ha vokst til 1.83 kroner ved utgangen av 2011. Jeg estimerer derfor sannsynligheten for at en likevektet portefølje bestående av n tilfeldig valgte aksjer gir lavere sluttverdi enn en risikofri investering som:

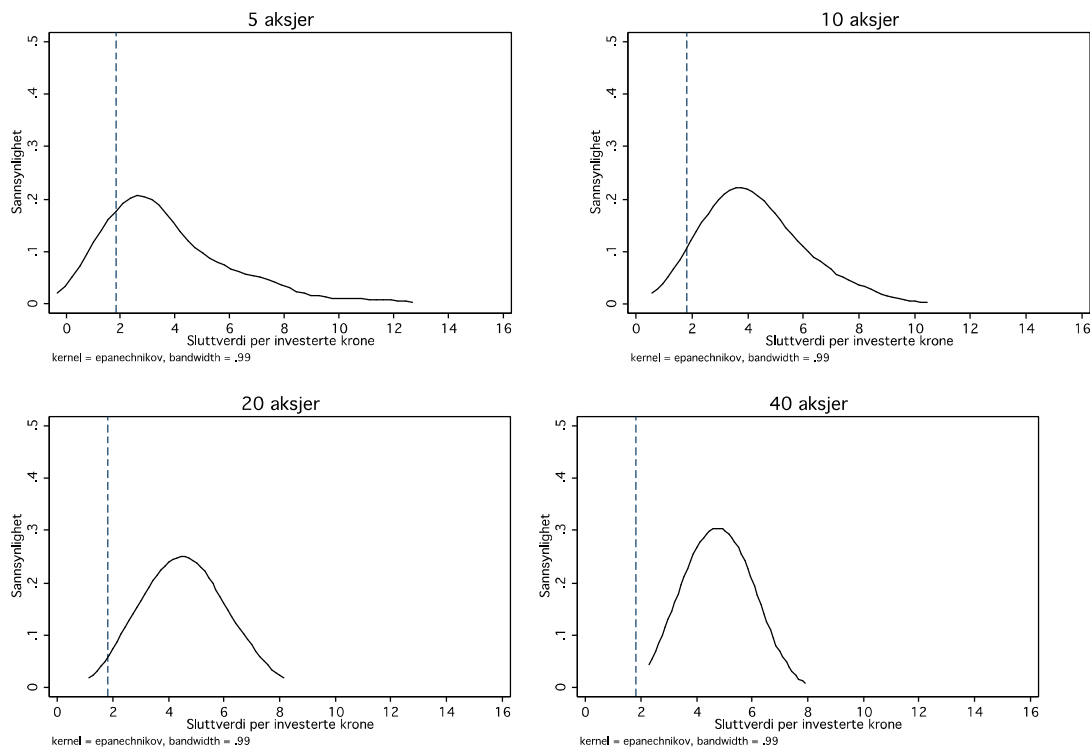
$$P(SV_n < SV_{rf}) = 1 - \frac{\text{Antall porteføljer med } SV > 1.83}{100}$$

Av de 84 enkeltaksjene er det 40 av disse som gir en sluttverdi høyere enn ved en risikofri investering. Risikoen for at man kan få en sluttverdi lavere enn 1.83 kroner per investerte krone er dermed 52 % dersom man investerer i kun én tilfeldig valgt aksje. Ved å inkludere flere aksjer i en portefølje reduseres denne risikoen. For en portefølje bestående av seks aksjer er risikoen 12 %, mens den reduseres til 4 % ved å inkludere 8 aksjer. For en portefølje bestående av 15 eller flere aksjer er denne risikoen eliminert. Resultatene er oppsummert i tabell 11.

Antall aksjer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	35	40	50	60
$P(SV_n < SV_{rf})$	0,52	0,39	0,23	0,22	0,17	0,12	0,07	0,04	0,01	0,03	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabell 11: Risiko for at en likevektet portefølje bestående av n tilfeldig valgte aksjer kan gi lavere sluttverdi etter 10 år enn en risikofri investering. Ved å inkludere 15 aksjer i porteføljen elimineres denne risikoen.

Med utgangspunkt i de simulerte sluttverdiene til porteføljene bestående av et gitt antall aksjer har jeg estimert sannsynlighetsfordelingene til disse gjennom kernel-estimering (Greene, 2007). I figur 13 er dette vist for fire porteføljestørrelser. Ved å se nærmere på de estimerte distribusjonene ser vi at forventningsverdien øker for større porteføljestørrelser. Vi ser også at mer masse overføres fra den høyre halen til fordelings sentrum, slik at standardavviket og skjevheten til sluttverdiene reduseres når vi inkluderer flere aksjer i porteføljen. Videre øker sannsynligheten for å oppnå høyere sluttverdi enn ved en risikofri plassering, mens sannsynligheten for å oppnå en svært høy sluttverdi reduseres. Det er dermed en negativ sammenheng mellom antall aksjer i porteføljen og kurtosen til porteføljenes sluttverdier.



Figur 13: Kernel-estimasjon av distribusjonen til sluttverdiene for 100 likevektede porteføljer bestående av n tilfeldig valgte aksjer. Porteføljene er kjøpt 1. januar 2002 og solgt 31. desember 2011. Den stiplede linjen angir sluttverdien til en risikofri investering.

5.4 Optimal porteføljestørrelse for en tiårig investeringshorisont

For å finne optimal avveining mellom de fire første momentene til porteføljenes sluttverdier benytter vi samme fremgangsmåte som i del 5.2. Forskjellen er at vi nå tar utgangspunkt i at en investors forventede nytte er en funksjon av porteføljens sluttverdi:

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[U(SV_p)]$$

Dersom vi forutsetter at en investor har absolutt risikoaversjon, og foretar en Taylor-utvidelse av grad fire på nyttefunksjonen $U(SV_p) = -e^{-\lambda SV_p}$, får vi følgende funksjonsuttrykk for forventet nytte for en portefølje bestående av n aksjer:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(SV_n)] &\approx -e^{-\lambda \overline{SV}_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda \overline{SV}_n} \sigma_p^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 e^{-\lambda \overline{SV}_n} s_p^3 - \frac{1}{24} \lambda^4 e^{-\lambda \overline{SV}_n} k_p^4 \\ &\approx -e^{-\lambda \overline{SV}_n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_p^2 - \frac{1}{6} \lambda^3 s_p^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 k_p^4 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

For hver porteføljestørrelse n har jeg 100 ulike sluttverdier, og de fire første momentene til sluttverdiene estimeres ved (Sheskin, 2000):

$$\begin{aligned} \overline{SV}_n &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} SV_i, \quad \hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (SV_i - \overline{SV}_n)^2, \quad \hat{s}_p^3 = \frac{100}{99 \cdot 98} \sum_{i=1}^{100} (SV_i - \overline{SV}_n)^3 \quad \text{og} \\ \hat{k}_p^4 &= \frac{100 \cdot 101}{99 \cdot 98 \cdot 97} \sum_{i=1}^{100} (SV_i - \overline{SV}_n)^4. \end{aligned}$$

Forventet nytte er beregnet ut fra formel 6, og optimal porteføljestørrelse for en investor med risikoaversjon λ er gitt i tabell 12. En oversikt over forventet nytte for de ulike porteføljestørrelsene gitt risikoaversjon λ er gitt i appendiks.

Risikoaversjon	Optimal porteføljestørrelse
0.5 (Lav)	70
1.0 (Middels)	70
2.0 (Høy)	80

Tabell 12: Optimal størrelse på en likevektet portefølje for en investor med risikoaversjon λ . Resultatene forutsetter at investoren har konstant absolutt risikoaversjon og ønsker å maksimere forventet nytte av porteføljens sluttverdi for en tiårig investeringshorisont.

En investor som er opptatt av sluttverdien på investeringen sin, bør avhengig av risikoaversjon inkludere 70 eller 80 aksjer i sin portefølje. Sammenliknet med resultatene fra del 5.2 ser vi at det for hvert nivå av risikoaversjon nå er optimalt å inkludere minst like mange aksjer i porteføljen som tidligere. Forskjellen er størst for en investor med lav risikoaversjon ($\lambda=0.50$). Mens det var optimalt å inkludere 15 aksjer i porteføljen da vi maksimerte forventet nytte av porteføljens

daglige avkastninger, er det nå optimalt å inkludere 70 aksjer når vi maksimerer forventet nytte til sluttverdiene for en tiårig investering.

Forklaringen ligger i at mens vi ikke kan eliminere standardavvikene til porteføljenes daglige avkastninger, kan vi eliminere spredningen i porteføljenes sluttverdier. Hundre porteføljer bestående av alle omsatte aksjer på Oslo Børs vil alle ha identisk sluttverdi. Vi så i del 5.1 at en veldiversifisert portefølje består av mellom 35 og 40 aksjer. Man kan dermed ikke redusere standardavvikene til de daglige porteføljeavkastningene nevneverdig ved å inkludere flere aksjer i porteføljen. Derimot vil spredningen i sluttverdiene til porteføljene reduseres ved å øke porteføljestørrelsen. Samtidig avtar gjennomsnittlig skjevhet og kurtose til fordelingene av henholdsvis de daglige avkastningene og sluttverdiene til porteføljene med tilnærmet lik hastighet. Dette innebærer at det vil være optimalt å inkludere flere aksjer i porteføljen når vi maksimerer forventet nytte med hensyn på investeringens forventede sluttverdi.

6 Oppsummering og konklusjon

I denne oppgaven har jeg for perioden 2002 til og med 2011 dekomponert den totale risikoen på Oslo Børs i henholdsvis systematisk- og usystematisk risiko. Oslo Børs ble i liket med børser verden over rammet av konkursen til den amerikanske investeringsbanken Lehman Brothers og den påfølgende finanskrisen i andre halvdel av 2008. Dette ledet til en kraftig økning i den usystematiske risikoen på Oslo Børs, og i korrelasjonen mellom enkeltaksjenes avkastninger. Den relative diversifikasjonsgevinsten – forholdet mellom usystematisk risiko og markedsrisiko – ble derimot halvert sammenliknet med tiden før finanskrisen. Diversifikasjonsgevinsten var derfor lavest da investorene trengte den som mest. Jeg har etablert at den usystematiske risikoen er en stasjonær tidsserie, slik at finanskrisen har ikke påvirket dens underliggende sannsynlighetsfordeling. Videre kunne utviklingen modelleres som en AR(1)-prosess med parameterverdi tilnærmet lik 0.8. Dette forklarer hvorfor vi så en normalisering i den usystematiske risikoen først i juni 2009.

Gjennomsnittlig usystematisk industririsiko for perioden som helhet var størst i helsevern- og IT-sektoren. I disse sektorene ble man derfor i større grad belønnet for å diversifisere internt i sektoren sammenliknet med andre sektorer. For å se på hvilke sektorer som hadde størst potensiale for ytterligere diversifikasjon, beregnet jeg korrelasjonen mellom avkastningene til de ulike industriporteføljene. Også her skilte helsevernsektoren seg ut. Den gjennomsnittlige industrikorrelasjonen var lavest i denne sektoren, og den hadde derfor størst diversifikasjonspotensiale av de ulike sektorene.

Ved å dele opp tidsperioden i to delperioder, viste jeg at samtlige korrelasjonskoeffisienter mellom avkastningene til de ulike industriporteføljene hadde økt i tiden etter konkursen til Lehman Brothers sammenliknet med tiden før. Dette innebar at diversifikasjonspotensialet for Oslo Børs som helhet ble redusert i tiden etter finanskrisen.

For å se hvor mange aksjer en veldiversifisert likevektet portefølje måtte bestå av, simulerte jeg ulike porteføljer bestående av et gitt antall aksjer. For en gitt porteføljestørrelse n beregnet jeg gjennomsnittlig standardavvik til porteføljenes avkastninger, og konkluderte med at en veldiversifisert likevektet portefølje måtte bestå av mellom 35 og 40 tilfeldig valgte enkeltaksjer. Man oppnådde ingen nevneverdig reduksjon i porteføljens standardavvik ved å inkludere flere aksjer i porteføljen enn dette. Vi så at også kurtosen og skjevheten til porteføljenes avkastninger avtok med økt porteføljestørrelse. For å ta hensyn til dette, benyttet jeg en nyttefunksjon bestående av fire momenter for å estimere forventet nytte av en portefølje bestående av n ulike aksjer. En investor med lav risikoaversjon oppnådde høyest forventet nytte ved å inkludere 15 aksjer i en likevektet portefølje, mens det var optimalt å inkludere 70 aksjer i porteføljen for en investor med middels- eller høy risikoaversjon

Dersom vi definerte risiko som sannsynligheten for at en investering over en tiårig investeringshorisont ville gi lavere sluttverdi enn en risikofri investering, kunne denne risikoen elimineres ved å inkludere 15 aksjer i porteføljen. Spredningen i sluttverdiene avtok med antall aksjer i porteføljen, og en optimal portefølje bestod i dette tilfellet av 70 eller 80 aksjer. Hvordan vi definerte risiko hadde derfor betydning for resultatet av optimeringsprosessen.

Fremtidige studier kan estimere den usystematiske risikoen på Oslo Børs ved å bruke CAPM eller en flerfaktormodell. Det kan også være interessant å undersøke sammenhengen mellom den usystematiske risikoen i porteføljer konstruert på bakgrunn av ulike bedriftskarakteristika. Disse kan for eksempel være selskapenes "book-to-market", "price/earnings" eller markedsverdier. I denne oppgaven har jeg kvantifisert sammenhengen mellom porteføljerisiko og antall aksjer i porteføljen for likevektede porteføljer, og vi så at vi nådde en asymptote ved å inkludere 35 til 40 aksjer i porteføljen. Studier på andre aksjemarkeder har vist at dersom porteføljene var verdivektete, måtte man ha inkludert flere aksjer i porteføljen for å nå asymptoten. Det kan derfor være av interesse å undersøke om dette også gjelder på Oslo Børs.

7 Referanser

- . (I). Retrieved 15.01, 2012, from
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1990/
- . (II). Retrieved 15.02, 2012, from
<http://www.oslobors.no/markedsaktivitet/stockIndexOverview?newticker=OSEAX>
- . (III). Retrieved 13.02, 2012, from
<http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/regpubl/stprp/2008-2009/stprp-nr-5-2008-2009-.html?id=532771>
- . (IV). Retrieved 07.05, 2012, from
<http://www.msci.com/products/indices/sector/gics/>
- . (V). Retrieved 20.03, 2012, from
<http://www.norges-bank.no/no/prisstabilitet/rentestatistikk/>
- Ang, A., & Chen, J. (2002). Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63(3), 443–494.
- Baur, D. G., & Lucey, B. M. (2010). Is gold a hedge or a safe haven? An analysis of stocks, bonds and gold. *The Financial Review*, 45, 217–229.
- Beine, M., Cosma, A., & Vermeulen, R. (2010). The dark side of global integration: Increasing tail dependence. *Journal of Banking & Finance*, 34(1), 184–192.
- Berk, J., & DeMarzo, P. (2011). *Corporate Finance* (2nd ed.): Pearson Education Limited.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2009). *Investments* (8th ed.): McGraw Hill Higher Education.
- Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*: Holden-Day.
- Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance* (2nd ed.): Cambridge University Press.
- Campbell, J. Y., Lettau, M., Malkiel, B. G., & Xu, Y. (2001). Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic Risk. *Journal of Finance*, 56, 1-43.

- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1981). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057-1072.
- Domian, D. L., Louton, D. A., & Racine, M. D. (2007). Diversification in Portfolios of Individual Stocks: 100 Stocks Are Not Enough. *The Financial Review*, 42, 557-570.
- Elton, E. J., & Gruber, M. J. (1977). Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution. *The Journal of Business*, 50(4), 415-437.
- Evans, J. L., & Archer, S. H. (1968). Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. *The Journal of Finance*, 23(5), 761-767.
- Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383-417.
- Fisher, L., & Lorie, J. H. (1970). Some Studies of Variability of Returns on Investments in Common Stocks. *The Journal of Business*, 43(2), 99-134.
- Greene, W. H. (2007). *Econometric Analysis* (6th ed.): Prentice Hall.
- Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3), 381-408.
- Jennings, E. H. (1971). An Empirical Analysis of Some Aspects of Common Stock Diversification. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6(2), 797-813.
- Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments. *European Financial Management*, 12(1), 29-55.
- Kearney, C., & Poti, V. (2007). Have European Stocks Become More Volatile? An Empirical Investigation of Idiosyncratic and Market Risk in the Euro Area. *European Financial Management*, 14(3), 419-444.
- Kritzman, M., Lowry, K., & Van Royen, A. S. (2001). Risk, Regimes, and Overconfidence. *Journal of Derivatives*, 8(3), 32-43.
- Levy, H., & Levy, M. (2009). The safety first expected utility model: Experimental evidence and economic implications. *Journal of Banking & Finance*, 33(8), 1494-1506.
- Longin, F., & Solnik, B. (2001). Extreme Correlation of International Equity Markets. *Journal of Finance*, 56(2), 649-676.
- Lukas, R. E., Jr. (1978). Asset Prices in an Exchange Economy. *Econometrica*, 46(6), 1429-1445.

- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*: New York: John Wiley & Sons.
- Murphy, J. A. (1991). Evaluating Diversification Adequacy with Different Asset Risk Estimates. *New York Economic Review*, 21, 50-55.
- Newbould, G. D., & Poon, P. S. (1993). The Minimum Number of Stocks Needed For Diversification. *Financial Practice and Education*, 3, 85-87.
- Scott, R. C., & Horvath, P. A. (1980). On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance. *The Journal of Finance*, 35(4), 915-919.
- Sheskin, D. J. (2000). *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures* (2nd ed.): Chapman and Hall/CRC.
- Statman, M. (1987). How Many Stocks Make a Diversified Portfolio? *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 353-363.
- Statman, M. (2004). The Diversification Puzzle. *Financial Analysts Journal*, 60(4), 44-53.
- Upton, R. B., Jessup, P. F., & Matsumoto, K. (1975). Portfolio Diversification Strategies. *Financial Analysts Journal*, 31, 86-88.
- Wang, P. (2008). *Financial Econometrics* (2nd ed.): Routledge.
- Xu, Y., & Malkiel, B. G. (2003). Investigating the Behavior of Idiosyncratic Volatility. *Journal of Business*, 76(4), 613-644.
- Ødegaard, B. A. (2006). Hvor mange aksjer skal til for å ha en veldiversifisert portefølje på Oslo Børs? *Praktisk Økonomi og Finans*, 1.

8 Appendiks

8.1 Selskapsoversikt

Selskap	GICS
Bonheur	10
DOF	10
Farstad Shipping	10
Fred. Olsen Energy	10
Ganger Rolf	10
Golar LNG	10
Petroleum Geo-Services	10
Petrolia	10
Prosafe	10
Solstad Offshore	10
Subsea 7	10
TGS-NOPEC Geophysical Company	10
DNO International	10
Norse Energy Corp.	10
Rocksource	10
Statoil	10
Frontline	10
GC Rieber Shipping	10
I.M. Skaugen	10
SinOceanic Shipping	10
Aker Solutions	10
Seadrill	10

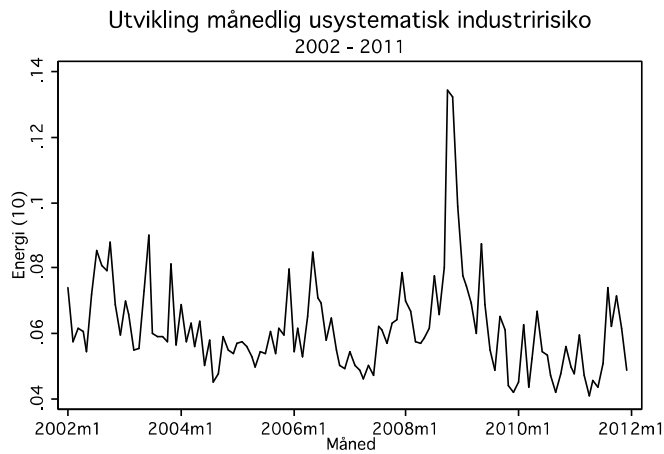
Norsk Hydro	15
Scana Industrier	15
Norske Skogindustrier	15
Byggma	15
Yara International	15
Tide	20
Belships	20
Eitzen Maritime Services	20
Green Reefers	20
Jinhui Shipping and Transportation	20
Namsos Trafikkselskap	20
Norwegian Car Carriers	20
Odfjell ser. A	20
Odfjell ser. B	20
Solvang	20
Star Reefers Inc.	20
Stolt-Nielsen	20
TTS Group	20
Wilh. Wilhelmsen Holding ser. A	20
Wilh. Wilhelmsen Holding ser. B	20
Goodtech	20
Kongsberg Gruppen	20
Kverneland	20
Tomra Systems	20
Hexagon Composites	20
Orkla	20
AF Gruppen	20
Veidekke	20

Gyldendal	25
Schibsted	25
Ekornes	25
Royal Caribbean Cruises	25
Domstein	30
Marine Harvest	30
Rieber & Søn	30
Cermaq	30
Contextvision	35
Bionor Pharma	35
ORIGIO	35
Photocure	35
Aker BioMarine	35
Algeta	35
Clavis Pharma	35
Pronova BioPharma	35
Olav Thon Eiendomsselskap	40
Storebrand	40
Borgestad	40
ABG Sundal Collier Holding	40
Acta Holding	40
Aktiv Kapital	40
Skiens Aktiemølle	40
DNB	40
SpareBank 1 SR-Bank	40
Voss Veksel- og Landmandsbank	40
Aker	40
Gjensidige Forsikring	40

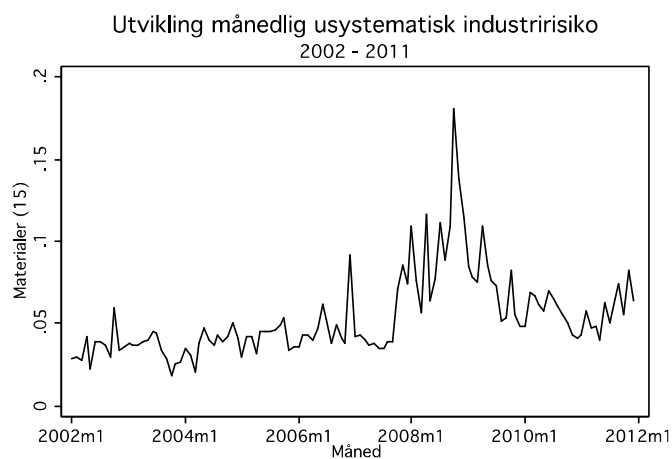
Nordic Semiconductor	45
Blom	45
Atea	45
Data Respons	45
EDB ErgoGroup	45
Inmeta Crayon	45
Itera	45
PSI Group	45
Komplett	45
Eltek	45
Kitron	45
Renewable Energy Corporation	45
Opera	45
Telenor	50
Arendals Fossekompani	55
Hafslund ser. A	55
Hafslund ser. B	55

8.2 Usystematisk risiko i ulike sektorer

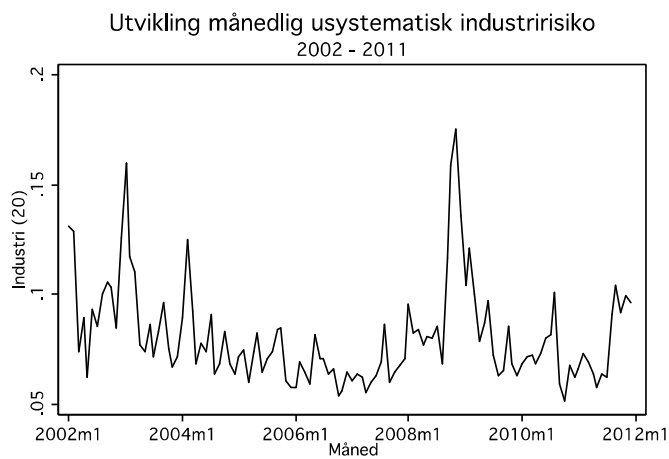
10 – Energi



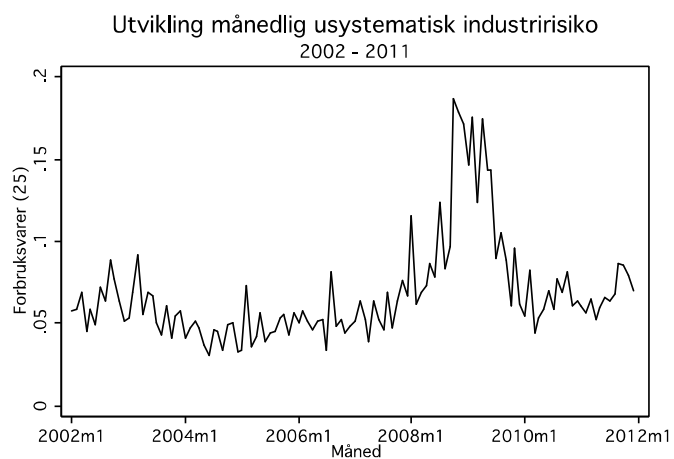
15 – Materialer



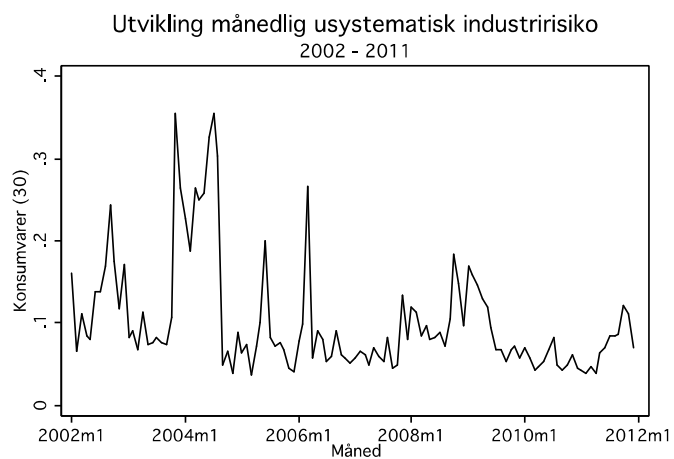
20 – Industri



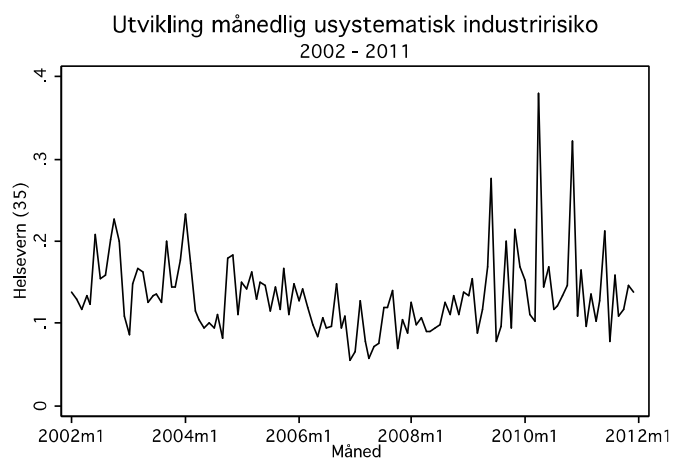
25 – Forbruksvarer



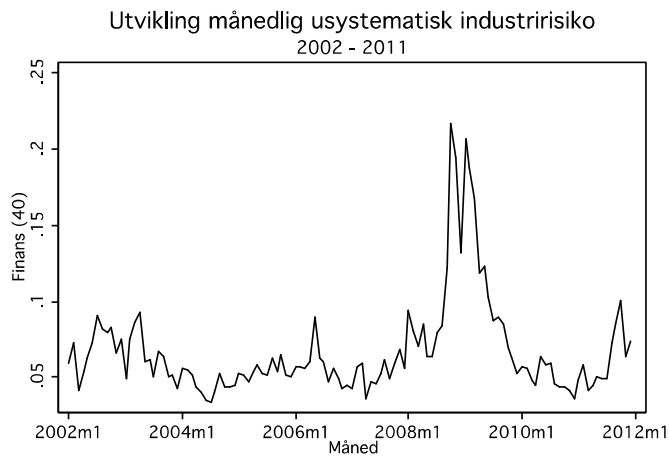
30 – Konsumvarer



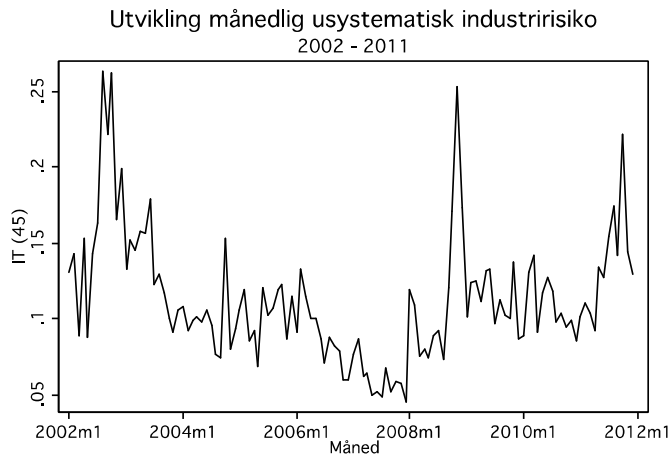
35 – Helsevern



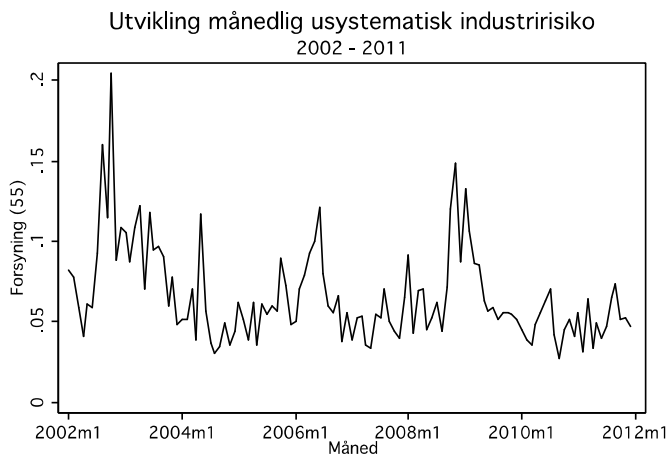
40 – Finans



45 – IT



45 – Forsyning



8.3 Forventet nytte av porteføljenes daglige avkastninger

		Antall aksjer															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$E[U(R)]$	$\lambda=0.5$	-0,9998247	-0,9997796	-0,9997407	-0,9997358	-0,9997361	-0,9997046	-0,9997088	-0,9997051	-0,9997004	-0,9997079	-0,9997032	-0,9997075	-0,9997	-0,9996888	-0,9996805	-0,9996901
	$\lambda=1.0$	-0,9999503	-0,9997303	-0,9995982	-0,9995665	-0,9995558	-0,9994851	-0,9994867	-0,9994742	-0,9994582	-0,9994709	-0,9994596	-0,9994654	-0,9994486	-0,9994246	-0,9994065	-0,9994251
	$\lambda=2.0$	-1,0011148	-1,0001405	-0,9996608	-0,9995103	-0,9994446	-0,9992727	-0,999249	-0,9992039	-0,9991456	-0,9991623	-0,999132	-0,9991323	-0,9990913	-0,9990374	-0,9989947	-0,9990302
		17	18	19	20	25	30	35	40								
	$\lambda=0.5$	-0,9996995	-0,9997033	-0,9996991	-0,9996954	-0,9996881	-0,9996939	-0,9996898	-0,9996856	-0,9996995	-0,9994476	-0,9994392	-0,9994318	-0,9994146	-0,9994238	-0,9994143	-0,9994052
	$\lambda=1.0$	-0,9994428	-0,9994476	-0,9994392	-0,9994318	-0,9994146	-0,9994238	-0,9994143	-0,9994052	-0,9990609	-0,9990596	-0,9990424	-0,9990279	-0,9989828	-0,9989918	-0,9989677	-0,9989467
	$\lambda=2.0$																
		45	50	55	60	65	70	75	80								
	$\lambda=0.5$	-0,9996899	-0,9996902	-0,9996897	-0,9996908	-0,999688	-0,9996858	-0,9996892	-0,9996876	-0,9994123	-0,999413	-0,9994118	-0,9994126	-0,9994069	-0,999402	-0,9994088	-0,9994054
	$\lambda=1.0$	-0,9989547	-0,9989567	-0,9989533	-0,9989497	-0,9989377	-0,9989259	-0,9989397	-0,9989323								
	$\lambda=2.0$																

8.4 Forventet nytte av porteføljenes sluttverdier

		Antall aksjer															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$E[U(R)]$	$\lambda=0.5$	-0,5681992	-0,4690437	-0,2916614	-0,3150147	-0,2516515	-0,2292037	-0,1852666	-0,1660964	-0,148478	-0,1563574	-0,1484976	-0,1458692	-0,1358386	-0,1202449	-0,1080967	-0,1167019
	$\lambda=1.0$	-0,9410201	-0,6709883	-0,2161261	-0,310894	-0,1464228	-0,1628677	-0,077301	-0,0488082	-0,0348802	-0,0383803	-0,036217	-0,0295871	-0,0269391	-0,0216834	-0,016843	-0,0186127
	$\lambda=2.0$	-0,9805679	-0,4358742	-0,0763158	-0,1044596	-0,0413741	-0,0286951	-0,0124246	-0,0054557	-0,0026229	-0,0034765	-0,0034064	-0,001925	-0,0017185	-0,0010376	-0,0006105	-0,0008387
		17	18	19	20	25	30	35	40								
	$\lambda=0.5$	-0,1291985	-0,1310061	-0,1240498	-0,1207225	-0,1063205	-0,1112171	-0,1040084	-0,0979672	-0,0227618	-0,0223979	-0,0194548	-0,0191959	-0,0139236	-0,0146032	-0,0123238	-0,0107495
	$\lambda=1.0$	-0,0011982	-0,0010908	-0,0007765	-0,0007082	-0,0003658	-0,0003513	-0,0002342	-0,0001707								
	$\lambda=2.0$									45	50	55	60	65	70	75	80
	$\lambda=0.5$	-0,1013364	-0,1010817	-0,1002066	-0,1000934	-0,0964709	-0,0934116	-0,0970819	-0,0948882								
	$\lambda=1.0$	-0,0111905	-0,0108953	-0,0106496	-0,010399	-0,0095881	-0,0089364	-0,0095382	-0,0090539								
	$\lambda=2.0$	-0,0001726	-0,0001507	-0,0001407	-0,000124	-0,0001029	-8,742E-05	-9,525E-05	-8,379E-05								